109

ZASADY

MATEMATYCZNE

MUZYKI.

TEGOŻ AUTORA

WYDANE ZOSTAŁO NASTĘPUJĄCE DZIEŁO:

Nowy rachunek funkcyi granicznych i jego zastosowanie z 1 tablicą figur. Warszawa 1865 r. w 8-ce str. XXIV. 268.

Inw.

kat

ZASADY
MATEMATYCZNE
MUZYKI.

PRZEZ
WŁADYSŁAWA WITKOWSKIEGO,
INŻENIERA.

z 3-ma tablicami.

WARSZAWA.
NAKŁADEM AUTORA.
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA.
Krakowskie Przedmieście, 15.

1887.

Дозволено Цензурою.

Варшава, 2 Февраля 1887 г.

W drukarni Noskowskiego, ulica Mazowiecka Nr. 11.

SPIS PRZEDMIOTÓW.

Str.

Sprostowanie omyłek VI

Przedmowa. VII

Wiadomości z matematyki potrzebne do zrozumienia zasad matematycznych muzyki 1

Zasady Matematyczne Muzyki

§ 1. Zasady ogólne muzyki 7

§ 2. Prawa melodyi 36

§ 3. Prawa harmonii 46

§ 4. Ogólne uwagi 56

Przypisek 1-szy. O kommie muzycznej 65

Przypisek 2-gi. Rozwinięcie ułamku $\frac{l2}{l3 - l2}$ na ułamek ciągły i oznaczenie jego reduktów 68

Przypisek 3-ci. Oznaczenie prawdziwych i przybliżonych stosunków wyrażających części tonu 72

Przypisek 4-ty. Oznaczenie własności szeregu kwint i przybliżonych wartości ich stosunków wyrażonych w reduktach 74

Przypisek 5-ty. Oznaczenie różnych podziałów duosono i wyprowadzenie z nich systemu tonów muzycznych 81

Przypisek 6-ty. O rozciągu i zawartości szeregów muzycznych . . 85

Przypisek 7-my. Oznaczenie granic w jakich zmieniają się interwale, gdy zmieniamy ton fundamentalny gammy 86

Przypisek 8-my. O temperamencie muzycznym 95

SPROSTOWANIE OMYŁEK.

Str.	*wiersz*	*zamiast:*	*czytaj:*
1	7	tem	tym
—	11, 19, 22	mnożemy	mnożymy
2	21	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{7}{5}$	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{7}{5}$
3	21	$<$	$>$
4	23, 35	pomnożemy, założemy	pomnożymy, założymy
5	26	a_1	$a,$
6	6	$\frac{r}{2}$	$-\frac{r}{2}$
8	14	ton muzyczny	tonem muzycznym
—	23	ton niski lub wysoki	tonem niskim lub wysokim
12	16	$\lambda 2$	λ^2
—	22	ton który	ton, którego
13	29	*n* tę	*n* ty
14	8	tron	ton
15	32	2 3	2, 3
16	8	—4,—3,—2,—2,—0, 1, 2,	—4,—3,—2,—1, 0, 1, 2,
19	15	$\frac{17}{13}$	$\frac{17}{12}$
—	22	potem wierszu dodać:	gdzie komma jest ułomek $\frac{18}{17}$
23	27, 33	0, 2, 4, — 1, 3, 5,	0, 2, 4, — 1, 1, 3, 5,
24	22	zniżonych co oznaczemy	zniżone, co oznaczymy
25	5	Kw,	Kn,
27	19	sammą	samą
28	15	$\frac{47}{12}$	$\frac{17}{12}$
—	29	Kw, Kr,	Kr, Kn,
29	11, 30	Kw	Kr
32	28	po wyrazie: fundamentalnemu; dodać:	zmienić na inny
33	11, 25	oznaczemy	oznaczymy
—	28	$a,$	a_1
41	24	od punktu dodać:	Gammy te wszystkie nie przechodzą rozciągu 12 i zawartości 78 gammy chromatycznej.
46	8	nie przedstawia jak tylko	przedstawia tylko
46	32	$x-8$	$x+8$
47	13, 14	septymowe, nonowe i t. p.	septymowemi, nonowemi i t. d.
—	33	tożsame	tez same
80	22	w drugiej kolumnie pionowej: $\frac{75}{74}$	$\frac{148}{75}$

PRZEDMOWA.

W tej krótkiej przedmowie uważamy sobie za obowiązek wytłomaczyć się z ogólnego układu niniejszéj pracy.

Uważając każdy związek tonów muzycznych, jako szereg tychże posiadający pewne własności, i łącząc teoryą najprostszych szeregów: jakiemi są postępy geometryczne i arytmetyczne z teoryą zgodności, a bliżej redukcyi szeregów według danego modułu; udało nam się znaleźć wiele nowych własności związków muzycznych, rozklasyfikować gammy i akorda, odnaleść nowe rodzaje gamm i akordów i rozwiązać ostatecznie pytanie, na czem rzeczywiście polega melodya i harmonia muzyki.

Całą tę pracę podzieliliśmy na cztery części: w pierwszej podane zostały prawa akustyczne, jako podstawowe muzyki; w drugiej zastosowanie tych praw do melodyi, jest to teorya gamm i ich podział na rodzaje i gatunki; w trzeciej zastosowanie do harmonii, jest to teorya akordów i ich klassyfikacya naturalna; w ostatniej nakoniec ogólne uwagi porównawcze naszej teoryi z dziś znanemi prawami muzyki, otrzymanemi ná drodze empirycznej.

Aby zaś nieobciążać zbytnie rachunkami samego tekstu, potrzebne obliczenia zostały pomieszczone w osobnych przypiskach, gdzie ciekawy czytelnik znajdzie wszystkie dowody wymagające głębszych rachunków. Dla rozszerzania zaś koła czytelników naszych, wiadomości z matematyki, nieodbicie potrzebne do zrozumienia naszej teoryi podajemy poniżej.

Lublin, dnia 10 Lutego 1883 roku.

Władysław Witkowski.

Uprasza się czytelników o sprostowanie błędów, jakie się wcisnęły, a które zamieszczone zostały na stronicy VI.

WIADOMOŚCI Z MATEMATYKI

POTRZEBNE DO ZROZUMIENIA NASZEJ TEORYI.

Ażeby rozszerzyć koło naszych czytelników i zrobić przystępnem nawet osobom mało obeznanym z zasadami matematyki, na których została oparta nasza teorya, wszystkie wywody matematyczne wyrzuciliśmy do przypisków, do których odsyłamy czytelnika chcącego poznać bliżej te wywody, a tu zamieszczamy w tem wstępnym artykule wiadomości, jakie nieodbycie potrzebne dla zrozumienia niniejszej teoryi, wyłożone jak można najprzystępniej, zakładając z góry, że cztery działania arytmetyczne są znane czytelnikom.

1. Potęga. Gdy ilość jaką mnożemy przez siebie kilka razy, iloczyn ztąd powstały nazywa się *potęgą*, ilość tak powtórzona skraca się, pisząc liczbę wyrażającą ilość tych powtórzeń nad tą liczbą np. 3×3 piszemy 3^2, podobnie $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$, liczba położona nad drugą nazywa się *wykładnikiem potęgi*, a sama ta liczba po wykonaniu działania mnożenia, nazywa się potęgą. Wartość tej potęgi łatwo się otrzymuje, mnożąc przez siebie liczbę daną tyle razy, ile zawiera jedności wykładnik.

Jeżeli mnożemy przez siebie czyli podnosimy do potęg ułamek właściwy np. $\frac{2}{3}$, który nie zawiera w sobie całości, czyli którego licznik mniejszy od mianownika, wartość tych potęg maleje i potęgi są coraz mniejsze i zawarte między 1 i 0. Jeżeli zaś mnożemy przez siebie ułamek niewłaściwy np. $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, którego licznik większy od mianownika, to wartość tych potęg rośnie gdyż licznik prędzéj rośnie jak mianownik; a że potęga 0 z każdej ilości jest zawsze równa 1 np. $(\frac{3}{2})^0 = 1$; zatem te potęgi rosną od 1 do nieskończoności i mogą wyrażać wszystkie liczby zaczynając od 1; jednakże te potęgi nie są nigdy liczbami całkowitemi, lecz niektóre z nich mogą zbliżać się bardzo do liczb całych.

2. Ułamki ciągłe służą do oznaczenia przybliżonej wartości ułamków lub liczb nie wymiernych wyrażonych przez wielką liczbę cyfr. Otrzymują się przez dzielenie liczby większej przez mniejszą następnie każdej reszty poprzedniej przez resztę ostatnią.

I tak np. ułamek $\frac{729}{512}$ daje dzieląc przez 512, $1+\frac{217}{512}$, dzieląc znowu ostatni ułamek przez licznik 217, będzie:

$$1+\frac{217}{512}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{78}{217}}$$

dzieląc znowu przez 78 będzie:

$$1+\cfrac{1}{2\times\cfrac{78}{217}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{61}{78}}}$$

a dzieląc jeszcze przez 61 i tak następnie będzie:

$$\frac{729}{512}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}}}}}.$$

Ponieważ w tych ułamkach ciągłych liczniki są zawsze jedności; przeto można je przedstawić pisząc tylko mianowniki tak:

$$\frac{729}{512}=(1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3)$$

Nie wchodząc w teoryą ułamków ciągłych, podamy tu sposób obliczenia reduktów ułamku ciągłego.

Jeżeli w ułamku ciągłym powyższym opuścimy końcowe ułamki a zostawimy początkowe, to otrzymamy ułamki coraz więcej zbliżone do prawdziwej wartości danego ułamku, im mniej ułamków opuścimy; zatem jak w poprzednim przykładzie pierwszy ułamek przybliżony będzie $\frac{1}{1}$, następny $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, dalej $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{7}{5}$; ułamki tak otrzymane mają tę własność, że są ze wszystkich ułamków najbliższe wartości danej i wyrażone w najprostszej postaci, zowią się *reduktami* i otrzymują się zaś tak: wypisują się mianowniki ułamku ciągłego i obliczają dwa pierwsze redukta, następne otrzymują się mnożąc licznik i mianownik ostatniego reduktu przez mianownik następny ułamku ciągłego i dodając licznik i mianownik poprzedniego reduktu. I tak w powyższym przykładzie będzie:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 2, & 1, & 3, & 1, & 1, & 2, & 3 \\ \frac{1}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{7}{5}, & \frac{10}{7}, & \frac{37}{26}, & \frac{47}{33}, & \frac{84}{59}, & \frac{215}{151}, & \frac{729}{512} \end{array}$$

i to są *redukta główne*, lecz znajdują się jeszcze *redukta pośrednie;* tam, gdzie mianowniki ułamku ciągłego są większe od jedności, tam możemy brać do tworzenia nowych reduktów liczby mniejsze od mianowników i takie redukta zowią się pośrednie i tak będziemy mieli jeszcze:

$$\begin{array}{cccccc} 1. & 2, & 2, & 1, & 3 & \ldots. \\ \frac{1}{1}. & \frac{3}{2}, & \frac{7}{5}, & \frac{10}{17}, & \frac{37}{26} & \\ & & \frac{4}{3}, & & \frac{27}{19} & \\ & & & & \frac{17}{12} & \end{array}$$

przy mianowniku 2 mamy dwa redukta; jeden główny powstały z 2, drugi pośredni powstały z 1, przy mianowniku 3 mamy dwa pośrednie powstałe z 1 i 2.

Wszystkie te redukta mają tę własność, że na przemian są jedne większe od prawdziwej wartości ułamku danego, drugie mniejsze i tak:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1}, & \frac{7}{5}, & \frac{37}{26}, & \frac{84}{59} \ldots. & < & \frac{729}{512} \\ & \frac{4}{3}, & \frac{27}{19}, & & & \\ & & \frac{17}{12} & & & \\ \frac{3}{2}, & \frac{10}{7}, & \frac{47}{33} & \ldots. & < & \frac{729}{512} \end{array}$$

Ta to teorya ułamków ciągłych, która wielce użyteczną okazała się w oznaczeniu przybliżonych wartości np. okręgu koła do średnicy, stosunku roku gwiazdowego do słonecznego i t. d., okazała się i w naszej teoryi znakomitą i jedyną podstawą.

3. Szeregi (postępy). *) Szereg liczb tak wzięty, że każdy następny, równa się poprzedniemu pomnożonemu przez stałą ilość nazywa się *postępem geometrycznym* lub *szeregiem geometrycznym;* a liczba stała która służy do tworzenia szeregu nazywa się *stosunkiem* postępu lub szeregu.

*) Postępy są przypadkiem szczególnym szeregów w ogólności, a że lepiej brzmi szereg tonów jak postęp tonów, przeto w naszej teoryi postępy będziemy nazywać szeregami.

Ponieważ dwa wyrazy przy sobie stojące w szeregu, dają zawsze iloraz równy stosunkowi, przeto jeszcze te postępy nazywają się *ilorazowemi* i tak z liczby 1 przy stosunku 2, utworzemy postęp ilorazowy, który oznaczemy tak ($\div\!\!\div 1^2$) a po rozwinięciu będzie:

$$(\div\!\!\div 1^2) = 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32, \ldots\ldots$$

pierwsza liczba zowie się *podstawą* szeregu; tak że mając tę podstawę i stosunek łatwo mnożąc stosunek przez podstawę otrzymamy drugi wyraz, a ten znowu mnożony przez stosunek da trzeci wyraz i t. n., tak że oznaczając ogólnie podstawę przez a a stosunek przez q szereg daje się tak wyrazić:

$$(\div\!\!\div a^q) = a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \ldots\ldots$$

pamiętając o tem cośmy powiedzieli o potęgach, to jest: wyrażając iloczyny różne z q, przez potęgi.

Szereg znowu liczb tak wziętych, że każdy następny jest równy poprzedzającemu powiększonemu ilością stałą nazywa się *postępem* lub *szeregiem arytmetycznym*, a liczba stała zowie się *stosunkiem* postępu.

Ponieważ dwa wyrazy następne dają zawsze różnicę stałą i równą stosunkowi postępu, przeto jeszcze te postępy, lub szeregi nazywają się *różnicowemi;* pierwszy wyraz nazywa się *podstawą* szeregu i taki szereg można oznaczyć przez podstawę i stosunek, i tak jeżeli podstawą jest b a stosunkiem r, szereg oznaczamy przez $(\div b^r)$ a rozwijając go będzie:

$$(\div b^r) = b,\ b + r,\ b + 2r,\ b + 3r \ldots\ldots$$

Jeżeli w powyższych dwóch szeregach założemy $a = 1$, $b = 0$ *i* $r = 1$ otrzymamy dwa szeregi sobie odpowiednie:

$$(\div\!\!\div 1^q) = q^0,\ q^1,\ q^2,\ q^3 \ldots\ldots$$

$$(\div 0^1) = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots$$

i te dwa szeregi mają tę własność, że drugi obejmuje ściśle wykładniki wyrazów pierwszego szeregu i stanowi to co w matematyce nazywamy *logarytmami* wyrazów szeregu pierwszego.

Te dwa szeregi mają tę własność, że wszelkie działania: mnożenie, dzielenie, potęgowanie i wyciąganie pierwiastków, wykonane na wyrazach pierwszego szeregu wymagają tylko dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia na odpowiednich wyrazach drugiego szeregu. Tak że szereg pierwszy może być zastąpiony przez szereg drugi.

I tak, jeżeli pomnożemy przez siebie dwa wyrazy pierwszego szeregu np.

$$q^3 \times q^4 = q^{3+4} = q^7, \qquad 3 + 4 = 7,$$

to wyrazy odpowiednie drugiego szeregu dodają się i q^7 ma odpowiedni wyraz 7 w drugim szeregu. Podobnie gdy dzielimy np.

$$\frac{q^4}{q} = q^{4-1} = q^3$$
$$4 - 1 = 3$$

i q^3 odpowiada wyrazowi 3 w drugim szeregu. Gdy bierzemy iloczyn pewnej liczby wyrazów szeregu pierwszego, dosyć jest dodać im odpowiednie wyrazy szeregu drugiego np.

$$q^0 \cdot q^1 \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot q^4 = q^{(0+1+2+3+4)} = q^{10}$$
$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

4. Zgodność i redukcya. Jeżeli liczba a większa od r jest niepodzielną bez reszty przez r, wtedy dzieląc a przez r otrzymamy resztę b, i mówi się że a jest zgodne z b według ilości r i ta ilość zowie się *modułem zgodności* i piszemy:

$$a \equiv b \text{ mod. } r$$

znak $\equiv$ jest znakiem zgodności dwóch ilości a i b według modułu r.

Ilość b jest zawsze mniejsza od r i zawartą zawsze będzie między 0 i r, jeżeli bierzemy ją dodatną; jeżeli bierzemy ją za dodatną i odjemną wtedy r jest zawarte między $-\frac{r}{2}$ i $+\frac{r}{2}$.

Zgodność prowadzi do oznaczenia liczb, które są zgodne z daną ilością b według modułu r i daje się wyrazić przez równość $a - tr = b$, $a = tr + b$ gdzie t jest ilość dowolna, zmieniając t będziemy mieli wszystkie liczby n dające resztę b z podzielenia przez moduł r. Jeżeli zaś chcemy mając daną jakąkolwiek liczbę a oznaczyć resztę z podzielenia przez dany moduł r, wtedy trzeba dopełniać *redukcyą* ilości a według modułu r, to jest dzieli się a przez r, czyli odejmuje się r tyle razy od a dopóki nie otrzymamy reszty mniejszej od r. Redukcyą taką oznaczamy przez literę R pisząc

$$\text{R}\,(a) \text{ mod. } r = b$$

Tyle tylko podajemy z tej ważnej teoryi zgodności i zastosujemy ją do szeregów czyli postępów roznicowych.

Jakoż gdy mamy szereg postaci

$$(\div a^n) = .\ a,\ a + n,\ a + 2n,\ a + 3n, \ldots.$$

jeżeli wyrazy tego szeregu podzielimy przez stałą ilość różną od n, np. r, i chcemy ten szereg wyrazić przez reszty mniejsze od r, to działanie to gdy nie znamy a i n, uważane ogólnie, potrzeba oznaczyć, do czego służy powyższy wzór redukcyi, jakoż redukując te wyrazy według modułu r, działanie to oznaczamy przez:

$$R\ (\div a^n)\ \text{mod.}\ r.$$

Szereg tak otrzymany ma tę własność, że nie przestaje być szeregiem arytmetycznym, lecz jego wyrazy będą zredukowane według modułu r, to jest wyrażone będą przez liczby w granicach 0 i r lub też $\frac{r}{2}$ i $+\frac{r}{2}$.

I tak niech będzie dany szereg arytmetyczny

$$(\div 0^5) = 0,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 35\ \ldots..$$

potrzeba go zredukować według modułu 7 otrzymamy:

$$R\ (\div 0^5)\ \text{mod.}\ 7 = 0,\ 5,\ 3,\ 1,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,\ 5\ldots.$$

w granicach 0 i 7, lub też w granicach — 3 i + 3 będzie

$$R\ (\div 0^5)\ \text{mod}\ 7 = 0, -2,\ 3,\ 1, -1, -3,\ 2,\ 0,\ldots.$$

Zdarza się, że przy redukcyi powyższej potrzeba jest oznaczyć szereg wartości zależny od 7 dla każdego wyrazu szeregu danego; i tak dla szeregu powyższego mamy

$$\begin{array}{lrrrrr}
R\ (\div 0^5)\ \text{mod.}\ 7 = & 0, & 5, & 10, & 15, & 20\ldots. \\
 & & -2, & 3, & 8, & 13 \\
 & & :, & -4, & 1, & 6 \\
 & & & :, & -6, & -1 \\
 & & & & . & :
\end{array}$$

bardzo często oznaczamy granice tych cząstkowych szeregów i tak gdy takiemi granicami ma być np. $\pm$ 12, otrzymamy jeszcze:

$$R\ (\div 0^5)\ \text{mod.}\ 7 = \left\{\begin{array}{rrrrr}
+7, & . & 10, & 8, & . \\
0, & 5, & 3, & 1, & 6,\ldots\ldots \\
-7, & -2, & -4, & -6, & -1, \\
., & -9, & -11, & ., & -8,
\end{array}\right.$$

wyrzucając w powyższym wyrazy większe od $\pm$ 12.

Szeregi czyli postępy arytmetyczne i ich redukcya według danego modułu w granicach danych jest to prawo podstawowe muzyki, zastosowanie tego prawa pozwoliło nam rozwiązać najważniejsze jej zadania, jak to w dalszym ciągu zobaczemy.

Tyle tylko podajemy wiadomości z matematyki, potrzebnych do zrozumienia naszej teoryi i więcej ich nie potrzeba.

ZASADY MATEMATYCZNE MUZYKI.

§ 1. Zasady ogólne muzyki.

1. Muzyka wspiera się ogólnie na prawach Akustyki, to jest: na prawach wibracyi czyli drgań ciał rozchodzących się w powietrzu; te prawa zresztą są bardzo nieliczne, podstawy zaś harmonii i melodyi są dotąd luźne, oparte tylko na doświadczeniu i wyborowem uchu mistrzów, którzy je rozwinęli i rozwijają dotąd, — a jednakże zdaje się, że i tu pewne prawa stałe, to jest prawa matematyczne powinny kierować temi teoryami muzyki i rzeczywiście kierują, jak to staramy się rozwinąć w niniejszej pracy i podajemy tu zasady matematyczne harmonii i melodyi.

Dziś jeszcze muzyka nie posiada takich praw podstawowych, zasady jej obecne są wyciągnięte z doświadczenia, — dla czego zaś one są te a nie inne, tego zadania nie rozwiązuje teorya muzyki. I tak mamy prawo zapytać się:

Dla czego gamma naturalna ma 7 tonów, a gamma chromatyczna 12 tonów; kiedy liczba tonów właściwie jest nieskończoną i kiedy zarówno dobrze możnaby podzielić oktawę na 6, 8, 9, 10 i t. d. części równych, czyli tonów równo oddalonych od tonu głównego?

Dla czego taż gamma naturalna składa się z siedmiu tonów, czyli pięciu całych i dwóch półtonów, *) — zatem tony są rozłożone nieforemnie, o interwalach nierównych, albowiem między pięcioma tonami całemi, wprowadzone są dwa półtony?

Dla czego tylko dwa rodzaje mamy gamm, majorowe i minorowe, i t. d.?

Dzisiejsze zasady muzyki nie rozwiązują tych pytań racyonalnie, a jednak są to pytania zasadnicze muzyki i zdaje się powinnyby być

---

*) Każdy dźwięk w ogóle nazywamy tu *tonem muzycznym*, gdy zaś uważamy, pod względem odległości, nazywamy wtedy *tonem całym;* i tak: bezwzględnie gamma składa się z siedmiu tonów, a zawiera pięć całych tonów i dwa pół tony.

rozwiązane w zupełności, i to rozwiązane nie inaczej jak na drodze matematycznej czyli racyonalnej.

Nim przystąpimy do rozwiązania tych zadań i podania prawdziwych zasad muzyki, musimy tu przytoczyć prawa główne akustyki, w czem będziemy się kierowali dziełem: Jamin'a „Cours de Physique de l'Ecole Polytechnique. Paris 1859 r. T. II" karta 441 i następne.

2. Wiemy, że głos lub dźwięk jakikolwiek, jest to wrażenie jakie odbiera ucho, sprawione przez szereg ruchów oscyllacyjnych czyli drgań wydanych przez cząstki ciał stałych, płynnych lub gazowych.

Wiemy także że głosy lub dźwięki posiadają cztery następujące własności:

1) Jeżeli ruchy oscyllacyjne cząstek ciała drgającego, czyli drgania odbywają się ściśle w odległościach równych, wtedy przedstawiają to co zowiemy *ton muzyczny* jest to głos ciągły; — jeżeli głos jest nie ciągły, wtedy staje sie szmerem i nie przedstawia charakteru muzycznego.

2) Drugą własnością głosu jest *natężenie*, które się zmienia w miarę odległości i jest to co zowiemy głosem słabym lub mocnym. Przy wszystkich innych okolicznościach równych, natężenie głosu zmienia się w stosunku odwrotnym kwadratów z odległości ucha od miejsca, zkąd głos powstaje.

3) Trzecią własnością głosu jest jego wysokość, własność ta zależy od ilości większej lub mniejszej drgań w sekundę i stanowi to co zowiemy ton niski lub wysoki i jest główną podstawą muzyki.

4) Nakoniec każde ciało drgające wydaje tony, które prócz wysokości i natężenia, przedstawiają różnice zależące od natury samego ciała, i tę szczególną własność zowiemy (timbre) *przydźwiękiem*. Przymiot ten mówi Jamin kart. 444, ucho ocenia czysto, lecz jego przyczyna jest mało znana. Nowsze badania Helmholtza dowodzą, że własność ta powstaje przez współtowarzyszenie każdemu tonowi głównemu, szeregu tonów dodatkowych, przydźwięków, których rozmaity układ stosownie do ciała wydającego dźwięk, stanowi tę własność szczególną muzyki, że każdy instrument posiada oddzielny charakter tonów; na nim polega cała instrumentacya muzyczna. Ton muzyczny, wysokość jego i przydźwięk, stanowią trzy dane podstawowe muzyki, stanowią materyał muzyczny.

Pierwszém i główném prawem akustyki jest następujące:

Prawo I. *Wszystkie tony téj saméj wysokości, jakiekolwiek jest ciało wibrujące, które je wydaje, odpowiadają tejże samej liczbie drgań i odwrotnie.*

Wypada ztąd, że ton dany oznacza się ściśle przez liczbę drgań n w sekundę, która mu odpowiada i może być oznaczony przez tę liczbę n.

Prawo to wprost wypada z doświadczeń nad tonami wydawanemi przez różne ciała drgające.

Gdy porównywamy z sobą dwa tony, lub wydajemy na raz dwa tony różnych wysokości, zdarza się, że to połączenie staje się przyjemne lub nieprzyjemne dla ucha; w pierwszym razie dwa tony stanowią *zgodność* tonów (consonnance) w drugim *niezgodność* (disonnance). Do akustyki należy poznać jakie związki powinny istnieć między liczbami drgań dwóch lub kilku tonów, aby one wydawały zgodność lub niezgodność tonów. Wypadki doświadczeń w tym przedmiocie redukują się do następnego prawa.

Prawo 2. *Każdy akord muzyczny między dwoma tonami, może być wyrażony i jest oznaczony przez stosunek* $\frac{n}{n}$, *dwóch liczb wyrażających ilość drgań w sekundę, odpowiadających tym tonom.*

Gdy stosunek $\frac{n}{n}$, jest równy jedności, dwa tony stanowią *unisono* czyli są identyczne pod względem wysokości, — gdy ten stosunek zmienia się, ich *odległość* (intervalle) muzyczna nie zależy od liczby bezwzględnej drgań, lecz tylko od tego stosunku.

Przechodząc do tego stosunku, doświadczenie uczy nas i prowadzi do następnego prawa:

Prawo 3. *Jeżeli razem wydamy dwa tony, których wysokości wyrażone są przez szereg naturalny liczb* 1, 2, 3, 4, ... *będą one tworzyć zgodność o tyle większą, o ile liczby te są prostsze, a która to zgodność przemieniać się będzie w niezgodność o tyle nieprzyjemną dla ucha, im te liczby będą więcéj złożone.*

Na prawie ostatniem *zgodności muzycznej* tonów, przyjęto skalę tonów nazwaną *gammą*, złożoną z siedmiu tonów wyrażonych nutami, których nazwy i stosunki muzyczne są następujące:

ut,	*re*,	*mi*,	*fa*,	*sol*,	*la*,	*si*,	*ut*
1,	$\frac{9}{8}$,	$\frac{5}{4}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{5}{3}$,	$\frac{15}{8}$,	2
c,	*d*,	*e*,	*f*,	*g*,	*a*,	*h*,	*c*,

te stosunki powtarzają się zaczynając od 2 do 4, od 4 do 8 i t. d., zatem i gammy ciągną się dalej a odróżniamy je pisząc przez $c_2\ d_2 \ldots c_3\ d_3 \ldots$

Jamin (karta 454) powiada: „Wiele rozprawiano nad tem, aby „poznać jakie mogły być względy i przyczyny, które od początku powo„dowały utworzenie tej gammy. Jest prawdopodobnem, że samo uczucie „muzykalne jedynie, a nie uwagi teoretyczne stworzyły tę gammę. Nie „wdając się w rozbiór tego punktu erudycyi muzykalnéj, — jedyną rze„czą, jaka nam pozostaje jest przyjęcie gammy jako faktu i pokazanie,

„jak kombinując z sobą tony ją składające, otrzymujemy ściśle stosun-„ki harmonijne drgań, które są najprzyjemniejsze dla ucha."

Na tem się kończą nasze wiadomości ściśle teoretyczne, jakie akustyka nam podaje, dalsze rozwinięcie jest już pozostawione doświadczeniu czyli raczej ocenieniu przez delikatny słuch. Zaprawdę za mała to rozciągłość praw ścisłych do rozciągłości praktycznej muzyki.

Otóż z powyższych trzech praw tylko **pierwsze prawo** jest nam tu potrzebnem, i jedynem, od którego zaczniemy nasze badania, dwa zaś inne zostają dla nas w dalszym ciągu bezużyteczne.

Zatem wiemy, że *ton każdy odpowiada ściśle stałéj liczbie drgań jakiekolwiek będzie ciało wibrujące.*

Wysokość tonu zmienia się z ilością drgań, i gdy te drgania stają się powolniejsze lub bardzo szybkie, jest chwila gdzie tony bardzo nizkie lub wysokie przestają być słyszanemi, i tony te zawarte są między dwoma granicami odpowiadającemi liczbom drgań 32 i 10000 w sekundę; — tony więc muzyczne są przedstawione przez szereg drgań:

$$32,\quad 33,\quad 34,\quad 35,\quad 36,\ldots.\quad 10000. \qquad (1)$$

w sekundę. Po za tym szeregiem tony nie są słyszane, chociaż sztucznie można granice te rozszerzyć od 15 do 73000 drgań *). W pierwszym szeregu mamy około 8 oktaw, w drugim 12 oktaw. **) Zwyczajnie więc rozróżniamy tylko 8 oktaw a nadzwyczajnie najwyżej tylko 12 oktaw. Zatem także nie ma instrumentu któryby więcej obejmował jak $8\frac{1}{2}$ oktaw.

Między granicami 32 i 10000 drgań na sekundę, jest nieskończenie wiele różnych tonów, lecz z tych nie wszystkie dają się odróżnić od siebie. Nawet tonów wyrażonych przez całe liczby drgań 33, 34, 35 ...., których jest ograniczona liczba, bo tylko $10000 - 32 = 9968$, i tych najwprawniejsze ucho odróżnić od siebie nie może, co dowodzi, że nie rozróżnia dźwięków wprost przez same drganie, lecz tylko przez stosunki tych drgań do siebie.

Jeżeli ogólnie oznaczymy najniższy ton przez liczbę jego drgań α, to szereg tonów można oznaczyć przez

$$\alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2 \ldots.\ 2\alpha,\ 2\alpha+1 \ldots\ldots \qquad (2)$$

a dzieląc przez α będziemy mieli szereg stosunków:

$$1, \frac{\alpha+1}{\alpha}, \ldots.\quad 2, \frac{2\alpha+1}{\alpha}, \ldots.\quad 3, \frac{3\alpha+1}{\alpha} \ldots. \qquad (3)$$

---

*) Patrz Jamin. Cours de physique de l'école polytechnique. Paris 1859. T. II. kart. 461.

**) Albowiem mamy: $32 \times 2^8 = 8192$ a także $15 \times 2^{12} = 61440$

Jeżeli teraz zmieniamy ton początkowy i w jego miejsce bierzemy jakikolwiek inny, szereg (3) zostaje zawsze ten sam.

Ucho nie odróżnia różnicy między głosami przez same liczby drgań, nie odróżnia więc tonów przez liczbę α, $\alpha+1$, $\alpha+2$ ..... lecz tylko w stosunku do jednego dowolnie wziętego tonu, i jeżeli ten ton np. będzie α to następne tony w szeregu (1) oznaczone liczbą drgań $\alpha+1$, $\alpha+2$ ..... nie mogą być odróżnione aż do pewnej granicy, i ton który po tonie α ucho usłyszy, będzie to ton zostający w pewnym stosunku stałym, zresztą dowolnym do tonu pierwotnego α, i ten to stosunek liczby drgań dwóch tonów stanowi miarę porównania dla tonów muzycznych.

Gdy zmienimy ton główny, szereg stosunków (3) zostaje ten sam i tony muzyczne zostają te same względem tonu głównego, i ucho chwytając te stosunki doskonale wskazuje nam tę równość względną tonów muzycznych. Szereg (3) zawiera wszystkie liczby zacząwszy od jednego ułamkowe większe od jedności, a między temi znajdują się wszystkie liczby całe.

Dla oznaczenia więc tych stosunków i ustalenia charakteru muzyki, potrzeba przyjąć pewien dźwięk czyli jego liczbę drgań za jedność czyli za początek szeregu (3).

Głos wzięty za jedność do porównania zowiemy **tonem fundamentalnym**, a inne tony muzyczne będą wyrażone przez stosunki czyli ułamki.

Ztąd wyprowadzamy drugie prawo muzyczne.

Prawo 2. *Każdy ton mierzy się stosunkiem liczby drgań tego tonu do liczby drgań tonu fundamentalnego.*

Ton fundamentalny może przebiegać cały szereg tonów od najniższego do najwyższego, ztąd będzie się zmieniał charakter muzyki i ten charakter znowu może być jak widzimy bardzo rozległy bo zawarty w granicach szeregu (3).

3. Dla oznaczenia tonów, które mogą być słyszane uchem między nieskończoną ilością tonów zawartych w szeregu (3), potrzeba oznaczyć ton słyszalny i taki który może odróżnić ucho i najbliższy tonowi fundamentalnemu odpowiadającemu jedności; taki stosunek nie może być ściśle oznaczony.

Załóżmy że wszystkie tony w szeregu (3) zaczynając od 1., które odróżnić od 1 nie dają się, mają za granicę $\lambda = \frac{\alpha+k}{\alpha}$; tak, że wszystkie tony od 1 do λ nie dają się odróżnić od tonu fundamentalnego.

Załóżmy jeszcze że tony słyszane przez ucho zaczynając od fundamentalnego, składają szereg następny:

$$1, \quad a, \quad b, \quad c, \ldots\ldots$$

między tonami tego szeregu 1 i a, a i b .... znajduje się nieskończona ilość dźwięków, lecz z tych jedne będą niezdolne do odróżnienia od fundamentalnego 1 inne od następnego a; — jeżeli oznaczemy przez $\lambda = \frac{a+k}{a}$ granicę tonów poczynając od 1. zlewających się z tym tonem, to wszystkie znowu tony od λ do a nie będą również odróżniane od a i biorąc znowu ton λ za fundamentalny 1. granicą tą znowu będzie λ a mnożąc przez λ będzie $\lambda : \lambda^2$ i trzy tony będą składały szereg z wykładnikiem λ; 1, λ, λ^2, z których λ^2 będzie różny od 1 i będzie przez ucho odróżniany od 1, przeto musi być ten sam co a.

Podobnie między $a = \lambda^2$ i b będzie znowu biorąc a za jedność, λ tonów zlewających się z a i λ zlewających się z b, tak że otrzymamy szereg λ^2, λ^3, $\lambda^4 = b$ a razem

$$1, \quad \lambda, \quad \lambda^2, \quad \lambda^3, \quad \lambda^4,$$

i tym podobnie; tak że szereg tonów odróżnianych przez ucho będzie przedstawiać ściśle szereg geometryczny tonów

$$\div 1^{\lambda 2}, \quad \lambda^2, \quad \lambda^4, \quad \lambda^6, \ldots \qquad (4)$$

gdzie stosunek będzie kwadrat z granicy λ tonów zlewających się z tonem fundamentalnym. Tony składające szereg (4) wybrane z szeregu (3) stanowią to co zowiemy tonami muzycznemi. Tony więc muzyczne są to tony, które razem wzięte stanowią szereg geometryczny postaci (4) Granica zaś λ jest to, co zowiemy *komma* (comma), jest to najdalszy ton który ucho nie może odróżnić od tonu danego. *)

Z tąd mamy nowe trzecie prawo muzyczne.

Prawo 3. *Stosunki tonów muzycznych stanowią szereg geometryczny, którego pierwszy wyraz jest jedność odpowiadający tonowi fundamentalnemu, a stosunek kwadrat ze stosunku największego, któremu odpowiedni ton nie daje się odróżnić od tonu fundamentalnego.*

To prawo jest nadzwyczaj ważnem i nowem, przedstawia tony muzyczne nie jako luźne tony, lecz zależne jedne od drugich, a mianowicie, że ich stosunki składają szereg geometryczny, prawo to akustyki jest podstawą wszystkich praw muzycznych.

Powyższe rozumowanie daje nam jeszcze wyjaśnienie znaczenia tego co w muzyce zowiemy kommą i zarazem daje nam następne prawo:

Prawo 4. *Gdy stosunki tonów muzycznych stanowią szereg geometryczny ze stosunkiem pewnym, to pierwiastek kwadratowy z tego stosunku stanowi kommę dla tego szeregu tonów muzycznych.*

---

*) Patrz przypisek 1-szy.

Jeżeli przyjmiemy, że komma jest to interwał wyrażony ułamkiem $\frac{81}{80}$, to stosunek szeregu będzie $\left(\frac{81}{80}\right)^2 = \frac{41}{40}$ i ten ułamek będzie zarazem wyrazem jego drugim.

Inny ułamek uważamy za kommę $\frac{128}{125} = \frac{43}{42}$. $\frac{5376}{5375}$ (Cours Jamin T. II kart. 460) który jest bardzo blizki $\frac{43}{42}$, daje kwadrat $\left(\frac{43}{42}\right)^2 = \frac{22}{21}$ zatem stosunek szeregu i zarazem drugi jego wyraz jest $\frac{22}{21}$ i jest to jak wiemy pół tonu minor.

Przyjmując za stosunek szeregu tonów muzycznych i zarazem za pierwszy wyraz $\frac{16}{15} = \lambda^2$ komma należąca do tego szeregu będzie koniecznie $\lambda = \left(\frac{16}{15}\right)^{1/2} = 1,03279$, czyli bardzo blizko $\frac{32}{31}$.

Gdy w szeregu (4) zmieniamy stosunek λ^2, będzie się zmieniać szereg wyrazów, gdy będzie równy 1 szereg (4) zmienia się na szereg jedności i wszystkie tony są też same czyli identyczne i takie tony zowią się *unisono*. Gdy ten stosunek jest ułamkiem większym lub mniejszym od jedności, tony są różne i składają szereg właściwy.

Gdy ten stosunek jest równy 2, stosunek tonów jest 1 : 2 i takie dwa tony nazwiemy *duosono* (obecnie zowiemy oktawą, której znaczenie niżej podamy); takie tony składają szereg następujący:

$$\div 1^2,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32 \ldots\ldots \qquad (5)$$

ten szereg ma tę własność że zawiera tony które różnią się o dwa razy większą liczbę drgań od tonu poprzedniego.

Między temi dwoma szeregami czyli między stosunkami ich 1 i 2 stanowiącemi *unisono* i *duosono* znajduje się nieskończona liczba szeregów, których stosunki są ułamkami większemi od 1. a mniejszemi od 2 i zawierają wszystkie tony muzyczne.

5. Ponieważ stosunek szeregu jest zawsze ułamkiem dość małym, daje się sprowadzić do postaci, oznaczając jego mianownik przez x:

$$\lambda^2 = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

Ztąd wyraz n tę ma postać

$$\lambda^{2n} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{x} + \binom{n}{2}\frac{1}{x^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{x^3} + \ldots\ldots$$

wyrażenie, które staje się, gdy $n = \infty$, także nieskończone, to jest że w szeregu (4) znajdują się wszystkie liczby objęte szeregiem (5).

Albowiem chociaż szereg (4) nie obejmuje wprost szeregu (5), gdyż potęga z danego ułamku nie może wydać liczb całych, jednak między temi będą ułamki bardzo blizkie liczb całych szeregu (5). Ztąd wynika że wyrazy szeregu (4) będą to liczby dające się sprowadzić do ułamków coraz prostszych i do liczb całych.

Ponieważ granica λ nie jest znaną i można brać na λ rozmaite wartości a nawet ich liczba może być nieskończoną i każdy ułamek wyrażający ten stosunek i dający ton nie mogący być odróżnionym od tronu fundamentalnego, przeto szereg (4) w tej formie nie może być ściśle oznaczonym. A że szereg (4) posiada tę własność, że zacząwszy od ułamku bardzo małego λ, wyrazy tego szeregu rosną zacząwszy od 1 i stają się coraz prostsze, więc można ten szereg odwrócić i przyjmując za stosunek ułamek najprostszy zawarty między 1 i 2 jaki jest $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, otrzymamy szereg nowy postaci:

$$\div 1,\ \left(\frac{3}{2}\right)^1,\ \left(\frac{3}{2}\right)^2,\ \left(\frac{3}{2}\right)^3,\ldots\ldots$$

a ztąd prawo muzyczne:

Prawo 4. *Tony muzyczne składają szereg geometryczny, którego pierwszy wyraz jest 1, a stosunek najprostszy ułamek $\frac{3}{2}$; a że odległość odpowiadająca ułamkowi $\frac{3}{2}$ zowie się kwintą, przeto będzie on szeregiem kwint i ten szereg może być przedłużony w obie strony postaci:*

$$\ldots\ldots\left(\frac{3}{2}\right)^{-3},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{-2},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{-1},\left(\frac{3}{2}\right)^{0}=1,\ \left(\frac{3}{2}\right)^{1},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{3}\ldots\ldots \quad (6)$$

Porównywając ten szereg tonów z szeregiem (5) obejmujący tony duosono;

$$\div 1,\quad 2,\quad 4,\quad 8\ldots\ldots$$

i obliczając wyrazy szeregu (6), widzimy że one wpadają między wyrazy szeregu (5) i niektóre zbliżają się więcej lub mniej do tych tonów, nigdy jednak im się stać równemi nie mogą; — tony więc muzyczne szeregu kwint, składają tony różnych oktaw i to coraz wyższych; — dzielą się na gruppy zawarte między dwoma wyrazami szeregu (5) i tak że te gruppy zawierają coraz więcej wyrazów czyli tonów, czyli że tony szeregu (6) dzielą podziały między wyrazami szeregu (5) na coraz większą liczbę tonów pośrednich, a zatem są coraz inne; — a początkowe i końcowe wyrazy tych grupp coraz więcej co do wartości zbliżają się do wyrazów szeregu (5) nigdy im jednak stać się równe nie mogą — tak że, w szeregu (6) przedłużonym dostatecznie znajdują się wszystkie możliwe tony; nawet jednej oktawy, gdy zostaną sprowadzone do tegoż samego duosono.

6. Ponieważ jak wiemy szereg geometryczny może być zawsze zastąpiony przez szereg arytmetyczny złożony z wykładników, którego pierwszy wyraz jest 0 a wykładnik 1, czyli przez szereg ich logarytmów, a wtedy wszelkie działania wykonywane na szeregu pierwszym zamieniają się na odpowiednie niższe działania a mianowicie: mnożenie i dzielenie na dodawanie i odejmowanie, a wynoszenie do potęg i wyciąganie pierwiastków na mnożenie i dzielenie; — a że przy formowaniu szeregu stosunków, wyrazy powstają z mnożenia ich przez stosunki, a stosunki wyrazów otrzymują się przez dzielenie ich przez siebie — w szeregu zatem arytmetycznym wyrazy będą powstawać przez dodanie wykładnika stosunku a oznaczenie wyrazów przez ich różnice od wyrazu pierwszego, przeto, będziemy mieli nowe prawo:

Prawo 5. *Szereg geometryczny kwint, którego pierwszy wyraz odpowiada tonowi fundamentalnemu, a stosunek najprostszy ułamek* $\frac{3}{2}$, *może być zastąpiony przez szereg arytmetyczny liczb naturalnych:*

$$\ldots\ldots -3, -2, -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3 \ldots\ldots \qquad (7)$$

który będzie wyrażał odległość tonów muzycznych.

Wyrazy więc tego nowego szeregu będą wyrażać prawdziwe odległości ich czyli interwale od wyrazu pierwszego odpowiedniego tonowi fundamentalnemu, każdy więc wyraz tego nowego szeregu będzie interwalem tonu muzycznego. Zatem stosunek tonów muzycznych jest to stosunek liczby ich drgań; interwal czyli odległość tonów muzycznych jest logarytmem tego stosunku i wyraża odległości ich od tonu fundamentalnego wziętego za początek.

Miarą interwali jest w tym szeregu kwinta, jest to odległość odpowiadająca stosunkowi $\frac{3}{2}$ i ta jest wzięta za jedność; każdy więc ton uważamy za interwal daje się wyrazić przez pewną ilość kwint czyli jedności, i to bez względu jaki jest przyjęty system tonów i ich podział.

Tak więc szereg (7) wyraża szereg odległości czyli interwali, które są cechą szeregu tonów muzycznych, i tak:

1 wyraża odległość kwinty,

2, 3 . . . wyraża odległość 2 3 . . . . kwint.

Szeregi (6) i (7) oznaczające szeregi tonów których fundamentalny ton jest 1 i 0, mają tę własność, że każdy ich wyraz można wziąść za fundamentalny, a dzieląc w pierwszym szeregu przez ten wyraz wszystkie inne, a w drugim odejmując liczbę odpowiadającą temu wyrazowi od liczb tegoż szeregu, otrzymujemy też same szeregi z tą różnicą, że początek został przesunięty, i tak:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}, \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}, \left(\frac{3}{2}\right)^{0} = 1, \left(\frac{3}{2}\right)^{1}, \left(\frac{3}{2}\right)^{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^{3}, \left(\frac{3}{2}\right)^{4}, \ldots.$$

$$-2, \quad -1, \quad 0 \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4 \ \ldots.$$

biorąc $(^3/_2)^2$ za fundamentalny czyli początek i dzieląc przez tę liczbę w pierwszym szeregu, a odejmując 2 od szeregu drugiego, otrzymujemy

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}, \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}, \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}, \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}, \left(\frac{3}{2}\right)^{0} = 1, \left(\frac{3}{2}\right)^{1}, \left(\frac{3}{2}\right)^{2}, \ldots.$$

$$-4, \quad -3, \quad -2, \quad -2, \quad -0, \quad 1, \quad 2, \ldots..$$

co porównywając z powyższemi szeregami widzimy że postać szeregów została taż sama, tylko początek oznaczony przez (1, 0) przesunął się o dwa wyrazy. A że liczby szeregu pierwszego wyrażają stosunki tonów do fundamentalnego, a drugiego odległości od tegoż tonu, zatem wszystkie tony zmieniają jednocześnie stosunki i odległości i jeszcze stanowią doskonały system i dla tego system taki tonów stanowi doskonały system muzyczny; — zkąd jeszcze wypada że mając jakikolwiek układ tonów wyrażony w liczbach szeregu (6) lub (7) czyli według pewnego tonu fundamentalnego, można go zamienić na inny według innego tonu fundamentalnego; mnożąc wszystkie wyrazy układu przez liczbę odpowiadającą tonowi fundamentalnemu w pierwszym szeregu lub też dodając w drugim szeregu bez zmiany stosunków wzajemnych tonów w układzie, czyli bez zmiany samego układu.

Ta własność jest nadzwyczaj ważną w muzyce, dozwalając tony oznaczać przez liczby, a ztąd i układ tonów można zawsze wyrazić przez liczby i z jednego układu dozwala wyprowadzać wiele innych mających ten sam charakter lecz tylko inny ton fundamentalny.

7. Jeżeli w szeregu (6) sprowadzimy wszystkie wyrazy do tegoż samego duosono czyli oktawy, dzieląc je lub mnożąc przez odpowiednie potęgi z liczby 2, będziemy mieli szereg liczb zawartych między 1 i 2. Wszystkie te liczby dają się wyrazić we wzorze ogólnym:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x} \cdot \frac{1}{2^{y}} = \frac{3^{x}}{2^{x+y}}$$

gdzie x oznacza liczbę wyrazu w szeregu, a y liczbę oktawy w której ten wyraz przypada.

Zmieniając x i y otrzymamy wszystkie wyrazy szeregu (6). Wyrazów tych jest nieskończenie wiele, między temi wyrazami można szukać takich aby one były najmniej różne od liczby 2 czyli stanowiły granicę oktawy.

Poszukiwanie to sprowadza się do rozwiązania w liczbach całych równania:

$$\frac{3^x}{2^{x-y}} = 1 \text{ czyli } 3^x = 2^{x-y}.$$

co uskutecznimy biorąc logarytmy zwyczajne po obu stronach i będzie:

$$\frac{x}{y} = \frac{\log.\ 2}{\log.\ 3 - \log.\ 2} = \frac{3010300}{1760913} \cdots\cdot$$

a rozwijając to wyrażenie na ułamek ciągły metodą znaną *) i szukając reduktów, otrzymujemy dla x dwa systemy wartości: jedne które nie dochodzą prawdziwej wartości i wyrażone przez liczby pierwsze 17, 29, 41, dla których wartości przybliżone są:

$$\frac{26}{27},\quad \frac{40}{41},\quad \frac{87}{88}$$

to jest różnią się od prawdziwej wartości **) o $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{10}$ część tonu które dla tego że dają małe przybliżenie przy dużych liczbach, muszą być odrzucone; drugi system trzy liczby 7, 12 i 53, których wartości przybliżone są:

$$\frac{16}{15},\quad \frac{75}{74},\quad \frac{482}{481},$$

i różnią się od prawdziwej wartości o $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{9}$ i $\frac{1}{50}$ część tonu, ostatni podział na 53 części jest zbyt drobny, przeto musi być odrzucony — pozostają tylko dwa pierwsze 7 i 12 bardzo przybliżone a które właśnie stanowią dwa podziały dziś używane w muzyce i innych zupełnie nie mamy.

Pierwszy podział 7-o tonowy razem z tonem początkowym składa 8 tonów, co stanowi tak nazwaną od tychże 8-iu tonów *oktawę* i jest wyrażony przez liczbę pierwszą i niepodzielną.

Drugi podział 12-nadający się wybornie do podziału, gdyż liczba 12 jest liczbą złożoną, dzieli duosono czyli oktawę na 12 równych części, które nazywamy półtonami, — oktawa więc dzieli się na 6 całych tonów i 12 półtonów.

Tak to praktyka na drodze empirycznej rozwiązała doskonale główne swe zadanie podziału duosono; — to naodwrót dowodzi, że teorya nasza jest prawdziwą, bo zostaje w zupełnej zgodzie z praktyką. Gdy tak jest, możemy żądać, aby ta teorya doprowadziła nas do ostatnich wniosków i odkryła nowe prawdy; jak to jest zawsze następstwem prawdziwej teoryi i jak tyle przykładów podobnych przedstawiają nam szczególniej fizyka i astronomia.

8. Jeżeli teraz w szeregu (6) wykonamy podnoszenie do potęg,

*) Przypisek 2-gi.

**) Patrz przypisek 3-ci.

sprowadzimy jego wyrazy między granice 1 i 2, wyrażające tony skrajne oktawy, dzieląc je przez potęgi odpowiednie z 2 i jeżeli jeszcze wyrazimy przez najprostsze i najbliższe prawdziwej wartości ułamki, otrzymamy stosunki, które podaje nam akustyka z małemi zmianami. Nim je podamy potrzeba nam podać niektóre własności szeregu (6), które to własności ułatwiają poszukiwanie wartości przybliżonych wyrazów tego szeregu, przywiedziemy je bez dowodu, odsyłając czytelnika chcącego je bliżej poznać a oswojonego z rachunkami matematycznemi, do przypisku 3-go, w którym dowiedzione zostały.

Rozważając bliżej ten szereg, dowiedliśmy tam:

1) Że mając przybliżoną wartość jednego wyrazu obliczoną przez iloczyn coraz zbieżniejszych ułamków, wartość przybliżona następnego wyrazu oznacza się przez ten sam iloczyn mnożąc go lub dzieląc przez stosunek szeregu $\frac{3}{2}$, — wartość przybliżoną następnego wyrazu łatwo oznaczyć mnożąc lub dzieląc ją przez $\frac{8}{3}$ i to dopóty, dopóki nie przyjdziemy do ułamku zbyt wielkiego, który podwyższa znaczenie ułamku następnego, tak że trzeba znowu szukać wprost przybliżonej wartości.

2) W szeregu (6) przedłużonym w obie strony, wartości przybliżone w stronie dodatnej są też same jak w stronie odjemnej w granicach uważanego peryodu tylko odwrotnie ułożone, i ta tożsamość jest zupełnie ścisłą.

Ta własność wypływa ztąd, że stosunki w stronie dodatnej są równe stosunkom w stronie odjemnej tylko odwrócone; — a że jeszcze, gdy te stosunki wyrażają się przez iloczyny ułamków przybliżonych, przeto nawet i wartości przybliżone tych stosunków są też same tylko odwrócone.

Zatem uważając część dodatną szeregu za nuty podwyższone, to część odjemną trzeba uważać i to koniecznie za zniżone i ta własność wyraża ściśle to, że w granicy jaką uważamy, zawsze te zniżenia i podwyższenia wyrażają się przez też same stosunki. Tak, że ściśle połowa dodatna szeregu jest równa połowie odjemnej tylko odwrotnie ułożona i stosunki tonów zniżonych są też same co tonów podwyższonych i niepotrzebują zupełnie być ujednostajniane przez mnożenie ich przez odpowiednie stosunki.

3) Każde dwa wyrazy równo oddalone od początku w szeregu (6), czyli mające też same wykładniki, są w takim z sobą związku że odwracając jeden i mnożąc przez 2 otrzymujemy drugi, a zatem cała część dodatna odwrócona i pomnożona przez dwa daje część odjemną.

A że część dodatną składają tony podwyższone, a odjemną zniżone, przeto tony podwyższone odpowiadają ściśle tonom zniżonym, gdyż wyrażają się przez stosunki też same.

4) Tak w części dodatnej jak odjemnej dwa wyrazy równo oddalone od wyrazów mających wykładniki 0 i ω, gdzie ω stanowią peryod, i dla którego mamy $\left(\frac{3}{2}\right)^{\omega} = 1$, to jest dla którego wartość stosunku powraca taka sama, jak dla $\left(\frac{3}{2}\right)^{0} = 1$ są w takim związku, że jeden odwrócony i pomnożony przez 2 daje wyraz drugi.

5) Nakoniec wyrazy tego szeregu przeszedłszy za pewien peryod np. 12, powtarzają się w swej wartości, lecz o tyle o ile ten peryod zbliża się więcej do prawdziwej wartości 2, w ogóle zaś wyrazy są różne i dają dalsze podziały drobniejsze duosono.

9. Po obliczeniu więc tych stosunków, które podaliśmy w przypisku 4-tym, szereg (6) wyrazi się w następującej formie w postaci stosunków i odległości:

$$\left.\begin{array}{l}\ldots\; 1,\; \frac{3}{2},\; \frac{10}{9},\; \frac{5}{3},\; \frac{5}{4},\; \frac{17}{9},\; \frac{24}{17},\; \frac{18}{17},\; \frac{8}{5},\; \frac{6}{5},\; \frac{9}{5},\; \frac{4}{3},\; 1 \\ \ldots -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, -0 \\ 1,\; \frac{3}{2},\; \frac{10}{9},\; \frac{5}{3},\; \frac{5}{4},\; \frac{17}{9},\; \frac{17}{13},\; \frac{18}{17},\; \frac{8}{5},\; \frac{6}{5},\; \frac{9}{5},\; \frac{4}{3},\; 1\ldots \\ 0,\; 1,\; 2,\; 3,\; 4,\; 5,\; 6,\; 7,\; 8,\; 9,\; 10,\; 11,\; 12\ldots \end{array}\right\} \quad (8)$$

gdzie wszystkie wyżej podane własności łatwo mogą być sprawdzone.

Peryod 7-mio tonowy. Siedm kolejnych wyrazów szeregu powyższego, zaczynając od któregokolwiek, dają nam pierwszy period 7-mio tonowy podziału duosona, takim będzie np.:

$$\begin{array}{l} 1,\; \frac{3}{2},\; \frac{10}{9},\; \frac{5}{3},\; \frac{5}{4},\; \frac{17}{9},\; \frac{17}{12},\; \left(\frac{18}{17} = 1\right) \\ 0,\; 1,\; 2,\; 3,\; 4,\; 5,\; 6, \end{array}$$

a układając porządkiem wielkości co drugi wyraz będzie

$$\begin{array}{l} 1,\; \frac{10}{9},\; \frac{5}{4},\; \frac{17}{12},\; \frac{3}{2},\; \frac{5}{3},\; \frac{17}{9},\; 2 \\ 0,\; 2,\; 4,\; 6,\; 1,\; 3,\; 5,\; 0 \end{array}$$

stosunki tych wyrazów są:

$$\frac{10}{9},\; \frac{9}{8},\; \frac{17}{15},\; \frac{18}{17},\; \frac{10}{9},\; \frac{17}{15},\; \frac{18}{17}$$

a że $\frac{17}{15} = \frac{9}{8} \cdot \frac{136}{135}$ i gdzie $\frac{136}{135}$ jest małym ułamkiem wyrażającym zaledwie $^1/_{15}$ część odległości (Przypisek 3), zatem jeszcze będzie:

$$\frac{10}{9},\ \frac{9}{8},\ \frac{9}{8},\ \frac{18}{17},\ \frac{10}{9},\ \frac{9}{8},\ \frac{18}{17} \qquad \textbf{(a)}$$

Peryod 12-sto tonowy. Dwanaście wyrazów kolejnych powyższego szeregu zaczynając od któregokolwiek, dają nam peryod drugi 12-sto tonowy podziału duosono i takim będzie

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{10}{9},\ \frac{5}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{17}{9},\ \frac{17}{12},\ \frac{18}{17},\ \frac{8}{5},\ \frac{6}{5},\ \frac{9}{5},\ \frac{4}{3}\ \left(\frac{75}{74}=1\right)$$

gdzie kommą jest ułamek $\frac{75}{74}$.

Układając go koleją wielkości będzie:

$$1,\ \frac{18}{17},\ \frac{10}{9},\ \frac{6}{5},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{3},\ \frac{17}{12},\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{5}{3},\ \frac{9}{5},\ \frac{17}{9},\ 2$$

stosunki tych wyrazów są:

$$\frac{18}{17},\ \frac{85}{81},\ \frac{27}{25},\ \frac{25}{24},\ \frac{16}{15},\ \frac{17}{16},\ \frac{18}{17},\ \frac{16}{15},\ \frac{25}{24},\ \frac{27}{25},\ \frac{85}{81},\ \frac{18}{17}, \qquad \textbf{(b)}$$

$\frac{85}{81},=\frac{18}{17}\cdot\frac{113}{112}$, a że $\frac{25}{24}=\frac{18}{17}\cdot\frac{62}{61}$ i $\frac{27}{25}=\frac{18}{15}\cdot\frac{62}{61}$ zatem bardzo mało różne od $\frac{18}{17}$, przeto peryod 12-sto tonowy dzieli się na 12 części równych, i ten podział przyjęto za podstawę podziałów i nazwano półtonami. Duosono więc dzieli się na 12 półtonów czyli na 6 tonów i to stanowi peryod 12-sto tonowy; peryod 7-mio tonowy będzie takichże tonów zawierać 7, zatem musi koniecznie zawierać 5 całych tonów i 2 półtony; — jak to widzimy na stosunkach (a).

W szeregu (8), wyrazy te stanowią podziały równe, a że ten szereg ma za jedność kwintę równą $\frac{3}{2}$, przeto 7 kolejnych kwint stanowią peryod pierwszy, a 12 kolejnych kwint peryod drugi.

Pierwszy peryod stanowi to co zowiemy *gammą naturalną* (majorową), peryod drugi jest *gammą chromatyczną*. — Ztąd:

Prawo 6. *W szeregu kwint siedm tonów kolejnych zaczynając od jakiegokolwiek wyrazu, składają tony główne oktawy, które z pięcioma dalszemi składają 12 tonów, dzieląc oktawę na 12 części czyli półtonów równych.*

Oto jest prawdziwy wywód matematyczny gammy naturalnej i chromatycznej.

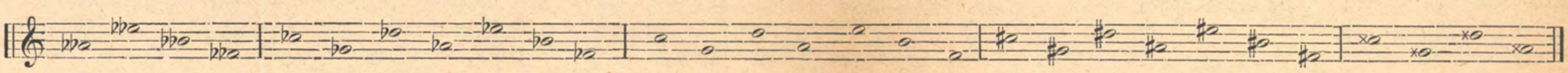
Cóż więc będzie gamma naturalna?

Będzie to szereg siedmiu tonów kolejnych szeregu kwint, a gamma chromatyczna szeregiem 12 takichże tonów w szeregu kwint, lub też 7 i 12 wyrazów składających szereg geometryczny, którego pierwszy wyraz jest 1 a stosunek ($\frac{3}{2}$).

Ztąd widzimy że na utworzenie i wybór tonów dla utworzenia

SKALA NATURALNA KWINT Nr. 1.

Tony:	la^{bb}	mi^{bb}	si^{bb}	fa^{bb}	ut^{b}	sol^{b}	re^{b}	la^{b}	mi^{b}	si^{b}	fa^{b}	*ut*	*sol*	*re*	*la*	*mi*	*si*	*fa*	ut^{x}	sol^{x}	re^{x}	la^{x}	mi^{x}	si^{x}	fa^{x}	ut^{xx}	sol^{xx}	re^{xx}	la^{xx}



Tony:	a^{bb}	e^{bb}	h^{bb}	f^{bb}	c^{b}	g^{b}	d^{b}	a^{b}	e^{b}	h^{b}	f^{b}	*c*	*g*	*d*	*a*	*e*	*h*	*f*	c^{x}	g^{x}	d^{x}	a^{x}	e^{x}	h^{x}	f^{x}	c^{xx}	g^{xx}	d^{xx}	a^{xx}
Odległości:	–14	–13	–12	–11	–10	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Stosunki:	$\frac{9}{5}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{9}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{18}{17}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{9}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{18}{17}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{10}{9}$
Nazwa odległości:	*O*	*Kn*	*Sk*	*Sx*	*T*	*Sp*	*Kr*	*O*	*Kn*	*Sk*	*Sx*	*T*	*Sp*	*Kr*	*P*	*Kn*	*Sk*	*Sx*	*T*	*Sp*	*Kr*	*O*	*Kn*	*Sk*	*Sx*	*T*	*Sp*	*Kr*	*O*
Rodzaje odległości:	< z m n i e j s z o n e >							< m i n o r >						< czyste >			< m a j o r >						< z w i ę k s z o n e >						
Odległości w częściach tonu całego:	5	$2\frac{1}{2}$	0	$3\frac{1}{2}$	1	$4\frac{1}{2}$	2	$5\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{2}$	4	$1\frac{1}{2}$	5	$2\frac{1}{2}$	0	$3\frac{1}{2}$	1	$4\frac{1}{2}$	2	$5\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{2}$	4	$1\frac{1}{2}$	5	$2\frac{1}{2}$	0	$3\frac{1}{2}$	1

gammy wpływa tylko najprostsze prawo matematyczne podziału oktawy na części równe najwięcej przybliżone do ścisłego podziału, co się otrzymuje przez poszukiwanie najbliższych reduktów ułomku, wyrażającego ten stosunek, w podobny sposób jak się dochodzi przybliżonej wartości stosunku okręgu koła do średnicy, — lub roku słonecznego do księżycowego i t. d.

10. Gamma naturalna obejmuje więc 7 tonów kolejnych, które w szeregu przedstawia się przez stosunki i liczby:

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{10}{9},\ \frac{5}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{17}{9},\ \frac{17}{12}.$$
$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

szykując je porządkiem wielkości trzeba brać zaczynając od początku (1 , 0) co drugą liczbę, i będzie

$$1,\ \frac{10}{9},\ \frac{5}{4},\ \frac{17}{12},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{17}{9}$$
$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 1,\ 3,\ 5$$

i to jest porządek naturalny; a oznaczając układ tonów tym liczbom odpowiedni kolejnemi literami *)

$$a,\ h,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g$$
$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 1,\ 3,\ 5$$

a odwracając znowu porządkiem liczb będzie:

$$a,\ e,\ h,\ f,\ c,\ g,\ d$$
$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

a przyjmując dla symetryi $(a, 0)$ za środek szeregu, będziemy mieli

$$c,\ g,\ d,\ a,\ e,\ h,\ f$$
$$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

Jeżeli więc do szeregów (6 i 7) dodamy znaki tonów tu podane, otrzymamy szereg czyli *skalę naturalną linijną kwint* Nr. 1, która ma tę własność, że ton jej fundamentalny jest a, jest to ton jaki wydaje diapason, to jest klucz stalowy, wydający 870 drgań na sekundę, w oktawie trzeciej czyli a_3 lub la_3 (oznaczając oktawę u dołu litery tonowej), jest to jeszcze ton wydany przez trzecią strunę skrzypiec.

Drugą własnością gammy naturalnej jest, że zaczynając od tonu fundamentalnego, półton przypada między 4 i 5 tonem, to jest tam

*) Litera *h* stoi tu za *b* z przyczyny ażeby te litery odpowiadały zupełnie nazwom dziś w muzyce używanym.

przypada złamanie kolumny tonów przechodząc z parzystych liczb skali na nieparzyste, jakoż porządek gammy naturalny kwintami jest

$$\begin{array}{cccccccc} a, & e, & h, & f, & c^x, & g^x, & d^x, & a \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 0 \end{array}$$

a układając porządkiem wartości

$$\begin{array}{ccccccccccc} a & h & c^x & d^x & . & e & f & g^x & . & a \\ 0 & 2 & 4 & 6 & . & 1 & 3 & 5 & . & 0 \end{array}$$

co odpowiada stosunkom (a);

$$1 \quad \frac{10}{9} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{17}{12} \quad . \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{17}{9} \quad . \quad 2$$

czyli $\frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{18}{17} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{18}{17}$

co dowodzi powyższej prawdy, że pólton w tym układzie gammy przypada między 4 i 5 tonem i ma wartości $^{18}/_{17}$.

Podobnie zaczynając na skali od tonu *c*, będzie

$$\begin{array}{ccccccc} c, & g, & d, & a, & e, & g, & f \\ -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3 \end{array}$$

a biorąc *c* za ton fundamentalny, czyli dodając do wyrazów wszystkich drugiego szeregu odległości 3 i układając porządkiem liter będzie

$$\begin{array}{ccccccccccc} c & d & e & f & . & g & a & h & . & c \\ 0 & 2 & 4 & 6 & . & 1 & 2 & 3 & . & 0 \end{array}$$

gdzie również pólton przypada między 4 i 5 tonem i gdzie *f* wyraża odległość $\frac{17}{12}$ i odpowiada dzisiejszemu f^x.

Gamma ta składa się więc z czterech tonów całych w początku, potem idą trzy tony całe przedzielone od tamtych półtonami; i tą formą odpowiada dawnej greckiej gammie zwanej *lidyjską*. Lidyjska więc gamma jest naturalną.

Skala naturalna kwint Nr. 1 składa się z następujących oznaczeń: z nut klucza skrzypcowego, — nad nim szereg nazw włoskich tonów, pod niemi w pierwszej linii litery oznaczające tony, w drugiej odległości liczbowe, w trzeciej stosunki, w czwartej nazwy odległości, w piątej rodzaje odległości, a w ostatniej odległości w częściach całego tonu.

11. Ponieważ gamma używana ma trzy tony całe, a następnie cztery tony całe oddzielone półtonami, tak że półton pierwszy przypada między 3 i 4 tonem. Wywód ten gammy empirycznej sprawił tu odstąpienie od naturalnego układu, a gdy nic nie stoi na przeszkodzie, cały układ tonów można zastosować do postaci gammy dziś używanej.

Jakoż, biorąc ze skali siedm kolejnych wyrazów, zaczynając od 0 jak wyżej

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,

ułóżmy je szeregiem wielkości zaczynając od jakiegokolwiek i szykując co drugi ton, jak idą w gammie, oznaczając przez . kropkę miejsca złamania kolumny gdzie przypadają półtony, otrzymamy następujące kombinacye, które pod względem kolei tonów odpowiadają greckim gammom:

Lidyjska . .	0	2	4	6	.	1	3	5	.	0
Jonicka . .	1	3	5	.	0	2	4	6	.	1
Mixo Lidyjska	2	4	6	.	1	3	5	.	0	2
Dorycka . .	3	5	.	0	2	4	6	.	1	3
Eolska . . .	4	6	.	1	3	5	.	0	2	4
Frygijska .	5	.	0	2	4	6	.	1	3	5
7-ma . . .	6	.	1	3	5	.	0	2	4	6

Wszystkie te kombinacye w szeregu ciągłym nie zmieniają wcale, jak widzimy charakteru pierwotnego, tylko zmieniają początek, dla tego właściwie nic innego nie znaczą i dziś w muzyce nie są używane.

Pierwsza Lidyjska jest gammą naturalną — druga Jonicka jest dziś używaną, gdzie punkt złamania szeregu wypada między 3 i 4 tonem; zatem tę postać

1, 3, 5, 0, 2, 4, 6,

sprowadzając do postaci, aby pierwszy ton był początkiem szeregu; trzeba odjąć jedność co nie zmieni układu, lecz tylko przeniesie początek na inne miejsce i będzie:

0, 2, 4, — 1, 3, 5,

a układając według szeregu naturalnego będzie:

— 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,

to jest że gamma dzisiaj używana na skali kwint wyraża siedm kolejnych tonów, z których drugi ton jest tonem fundamentalnym.

Jeżeli więc teraz oznaczemy szereg ten siedmiu tonów w porządku

0, 2, 4, — 1, 3, 5,

przez litery porządkowe zaczynając od *c*

c, *d*, *e*, *f*, *g*, *a*, *h*

lub *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si* to w porządku naturalnym będzie:

$$-1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3.\quad 4,\quad 5$$
$$f,\quad c,\quad g,\quad d,\quad a,\quad e,\quad h$$

co wyrażając przez stosunki ze skali kwint będzie:

$$f,\quad c,\quad g\quad d,\quad a,\quad e,\quad h$$
$$\frac{4}{3},\quad 1,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{10}{9},\quad \frac{5}{3},\quad \frac{5}{4},\quad \frac{17}{9}$$

a w porządku wielkości

$$c,\quad d,\quad e,\quad f,\quad g,\quad a,\quad h,\quad c$$
$$1,\quad \frac{10}{9},\quad \frac{5}{4},\quad \frac{4}{3},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{3},\quad \frac{17}{9},\quad 2$$

są to więc stosunki dziś oznaczone — a stosunki między tonami będą:

$$\frac{10}{9},\quad \frac{9}{8},\quad \frac{18}{17},\quad \frac{9}{8},\quad \frac{10}{9},\quad \frac{9}{8},\quad \frac{18}{17}$$

to jest że półtonu oznaczone stosunkiem $\frac{18}{17}$ przypada teraz między 3 i 4 tonem ($\frac{5}{4}$ i $\frac{4}{3}$) i odpowiada zupełnie gammie major dziś używanej.

Biorąc jeszcze ton (*d*, *re*) środkowy gammy za początek szeregu, dla symetryi składu samego szeregu, czyli zmieniając liczby przez odjęcie 2 co nie zmieni w niczem postaci gammy i szeregu, będzie:

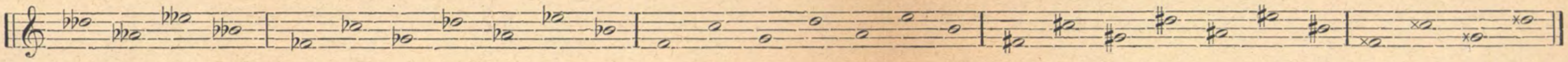
$$-3,\ -2,\ -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3$$
$$f,\quad c,\quad g,\quad d,\quad a,\quad e,\quad h$$

Oznaczając te tony główne, inne które następują po nich tak z jednej jak z drugiej strony, dają się oznaczyć przez też same tony podwyższone ze strony prawej co oznaczemy przez *x*, a z lewej strony zniżonych co oznaczemy przez bemole (*b*) tak że skala linijna kwint przybierze nową formę Nr. 2, a która powinna być podstawą dzisiejszej muzyki i może ciągnąć się w obu kierunkach do nieskończoności; — względnie jednakże do naszego ucha, musimy ograniczyć się do mniejszej liczby tonów.

Ponieważ liczby porządkowe wyrażają odległości od tonu fundamentalnego, dla których miarą czyli jednością jest odległość kwinty, przeto jeszcze siedm tonów gammy naturalnej, jako następstwo tonów, nazywamy: primą, sekundą, tercyą, kwartą, kwintą, sekstą, septymą i oktawą, z których oktawa jest zgodna z primą; — nazwy te nie tworzą odległości równych, przeto nie mają znaczenia ścisłego, a tylko jako następstwo wyrazów składających gammę, i wyrażają ściśle kolej tonów w gammie zwyczajnej, oznaczając je przez litery początkowe

SKALA NATURALNA KWINT Nr. 2.

Tony: re^{bb} la^{bb} mi^{bb} si^{bb} fa^{b} ut^{b} sol^{b} re^{b} la^{b} mi^{b} si^{b} *fa* *ut* *sol* *re* *la* *mi* *si* fa^{x} ut^{x} sol^{x} re^{x} la^{x} mi^{x} si^{x} fa^{xx} ut^{xx} sol^{xx} re^{xx}



Tony:	d^{bb}	a^{bb}	e^{bb}	h^{bb}	f^{b}	c^{b}	g^{b}	d^{b}	a^{b}	e^{b}	h^{b}	f	c	g	d
Odległości:	−14	−13	−12	−11	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
Stosunki:	$\frac{9}{5}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{9}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{18}{17}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{4}{3}$	1
Nazwa odległości:	*O*	*Kn*	*Sk*	*Sx*	*T*	*Sp*	*Kr*	*O*	*Kn*	*Sk*	*Sx*	*T*	*Sp*	*Kr*	*P*
Rodzaje odległości:	< zmniejszone >							< minor >						< czyste	
Odległości w częściach tonu całego:	5	$2\frac{1}{2}$	0	$3\frac{1}{2}$	1	$4\frac{1}{2}$	2	$5\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{2}$	4	$1\frac{1}{2}$	5	$2\frac{1}{2}$	0

Tony:	a	e	h	f^{x}	c^{x}	g^{x}	d^{x}	a^{x}	e^{x}	h^{x}	f^{xx}	c^{xx}	g^{xx}	d^{xx}
Odległości:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Stosunki:	$\frac{3}{2}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{9}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{18}{17}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{10}{9}$
Nazwa odległości:	*Kn*	*Sk*	*Sx*	*T*	*Sp*	*Kr*	*O*	*Kn*	*Sk*	*Sx*	*T*	*Sp*	*Kr*	*O*
Rodzaje odległości:	czyste >	< major >						< zwiększone >						
Odległości w częściach tonu całego:	$3\frac{1}{2}$	1	$4\frac{1}{2}$	2	$5\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{2}$	4	$1\frac{1}{2}$	5	$2\frac{1}{2}$	0	$3\frac{1}{2}$	1

P, Sk, T, Kr. Kn, Sx, Sp, O, te nazwy będą odpowiadać na skali kwint Nr. 2 zaczynając od *c*

c,	*d*,	*e*,	*f*,	*g*,	*a*,	*h*,	*c*,	*d*
— 2,	0,	2,	— 3,	— 1,	1,	3,	— 2,	0
Sp,	P,	Sk,	T,	Kr,	Kw,	Sx,	Sp,	O

a układając porządkiem kwint, tak aby początek wypadł w środku szeregu, będzie:

...	*f*,	*c*,	*g*,	*d*,	*a*,	*e*,	*h*,	*f*....
...	— 3,	— 2,	— 1,	0,	1,	2,	3,	4....
...	T,	Sp,	Kr,	P,	Kn,	Sk,	Sx,	T....

który to szereg nazw używanych dołączyliśmy w skali kwint.

12. Skala tak otrzymana powinna być podstawą najważniejszą, gdyż dozwala każdy szereg tonów ułożonych dowolnie nawet, łatwo i szybko wyrazić w liczbach, w odległościach lub w stosunkach — i odwrotnie, a ztąd łatwo każdy szereg tonów odniesiony do danego tonu fundamentalnego, wyrazić w innym tonie fundamentalnym, przez proste dodanie lub odjęcie od szeregu liczb danych liczby będącej różnicą liczb oznaczających oba tony fundamentalne.

Postępowanie to okażemy na przykładzie: gamma major z tonu *c* jest:

c, *d*, *e*, *f*, *g*, *a*, *h*, *c*

której na skali odpowiadają odległości:

— 2, 0, 2, — 3, — 1, 1, 3, — 2

biorąc np. *a* za ton fundamentalny któremu odpowiada liczba 1, różnica — 2 — 1 = — 3, które trzeba odjąć od tego szeregu liczb, czyli dodać 3 i otrzymamy:

1, 3, 5, 0, 2, 4, 6, 1

a biorąc odpowiednie im tony na skali, otrzymamy gammę major z tonu *a* z 3 krzyżami:

a, h, c^x, d, e, f^x, g^x, a

W dalszym ciągu okaże się wielka użyteczność tej skali linijnej kwint, która bierze nazwę od tego, że jednością jest zasadniczą kwinta i tony idą kwintami, czyli że stosunek $\frac{3}{2}$ wyrażający kwintę jest stosunkiem tego szeregu.

Ztąd mamy pierwsze prawo muzyczne:

Prawo 1. *Z każdego szeregu tonów wyrażonego w liczbach według pewnego tonu fundamentalnego, można łatwo wyprowadzić szeregi odpowiednie* (homologiczne, tonacie) *dla każdego innego tonu fundamentalnego, dodając do wszystkich wyrazów szeregu liczbę która jest różnicą liczb odpowiadających tonom fundamentalnym.*

W szeregu tonów naturalnym na skali

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.....

każde siedm wyrazów kolejnych stanowią gammę, następny zaś wyraz 7 jest ósmym tonem i oznaczyliśmy go oktawą, ztąd wypada, że do liczby odpowiadającej danemu tonowi, dodając lub odejmując liczbę 7 oznaczającą oktawę, mamy tony powiększone lub zmniejszone tej samej nazwy, przeto będzie:

Prawo 2. *W szeregu liczb odległości na skali, liczba 7 oznacza oktawę i przez dodanie lub odjęcie tej liczby od liczb odległości, otrzymujemy też same tony powiększone lub zmniejszone.*

Liczbę tę 7 nazwiemy **modułem** gammy.

14. W szeregu liczb odległości tonów, gdy zaczynając od tonu fundamentalnego 0, bierzemy szereg liczb parzystych, otrzymamy:

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12....

jeżeli ten szereg według prawa powyższego, zredukujemy według modułu 7, to jest wyższe liczby podzielimy przez 7 i pozostawimy tylko reszty, będzie:

0, 2, 4, 6, 1, 3, 5, 0, 2, 4....

i ta postać szeregu będzie ściśle gammą naturalną. Ztąd

Prawo 3 Redukcyi. *Mając dany szereg tonów, zawsze można go sprowadzić do prostszej postaci przez redukcyę jego wyrazów według modułu 7 i redukcya ta odbywa się przez odrzucenie liczby 7 lub jej wielokrotnej z liczb danego szeregu większych od 7.*

To prawo jest bardzo ważnem w muzyce i pozwala wprost wyprowadzić wszystkie własności dalsze muzyki.

Prawo to nadaje nam nową definicyę gammy naturalnej.

Prawo 4. *Szereg tonów, których odległości składają szereg arytmetyczny, którego pierwszy wyraz jest 0, a stosunek 2, zredukowany według modułu 7 jest gammą naturalną.*

Gamma naturalna w tej postaci składa się z czterech liczb parzystych, po których następują trzy liczby nieparzyste — gdy w tej gammie liczby nieparzyste przestawiemy na początek zaczynając od 1, mamy gammę dziś używaną, — zatem gamma ta jest poniekąd sztuczną.

15. Jeżeli nazwiemy gammę naturalną przez $G_y(x)$ gdzie x oznacza początek czyli najmniejszą liczbę na skali kwint, a przez $\div x^2$ szereg arytmetyczny $\div$

$$\div x^2 = x,\ x+2,\ x+4,\ x+6, \ldots$$

i gdy oznaczemy redukcyę według modułu 7 przez R, mod. 7, bardzo łatwo gammę naturalną, przedstawić można przez następny wzór matematyczny:

$$G_y(x) = \mathrm{R}\ (\div x^2)\ \mathrm{mod.}\ 7 \qquad \textbf{(9)}$$

a czyniąc początek czyli ton fundamentalny równy 0 będzie na mocy powyższego

$$G_y(0) = \mathrm{R}\ (\div 0^2)\ \mathrm{mod.}\ 7 \qquad \textbf{(10)}$$

wzory (9 i 10) wyrażają gammy naturalne pierwszy dla jakiegokolwiek tonu fundamentalnego, drugi gdy ton fundamentalny jest *d*. Uważamy tu jeszcze że początek z tonem fundamentalnym stanowią jędną i tęż samą ilość.

Ogólnie trzeba uważać, że nie zawsze początek gammy zgadza się z tonem fundamentalnym, zatem oznaczając początek przez x a ton fundamentalny przez z, to pod znakiem G położemy początek x, a gammę sammą czyli szereg ją wyrażający, zaczniemy zawsze od tonu fundamentalnego, przeto;

$$G_y(x) = \mathrm{R}\ (\div z^2)\ \mathrm{mod.}\ 7 \qquad \textbf{(11)}$$

gdy teraz zakładamy że $x = z$ mamy gammę naturalną, gdy zaś $z = x + 1$ będzie

$$G_y(x) = \mathrm{R}\ (\div x + 1^2)\ \mathrm{mod.}\ 7 \qquad \textbf{(12)}$$

a jeszcze $x = 0$ będzie

$$G_y(0) = \mathrm{R}\ (\div 1^2)\ \mathrm{mod.}\ 7 \qquad \textbf{(13)}$$

to jest $\qquad G_y(0) = 1,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 0,\ \ 2,\ \ 4,\ \ 6$

i jest to wzór, gammy dziś używanéj, gdzie ton fundamentalny 1 jest zawsze w tej gammie drugim tonem szeregu, jak to widzieliśmy wyżej.

Wzory te bardzo proste wskazują nam jaką doniosłość ma nasza teorya skali kwint i prawo redukcyi, pozwalając tym sposobem wprowadzić do muzyki prawa matematyczne i wyrazić główne jej własności przez wzory proste i ściśle matematyczne.

Dwanaście tonów od 0 do 11 na skali kwint obejmują stosunki ściśle równe, albowiem trzynasty ton oznaczony liczbą 12 jest równy $2.\frac{7}{4}$

czyli 2, gdyż ten stosunek ucho odróżnić nie może od oktawy, gdyż wyraża blizko $\frac{1}{9}$ część tonu. *)

Oktawa więc prawie zupełnie ściśle dzieli się na 12 części równych, które nazwano półtonami, tak że oktawa dzieli się na 6 tonów całych i 12 półtonów. Gamma obejmująca wszystkie 12 tonów, zowie się *gammą chromatyczną*, zatem gamma naturalna obejmując 7 tonów, musi się składać z 5 tonów całych i 2 półtonów, aby summa odległości dała 6 całych tonów, co też istnieje rzeczywiście.

Biorąc na skali kwint, zaczynając od początku 0, trzynaście wyrazów otrzymamy wraz z ich odległościami.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, \\ 1, & \frac{3}{2}, & \frac{10}{9}, & \frac{5}{3}, & \frac{5}{4}, & \frac{17}{9}, & \frac{17}{12}, & \frac{18}{17}, & \frac{8}{5}, & \frac{6}{5}, & \frac{9}{5}, & \frac{4}{3}. & 2, \end{array}$$

i szykując podług wielkości otrzymamy:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0, & 7, & 2, & 9, & 4, & 11, & 6, & 1, & 8, & 3, & 10, & 5, & 12 \\ 1, & \frac{18}{17}, & \frac{10}{9}, & \frac{6}{5}, & \frac{5}{4}, & \frac{4}{3}, & \frac{47}{12}, & \frac{3}{2}, & \frac{8}{5}, & \frac{5}{3}, & \frac{9}{5}, & \frac{17}{9}, & 2. \end{array}$$

Widzimy tu że jest to szereg arytmetyczny, którego pierwszy wyraz jest 0 a stosunek 7, zredukowany według modułu 12, a zatem oznaczając tę gammę przez G_{12} (0), a szereg przez $\div 0^7$ wzór matematyczny tej gammy będzie

$$G_{12}\ (0) = R\ \left(\div 0^7\right) \text{ mod. } 12 \qquad \textbf{(14)}$$

Ztąd mamy prawo:

Prawo 5. *Gamma chromatyczna jest szeregiem arytmetycznym tonów o stosunku 7 zredukowanym według modułu 12.*

Zmieniając początek będziemy mieli wzór ogólny tej gammy **)

$$G_{12}\ (x) = R\ \left(\div x^7\right) \text{ mod. } 12 \qquad \textbf{(15)}$$

17. Powiedzieliśmy że siedm głównych tonów składających gammę, oznaczamy jeszcze przez nazwy: prima, sekunda, tercia, kwarta, kwinta, sexta, septima i oktawa, i oznaczyliśmy przez litery początkowe:

P, Sk, T, Kw. Kr, Sx, Sp, O

które zarazem oznaczają także odległości, a następne są temiż samemi odległościami zwiększonemi lub zmniejszonemi i następują kolejno co 7 tonów, przeto każda z tych odległości ma kilka wartości liczebnych, któ-

---

*) Patrz przypisek 3-ci.

**) Patrz przypisek 5-ty.

re składają szeregi arytmetyczne ze stosunkiem 7, np. kwinta jest 1, wszystkie kwinty zawarte będą w szeregu arytmetycznym:

$$-13, -5, \quad 1, \quad 8, \quad 15$$

z stosunkiem 7, zatem można napisać:

$$\mathrm{Kn} = 7t + 1$$

gdzie t jest ilość dowolna, całkowita dodatna lub odjemna; — podobnie otrzymamy wyrażenia na inne odległości, które będą się różnić tylko pierwszym wyrazem szeregu i tak:

$$\mathrm{Sk} = 7t + 2, \quad \mathrm{Kn} = 7t + 1,$$
$$\mathrm{T} = 7t + 4, \quad \mathrm{Sx} = 7t + 3,$$
$$\mathrm{Kw} = 7t + 6, \quad \mathrm{Sp} = 7t + 5,$$
$$\mathrm{O} = 7t\cdot$$

Oznaczając ogólnie te odległości czyli interwale przez $\mathrm{I}_{(n)}$ gdzie n wyraża liczbę interwalu, można jeszcze ogólnie napisać

$$\mathrm{I}(n) = 7t + 2n - 2 \ldots. \qquad (16)$$

Ztąd mamy prawo ogólne:

Prawo 6. *Odległość czyli interwale jednoimienne, składają szeregi arytmetyczne o stosunku stałym 7, których pierwszy wyraz jest równy podwójnej liczbie oznaczającej odległość, zmniejszonej dwoma jednościami.*

18. W powyższym paragrafie oznaczone odległości są odniesione do skali kwint, gdzie kwinta jest wzięta za jedność, jeżeli zaś odniesiemy je biorąc sekundę za jedność, czyli wyrazimy je w częściach podziału gamy na 6 tonów całych, czyli jeszcze w częściach tonu całego który właśnie jest sekundą; otrzymamy odległości liczbowe, które są potrzebne w muzyce dla oznaczenia rodzaju tych odległości, dla tego potrzeba oznaczyć odległość kwinty w tych nowych jednościach; jakoż gamma przedstawia następujące odległości:

	c,	*d*,	*e*,	*f*,	*g*,	*a*,	*h*,	*c*
	1,	1,	$\frac{1}{2}$,	1,	1,	1,	$\frac{1}{2}$	
Nazwy odległości	P	Sk	T	Kw	Kn	Sx	Sp	O
Odległość od primy		1,	2,	$2\frac{1}{2}$,	$3\frac{1}{2}$,	$3\frac{1}{2}$,	$5\frac{1}{2}$,	6

Z tego wypada że kwinta wyrażona w jednościach całego tonu, równa się $3\frac{1}{2}$ tonu, biorąc więc za stosunek $3\frac{1}{2}$, wyrazy szeregu zaczynając od 0 wyrażą się przez

$$\div 0;\quad 3\frac{1}{2},\quad 7,\quad 10\frac{1}{2}\ldots\ldots$$

a redukując według modułu 6 otrzymamy wszystkie odległości czyli interwale muzyczne:

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12
0,	$3\frac{1}{2}$,	1,	$4\frac{1}{2}$,	2,	$5\frac{1}{2}$,	3,	$\frac{1}{2}$,	4,	$1\frac{1}{2}$,	5,	$2\frac{1}{2}$,	0
P,	Kn,	Sk,	Sx,	T,	Sp,	Kr,	O,	Kn,	Sk,	Sx,	T,	Sp

Za pomocą tych danych wzór (16) da się wyrazić tak:

$$I(n) = R\left\{3\frac{1}{2}\,(7t+2n-2)\right\} \text{ mod. } 6$$

czyli
$$I(n) = R\left(n+\frac{1}{2}t-1\right) \text{ mod. } 6 \tag{16'}$$

lub też prosto
$$I(n) = \frac{1}{2}t+n-1 \tag{16''}$$

gdzie n znaczy odległość wyrażoną w liczbach dla sekundy 2, tercyi 3 i t. d., t liczba dowolna np. $n=3$, szereg tercyi wyrazi się przez $T = I\,(3) = (\frac{1}{2}t+2)$ a czyniąc $t=0,\ 1,\ 2$, otrzymamy $2,\ 2\frac{1}{2},\ 3\ldots\ldots$ ten to szereg liczb umieszczony został na skali Nr. 1 i 2 w ostatniej poziomej linii.

19. Szereg tonów muzycznych objęty skalą linijną Nr. 2 ciągnie się do nieskończoności w obie strony, peryod znowu 12 tonów jakkolwiek dostateczny dla instrumentów o stałym głosie, nie obejmuje wszystkich tonów które mogą wydawać instrumenta smyczkowe, a które ucho dostatecznie może odróżnić, granicy jednak tej nie można ściśle podać, zdaje się, że najlepszym podziałem do tego jest podział tonu na półtony i ćwierci tony, powinien więc być peryód tonów obejmujący podział ćwierć tonowy a takim właśnie w szeregu peryodów jest 29 wyrazowy, to jest peryod obejmujący szereg kolejny wyrazów od — 14 do + 14 na skali linijnej zawarty między nutami d^{bb} i d^{xx}, cała tu rozciągłość skali daje się wyrazić przez rodzaj gammy 29 tonowej czyli szeregu arytmetycznego o stosunku 12, zredukowanego według modułu 29 — to jest

$$G_{29}\ (0) = R\left(\div 0^{12}\right) \text{ mod. } 29$$

rozwijając ten wzór w granicach połowy modułu $\pm$ 14 otrzymujemy żądaną gammę, której postać będzie:

Skala kołowa Kwint № 3.

Skala kołowa Kwint № 4.

$G_{29}\ (0) = 0,\ 12, -5,\ 7, -10,\ 2,\ 14, -3,\ 9, -8,\ 4, -13, -1,$

$d,\ c^{xx},\ e^{b},\ d^{x},\ f^{b},\ e,\ d^{xx},\ f,\ e^{x},\ g^{b},\ f^{x},\ a^{bb},\ g$

$11, -6,\ 6, -11,\ 1,\ 13, -4,\ 8, -9,\ 3, -14, -2,\ 10, -7,\ 5, -12,\ 0$

$f^{xx},\ a^{b},\ g^{x},\ h^{bb},\ a,\ g^{xx},\ h^{b},\ a^{x},\ c^{b},\ h,\ d^{bb},\ c,\ h^{x},\ d^{b},\ c^{x},\ e^{bb},\ d$

w którym to szeregu prócz 24 ćwierć tonów wchodzą jeszcze 5 tonów wyrażających się przez $\frac{1}{9}$ część tonu.

Tak więc cała skala muzyczna dotąd używana będzie się składać z 29 tonów wyrażonych w odległościach i objętych następną tablicą: *)

Interwale	Odległość w kwintach	Interwale	Odległość w kwintach
Prima	0	Prima	0
Kwarta czysta . . .	— 1	Kwinta czysta . . .	1
Septyma minor . . .	— 2	Sekunda major . . .	2
Tercya „ . . .	— 3	Sexta „ . . .	3
Sexta „ . . .	— 4	Tercya „ . . .	4
Sekunda „ . . .	— 5	Septyma „ . . .	5
Kwinta „ . . .	— 6	Kwarta „ . . .	6
Oktawa „ . . .	— 7	Oktawa „ . . .	7
Kwarta zmniejszona .	— 8	Kwinta zwiększona .	8
Septyma „ . .	— 9	Sekunda „ .	9
Tercya „ . .	— 10	Sexta „ .	10
Sexta . „ . .	— 11	Tercya „ .	11
Sekunda „ . .	— 12	Septyma „ .	12
Kwinta „ . .	— 13	Kwarta „ .	13
Oktawa „ . .	— 14	Oktawa „ .	14

20. Jeżeli rozwijamy szereg ilorazowy potęg, mający za stósunek kwintę $\frac{3}{2}$ i szukamy najprostszych reduktów § 7, to otrzymujemy, że 12-ty wyraz tego szeregu ma wartości $\frac{75}{74}$ i zbliża się najwięcej do oktawy i różni się od niej tylko o $\frac{1}{9}$ część tonu całego wyrażonego przez stosunek $\frac{10}{9}$; — zatem o ilość tak małą że ucho różnicy uchwycić tu nie zdolne, zatem następne wyrazy są rzeczywiście powtórzeniem pierwszych, tak że szereg ten można uważać za skończony i peryodyczny, którego peryod zawiera 12 tonów; przyjmując ten peryod i uważając, że w stronę prawą początku 0 idą tony podwyższone, a po lewej stronie zniżone, zatem skala linijna da się wyrazić kołowo, zamieszczając z prawej strony 12 tonów podwyższonych a po lewej zniżonych, czyli umieszczając dwie oktawy i dzieląc okrąg koła na 24 części a skala linijna zmieni się teraz na kołową kwint Nr. 3.

*) Patrz przypisek 5 i 7.

Teraz stosunki już nam zupełnie nie potrzebne, zatem je możemy opuścić, nazwy odległości zamieścimy na promieniach i tym sposobem utworzy się żądana skala która będzie obejmować 24 tonów, z których połowa jest tych samych zupełnie, lecz uważanych raz jako zniżone, to znowu jako podwyższone, i więcej ich rzeczywiście w muzyce być nie może. Linia pionowa *dd* dzieli skalę na dwie połowy zupełnie równe, tak że część lewa obejmująca liczby odjemne, ma odpowiednie tony w części prawej obejmującej liczby dodatne, znajdujące się na końcach tychże samych średnic; tak że jedna połowa przez obrót około środka przyjmuje położenie takie że tony jednej połowy odpowiadają drugiej. Podobnież linia pozioma a^b, g^x czyli — 6, 6 także dzieli ją na dwie części, z których część górna ma odpowiednie tony w części dolnej, i obie obejmują każda 12 tonów składających gammę.

Ta skala daje się jeszcze uprościć dzieląc koło na 12 tylko części równych, przyjmując dla tonów podwyższonych miejsca zewnętrzne a dla tonów zniżonych miejsca wewnętrzne, otrzymamy ztąd nową skalę kołową Nr. 4.

Wszystkie te skale są wielkiej wagi w muzyce; na nich dadzą się wykonywać wszystkie przemiany tak tonów jak całych szeregów czyli związków tonów za pomocą prostych działań arytmetycznych dodawania i odejmowania.

21. Każdy związek tonów można zawsze wyrazić za pomocą skali przez szereg liczb wyrażających odległości, i na odwrót dany szereg liczb możemy łatwo za pomocą tejże skali zamienić na szeregi odpowiednich tonów. Każdy taki szereg tonów można zawsze przez zmianę tonu fundamentalnego czyli przez proste dodanie lub odjęcie od szeregu liczb, ten szereg tonów wyrażający, liczby odpowiadającej danemu tonowi fundamentalnemu; a następnie sprowadzić do tonu będącego początkiem skali i oznaczonego liczbą 0.

Jakoż niech będzie szereg tonów wyrażony liczbami

$$\div a_0, \quad a_1, \quad a_2, \ldots \quad a_n, -b_0, -b_1, -b_2, \ldots$$

gdzie ton fundamentalny niech będzie a_0 a największa liczba odjemna niech będzie b_0 to układając porządkiem wielkości będzie:

$$\div -b_0, -b_1, -b_2, \ldots \quad a_0, \quad a_1, \quad a_2, \ldots \quad a_n$$

dodając b_0 do wszystkich wyrazów, wyrazy odjemne znikną, pierwszy wyraz staje się 0 i będzie:

$$\div 0, (b_0 - b_1), \ldots \quad (a_0 + b_0), \quad \ldots \quad (a_n + b_0), \ldots$$

szereg wyrażony na skali kwint mający za początek 0 i wszystkie wyrazy dodatne.

Dalej jeszcze, każdy szereg znowu odniesiony do początku 0 przez redukcyę według modułu 12, można zawsze zamienić na taki że będzie zawarty w połowie dodatnej skali kołowej. Ztąd będziemy mieli prawo:

Prawo 7. *Każdy szereg jakichkolwiek tonów ułożony według danego tonu fundamentalnego, daje się zawsze sprowadzić bez zepsucia jego formy i własności do szeregu wyrażającego się przez liczby dodatne, mającego za początek 0 i w granicach modułu 12.*

W tych zmianach tonu fundamentalnego, różnicę tonu najwyższego na skali kwint od najniższego oznaczemy przez E i nazwiemy *rozciągiem* szeregu danego; ten rozciąg jest stałym i niezmiennym, jakkolwiek będziemy zmieniali ton fundamentalny, i tak w powyższym szeregu tą różnicą jest $a_n + b_0$, albowiem zmiana tonu fundamentalnego wyraża się przez dodanie lub odjęcie od wszystkich wyrazów jednej i tej saméj liczby, przeto ton najniższy $-b_0$ i najwyższy a_n wyrażą się, oznaczając liczbę którą dodać lub odjąć mamy przez λ, $a_n \pm \lambda$, $-b_0 \pm \lambda$, a różnica będzie $a_n \pm \lambda + b_0 \mp \lambda = a_n + b_0$. Ztąd mamy prawo:

Prawo 8. *Każdy szereg tonów ma stały rozciąg bez względu na zmianę tonu fundamentalnego i ten rozciąg mierzy się różnicą najwyższego i najniższego tonu na skali kwint.*

22. Jakikolwiek mamy szereg tonów, ten szereg wyraża się przez różne potęgi z wykładnika szeregu kwint $\frac{3}{2}$. Iloczyn tych wyrazów daje się wyrazić przez summę ich wykładników czyli przez summę liczb skali muzycznej wyrażających odległości. I tak, jeżeli oznaczemy początek szeregu czyli ton najniższy przez x, szereg tonów można przedstawić przez $x + a_1$, $x + a_2$, $x + a_3$ .... a ztąd oznaczając przez $\varphi_m(x)$ summę tych wyrazów, będzie $\varphi_m(x) = mx + a_1 + a_2 \ldots = mx + \Sigma_1^{(m-1)}(a_k)$, zmienna x odpowiada tonowi początkowemu. Ponieważ można zawsze szereg zmienić na inny, w którym $x = 0$, a zatem będzie:

$$\varphi_m(0) = \Sigma_1^{m-1}(a_k)$$

a ztąd także:

$$\varphi_m(x) - mx = \Sigma_1^{m-1}(a_k)$$

zmieniając x, ostatni wyraz nie zmienia się i zostaje stałym, ten to wyraz nazwiemy *zawartością* danego szeregu tonów, zatem będzie:

Prawo 9. *Zawartość szeregu bez względu na zmianę tonu funda-*

mentalnego ma wartość stałą i ta zawartość mierzy się summą wyrazów szeregu tonów zamienionych na liczby wyrażające odległości w jedności kwinty, odniesionego do tonu fundamentalnego 0.

Rozciąg i zawartość szeregu tonów stanowią dwie stałe ilości niezależne od tonu fundamentalnego, a tylko od układ u szeregu i od sposobu redukcyi według danego modułu. Zawartość będziemy oznaczać przez S, zatem jeszcze *)

$$S = \varphi_m(0) = \Sigma_1^{m-1}(a_k)$$

Z tych praw wypada: że każdy szereg tonów, aby przedstawiał się muzycznie, musi być szeregiem arytmetycznym odległości o stałym stosunku, lub takimże szeregiem zredukowanym według danego modułu, to jest 7 lub 12, które to liczby stanowią podwójny podział oktawy. Szeregi takie mają te własności, że ich rozciąg i zawartość są stałe i niezmienne i nie zależą od tonu fundamentalnego, to jest zostają stałe, chociaż te szeregi przechodzą przez całą skalę muzyczną i cechują wraz ze stosunkiem każdy szereg. Zatem *stosunek*, *rozciąg* i *zawartość* są trzy cechy szeregu muzycznego i stanowią podstawy muzyki.

23. Pomiędzy szeregami muzycznemi najważniejszym i głównym jest szereg arytmetyczny składający skalę kwint o stałym stosunku 1. a początkowy wyraz 0. i składa szereg liczb porządkowych. Zmieniając stosunek szeregu, otrzymujemy inne związki muzyczne, których jednak liczba nie jest nieskończoną, a nawet bardzo ograniczoną; z przyczyny, iż modułem redukcyjnym jest liczba 7. Zatem stosunek szeregów jest także ilością peryodyczną, której peryod jest liczba 7, tak że oznaczając stosunek przez r a przez $7k$ liczbę peryodów z liczby 7, a sam szereg przez V (r) będzie:

$$V\ (7k+r) = V\ (r)$$

a w szczególe

$$V\ (1) = V\ (8) = V\ (15) \ldots\ldots$$
$$V\ (2) = V\ (9) = V\ (16) \ldots\ldots$$

Ztąd będzie prawo muzyczne.

Prawo 10. *Szeregów muzycznych o stałym stosunku jest liczba bardzo ograniczona a mianowicie jest ich siedm o stosunkach 1 do 7 ....*

Liczba powyższa siedmiu szeregów jeszcze się redukuje do mniejszej liczby uważając że liczby dopełniające się do liczby 7, wydają sze-

---

*) Patrz przypisek 6-ty.

regi też same, tylko odwrócone; jakoż: niech będą dwa szeregi różne o stosunkach a i b postaci:

$$0^{a},\quad a,\quad 2a,\quad 3a, \ldots\ldots na$$

$$0^{b},\quad b,\quad 2b,\quad 3b, \ldots\ldots nb$$

załóżmy że a i b dopełniają się do 7 czyli że $a + b = 7$, to kładąc za b, $7 - a$ drugi szereg zamieni się na

$$0^{7-a},\quad 7-a,\quad 14-2a, \ldots.\ 7n-na$$

a redukując względem modułu 7 będzie

$$0^{-a},\quad -a,\quad -2a\quad -3a \ldots.. -na$$

a dodając na co nie zmienia szeregu będzie:

$$na,\quad (n-1)a, \ldots..\ 3a,\quad 2a,\quad a,\quad 0$$

szereg ten sam co pierwszy.

A zatem ponieważ mamy tylko trzy możliwe sposoby rozłożenia liczby 7 na dwie liczby całe to jest

$$1+6=7$$

$$2+5=7$$

$$3+4=7$$

przeto mamy tylko trzy różne związki czyli szeregi muzyczne wypływające z naszéj teoryi.

1) Pierwszy szereg muzyczny o stosunku 1.

Ponieważ liczba 1 odpowiada kwincie, przeto jak to już wiemy, jest to *szereg kwint* czyli nasza *skala muzyczna* (l'ordre des quintes)

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5 \ldots.$$

stanowiąca prawo najważniejsze systemu muzycznego, tak zwany jeszcze porządek kwint.

2) Drugi szereg muzyczny ze stosunkiem 2.

Ponieważ liczba 2 jest odległością sekundy, przeto szereg ten wyraża się przez szereg naturalny odległości, albowiem jest to szereg liczb parzystych:

$$0,\quad 2,\quad 4,\quad 6,\quad 8, \ldots..$$

które wyrażają na skali muzycznéj szereg odległości

P, Sk, T, Kr, Kn, Sx, Sp, O....

zatem jest to szereg naturalny odległości czyli tak nazwany szereg *diatoniczny* (l'ordre diatonique) lub porządek diatoniczny. Dodać tu musimy że tenże sam porządek wypada z szeregu liczb nieparzystych, albowiem nic się tu nie zmieni, gdy początek zmienimy na 1, przez dodanie jedności do wszystkich wyrazów i zamieni się na

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\ldots.$$

Szereg ten jako przedstawiający następstwo kolejne odległości stanowi to co zowiemy *gammą naturalną* lub diatoniczną, jak to już wyżéj widzieliśmy, a co tu się doskonale wyjaśnia i szereg ten diatoniczny czyli gamma diatoniczna jest podstawą *melodyi* jako nauki o związkach kolejnych tonów.

3) Trzeci szereg muzyczny ze stosunkiem 3 lub 4. Ponieważ liczba 4 odpowiada tercyi, przeto jest to *szereg tercyi* (liczba 3 odpowiada sexcie) postaci

$$0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12\ldots.$$

lub

$$0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16\ldots.$$

czyli w odległościach przez szereg:

P, T, Kn, Sp, Sk, Kr, Sx, O....

jest szereg szczególny nazwany jeszcze *porządkiem tercyi* (l'ordre des tierces). Szereg ten składa szereg tonów współczesnych, współbrzmiących i składa to co zowiemy *akordem* i jest podstawą *harmonii*, jako nauki o szeregach współbrzmiących tonów czyli nauki o akordach.

Tym sposobem odrazu przechodzimy do rozdziału teoryi muzyki, na dwie części główne: nauki melodyi i harmonii i do dwóch praw głównych tych gałęzi, to jest szeregu diatonicznego czyli gammy naturalnej i szeregu tercyi czyli akordów.

§ 2. Prawa melodyi.

24. Ośm kolejnych tonów wziętych na skali muzycznéj i ułożonych tak, że tworzą szereg arytmetyczny ze stosunkiem 2, czyli sekundy, zredukowany według modułu 7, stanowi gammę naturalną czyli diatoniczną. Oznaczamy ją przez $G_7\ (x)$, gdzie x wyraża ton fundamentalny, to gamma da się tak wyrazić § 15.

$$G_7\ (x) = R\ (\div x^2)\ \text{mod. } 7 \qquad (1)$$

czyli rozwijając to wyrażenie będzie

$$G_7\ (x) = R\ (x,\ x+2,\ x+4, \ldots)\ \text{mod. } 7, \qquad (2)$$

gdzie szereg w nawiasie po drugiéj stronie potrzeba zredukować według modułu 7.

Ten wzór (2) przedstawia dwie ważne własności; pierwsza zależy na zmianie ilości x, druga na zmianie samych wyrazów według modułu 7. Ztąd otrzymujemy dwa rodzaje gammy diatonicznéj, — jedne wypływają z redukcyi według modułu 7, i te stanowią różne typy gammy pierwotnéj, drugie wypływają ze zmiany ilości x; — a że zmiana ilości x, jak wiemy nie zmienia własności gammy, przeto będą stanowiły gatunki jednego typu.

25. Przedewszystkiem zajmiemy się oznaczeniem różnych typów gammy diatonicznej, dla tego możemy przyjąć $x = 0$, to jest sprowadzić wszystkie typy do jednego i tegoż samego początku skali muzycznéj, to jest do tonu d odpowiadającego $x = 0$ na tejże skali. To sprowadza wzory (1 i 2) do postaci oswobodzonéj od x czyli od ich gatunków, a zawierającéj tylko wszystkie możliwe typy

$$G_7\,(0) = R\left(\div 0^2\right) \text{ mod. } 7 \tag{3}$$

i

$$G_7\,(0) = R\,(\div 0,\ 2,\ 4,\ 6\ \ldots.) \text{ mod } 7 \tag{4}$$

a wykonywając wskazane działanie redukcyi otrzymamy:

$$\begin{array}{l} G_7\,(0) = 0,\ \ 2,\ \ 4,\ \ 6,\ \ 1,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 0 \\ \qquad\qquad -5, -3, -1, -6, -4, -2 \end{array}$$

zmieniając liczby odjemne na dodatne, przez zmianę tonu fundamentalnego lub też wprost przy redukcyi co do modułu 7, zostawiając w każdéj kolumnie pionowéj liczby mniejsze od 12, będzie jeszcze:

$$\begin{array}{l} G_7\,(0) = 0,\ \ 2,\ \ 4,\ \ 6,\ \ 1,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 0 \\ \qquad\qquad\quad 9,\ 11\ \ .\ \ 8,\ 10,\ \ 0, \end{array} \tag{5}$$

wyrażenie to rozpada się na dwa działy: gammy siedmiotonowéj

$$\begin{array}{l} G_7\,(0) = 0,\ \ 2,\ \ 4,\ \ 6,\ \ 1,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 0 \\ \qquad\qquad\quad 9,\ 11\ \ .\ \ 8,\ 10\ \ . \end{array} \tag{6}$$

i gammy sześcio-tonowéj

$$\begin{array}{l} G_6\,(0) = 0,\ \ 2,\ \ 4,\ \ 6,\ \ 1,\ \ 3,\ \ 0 \\ \qquad\qquad\quad 9,\ 11\ \ .\ \ 8,\ 10 \end{array} \tag{7}$$

każdy z tych działów ma po 16 rodzai to jest $2^4 = 16$, kombinując z sobą liczby tak, aby zawsze brać z każdéj kolumny pionowéj po jednej liczbie.

Gdy jeszcze ułożemy te wyrazy porządkiem naturalnym, otrzymamy jeszcze:

$$G_7\,(0) = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 0$$
$$8, \quad 9, \quad 10, \quad 11 \qquad (8)$$

$$G_6\,(0) = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 6, \quad 0$$
$$8, \quad 9, \quad 10, \quad 11, \qquad (9)$$

Tu już widziemy, że w porządku naturalnym rodzaje gamm będą zależyć od zastąpienia pierwszych czterech liczb 1, 2, 3, 4 przez też same liczby powiększone modułem 7.

Dla rozgatunkowania szczegółowego tych gamm i poznania bliżéj ich własności, potrzeba poznać interwale czyli odległości jakie oddzielają tony między sobą i na ich wzajemnym układzie możemy tylko oprzeć ich podział na rodzaje.

26. Wiemy że interwale objęte są ogólnym wzorem (16) postaci: § 17.

$$I\,(n) = n + \frac{1}{2}\,t - 1$$

sąsiedni interwal wyrazi się przez

$$I\,(n+1) = n + \frac{1}{2}\,t'$$

ztąd różnica dwóch sąsiednich interwali będzie:

$$I\,(n+1) - I\,(n) = \frac{1}{2}\,(t' - t) + 1$$

a że każdy interwal we wzorach (8 i 9) ma tylko po dwie wartości, przeto t i t' będą miały po dwie wartości 0, 1, a kombinacya ich wyda:

$$t' = 0, \quad 1, \quad 0, \quad 1$$
$$t = 0, \quad 0, \quad 1, \quad 1$$

zatem:

$$I\,(n+1) - I\,(n) = 1\tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{2}, \quad 1.$$

to jest odległości jakie oddzielają tony między sobą są trzech rodzai tylko $\frac{1}{2}$, 1 i $1\frac{1}{2}$ tonowe. Jeżeli teraz ułożymy kombinacye z tych trzech interwali po 7 branych, ale tak żeby summa ich była równa 6; otrzymujemy tylko trzy kombinacye i więcéj ich być nie może, to jest:

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$$
$$1\frac{1}{2},\ 1,\ 1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$$
$$1\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$$

zatem gammy 7 tonowe można podzielić na trzy rzędy, jedne zawierające interwale 1 i $^1/_2$ tonowe, drugie zawierające jeden interwal $1^1/_2$ tonowy, trzecie zawierające dwa interwale $1^1/_2$ tonowe. Według więc tego systematu 16 rodzai gamm 7 tonowych można podzielić na trzy następujące rzędy.

Dział 1-szy. Gammy 7 tonowe mają tę własność, że w szeregu kwint formą ich pierwotną jest 7 tonów porządkowych postaci

$$G_7\,(0) = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 0$$

zawierają trzy rodzaje gamm tworzące się przez podniesienie liczb 1, 2, 3, 4, o moduł 7, na liczby 8, 9, 10, 11.

Rząd 1-szy. Jedno interwalowe zawierające tylko interwale $\frac{1}{2}$ i 1 ma trzy rodzaje które cechują się układem liczb i rozciągiem i zawartością i będą:

1)	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6	.	.	E = 6,	S = 21.
2)	0,	.	2,	3,	4,	5,	6,	8	.	E = 8,	S = 28.
3)	0,	.	2,	.	4,	5,	6,	8,	10	E = 10,	S = 35.

Pierwszy rodzaj obejmuje 7 tonów kolejnych na skali muzycznej i jest to *gamma naturalna* zwana *majorową*, w niej zmieniając ton 1 na 8 otrzymujemy drugi rodzaj zwany *gammą minorową*, a zmieniając w tej ostatniej ton 3 na 10, otrzymamy trzeci rodzaj, jest to nowa gamma dotąd nieznana, nazwiemy ją *minorową 2-go gatunku.*

Rząd 2-gi. Gammy półtoro interwalowe, zawierają 10 rodzai następnych:

1)	0,	1,	.	3,	4,	5,	6,	9	.	.	.	E = 9,	S = 28
2)	0,	.	.	3,	4,	5,	6,	8,	9	.	.	E = 9,	S = 35
3)	0,	1,	2,	.	4,	5,	6,	10	.	.	.	E = 10,	S = 28
4)	0,	.	.	.	4,	5,	6,	8,	9,	10	.	E = 10,	S = 42
5)	0,	1,	2,	3,	.	5,	6,	11,	.	.	.	E = 11,	S = 28
6)	0,	1,	.	3,	.	5,	6,	9,	11	.	.	E = 11,	S = 35
7)	0,	.	2,	3,	.	5,	6,	8,	11	.	.	E = 11,	S = 35
8)	0,	.	2,	.	.	5,	6,	8,	10,	11	.	E = 11,	S = 42
9)	0,	.	.	3,	.	5,	6,	8,	9,	11	.	E = 11,	S = 42
10)	0,	.	.	.	.	5,	6,	8,	9,	10,	11	E = 11,	S = 49

Różniące się rozciągiem i zawartością tonów i można je jeszcze podzielić na trzy gruppy według rozciągu. Pierwsza gruppa ma rozciąg 9 i niezawierająca tonu 2, a tony 3 i 4 zostają stale niezmienne; — druga gruppa zawiera dwa rodzaje mające rozciąg 10 i niezawierające tonu 3, a zawierające stale ton 4; — nakoniec trzecia gruppa obejmuje 6 rodzai mające rozciągłość 11 i stale niezawierające tonu 4.

Z tych gamm pierwszy rodzaj jest znaną gammą minorową w pierwotnéj swojej postaci, z jednym $1\frac{1}{2}$ tonowym interwalem, inne rodzaje nieznane.

Rząd 3-ci. Gammy dwu półtorointerwalowe zawierają trzy tylko rodzaje

1)	0, 1, . . 4, 5, 6, 9, 10 .	E = 10,	S = 35
2)	0, 1, 2, . . 5, 6, 10, 11 .	E = 11,	S = 35
3)	0, 1, . . . 5, 6, 9, 10, 11	E = 11,	S = 42

wszystkie nieznane, różnią się rozmaitym położeniem interwali.

27. Podobnie i na téj saméj zasadzie rozgatunkujemy gammy 6 tonowe, potrzeba tylko ułożyć kombinacye z trzech odległości $\frac{1}{2}$, 1 i $1\frac{1}{2}$ tonowych po 6 branych, ale tak aby summa ich była równa 6, otrzymujemy cztery kombinacye tylko

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \\ 1\frac{1}{2}, & 1, & 1, & 1, & 1, & \frac{1}{2}, \\ 1\frac{1}{2}, & 1\frac{1}{2}, & 1, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, \\ 1\frac{1}{2}, & 1\frac{1}{2}, & 1\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, \end{array}$$

z których ostatnia kombinacya zawierająca trzy interwali $1\frac{1}{2}$ tonowych, nie może istnieć, gdyż dwa wykluczają trzeci. Ztąd więc gammy tego rodzaju dają się podzielić na trzy rzędy takie same jak gammy 7-mio tonowe.

Dział 2-gi. Gammy 6-cio tonowe mają własność, że na skali muzycznej bierze się 7 tonów kolejnych opuszczając szósty, formą pierwotną jest

$$G_6\,(0) = 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 6,\ \ 0,$$

i zawiera trzy rzędy:

Rząd 1-szy. Gammy jedno interwalowe, wszystkie interwale są równe i cało tonowe, zawiera jeden rodzaj, postaci:

1) 0, 2, 4, 6, 8, 10 E = 10, S = 30

otrzymuje się biorąc kolejno sześć liczb parzystych lub nieparzystych na skali muzycznej.

Rząd 2-gi. Gammy półtorointerwalowe zawiera 6 rodzai:

1)	0,	1,	2,	3,	4,	6	.	.	.	.	E = 6,	S = 16
2)	0,	.	2,	3,	4,	6,	8	.	.	.	E = 8,	S = 23
3)	0,	1,	2,	.	4,	6,	10	.	.	.	E = 10,	S = 23
4)	0,	.	.	.	4,	6,	8,	9,	10	.	E = 10,	S = 37
5)	0,	.	2,	.	.	6,	8,	10,	11	.	E = 11,	S = 37
6)	0,	.	.	.	.	6,	8,	9,	10,	11	E = 11,	S = 44

różniące się rozciągiem i zawartością tonów, wszystkie te rodzaje są nieznane w muzyce.

Rząd 3-ci. Gammy dwupółtorointerwalowe zawiera 9 rodzai, te są:

1)	0,	1,	.	3,	4,	6,	9,	.	.	E = 9,	S = 23
2)	0,	.	.	3,	4,	6,	8,	9,	.	E = 9,	S = 30
3)	0,	1,	.	.	4,	6,	9,	10,	.	E = 10,	S = 30
4)	0,	1,	2,	3,	.	6,	11,	.	.	E = 11,	S = 23
5)	0,	1,	2,	.	.	6,	10,	11,	.	E = 11,	S = 30
6)	0,	1,	.	3,	.	6,	9,	11,	.	E = 11,	S = 30
7)	0,	.	2,	3,	.	6,	8,	11,	.	E = 11,	S = 30
8)	0,	1,	.	.	.	6,	9,	10,	11	E = 11,	S = 37
9)	0,	.	.	3,	.	6,	8,	9,	11	E = 11,	S = 37

wszystkie nieznane w muzyce.

Tym więc sposobem mamy rzeczywiście 36 rodzai gamm. Za pomocą skali muzycznej zamieniając te liczby odległości na nazwy tonów, otrzymamy łatwo ich formy wyrażone w tonach, a układając porządkiem odległości, otrzymamy właściwą ich formę.

28. Zachodzi teraz pytanie, dla czego dotąd teorya muzyki nie używa więcej rodzai gamm jak tylko dwie, kiedy niniejsza teorya wskazuje, że ich może być ani mniej, ani więcej jak 36, — a odrzucając gammy półtorointerwalowe i dwupółtorointerwalowe otrzymujemy jeszcze ich cztery rodzaje następne:

Rodzaj 1-szy. Gamma 7 tonowa złożona z 7 tonów kolejnych na skali muzycznej postaci:

$$G_7\,(0) = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \qquad E = 6,\ \ S = 21$$

znana pod nazwą gammy majorowej naturalnej.

Rodzaj 2-gi. Gamma 7 tonowa złożona z 7 tonów kolejnych w których drugi ton 1, zmienia się na 8 czyli podwyższa o moduł 7, postaci:

$$G'_7\,(0) = 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8, \qquad E = 8,\ \ S = 28$$

jest to gamma zwana *minorowa.*

Rodzaj 3-ci. Gamma 7 tonowa złożona z 7 tonów kolejnych, w których drugi i czwarty ton podwyższony o moduł 7 na 8 i 10, postaci:

$$G_7''(0) = 0,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10, \qquad E = 10,\ S = 35$$

dotąd nieznana w muzyce, nazwiemy ją *minorową 2-go gatunku.*

Rodzaj 4-ty. Gamma 6 tonowa złożona z 6 tonów wyrażonych przez liczby parzyste lub nieparzyste, postaci:

$$G_6(0) = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10, \qquad E = 10,\ S = 30$$

Te cztery rodzaje gamm układając porządkiem diatonicznym, to jest w porządku naturalnych odległości dadzą się napisać tak:

$$G_7(0) = 1,\ 3,\ 5,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 1.$$

$$G_7'(0) = 3,\ 5,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 3.$$

$$G_7''(0) = 5,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 5.$$

$$G_6(0) = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 0.$$

Te cztery typy gamm przedstawiają tę własność, że początek 0 gammy oddziela się od tonu fundamentalnego którym jest pierwszy wyraz gammy i tworzą się łatwo z gammy majorowej w sposób następujący:

Gamma majorowa tworzy się biorąc na skali muzycznej 7 tonów kolejnych zaczynając od jakiegokolwiek np. 0 i biorąc drugi ton za ton fundamentalny czyli tonikę — np. siedm tonów kolejnych będzie:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

na $\quad 1,\ 3,\ 5,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6 \qquad$ (a)

a zmieniając na nazwy tonów według skali muzycznej będzie:

$$a,\ h,\ c^x,\ d,\ e,\ f^x,\ g^x,\ a$$

jest to jedna z gatunków gammy majorowej z tonu *a* z trzema krzyżami.

Gamma minorowa 1° gatunku tworzy się z gammy majorowej, podnosząc ton fundamentalny o 7 do tonu 8 i biorąc znowu drugi za tonikę, jakoż z

$$1,\ 3,\ 5,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6$$

będzie $\quad 3,\ 5,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8 \ldots \qquad$ (b)

a zmieniając na nazwy tonów ze skali muzycznej, będzie:

$$h,\ c^x,\ d,\ e,\ f^x,\ g^x,\ a^x,\ h,$$

jedna z gamm minorowych tonu *h* z czterema krzyżami.

Gamma minorowa 2-go gatunku tworzy się z gammy minorowej

1-go gatunku podobnie jak wyżej, to jest podnosząc tonikę o moduł 7 do liczby 10 i biorąc jej drugi wyraz za tonikę, będzie:

	3, 5, 0, 2, 4, 6, 8
czyli	5, 0, 2, 4, 6, 8, 10

a zmieniając na nazwy tonów będzie:

$$c^x, \quad d, \quad e, \quad f^x, \quad g^x, \quad a^x, \quad h^x, \quad c^x$$

jest to jedna z gamm minorowych 2-go gatunku tonu c^x z pięciu krzyżami.

Nakoniec gamma 6-tonowa tworzy się podobnie z gammy minorowej 2-go gatunku podnosząc jej tonikę o 7 do tonu 12 czyli 0, i biorąc ton drugi za tonikę, jakoż:

5, 0, 2, 4, 6, 8, 10
0, 2, 4, 6, 8, 10, 0

a zmieniając na nazwy tonów będzie

$$d, \quad e, \quad f^x, \quad g^x, \quad a^x, \quad h^x, \quad d$$

Własność tych gamm co do rozmieszczenia interwali są następujące:

Gamma 1-sza.	1,	1,	$\frac{1}{2}$,	1,	1,	1,	$\frac{1}{2}$
Gamma 2-ga.	1,	$\frac{1}{2}$,	1,	1,	1,	1,	$\frac{1}{2}$
Gamma 3-cia.	$\frac{1}{2}$,	1,	1,	1,	1,	1,	$\frac{1}{2}$
Gamma 4-ta.	1,	1,	1,	1,	1,	1,	.

czyli mamy:

Nazwy odległości	P.	S.	T.
1-szej gammy	0,	1,	2.
2-ej gammy	0,	1,	$1\frac{1}{2}$.
3-ej gammy	0,	$\frac{1}{2}$,	$1\frac{1}{2}$.
4-ej gammy	0,	1,	2.

Zatem, w gammie majorowej, sekunda i tercya są wielkie, w gammie minorowej 1-go gatunku sekunda wielka, tercya mała; a w gammie minorowej 2-go gatunku, obie sekunda i tercya są małe, — nakoniec w gammie 6-o tonowej wszystkie interwale równe i wielkie. Dla tego to gamma pierwsza zowie się majorową, dwie drugie minorowe. To są główne własności tych gamm i na tych własnościach zbudowany system ich gatunków doskonale je upraszcza, jak to zaraz przedstawimy.

29. We wszystkich tych rodzajach gamm, zmieniając ton fundamentalny czyli ilość x, w niczem nie zmienimy charakteru samej gammy, tak, że na skali muzycznej, początek gammy każdej można dowolnie przenosić, — zmiana ta dopełnia się łatwo na liczbach przez dodanie lub odjęcie do wszystkich liczb składających gammę, jednej jakiejkolwiek liczby, odpowiadającej nowemu tonowi mającemu być tonem fundamentalnym; — a że w gammie chromatycznej mamy 12 tonów różnych, przeto każda gamma przedstawia jeszcze 12 różnych gatunków zwanych tonacyami

Powyżej otrzymaliśmy następne formy gamm:

$$G_7\,(0) = 1,\ 3,\ 5,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,$$

$$G_7'\,(0) = 3,\ 5,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,$$

$$G_7''\,(0) = 5,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,$$

$$G_6\,(0) = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,$$

jeżeli teraz odniesiemy wszystkie te cztery typy do jednego tonu fundamentalnego, a mianowicie $c = -2$ na skali muzycznej, to potrzeba do pierwszej dodać -3, do drugiej -5, do trzeciej -7, a do czwartej -2, i otrzymamy:

$$-2,\ 0,\ 2,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3.$$

$$-2,\ 0,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3.$$

$$-2,\ -7,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3.$$

$$-2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8.$$

a wstawiając za liczby ze skali muzycznej odpowiadające tony będzie:

Gamma major $= c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ a,\ h,\ c.$

Gamma minor 1-sza $= c,\ d,\ e^b,\ f,\ g,\ a,\ h,\ c.$

Gamma minor 2-ga $= c,\ d^b,\ e^b,\ f,\ g,\ a,\ h,\ c.$

Gamma 6-o tonowa $= c,\ d,\ e,\ f^x,\ g^x,\ a^x,\ c.$

wyrażają one teraz doskonale własności wyżej podane, jakoż gamma majorowa tonu c ma sekundę i tercyę wielką, gamma minorowa z tegoż samego tonu c ma tercyę bemolową czyli małą, a gamma minorowa 2-go gatunku z tonu c ma sekundę i tercyę bemolowe czyli małe.

Tym sposobem wszystkie gatunki gamm sprowadzone tu zostały do jednostajności i do ich prawdziwego związku z sobą, jaką jest powyższa główna własność, — a tym sposobem zyskujemy znakomite uproszczenie, gdyż wszystkie tonacye tych dwóch rodzai ściśle sobie odpowiadają, — są tych samych tonów fundamentalnych i obejmujące też samą ilość bemoli i krzyży.

Tonacye te będą więc szły w następującym porządku, a głównemi ich typami będą to gammy z tonu *c* bez żadnego krzyża.

N-er porządkowy	Tonacye	Typ gammy majorowej	Typ gam. minor. 1 gat. . . *b*	Typ gam. minor. 2 gat. . *b b* . . . . .
1	C, — .	C *d e f g a h c*	C *d* e^b *f g a h c*	C d^b e^b *f g a h c*
2	G, 1*x*, .	G *a h c d e* f^x *g*	G *a* h^b *c d e* f^x *g*	G a^b h^b *c d e* f^x *g*
3	D, 2*x*, .	D *e* f^x *g a h* c^x *d*	D *e* $f^{\cdot}$ *g a h* c^x *d*	D e^b $f^{\cdot}$ *g a h* c^x *d*
4	A, 3*x*, .	A *h* c^x *d e* f^x g^x *a*	A *h* $c^{\cdot}$ *d e* f^x g^x *a*	A h^b $c^{\cdot}$ *d e* f^x g^x *a*
5	E, 4*x*, .	E f^x g^x *a h* c^x d^x *e*	E f^x $g^{\cdot}$ *a h* c^x d^x *e*	E $f^{\cdot}$ $g^{\cdot}$ *a h* c^x d^x *e*
6	H, 5*x*, .	H c^x d^x *e* f^x g^x a^x *h*	H c^x $d^{\cdot}$ *e* f^x g^x a^x *h*	H $c^{\cdot}$ $d^{\cdot}$ *e* f^x g^x a^x *h*
7	F^x, 6*x*, .	F^x g^x a^x *h* c^x d^x e^x f^x	F^x g^x $a^{\cdot}$ *h* c^x d^x e^x f^x	F^x $g^{\cdot}$ $a^{\cdot}$ *h* c^x d^x e^x f^x
8	C^x, 7*x*, G^b, 6*b*	G^b a^b h^b c^b d^b e^b *f* g^b	C^x d^x $e^{\cdot}$ f^x g^x a^x h^x c^x	C^x $d^{\cdot}$ $e^{\cdot}$ f^x g^x a^x h^x c^x
	G^x, 8*x*, D^b, 5*b*	D^b e^b *f* g^b a^b h^b *c* d^b	D^b e^b f^b g^b a^b h^b *c* d^b	G^x $a^{\cdot}$ $h^{\cdot}$ c^x d^x e^x f^{xx} g^x
9	. , A^b, 4*b*	A^b h^b *c* d^b e^b *f g* a^b	A^b h^b c^b d^b e^b *f g* a^b	A^b h^{bb} c^b d^b e^b *f g* a^b
10	. , E^b, 3*b*	E^b *f g* a^b h^b *c d* e^b	E^b *f* g^b a^b h^b *c d* e^b	E^b f^b g^b a^b h^b *c d* e^b
11	. , H^b, 2*b*	H^b *c d* e^b *f g a* h^b	H^b *c* d^b e^b *f g a* h^b	H^b c^b d^b e^b *f g a* h^b
12	. , F, 1*b*	F *g a* h^b *c d e f*	F *g* a^b h^b *c d e f*	F g^b a^b h^b *c d e f*

W miejscach gdzie krzyże giną w dwóch ostatnich kolumnach pionowych przez bemole typowe, tam położone są kropki. Cały ten system jest bardzo prosty i ściśle jednakowy, toniki ich są też same, taż sama ilość krzyży i bemoli, co znakomicie ułatwia zrozumienie i pamiętanie; dziś dla dwóch rodzai tylko mamy toniki różne i różną liczbą krzyży i bemoli opatrzone, — i tak: gamma *a* minor odpowiada gammie *c* major i ma dwa krzyże, gdy ostatnia nie ma żadnego.

Gamma 6-cio tonowa nie przedstawia jak tylko dwa gatunki; gatunek pierwszy z 2-ma krzyżami lub z bemolami z tonu F

$$F_{,2x} \ldots F,\ g,\ a,\ h,\ \overset{x}{c},\ \overset{x}{d},\ f,$$

$$F_{,2b} \ldots F,\ g,\ a,\ h,\ \overset{b}{d},\ \overset{b}{e},\ f,$$

drugi gatunek z trzema krzyżami lub bemolami z tonu C

$$C_{,3x} \ldots C,\ d,\ e,\ \overset{x}{f},\ \overset{x}{g},\ \overset{x}{a},\ c,$$

$$C_{,3b} \ldots C,\ d,\ e,\ \overset{b}{g},\ \overset{b}{a},\ \overset{b}{h},\ c,$$

wszystkie inne są zmianą prostą początku jak łatwo się przekonać.

To są ogólne prawa melodyi, dalsze ich zastosowanie do muzyki, pozostawiamy naszym młodym artystom.

§ 3. Prawa harmonii.

30. Trzeci rodzaj szeregów arytmetycznych o stałym stosunku 3 lub 4, stanowi szereg tercyi, jest podstawą tonów współczesnych i składa to co zowiemy *akordem*, akord zaś jest podstawą drugiej części muzyki którą zowiemy *harmonją*.

Ponieważ odległość jest różnicą liczb wyrażających dwa tony i odpowiada ich stosunkowi, to każda odległość wyraża się przez dwa tony, przeto równoczesność dwóch tonów nie może stanowić akordu, tem bardziej, że ucho ocenia tylko ich stosunek lub odległość, zatem dla wyrażenia akordu potrzeba koniecznie trzech tonów.

Jeżeli oznaczemy jak to wyżéj przyjęliśmy dla gamm, jakikolwiek akord przez $A_m(x)$, gdzie m oznacza ilość tonów zawartą w akordzie, x zaś ton jego fundamentalny, to wszystkie akorda dają się przedstawić przez wzór ogólny:

$$A_m(x) = \left(\div x^4\right) = x,\ x+4,\ x+8, \ldots$$

lecz ponieważ ten szereg liczb przechodzi granice skali muzycznéj, którą jest 12, drugi raz musi być wzięty w granicy 7 tonów, jaką jest rozległość gammy; aby one im odpowiadały; przeto ten szereg musi być zredukowany według modułu 7, tak jak to ma miejsce dla gamm.

A ztąd otrzymamy:

$$A_m(x) = R(\div x^4) \text{ mod. } 7 \qquad (1)$$

wyrażenie to zależy od trzech ilości, to jest od m, x i od redukcyi według modułu 7.

Pierwsza ilość m wyraża liczbę tonów zawartych w akordzie i według tej ilości akordy dzielą się na rozmaite rodzaje, a że najmniej może być trzy tony, zatem będą trzy, cztero, pięcio i t. d. tonowe, — a że w akordzie interwale idą kolejno przez tercye P, T, Kn, Sp, N i t. d. przeto akordy o 3-ch tonach są akordami *kwintowemi*, o 4-ch tonach *septymowe*, o 5-ciu tonach *nonowe*, o 6-ciu tonach *undecimowe*, o 7-miu tonach *terdecimowe*. Druga ilość x stanowi ton fundamentalny akordu, zmieniając tę ilość, akord się niezmienia i stosunki liczb zostają też same, tylko każda liczba o stałą liczbę zostaje powiększoną, czyli że będzie należał do odpowiedniej gammy. Każdy więc dany akord należący do tonu x, a zatem i do gammy z tegoż tonu x, za zmianą x zostaje tymże samym akordem, tylko zależy od innego tonu fundamentalnego i do innéj gammy tegoż samego rodzaju, lecz innego gatunku. Zatem od ilości x zależą gatunki akordu. Zatem jeszcze we wzorze (1) możemy za x przyjąć stale ton fundamentalny 0 czyli uczynić $x = 0$, co daje:

$$A_m(0) = R(\div 0^4) \text{ mod. } 7 \;\ldots\ldots \qquad (2)$$

czyli

$$A_m(0) = R\,(0,\ 4,\ 8,\ 12 \;\ldots\ldots) \text{ mod. } 7 \qquad (3)$$

Nakoniec co do redukcyi według modułu 7, ten warunek tylko może nam dać rozmaite rodzaje akordów, tak jak z tegoż warunku otrzymaliśmy różne rodzaje gamm.

Redukcya ta wymaga, aby każdy wyraz był uważany, jako szereg stosunku 7, którego granice powinny dopełniać pewnych warunków; według naszej skali te granice są oznaczone liczbami ± 12, będącemi granicami gammy chromatycznéj. Własność jednak akordów, współczesności tonów, odrzuca część tonów, a mianowicie te, które ściśle są tożsame z tonami głównemi od -3 do $+3$, czyli od *f* do *h*, albowiem te tony będąc też same nie różnią się niczem i zlewają się w jeden ton i nie mogą razem wchodzić do akordu; — jakoż na skali kwint Nr. 3 szereg tonów od ± 9 do ± 12 właśnie są ściśle równe tonom leżącym na tych samych średnicach od -3 do $+3$; a zatem granice dla akordów będą ± 8, i w tych tylko granicach potrzeba oznaczyć każdy wyraz redukując według modułu 7 i tym sposobem otrzymamy ogólny wzór obejmujący wszystkie rodzaje akordów:

$$\begin{array}{lcccccccc} A_m(0) = & 0, & 4, & 8, & 5, & 2, & 6, & 3, & 0 \\ & -3, & 1, & -2, & -5, & -1, & -4 & \ldots & \\ & . & -6, & . & . & -8, & . & & \end{array} \qquad (4)$$

Z tego wyrażenia widzimy naprzód, że ilość tonów w akordzie musi być ograniczoną; gdyż poczynając od 8 kolumny, wraca się szereg od początku; a zatem mamy następne prawo główne akordów:

Akordy mogą mieć ograniczoną liczbę tonów a mianowicie od 3-ch do 7-iu to jest najmniéj 3 a najwięcéj 7, czyli mogą być 5-ciu rodzai, to jest 3, 4, 5, 6 i 7-io tonowe.

A że w tych akordach trzeci ton jest kwintą, 4-ty septymą, 5-ty noną, 6-ty undecimą a 7-my terdecimą; — przeto jeszcze te akorda zowią się kwintowe, septymowe, nonowe, undecimowe i terdecimowe, razem składają całą gammę przebieżoną tercyami: zatem $m = 3$, 4, 5, 6 i 7.

Niektórzy autorowie muzyczni uważają tyle rodzai akordów za zbytek w muzyce, lecz tu widzimy, że one są koniecznością naukową.

Camille Durutte w dziele: „Technie ou lois générales du systême harmonique. Paris 1855 an", rozwinął na innych zasadach cały system akordów, tam to odsyłamy czytelnika o bliższe szczegóły tych 5-ciu rodzai akordów składających prawdziwe bogactwo muzyczne.

31. Wszystkie te akorda dają się podzielić na dwa rodzaje: akordów *naturalnych* i *zmienionych* (accords naturels et altérés); naturalne, których rozciąg nie przechodzi rozciągu gamm naturalnych; zmienione, których rozciąg przechodzi rozciąg gamm naturalnych.

A że gammy diatoniczne mają rozciąg:

gamma majorowa		$E = 6$
„	minorowa 1-go gat.	$E = 8$
„	„ 2-go gat.	$E = 10.$

Przeto akorda dają się jeszcze podzielić na 4 rodzaje, to jest:

1. Akorda naturalne majorowe, których rozciąg nie przechodzi 6.

2. Akorda naturalne minorowe 1-go gatunku, których rozciąg nie przechodzi 8.

3. Akorda naturalne minorowe 2-go gatunku, których rozciąg nie przechodzi 10.

4. Nakoniec akorda zmienione (altérés), których rozciąg większy od 10.

Naturalną jest rzeczą, że dla gamm majorowych tylko akorda majorowe będą naturalne, wszystkie inne zmienione; podobne dla minorowych 1-go gatunku, akorda majorowe i minorowe 1-go gatunku będą naturalne, dwóch innych rodzai będą zmienione i tak następnie.

Oznaczywszy taki podział akordów, odpowiedni podziałowi gamm, możemy przystąpić do ich wyszczególnienia.

32. Z tego rozbioru wypada, że akorda dają się naprzód podzielić stosownie do ilości m, to jest do ilości tonów składających akord, a zatem będą: kwintowe, septymowe, nonowe, undecymowe i terdecymowe.

Każdą znowu klasę podzielimy na powyższe cztery rodzaje akordów majorowych, minorowych 1-go gatunku, minorowych 2-go gatunku i zmienionych — nakoniec na gatunki według liczby wyrażającej ich rozciąg.

1⁰ Klassa 1-sza: akorda 3 tonowe czyli kwintowe.

Wszystkie te akorda zawarte są w następnym wzorze, czyniąc $m=3$ we wzorze powyższym (4).

$$\begin{array}{rrrr} A_3(0)=0, & 4, & 8, & \\ & -3, & 1, & \qquad (5) \\ & & -6, & \end{array}$$

kombinując z sobą te liczby, otrzymamy 6 akordów kwintowych.

Rodzaj 1, akorda majorowe:

$$\begin{array}{llllll} 1) & 0,\ 4,\ 1=d, & f^x, & a, & & E=4 \\ 2) & 0,-3,\ 1=d, & f, & a, & & E=4 \\ 3) & 0,-3,-6=d, & f, & a^b, & & E=6 \end{array}$$

mamy więc trzy akorda majorowe, z których pierwszy zowie się *akordem doskonałym majorowym*, drugi *akordem doskonałym minorowym*, a trzeci będzie to akord doskonały minorowy 2-go gatunku mający i tercyę i kwintę minorowe.

Rodzaj 2, akorda minorowe 1-go gatunku:

$$1)\quad 0,\ 4,\ 8=d,\ f^x,\ a^x,\qquad E=8$$

jest to akord tercyi major i kwinty zwiększonéj, ma tę własność, że odległości tonów są ściśle 2 cało-tonowe i przedstawia podział duosona na trzy równe części.

Rodzaj 3, akorda minorowe 2-go gatunku:

$$1)\quad 0,\ 4,-6=d,\ f^x,\ a^b,\qquad E=10$$

jest to akord tercyi major i kwinty major.

Rodzaj 4, akord zmieniony

$$1)\quad 0, -3,\ \ 8 = d,\ f,\ \overset{x}{a},\qquad E = 11$$

jest to akord tercyi minor i kwinty zwiększonej.

U Durutte'a też same mamy 6 akordów na kart. 133, lecz inaczej nieco rozklassyfikowane.

2° Klassa 2-ga: akorda 4-ro tonowe czyli septymowe.

Wzór tych akordów otrzymamy czyniąc $m = 4$, ztąd będzie:

$$\begin{array}{rrrrr} A_4(0) = 0, & 4, & 8, & 5 & \\ & -3, & 1, & -2 & \qquad (6) \\ & & -6 & . & \end{array}$$

Kombinując z sobą te liczby otrzymamy 12 akordów septymowych, czyli kombinując powyższe sześć akordów kwintowych z septymą major 5 i minor — 2.

Rodzaj 1. Akorda majorowe, mamy ich 4:

$$\begin{array}{llllllll} 1) & 0, -3, & 1, -2 = d, & f, & a, & c, & & E = 4 \\ 2) & 0,\ \ 4, & 1,\ \ 5 = d, & \overset{x}{f}, & a, & \overset{x}{c}, & & E = 5 \\ 3) & 0,\ \ 4, & 1, -2 = d, & \overset{x}{f}, & a, & c, & & E = 6 \\ 4) & 0, -3, & -6, -2 = d, & f, & \overset{b}{a}, & c, & & E = 6 \end{array}$$

Z tych pierwszy jest akordem septymowym 2-go gatunku, drugi jest akordem septymowym 4-go gatunku, trzeci septymowy 1-go gatunku czyli dominanty, czwarty septymowy 3-go gatunku; są więc cztery główne akorda.

Rodzaj 2. Akorda minorowe 1-go gatunku, mamy ich dwa:

$$\left.\begin{array}{llllll} 1) & 0,\ \ 4, & 8,\ \ 5 = d, & \overset{x}{f}, & \overset{x}{a}, & \overset{x}{c}, \\ 2) & 0, -3, & 1,\ \ 5 = d, & f, & a, & \overset{x}{c}, \end{array}\right\} \quad E = 8$$

pierwszy jest akordem tercyi, kwinty i septymy major, drugi jest akordem tercyi minor, kwinty czystej i septymy major.

Rodzaj 3. Akorda minorowe 2-go gatunku, mamy ich 2:

$$\left.\begin{array}{llllll} 1) & 0,\ \ 4, & 8, -2 = d, & \overset{x}{f}, & \overset{x}{a}, & c, \\ 2) & 0,\ \ 4, & -6, -2 = d, & \overset{x}{f}, & \overset{b}{a}, & c, \end{array}\right\} \quad E = 10$$

pierwszy jest akord tercyi i kwinty major, septymy minor, drugi tercyi major, kwinty i septymy minor.

Rodzaj 4. Akorda zmienione, mamy ich 4:

$$\left.\begin{array}{lllll} 1) & 0, \quad 4, -6, & 5 = d, & \overset{x}{f}, \ \overset{b}{a}, \ \overset{x}{c}, \\ 2) & 0, -3, \quad 8, & 5 = d, & f, \ \overset{x}{a}, \ \overset{x}{c}, \\ 3) & 0, -3, \quad 8, & -2 = d, & f, \ \overset{x}{a}, \ c, \\ 4) & 0, -3, -6, & 5 = d, & f, \ \overset{b}{a}, \ \overset{x}{c}, \end{array}\right\} \quad E = 11$$

U Durutte'a mamy tych akordów 14, zatem o dwa więcej; a mianowicie wprowadził on septymę zmniejszoną — 9 i zastosował do dwóch układów akordów kwintowych, jednego majorowego (0, — 3, — 6) i drugiego minorowego 2-go gatunku (0, 4 — 6), oba zbyteczne, albowiem jak to widzimy na skali kołowej, (3 lub 4) septyma zmniejszona — 9 jest zupełnie toż samo co sexta major 3 i nie stanowi osobnego tonu, a wtedy potrzeba by dodać jeszcze cztery inne, wypadające z połączenia pozostałych akordów kwintowych z septymą zmniejszoną.

Klassa 3-cia: akorda 5-cio tonowe czyli nonowe.

Ogólny wzór tych akordów otrzymamy z wzoru (4) czyniąc $m = 5$, ztąd będzie:

$$\begin{array}{rrrrr} A_5\,(0) = 0, & 4, & 8, & 5, & 2 \\ & -3, & 1, & -2, & -5 \\ & . & -6, & . & . \end{array} \qquad (7)$$

Kombinując z sobą te liczby, lub lepiej kombinując akorda septymowe z sekundą major 2 i minor — 5, otrzymamy 24 akordów, które się dają ułożyć w następne rodzaje:

Rodzaj 1. Akorda majorowe, jest ich 5:

$$\left.\begin{array}{llllll} 1) & 0, \quad 4, & 1, \quad 5, & 2 = d, & \overset{x}{f}, \ a, \ \overset{x}{c}, \ e, \\ 2) & 0, -3, & 1, -2, & 2 = d, & f, \ a, \ c, \ e, \end{array}\right\} E = 5$$

$$\left.\begin{array}{llllll} 3) & 0, \quad 4, & 1, -2, & 2 = d, & \overset{x}{f}, \ a, \ c, \ e, \\ 4) & 0, -3, & 1, -2, & -5 = d, & f, \ a, \ c, \ \overset{b}{e}, \\ 5) & 0, -3, & -6, -2, & -5 = d, & f, \ \overset{b}{a}, \ c, \ \overset{b}{e}, \end{array}\right\} E = 6$$

z tych trzeci jest akord nonowy, dominantowy, major, resztę nazywamy według składu, i tak: pierwszy akord sekundy, septymy, i tercyi major i kwinty czystej i t. d.

Rodzaj 2. Akorda minorowe 1-go gatunku, jest ich trzy:

$$\left.\begin{array}{llllllllll}
1) & 0, & 4, & 8, & 5, & 2=d, & f^x, & a^x, & c^x, & e, \\
2) & 0, & -3, & -6, & -2, & 2=d, & f, & a^b, & c, & e, \\
3) & 0, & -3, & 1, & 5, & 2=d, & f, & a, & c^x, & e,
\end{array}\right\} E=8$$

akorda mało znane.

Rodzaj 3. Akorda minorowe 2-go gatunku, jest ich sześć:

$$\begin{array}{llllllllll}
1) & 0, & 4, & 1, & -2, & -5=d, & f^x, & a, & c & e^b, \quad E=9
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{llllllllll}
2) & 0, & 4, & 1, & 5, & -5=d, & f^x, & a, & c^x, & e^b, \\
3) & 0, & 4, & -6, & -2, & 2=d, & f^x, & a^b, & c, & e, \\
4) & 0, & 4, & -6, & -2, & -5=d, & f^x, & a^b, & c, & e^b, \\
5) & 0, & 4, & 8, & -2, & 2=d, & f^x, & a^x, & c, & e, \\
6) & 0, & -3, & 1, & 5, & -5=d, & f, & a, & c^x, & e^b,
\end{array}\right\} E=10$$

Z tych pierwszy jest akord nonowy, dominanty minor, trzeci akord nonowy dominanty major z kwintą zniżoną, czwarty dominanty minor z kwintą zniżoną, piąty dominanty major z kwintą podwyższoną.

Rodzaj 4. Akorda zmienione, w liczbie 10:

$$\left.\begin{array}{llllllllll}
1) & 0, & 4, & -6, & 5, & 2=d, & f^x, & a^b, & c^x, & e, \\
2) & 0, & 4, & -6, & 5, & -5=d, & f^x, & a^b, & c^x, & e^b, \\
3) & 0, & -3, & 8, & 5, & 2=d, & f, & a^x, & c^x, & e, \\
4) & 0, & -3, & 8, & -2, & 2=d, & f, & a^x, & c, & e, \\
5) & 0, & -3, & -6, & 5, & 2=d, & f, & a^b, & c^x, & e, \\
6) & 0, & -3, & -6, & 5, & -5=d, & f, & a^b, & c^x, & e^b,
\end{array}\right\} E=11$$

$$\left.\begin{array}{llllllllll}
7) & 0, & 4, & 8, & -2, & -5=d, & f^x, & a^x, & c, & e^b, \\
8) & 0, & 4, & 8, & 5, & -5=d, & f^x, & a^x, & c^x, & e^b, \\
9) & 0, & -3, & 8, & -2, & -5=d, & f, & a^x, & c, & e^b, \\
10) & 0, & -3, & 8, & 5, & -5=d, & f, & a^x, & c^x, & e^b,
\end{array}\right\} E=13$$

wszystkie są mało używane.

U Durutte'a mamy tych akordów 38, o 14 więcej, powstałe jak wyżej powiedzieliśmy przez wprowadzenie sekundy zwiększonej (9) dodanej do kilku akordów septymowych, gdyż powinno być wszystkich tylko 28; a dla przyczyny którą wyżej podaliśmy, reszta powinna być odrzucone.

Klassa 4-ta: akorda 6-cio tonowe czyli undecimowe.

Ogólny wzór tych akordów otrzymamy z wzoru (4) czyniąc $m=6$.

$$A_6(0)=\begin{array}{cccccc} 0, & 4, & 8, & 5, & 2, & 6 \\ -3, & 1, & -2, & -5, & -1 & \\ . & -6, & . & . & -8 & \end{array} \qquad (8)$$

Kombinując 24 akordów nonowych z kwartą czystą — 1, kwartą major 6 i kwartą zmniejszoną — 8, otrzymamy 72 akordów undecymowych.

Rodzaj 1. Akorda majorowe, w liczbie 6:

1) $0, -3, 1, -2, 2, -1 = d, f, a, c, e, g,$ $E=5$
2) $0, 4, 1, 5, 2, 6 = d, f^x, a, c^x, e, g^x,$
3) $0, 4, 1, 5, 2, -1 = d, f^x, a, c^x, e, g,$
4) $0, 4, 1, -2, 2, -1 = d, f^x, a, c, e, g,$ $E=6$
5) $0, -3, 1, -2, -5, -1 = d, f, a, c, e^b, g,$
6) $0, -3, -6, -2, -5, -1 = d, f, a^b, c, e^b, g,$

Rodzaj 2. Akorda minorowe 1-go gatunku, w liczbie 5:

1) $0, 4, 8, 5, 2, 6 = d, f^x, a^x, c^x, e, g^x,$
2) $0, 4, 1, -2, 2, 6 = d, f^x, a, c, e, g^x,$
3) $0, -3, 1, 5, 2, -1 = d, f, a, c^x, e, g,$ $E=8$
4) $0, -3, -6, -2, 2, -1 = d, f, a^b, c, e, g,$
5) $0, -3, -6, -2, -5, -8 = d, f, a^b, c, e^b, g^b,$

Rodzaj 3. Akorda minorowe 2-go gatunku, w liczbie 13:

1) $0, 4, 1, -2, -5, -1 = d, f^x, a, c, e^b, g,$
2) $0, 4, 8, 5, 2, -1 = d, f^x, a^x, c^x, e, g,$
3) $0, -3, 1, 5, 2, 6 = d, f, a, c^x, e, g^x,$ $E=9$
4) $0, -3, 1, -2, 2, 6 = d, f, a, c, e, g^x,$
5) $0, -3, 1, -2, -5, -8 = d, f, a, c, e^b, g^b,$

$$\left.\begin{array}{rrrrrrrl}
6) & 0, & 4, & 1, & 5, & -5, & -1 & = d,\ \overset{x}{f},\ a,\ \overset{x}{c},\ \overset{b}{e},\ g, \\
7) & 0, & 4, & 8, & -2, & 2, & 6 & = d,\ \overset{x}{f},\ \overset{x}{a},\ c,\ e,\ \overset{x}{g}, \\
8) & 0, & 4, & 8, & -2, & 2, & -1 & = d,\ \overset{x}{f},\ \overset{x}{a},\ c,\ e,\ g, \\
9) & 0, & 4, & -6, & -2, & 2, & -1 & = d,\ \overset{x}{f},\ \overset{b}{a},\ c,\ e,\ g, \\
10) & 0, & 4, & -6, & -2, & -5, & -1 & = d,\ \overset{x}{f},\ \overset{b}{a},\ c,\ \overset{b}{e},\ g, \\
11) & 0, & -3, & 1, & -2, & 2, & -8 & = d,\ f,\ a,\ c,\ e,\ \overset{b}{g}, \\
12) & 0, & -3, & 1, & 5, & -5, & -1 & = d,\ f,\ a,\ \overset{x}{c},\ \overset{b}{e},\ g, \\
13) & 0, & -3, & -6, & -2, & 2, & -8 & = d,\ f,\ \overset{b}{a},\ c,\ e,\ \overset{b}{g},
\end{array}\right\} E = 10$$

Rodzaj 4. Akorda zmienione w liczbie 48, z których 13 rozciągu 11, 11 rozciągu 12, 16 rozciągu 13 i 8 rozciągu 16; — łatwo jest je napisać, a przeto je opuszczamy.

U Durutte'a mamy tych akordów 73, kiedy przyjmując ich dla nonowych 38 i mnożąc przez trzy odmiany kwarty, powinno ich być $38 \times 3 = 114$, przyczyną tego jest, że wiele przyjętych w poprzednich rodzajach, zostało w tej klassie wyrzuconych.

Klassa 5-ta: akorda 7-mio tonowe czyli terdecimowe.

Ogólny wzór tych akordów otrzymamy z wzoru (4) czyniąc $m = 7$.

$$\begin{array}{lrrrrrrr}
A_7(0) = & 0, & 4, & 8, & 5, & 2, & 6, & 3 \\
 & & -3, & 1, & -2, & -5, & -1, & -4 \\
 & & . & -6, & . & . & -8, & .
\end{array} \qquad (9)$$

Kombinując 72 akordów undecymowych z sextą major 3 i minor — 4, która jest w kolei odległości terdecimą; otrzymamy dwa razy więcej to jest 144 akordów.

Nie wyszczególniając tych akordów, gdyż je łatwo wypisać, wspomnimy że:

Rodzaju 1 akordów majorowych jest 9, jeden mający rozciąg, 5 i 8 mających rozciąg 6.

Rodzaju 2 akorda minorowe 1-go gatunku, tych jest 8, mających rozciąg 8.

Rodzaju 3 akordów minorowych 2-go gatunku, mamy 27, z tych 9 rozciągu, 9 i 18 rozciągu 10.

Rodzaju 4 akordów zmienionych jest 100, to jest: 21 rozciągu 11, 30 rozciągu 12, 32 rozciągu 13 i 17 rozciągu 16.

U Durutte'a jest tych akordów tylko 111, zatem o 33 mniéj; przyczyna powyżej podana, — prócz tego odrzucił wiele innych jako nie objętych jego prawem.

Ze wzoru (4) wypada, że liczba wszystkich akordów powinna być:

$$6+12+24+72+144=258$$

rozłożonych według praw matematycznych ilości tonów wchodzących do składu ich rozciągu. Odrzucając akorda, których rozciąg przechodzi liczbę 12, będącą rozciągiem gammy chromatycznej, liczba ich zredukuje się do 181. Podaliśmy tu akorda zaczynające się z tonu *d* początku skali muzycznej — łatwo je otrzymać dla każdego innego tonu.

Taki jest logiczny i umiejętny a przytem ściśle matematyczny rozwój akordów, jako podstawy nauki harmonii.

33. Widzieliśmy, że podstawą klasyfikacyi akordów jest rozciąg samych gamm i według tego akorda podzielone zostały na akorda majorowe, minorowe 1-go i 2-go gatunku i zmienione; otóż pozostaje nam zastanowić się, czy to prawo melodyi i harmonii nie da się zastosować do materyału muzycznego, jakiemi są interwale proste czyli tony same. Jakoż, ponieważ można uważać interwale, jako najprostsze akorda; przeto to prawo równie dobrze powinno się i do interwali stosować: i tak najmniejszy rozciąg akordów jest 4, przeto i interwale najprostsze będą te, które nie przechodzą liczby ± 4; dalej interwale powinny dzielić się na majorowe, których wartość nie przechodzi ± 6, na minorowe 1-go gatunku nie przechodzące liczb ± 8, minorowe 2-go gatunku nie przechodząc liczb ± 10 i nakoniec interwale zmienione przechodzące ± 10.

Interwale majorowe dają się podzielić jeszcze na doskonałe, mniej doskonałe i nie doskonałe, według tego jak rozciąg ich jest ± 1. ± 4 i ± 6. Ztąd następujący będziemy mieli układ interwali:

Rodzaje interwali.			Odległości liczbowe.	
Majorowe	doskonałe	Oktawa czysta	0	0
		Kwinta i kwarta czyste . . .	1	— 1
	mniej doskonałe	Sekunda major septyma minor	2	— 2
		Sexta major tercya minor . .	3	— 3
		Tercya major sexta minor . .	4	— 4
	nie doskonałe	Septyma major sekunda minor	5	— 5
		Kwarta major kwinta minor .	6	— 6
Minorowe 1-go gatunku		Oktawa major i minor . . .	7	— 7
		Kwinta zwiększ. kwarta zmniej.	8	— 8
Minorowe 2-go gatunku		Sekunda zwięk. septyma zmniej.	9	— 9
		Sexta zwiększ. tercya zmniejsz.	10	— 10
Zmienione		Tercya zwiększ. sexta zmniejsz.	11	— 11
		Septyma zwięk. sekunda zmniej.	12	— 12
		Kwarta zwięk. kwinta zmniej.	13	— 13
		Oktawa zwiększ. i zmniejszona	14	— 14

Z tego układu wynika, że skala linijna kwint, zarazem jest układem harmonijnym; gdyż w początku skali mamy interwale doskonałe, i te coraz oddalając się w obie strony, stają się mniej doskonałemi, i to zgadza się zupełnie z podziałem dziś używanym interwali.

Na tem kończą się prawa matematyczne muzyki, które dają doskonałe tłómaczenie wszystkich jej danych, otrzymanych obecnie wprost z praktyki; reszta już nie należy do akustyki, a zależy od ukształcenia ucha, pozwalając nam zrozumieć i swobodnie władać temi danemi, otrzymanemi z praktyki lub zdobytemi na drodze nauki.

§ 4. Ogólne uwagi.

34. Rozwinąwszy w powyższy sposób naszą teoryę, możemy teraz w zupełności rozwiązać pytania podane na wstępie, dotąd niedostatecznie albo zupełnie nie rozwiązane w muzyce.

1. Dla czego podczas gdy liczba tonów jest nieskończoną, gamma diatoniczna nie posiada jak tylko 7 tonów a gamma chromatyczna 12 tonów?

2. Dla czego 7 tonów gammy diatonicznej są rozłożone nieforemnie, to jest o interwalach nie równych, pół i cało tonowych?

3. Dla czego tylko dwa rodzaje mamy gamm — majorowe i minorowe?

4. Nakoniec, na czem polega rzeczywiście harmonia i melodya tonów?

Te to pytania kardynalne muzyki w zupełności rozwiązuje nasza teorya.

Nim je rozwiążymy, podajmy zasady jakie dziś wskazuje akustyka i muzyka a mianowicie: Jamin w dziele wyżej cytowanym Tom II karta 450 i następne podaje trzy prawa akustyczne:

1°. Wszystkie tony tej samej wysokości, wydane przez jakiekolwiek ciało drgające, odpowiadają tejże samej liczbie drgań w sekundę i odwrotnie;

2°. Stosunek dwóch tonów wyraża się przez stosunek liczby drgań odpowiadających tym tonom;

3°. Dwa tony wyrażone przez dwa wyrazy szeregu naturalnego liczb 1, 2, 3, 4 ..... będą tworzyć akord, tem więcej dobrze brzmiący (consonnant), im te liczby będą prostsze i przemieniający się w dyssonans tem mniej przyjemny, im liczby te będą więcej złożone.

Co zaś do gamm Jamin powiada na karcie 454: „Wiele rozpra-„wiano o przyczynach, które wpłynęły na utworzenie gammy naturalnej.

„ Prawdopodobnie uczucie muzykalne miało większy wpływ w tem „ odkryciu, niż uwagi teoretyczne. Jedyną rzeczą pewną jest, że po- „ winniśmy przyjąć tę gammę jako fakt i wskazać: że kombinując tony „ wchodzące w jej skład z sobą, otrzymujemy ściśle stosunki drgań wy- „ rażone w liczbach najprostszych, które są najprzyjemniejsze dla ucha. „ Jest to usprawiedliwieniem gammy a posteriori."

Z dzieł muzycznych nie wiele więcej możemy się dowiedzieć o początku akordów i gamm: i tak, w podręczniku muzycznym wydanym przez Sikorskiego w Warszawie 1852 r. karta 33, znajdujemy: „Sze- „ reg tonów kolejnych do tonacyi należących od pierwszego czyli toniki „ do ostatniego czyli oktawy zowie się gammą."

Durutte w dziele wyżej cytowanym kar. 58, nie wdaje się w definicyę gammy a tylko wskazuje tworzenie się jej: „Gamma diatoniczna major tworzy się zawsze z 7 tonów kolejnych wziętych na skali kwint. Drugi z tych siedmiu tonów zowie się toniką czyli pierwszym wyrazem tej gammy, od której poczynając tony inne układają się w szeregu rosnącym i ubywającym."

Jamin najlepiej wywiązuje się z tego, bo od razu powiada, że praktyka stworzyła gammę i nie zadaje sobie trudu nad jej skreśleniem. W ogóle wyprowadzają gammę z szeregu przytonów, dających się słyszyć przy wydaniu każdego tonu, które formują szereg tonów powstających z dzielenia się ciał drgających podczas drgania na węzły stanowiące szereg:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}\ \ldots.$$

i wydających tony, które powstają z liczby drgań odwrotnie proporcyonalnych do długości i stanowią szereg liczb:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ldots$$

Wywód gammy z takiego szeregu jest zupełnie sztucznym i nic nie objaśnia; dla tego też wielu autorów muzyki odrzucają zupełnie ten wywód jako nic nie objaśniający, i jak widzimy z naszej teoryi mają zupełną słuszność.

Przechodząc do szczegółów, uważamy, że ponieważ dzielimy duosono na 12 części prawie zupełnie równych, które zowiemy półtonami, przeto duosono dzieli się ściśle na 6 całych tonów, a zatem tylko gamma 6-o tonowa może mieć odległości zupełnie równe i całotonowe, zaś siedmiotonowa musi mieć koniecznie 5 całych tonów i dwa półtony; a że w szeregu kwint gamma diatoniczna obejmuje siedm tonów w równych odległościach, ale tak ułożonych, że zaczynając od pierwszego przebiegamy te tony po miejscach nieparzystych i wracamy się na miejsca parzyste, lub też zaczynając od drugiego, przebiegamy miejcca parzyste wracając się do nieparzystych, aby tony ułożyły się koleją odległości czyli sekundami, przeto składa się koniecznie z dwóch części różnych połączonych z sobą; — otóż w tem złączeniu po czwartym lub trzecim tonie i na końcu, przy powtórzeniu się pierwszego tonu, przypadają półtony.

Półtonami więc w gammie diatonicznej łączą się liczby parzyste od nieparzystych i odwrotnie; jakoż na skali muzycznej:

$$.....0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,.....$$

biorąc kolejno po 7 tonów od 0 do 6, będzie idąc do parzystych i wracając do nieparzystych lub odwrotnie:

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,.\ 1,\ 3,\ 5,.\ 0,\ 2,\ 4,\ 6.....$$
$$1,\ 3,\ 5,.\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,.\ 1,\ 3,\ 5.....$$

otóż gdzie przypadają połączenia parzystych liczb z nieparzystemi, czyli gdzie następuje zwrot ku początkowi tam przypadają półtony, i to jest prawdziwa przyczyna znajdowania się półtonów w gammie diatoniczej.

Przechodząc do gammy chromatycznej, jej postać, jak wiemy, na skali muzycznej obejmuje 12 tonów wyrażonych w stosunkach drgań podanych w reduktach:

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{10}{9},\ \frac{5}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{17}{9},\ \overset{*}{\frac{17}{12}},\ \frac{18}{17},\ \frac{8}{5},\ \frac{6}{5},\ \frac{9}{5},\ \frac{4}{3},\ 2 \qquad (a)$$

a układając porządkiem wielkości:

$$1,\ \frac{18}{17},\ \frac{10}{9},\ \frac{6}{5},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{3},\ \overset{*}{\frac{17}{12}},\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{5}{3},\ \frac{9}{5},\ \frac{17}{9},\ 2$$

a stosunki tonów sąsiednich dają szereg:

$$\frac{18}{17},\ \frac{25}{24},\ \frac{27}{25},\ \frac{25}{24},\ \frac{16}{15},\ \frac{17}{16},\ \frac{18}{17},\ \frac{16}{15},\ \frac{25}{24},\ \frac{27}{25},\ \frac{25}{24},\ \frac{18}{17}.$$

Godną uwagi jest symetrya układu tych stosunków w obu szeregach, tak że te szeregi odwrócone idąc od prawej ku lewej stronie i dzieląc przez dwa, dają stosunki także odwrócone:

$$1,\ \frac{17}{18},\ \frac{9}{10},\ \frac{5}{6},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{4},\ \overset{*}{\frac{12}{17}},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{8},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{9},\ \frac{9}{17},\ \frac{1}{2} \qquad (b)$$

prócz środkowego tonu $\frac{17}{12}$ nad którym jest gwiazdka a który zostaje ten sam. Ta symetrya w układzie gammy chromatycznej jest zadziwiająca i wypada z symetryi skali muzycznej i obliczenia stosunków za pomocą reduktów.

Obecnie postać tej gammy w dziełach akustycznych jest inna i tak w dziele Jamina (T. 2 karta 458) mamy:

$$1,\ \overset{*}{\frac{16}{15}},\ \overset{*}{\frac{9}{8}},\ \frac{6}{5},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{3},\ \overset{*}{\frac{25}{18}},\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{5}{3},\ \frac{9}{5},\ \overset{*}{\frac{15}{8}},\ 2$$

Durutte (na karcie 26) podaje:

$$1,\ \overset{*}{\frac{16}{15}},\ \overset{*}{\frac{9}{8}},\ \frac{6}{5},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{3},\ \overset{*}{\frac{45}{32}},\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{5}{3},\ \overset{*}{\frac{16}{9}},\ \overset{*}{\frac{15}{8}},\ 2$$

różniące się tonem drugim, trzecim, środkowym, jedenastym i dwunastym.

Durutte który w dziele swym poświęca wiele kart zasługom Hoene Wrońskiego w muzyce, przytacza list jego do siebie pisany (kar. 52), w którym Wroński daje nie przytaczając dowodu, następny układ tej gammy:

$$1,\ \overset{*}{\frac{16}{17}},\ \overset{*}{\frac{8}{9}},\ \overset{*}{\frac{72}{85}},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{12}{17},\ \frac{2}{3},\ \overset{*}{\frac{32}{51}},\ \overset{*}{\frac{16}{27}},\ \overset{*}{\frac{48}{85}},\ \frac{9}{17},\ \frac{1}{2}.$$

Liczby tu podane grzeszą naciąganiem dla dowiedzenia, że mianowniki ułamków mają za czynniki liczby pierwsze: 1, 2, 3, 5, 17 — grzeszą stosunkami bardzo złożonemi i nie posiadają tej symetryi jaką posiada nasz szereg; chociaż nasz szereg zarówno takież same ma czynniki pierwsze 1, 2, 3, 5, 17 tak w kształcie prostym jak i odwrotnym (a, b) a przedstawia ułamki prostsze i bliższe prawdziwej wartości tonów średnich. *)

35. Klassyfikacya akordów dokonaną została przez Barberau na podstawie kombinacyi trojakich gatunków tonów. Durutte w dziele wyżej cytowanem, wychodząc z szeregu kwint, wywodzi akorda z równania wyrażającego summę wyrazów składających akord; a ponieważ tony w akordzie idą przez tercyę, każdy więc ton może się wyrazić przez pewną liczbę tercyi major 4, i tercyi minor — 3, a zbierając liczbę ogólną tych tercyi i oznaczając je przez t i t' summa tych tonów, gdy jest ich m w akordzie, daje się wyrazić przez wzór:

$$\varphi_m(x) = mx + 4t - 3t'$$

gdzie
$$t + t' = m\ \frac{(m-1)}{2} \qquad \textbf{(a)}$$

Z tych dwóch równań biorąc wszystkie kombinacye wartości dla

*) Patrz przypisek 3 i 4.

t i t' dochodzi wszystkich gatunków akordów w granicach odległości $+9$ i -9.

Ponieważ w tej summie giną po szczególe tony akordu, więc autor zmuszony został przyjąć funkcyę akordu jako iloczyn z odległości tonów postaci:

$$F_m(x) = x\,(x+a_1)\,(x+a_2)\,\ldots\ldots$$

Lecz żeby przejść z wzorów (a) do wartości a_1 a_2 ..... potrzeba zawiłego rachunku kombinacyi, albowiem liczbę tercyi t' i t potrzeba rozkładać na szczególne tony i kombinować z sobą ich wartości od 0 do $\frac{1}{2}\,m\,(m-1)$ co jest utrudzającem.

Prócz tego, podobnego rodzaju funkcya w szeregu arytmetycznym odległości, prowadzi w szeregu odpowiednim geometrycznych stosunków do funkcyi wykładniczej postaci:

$$e^{x\,(x+a_1)\,(x+a_2)\,\ldots\ldots}$$

takiej zaś funkcyi nie znajdujemy w naturze i nie ma tu ona żadnego znaczenia, gdyż prawa natury wyrażają się zawsze przez funkcye najprostsze; my tu ją zastąpiliśmy wprost przez sam szereg arytmetyczny odległości z zastosowaniem doń prawa redukcyi według danego modułu.

Równania prócz tego (a) Durutte'a nic innego nie wyrażają, jak to co my nazwaliśmy zawartością szeregu tonów, to jest summą wszystkich odległości składających szereg, a które w szeregu geometrycznym stosunków czyli potęg z $\frac{3}{2}$, oznacza iloczyn tych stosunków czyli nową potęgę z $\frac{3}{2}$, wyraża więc stosunek; a w pierwszym szeregu odległość pewną odpowiadającą tonowi wypadkowemu z tych tonów.

W naszej teoryi widzieliśmy, że ta zawartość niema wielkiego znaczenia, posłużyła nam tylko do klassyfikacyi niższej gamm i akordów — ważniejszym od niej jest rozciąg i daje główną klassyfikacyę tak gamm jak i akordów.

36. Oto jest wszystko co dotąd, o ile nam wiadomo, na tem polu zdziałano; nasza teorya wniknęła w istotę rzeczy, odkryła znaczenie związków muzycznych, jako szeregów geometrycznych stosunków i szeregów arytmetycznych odległości o stałych stosunkach i zredukowanych według danego modułu.

To nowe prawo redukcyi według danego modułu wyrazów szeregu arytmetycznego, wyraża odejmowanie kilkakrotne modułu; odniesione do szeregu geometrycznego stosunków, wyraża dzielenie wyrazów tego szeregu przez ilość $\frac{3}{2}$ podniesioną do potęgi oznaczonej modułem; to jest redukcyą potęg nad wyrazami szeregu geometrycznego; zatem redukcya jest znowu pewną potęgą czyli pewnym wyrazem tegoż szeregu geometrycznego stosunków, odpowiadającym zredukowanemu wyrazowi odległości, w szeregu arytmetycznym; zatem obie nic innego nie wyrażają tylko pewien ton, którego stosunek i odległość są prostsze.

Redukcya więc według danego modułu oswobadza wyrazy obu szeregów od wielokrotności z modułu i zmienia je na stosunki i odległości w granicach tego modułu, — zatem jest zupełnie zgodną z naturą przedmiotu.

Nasza teorya prócz tego dała możność każdy związek muzyczny, to jest gammy i akordy, uchwycić w proste wzory matematyczne, a co najważniejsza, stworzyła nowy język matematyczny, dozwalający wszystkie związki muzyczne przedstawić przez odległości wyrażone w jedności kwinty a następnie wykonywać na nich potrzebne działania; — a że z jednej strony mamy język tonów czyli brzmień oznaczony przez osobne stosunki dla siedmiu tonów głównych, z drugiej strony osobny język odległości, które składają nazwy, prima, sekunda i t. d. Tak więc mamy trojaki język: 1° język tonów czyli stosunków drgań, 2° język odległości liczonych od tonu fundamentalnego kolejnemi nazwami biorąc za jedność sekundę, 3° język odległości liczbowych, w których odległość kwinty wzięta za jedność i będących logarytmami stosunków.

Te trzy języki łączą się wszystkie w skali muzycznej, za pomocą której łatwo jeden na drugi dają się zamienić.

Owocem tej teoryi jest ocenienie prawdziwego znaczenia peryodów 7 i 12 tonów zwanych gammami, klassyfikacya gamm, z której odkryliśmy nowe dwa rodzaje gamm minorowej 2° gatunku i sześciotonowej, nakoniec klassyfikacya rzeczywista akordów odpowiednia do klassyfikacyi gamm.

Teorya tak rozwinięta, daje wprost odpowiedzi na wyżej podane zadania.

Jakkolwiek liczba tonów jest nieskończona, lecz tony muzyczne są w liczbie ograniczonej: raz granicami dwiema, po za któremi dźwięki nie są słyszalne, drugi raz każdy ton muzyczny jest odgraniczony od innych znowu dwiema granicami, które dozwalają go odróżnić od następnych; te to drugie granice sprawiają, że tony muzyczne składają szereg geometryczny ułamków o stałym stosunku, który to stosunek jest kwadratem ze stosunku, odgraniczającego tony od siebie, tak, że każdy ton jest właściwie gruppą tonów czyli drgań, a te drgania tworzą przytony, które dają każdemu tonowi właściwe *brzmienie* (timbre).

Taki szereg geometryczny stosunków czyli ułamków, stanowi dopiero materyał muzyczny; ten szereg ma szczególną własność, że gdy jego stosunek jest liczba cała 2, mamy tony różne od siebie o podwójną liczbę drgań, i jeszcze takich, że każdy ton od poprzedniego jest w takim stosunku jak następny do tegoż, i składają to co zowiemy duosono, dla podobieństwa z unosono, gdy dwa tony są zupełnie identyczne.

Biorąc znowu za stosunek każdą inną liczbę zawartą między 1 i 2, to jest między unisono i duosono, otrzymamy szereg stosunków czyli tonów; lecz liczba ta musi dopełniać warunku że nie może być mniejszą od granicy słuchu, o której wyżej mówiliśmy; — jednak ta granica nie jest łatwą do oznaczenia, przeto łatwiej i prościej wziąć za stosunek najprostszy z ułamków między 1 i 2 zawarty, takim jest $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, tym sposobem otrzymujemy szereg kwint, a następnie szukając w szeregu tym takich wyrazów, które najbliżej w wartości swej przystępują do duosono, otrzymujemy dwa peryody tonów 7 i 12; i te to peryody są to znane gammy: diatoniczna i chromatyczna.

Dalej znowu oznaczając tony przez odległości liczbowe, potrafiliśmy wyrazić te gammy w najprostszych wzorach matematycznych; a rozwijając te wzory doszliśmy do rozwiązania drugiego pytania, że mamy bardzo wiele rodzai gamm, z których głównych jest nie dwie, lecz cztery; to jest siedmiotonowe: majorowa, minorowa 1° gatunku i minorowa 2° gatunku; oraz sześcio tonowa.

Dowiedliśmy, że szereg odległości na skali kwint, układając według odległości sekundy, dzieli się na dwie części parzystych i nieparzystych odległości, i że w punktach właśnie złączenia tych dwóch części przypadają pół tony w gammach siedmiotonowych i to jest przyczyną nieforemności w gammie majorowej, chociaż w szeregu kwint te tony są w równych odległościach.

37. Nakoniec ostatnie pytanie, na czem rzeczywiście polega melodya i harmonia tonów, czy na prostocie stosunków, które oznaczają te tony, jak to mówi trzecie prawo akustyki? — Lecz to nie jest prawdą, bo mamy wiele akordów o stosunkach dość złożonych, zresztą te stosunki są:

$$\frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{8}{5},\ \frac{9}{5},\ \frac{10}{9},\ \frac{17}{9},\ \frac{17}{12},\ \frac{18}{17}.$$

gdzie mamy 7 prostych stosunków, między któremi brakuje $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{6}$, $\frac{8}{7}$ ..... i 4 złożone, od których wiele mamy prostszych np. $\frac{9}{8}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{13}{8}$ .... Zatem na 7 prostych jest 4 złożone. Więc cóż może stanowić melodyą i harmonią tonów?

Nie stanowią ich przybliżone stosunki, jakie otrzymujemy z wyrazów szeregu, a które mogą być różne stosownie do stopnia przybliżenia, zatem nie stosunki a logarytmy tych stosunków, czyli odległości, to jest nic innego tylko prawo odległości zawarte w szeregu arytmetycznym, według którego powstaje materyał muzyczny.

W materyale muzycznym, w tonach muzycznych, leży to prawo, że każdy z nich jest równo oddalony od wszystkich następnych i poprzednich, i ten stosunek jest wielokrotnym ze stosunku szeregu czyli z ułamku $\frac{3}{2}$, a następnie w tonach muzycznych jako w szeregu arytmetycznym odległości o stałym stosunku 1, leży melodya i harmonia muzyki i zależy ściśle od rozciągu szeregu tonów składających gammy i akorda, tak, że im rozciąg ten jest mniejszym, tem gammy i akorda, a nawet same tony są przyjemniej brzmiące (consonnant), a im rozciąg jest większy, tem gammy i akorda są mniej przyjemnie brzmiące i zamieniają się w końcu w dyssonans. Najmniejszy rozciąg dla gamm jest 6, i jest to rozciąg gammy majorowej, a najmniejszy rozciąg dla akordów jest 4, i są to akorda tak zwane doskonałe, w miarę jak te liczby rosną, gammy i akorda są mniej przyjemne.

Największa wartość rozciągu dla gamm jest 11; dla akordów 16 i są to tak gammy, jak akorda dyssonansowe.

Ostatecznie więc mamy następujące prawo: *Melodya i harmonia związków muzycznych jest w stosunku odwrotnym do rozciągu szeregów odległości liczbowych stanowiących te związki.*

PRZYPISEK 1szy

O kommie muzycznej.

Kommą nazywa się część tonu, którą już ucho nie może odróżnić, a dwa tony różniące się o tę część tonu, muszą być uważane za jednobrzmiące, unisono.

Taka komma wyraża się przez stosunek blizki jedności, zatem daje się zawsze sprowadzić do jedności z ułamkiem mającym jedność za licznik, to jest $1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$, zatem wyraża się przez ułomek, którego licznik o jedność większy od mianownika.

Wszystkie ułamki inne dają się zawsze sprowadzić do powyższej postaci, lub też nie są z rzędu wyrażających kommę.

Jakoż każdy ułamek innej postaci np.: $k=\frac{n+\delta}{n}$ zamieniając na iloczyn czynników, będzie:

$$k=1+\frac{1}{\left(\frac{n}{\delta}\right)}$$

a ponieważ $n>\delta$, przeto kładąc za $\frac{n}{\delta}$ liczbę całą ε będzie:

$$k<1+\frac{1}{\varepsilon} \text{ czyli } k<\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}$$

$$k>1+\frac{1}{\varepsilon+1} \text{ czyli } k>\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon+1}$$

i te ułamki będą miały żądaną formę i drugi będzie zawsze bliższy prawdziwej wartości.

Następne ułamki znajdujemy, oznaczając je przez x i y, ztąd będzie:

$$k=\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}x \text{ ztąd } x=\frac{\varepsilon k}{\varepsilon+1}$$

$$k=\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon+1}y \text{ czyli } y=\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2}k$$

a kładąc za $k = \frac{n+\delta}{n}$, będzie:

$$x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \quad \frac{n+\delta}{n} = 1 - \frac{1}{\frac{n(\varepsilon+1)}{n-\varepsilon\delta}}$$

$$y = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} \quad \frac{n+\delta}{n} = 1 + \frac{1}{\frac{n(\varepsilon+2)}{\delta(\varepsilon+1)-n}}$$

a oznaczając przez ε' i ε'' liczby całe

$$\varepsilon' = \mathrm{E}\,\frac{n(\varepsilon+1)}{n-\varepsilon\delta}$$

$$\varepsilon'' = \mathrm{E}\,\frac{n(\varepsilon+2)}{\delta(\varepsilon+1)-n}$$

otrzymamy:

$$k < \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon} \cdot \quad \frac{\varepsilon'-1}{\varepsilon'}$$

$$k > \frac{\varepsilon+2}{\varepsilon+1} \cdot \quad \frac{\varepsilon''+2}{\varepsilon''+1}$$

Na mocy tej teoryi oznaczymy łatwo prawdziwą wartość 12-ej kwinty, zwaną także kommą pitagorejską:

$$k = \frac{531441}{524283}$$

która ma właściwie wartość $\frac{75}{74}$, jakoż mamy:

$$n = 524283, \quad \delta = 7158, \quad \varepsilon = 73$$

ztąd:
$$k < \frac{74}{73} \text{ i } k > \frac{75}{74}$$

dla dalszych czynników mamy:

$$\varepsilon' = 22182, \text{ i } \varepsilon'' = 7269$$

ztąd:
$$k < \frac{74}{73} \cdot \quad \frac{22182}{22183}, \quad k > \frac{75}{74} \cdot \quad \frac{7270}{7269}$$

zatem najbliższa wartość jest $\frac{74}{73}$, która wyraża mniej jak $\frac{1}{8}$ część tonu.

W Cours de Physique par Jamin karta 460 za kommę przyjęto $\frac{81}{80}$, która wyraża $\frac{1}{9}$ część tonu, lecz tamże mamy podaną inną wartość, a mianowicie:

$$k = \frac{128}{125}$$

dla tej wartości mamy.

$$n = 125,\ \delta = 3 \text{ ztąd } \varepsilon = 41$$

i

$$k < \frac{42}{41} \qquad k > \frac{43}{42}$$

a następnie mamy:

$$k < \frac{42}{41} \cdot \frac{2624}{2625},\quad k > \frac{43}{42} \cdot \frac{5376}{5375}$$

zatem najbliższa wartość dla tej kommy jest:

$$k = \frac{43}{42} = \frac{1}{5} \text{ części tonu}$$

przyjmując za kommę $\frac{81}{80}$, ten ułamek nie jest z rodzaju kommy i nie może być opuszczonym.

Kiedy tak jest z ułamkiem $\frac{128}{125}$, to tem bardziej z ułamkiem, który jest iloczynem tych dwóch ułamków $\frac{128}{125} \cdot \frac{81}{80}$ (Jamin kart. 458 i 459), do którego sprowadza się teorya temperamentu muzycznego w temże dziele. *)

Ułamek ten po pomnożeniu i wyrzuceniu *czynników wspólnych* jest równy $\frac{648}{625}$ i będzie

$$n = 625,\ \delta = 23,\ \varepsilon = 27$$

ztąd będzie:

$$k < \frac{28}{27} \cdot \frac{4374}{4375} \text{ i } k > \frac{29}{28} \cdot \frac{954}{953}$$

z których $\frac{28}{22}$ jest bliższym i wyraża blisko $\frac{1}{3}$ część tonu i nie może być nigdy odrzuconym, zatem i dwa tony różniące się o ten ułamek, nie mogą być uważane za też same.

Druga własność kommy, jak wskazaliśmy wyżej jest ta, że ona musi być pierwiastkiem kwadratowym ze stosunku, który służy za wykładnik i zarazem jest pierwszym wyrazem szeregu geometrycznego stosunków wyrażających tony muzyczne, tak, że gdy oznaczymy przez a ten stosunek, to komma k równać się będzie

$$k = \sqrt{a}$$

czyli

$$a = k^2$$

biorąc logarytmy będzie:

$$lk = \frac{1}{2}\ l\ a$$

*) Patrz przypisek 8.

a że logarytmy wyrażają interwale czyli odległości muzyczne, zatem *komma, uważana jako odległość, za część tonu, jest połową odległości czyli części tonu, jaką wyraża stosunek szeregu arytmetycznego.* I tak, gdy duosono dzielimy na 12 części równych, to stosunek szeregu tych 12-tu części i zarazem pierwszy wyraz jest $\frac{18}{17}$ i wyraża jak wiemy pół tonu, komma więc będzie koniecznie $\frac{1}{4}$ częścią tonu i wyrazi się przez stosunek $\frac{36}{35}$ i to jest właściwe wyrażenie kommy dla podziału gammy na 12 części.

Dla zniżenia lub podwyższenia tonów używamy w akustyce stosunku $\frac{25}{24}$, wyraża on nieco więcej jak $\frac{1}{3}$ część tonu; przyjmując ten stosunek za stosunek tonów, trzeba przyjąć podział gammy na 18 części równych to jest $\frac{1}{3}$ część tonu za wykładnik a zatem, komma w tem założeniu winna być połową to jest $\frac{1}{6}$ częścią tonu i równa stosunkowi $\frac{53}{52}$ (przypisek 3-ci).

PRZYPISEK 2-gi

Rozwinięcie ułamku $\frac{l2}{l3 - l2}$ na ułamek ciągły i oznaczenie jego reduktów.

Rozwijając według teoryi ułamków ciągłych równanie:

$$\frac{x}{y} = \frac{log.\ 2}{log.\ 3 - log.\ 2}$$

gdzie mamy log. 3 = 0,4771213, log. 2 = 0,3010300 będzie:

$$\frac{x}{y} = \frac{3010300}{1760913}$$

ztąd otrzymamy:

$$\frac{x}{y} = (1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 1,\ 5,\ 2,\ 9\ldots.)$$

resztę wyrazów opuszczamy jako zbyteczne. Zatem:

$$\frac{x}{y} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5} + \ldots.}}}}}$$

a tworząc redukty otrzymamy:

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
\text{Mianowniki:} & 1, & 1, & 2, & 2, & 3, & 1, & 5, & 2, & \ldots \\
 & \frac{x}{y}=\frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{3}, & \frac{12}{7}, & \frac{41}{24}, & \frac{53}{31}, & \frac{306}{179}, & \frac{665}{389}. & \\
 & & & \frac{3}{2}, & \frac{7}{4}, & \frac{29}{17}, & . & \frac{253}{148}, & \frac{359}{210}. & \\
 & & & & & \frac{17}{10}, & . & \frac{200}{117}. & . & \\
 & & & & & & . & \frac{147}{86}. & . & \\
 & & & & & & . & \frac{94}{55}. & . &
\end{array}
$$

A że kolejno jedne redukty są większe, a inne mniejsze od prawdziwej wielkości, to jest jedne coraz więcej zbliżają się do prawdziwej wartości nie dochodząc jej jednak, inne zaś przechodząc ją, przeto będzie:

$$
\begin{array}{llll}
\frac{x}{y}<\frac{2}{1}, & \frac{12}{7}, & \frac{53}{31}, & \frac{665}{389}\ldots \\
 & \frac{7}{4}, & . & \frac{359}{210}. \\
 & & & \\
\frac{x}{y}>\frac{1}{1}, & \frac{5}{3}, & \frac{41}{24}, & \frac{306}{179},\ldots\ldots \\
 & \frac{3}{2}, & \frac{29}{17}, & \frac{253}{148}, \\
 & & \frac{17}{10}, & \frac{200}{117}, \\
 & & & \frac{147}{86}, \\
 & & & \frac{94}{55},
\end{array}
$$

W tych wyrażeniach liczniki wyrażają wartości przybliżone dla x, które w szeregu stosunków najwięcej zbliżają się do prawdziwej wartości oktawy równej 2, mianowniki zaś wyrażają wartości dla y, to jest w którem duosono to przybliżenie ma miejsce, i tak liczniki: 7, 12, 17, 29, 41 i t. d. czyli tony muzyczne zbliżają się najwięcej i to zbliżenie przypada w 4, 7, 10, 17, 24 i t. d. duosono czyli oktawie.

Z powyższego widzimy jeszcze, że mamy dwa systemata liczb, jedne, które się ciągle zbliżają do prawdziwej wartości, przechodząc ją nieco, drugie które nie dochodzą do prawdziwej wartości.

Dla pierwszego, które są nieco większe od prawdziwej wartości mamy:

$$x = 2,\quad 7,\quad 12,\quad 53,\quad 359 \ldots\ldots$$

dla drugiego, które są mniejsze od prawdziwej wartości:

$$x = 3,\quad 5,\quad 17,\quad 29,\quad 41,\quad 94,\quad 147 \ldots\ldots$$

Wartości dla $\frac{3^x}{2^{y+x}}$ odpowiadające tym liczbom będą dla 1-go systematu

$$\frac{3^x}{2^{x+y}} = \frac{9}{8},\ \frac{16}{15},\ \frac{75}{74},\ \frac{482}{481} \ldots\ldots$$

dla 2-go systematu

$$\frac{3^x}{2^{x+y}} = \frac{6}{7},\ \frac{19}{20},\ \frac{26}{27},\ \frac{40}{41},\ \frac{87}{88} \ldots$$

Opuszczając początkowe liczby 2, 3, 5 jako dające liczby mało przybliżone i znowu liczby wyższe od 53, jako dające zbyt drobne podziały duosona, pozostanie tylko:

Dla 1-go systemu:

$$x = 7,\quad 12,\quad 53$$

dla 2-go systemu

$$x = 17,\quad 29,\quad 41.$$

Te wypadki są nader ważne, pokazują nam że:

1° Pomiędzy liczbami najbliżej podchodzącemi do duosono, a zatem i najlepiej dzielącemi oktąwę, są jedne nie dochodzące do oktawy i te są:

$$17,\quad 29,\quad 41$$

wszystkie są to liczby pierwsze niepodzielne przez żadną liczbę, a jako nie dochodzące do oktawy i mało przybliżone, muszą być odrzucone. Drugie przewyższające nieco też oktawę są:

$$7,\quad 12,\quad 53,$$

i te tylko mogą być użyte do podziału oktawy, jak też rzeczywiście przyjęto dwa pierwsze podziały w muzyce 7 i 12; — 53 jako podział za drobny jest także nie użyteczny.

A zatem pytanie podziału oktawy na 7 i 12 tonów zostało tu przez nas zupełnie rozwiązane. Jakoż podział ten odpowiada najlepiej wymaganiom dobrego podziału, gdyż najwięcej zbliża się do duosono i jeszcze daje liczbę 12 podzielną, dającą możność podzielić oktawę na 12 lub na 6 równych części. Oktawa więc zawiera ściśle 6 całych tonów i 12 półtonów.

Jednością więc tonów jest duosono czyli oktawa i ta dzieli się na 6 całych tonów, 12 półtonów, 24 ćwierć tonów, 48 ósmych części tonów.

Że kwinta 12-ta w szeregu (6) § 5 odpowiada bardzo blizko 7 oktawie i nieco ją przechodzi, łatwo to wykazać rozwijając wyrazy szeregu (6) — jakoż będzie:

$$
\begin{array}{llllll}
\left(\frac{3}{2}\right)^{1} = \frac{3}{2} & = 1\frac{1}{2} & \cdots\cdot & 1 \text{ Okt.} & = & 2 \\
\hline
\left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4} & = 2\frac{1}{4} & & & & \\
\left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{27}{8} & = 3\frac{3}{8} & \cdots\cdot & 2 \text{ Okt.} & = & 4 \\
\hline
\left(\frac{3}{2}\right)^{4} = \frac{81}{16} & = 5\frac{1}{16} & & & & \\
\left(\frac{3}{2}\right)^{5} = \frac{234}{32} & = 7\frac{19}{32} & \cdots\cdot & 3 \text{ Okt.} & = & 8 \\
\hline
\left(\frac{3}{2}\right)^{6} = \frac{729}{64} & = 11\frac{25}{64} & \cdots\cdot & 4 \text{ Okt.} & = & 16 \\
\hline
\left(\frac{3}{2}\right)^{7} = \frac{2187}{128} & = 17\frac{11}{128} & & & & \\
\left(\frac{3}{2}\right)^{8} = \frac{6561}{256} & = 25\frac{161}{256} & \cdots\cdot & 5 \text{ Okt.} & = & 32 \\
\hline
\left(\frac{3}{2}\right)^{9} = \frac{19983}{512} & = 38\frac{227}{512} & & & & \\
\left(\frac{3}{2}\right)^{10} = \frac{59049}{1024} & = 57\frac{681}{1024} & \cdots\cdot & 6 \text{ Okt.} & = & 64 \\
\hline
\left(\frac{3}{2}\right)^{11} = \frac{177147}{2048} & = 87\frac{711}{2028} & & & & \\
\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{531441}{4096} & = 129\frac{3057}{4096} & \cdots\cdot & 7 \text{ Okt.} & = & 128
\end{array}
$$

zatem 12 kwinta jest nieco większa od 7 oktawy w stosunku

$$\frac{12 \text{ kwinta}}{7 \text{ oktawy}} = \frac{531441}{4096 \times 128} = \frac{531441}{524288}.$$

a szukając najbliższego reduktu otrzymamy *)

$$\frac{12 \text{ kwinta}}{7 \text{ oktawy}} = \frac{75}{74} = \frac{1}{8} \text{ część tonu}$$

*) Patrz przypisek 1 i 4.

zatem jeszcze 12 kwinta jest różna od 7 oktawy, mniej jak $\frac{1}{8}$ część tonu to jest o kommę tak zwaną pitagorejską.

PRZYPISEK 3-ci

Oznaczenie prawdziwych i przybliżonych stosunków wyrażających części całego tonu.

Jeżeli przyjmiemy podział oktawy na 6 części równych zwanych tonami, czyli gdy przyjmiemy za jedność muzyczną ton równy $\frac{1}{6}$ części oktawy i podzielimy następnie ten ton na części, one będą stanowić odległości muzyczne i złożą szereg arytmetyczny, ztąd łatwo oznaczyć stosunki odpowiadające tym częściom w szeregu geometrycznym.

Albowiem ponieważ 2 wyraża stosunek oktawy, która jest równa 6 tonom, więc $\frac{1}{6}$ część czyli ton będzie równy pierwiastkowi 6 stopnia z 2, albowiem dzielenie odpowiada wyciąganiu pierwiastków i otrzymamy łatwo szereg podziałów następny, wyrażony także w ułamkach przybliżonych:

Odległość części tonu.	Stosunki w pierwiastkach	Stosunki w dziesiętnych	Stosunki w ułamkach przybliżonych.
cały ton	$\sqrt[6]{2}$	1,12246	$\frac{10}{9}$
$\frac{1}{2}$ tonu	$\sqrt[12]{2}$	1,05946	$\frac{18}{17}$
$\frac{1}{3}$ tonu	$\sqrt[18]{2}$	1,03926	$\frac{27}{26}$
$\frac{1}{4}$ tonu	$\sqrt[24]{2}$	1,02930	$\frac{36}{35}$
$\frac{1}{5}$ tonu	$\sqrt[30]{2}$	1,02337	$\frac{44}{43}$
$\frac{1}{6}$ tonu	$\sqrt[36]{2}$	1,01944	$\frac{53}{52}$
$\frac{1}{7}$ tonu	$\sqrt[42]{2}$	1,01664	$\frac{62}{61}$
$\frac{1}{8}$ tonu	$\sqrt[48]{2}$	1,01455	$\frac{71}{70}$
$\frac{1}{9}$ tonu	$\sqrt[54]{2}$	1,01292	$\frac{79}{78}$
$\frac{1}{10}$ tonu	$\sqrt[60]{2}$	1,01162	$\frac{88}{87}$

Ta tablica daje nam odrazu możność oznaczyć część tonu, jaką wyraża stosunek oznaczony ułamkiem, tym sposobem różnice wyrażone w stosunkach dają się łatwo przedstawić i zrozumialej w postaci części zwyczajnych odległości czyli części tonu, i tak: stosunek $\frac{71}{70}$ wyraża $\frac{1}{8}$ część tonu, $\frac{36}{35}$ wyraża $\frac{1}{4}$ tonu i t. d.

Jeżeli teraz oznaczymy podobnie 12 półtonów oktawy, otrzymamy tablicę:

Odległości			Stosunki		
części oktawy	części odległości		w pierwiastkach z 2	w liczbach dziesiętnych.	w ułamkach przybliżonych i redukt.
0	0	Prima	1	1,	1.
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$ tonu		$\sqrt[12]{2}$	1,059463	$\frac{18}{17}$
$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$	1 ton	Sekunda	$\sqrt[6]{2}$	1,122462	$\frac{10}{9}$
$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$ tonu		$\sqrt[4]{2}$	1,189207	$\frac{6}{5}$
$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$	2 tony	Tercya	$\sqrt[3]{2}$	1 259921	$\frac{5}{4}$
$\frac{5}{12}$	$2\frac{1}{2}$ tonu	Kwarta	$\sqrt[12]{2^5}$	1,334840	$\frac{4}{3}$
$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$	3 tony		$\sqrt[2]{2}$	1,414213	$\frac{17}{12}$
$\frac{7}{12}$	$3\frac{1}{2}$ tonu	Kwinta	$\sqrt[12]{2^7}$	1,498370	$\frac{3}{2}$
$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$	4 tony		$\sqrt[3]{2^2}$	1,587401	$\frac{8}{5}$
$\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$ tonu	Sexta	$\sqrt[4]{2^3}$	1,681793	$\frac{5}{3}$
$\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$	5 tonów		$\sqrt[6]{2^5}$	1,781797	$\frac{16}{9}$
$\frac{11}{12}$	$5\frac{1}{2}$ tonu	Septyma	$\sqrt[12]{2^{11}}$	1,887750	$\frac{17}{9}$
$\frac{12}{12}=1$	6 tonów	Oktawa	2	2,	2.

Te wypadki zgadzają się zupełnie z wypadkami poniżej otrzymanemi z szeregu kwint.

PRZYPISEK 4-ty

Oznaczenie własności szeregu kwint i przybliżonych wartości ich stosunków wyrażonych w reduktach.

Przed obliczeniem wyrazów szeregu (6) § 5, podamy tu pewne własności tego szeregu.

Każdą ilość nie współmierną można zawsze zamienić albo na *ciąg czynników zbieżnych*, lub też na *szereg zbieżny*, naturalną jest rzeczą, że szereg jako summa wyrazów jest niczem innem jak logarytmem ciągu czynników. Dla tego też ilości wyrażające stosunki dają się rozwinąć na iloczyny zbieżne, a te odpowiadają szeregowi odległości coraz mniejszych. Własność ciągu iloczynowego jest ta, że ich czynniki zbiegają się do jedności.

Do rozwinięcia jakiegokolwiek wyrażenia na ciąg czynników dobrze służą ułamki ciągłe. Jakoż gdy wyrażenie nie współmierne x rozwiniemy na ułamek ciągły, to będzie:

$$x = 1 + \frac{1}{a + n_0}$$

Prawdziwa wartość x będzie zawartą między

$$1 + \frac{1}{a} = \frac{a + 1}{a}$$

i

$$1 + \frac{1}{a + 1} = \frac{a + 2}{a + 1}$$

mnożąc więc x przez $\frac{a}{a + 1}$ lub $\frac{a + 1}{a + 2}$, otrzymamy wartość bardzo bliską jedności, którą rozwijając znowu na ułamek ciągły otrzymamy:

$$\frac{a}{a + 1}\, x = 1 + \frac{1}{b + n_1}$$

wartość zawarta znowu między:

$$1 + \frac{1}{b} = \frac{b + 1}{b}$$

i

$$1 + \frac{1}{b + 1} = \frac{b + 2}{b + 1}$$

Ztąd będziemy mieli znowy bardziej przybliżoną wartość

$$\frac{b}{b+1} \cdot \frac{a}{a+1} x = 1 + \frac{1}{c+n_2}$$

i t. d.; a że te ułamki zbiegają się do jedności, przeto będzie:

$$x \cdot \frac{a}{a+1} \cdot \frac{b}{b+1} \cdots\cdot = 1$$

czyli

$$x = \frac{a+1}{a} \cdot \frac{b+1}{b} \cdot \frac{c+1}{c} \cdots\cdot \qquad \text{(a)}$$

jest to właśnie żądany ciąg iloczynowy zbieżny, wyrażający wartość x przez iloczyn czynników, których liczniki zawsze o jedną jedność większe od mianowników.

Każdy więc ułamek można sprowadzić do postaci iloczynu kilku ułamków podobnego rodzaju, a gdy ułamki bardzo małe można opuścić jako blizkie jedności, tym sposobem każdy ułamek da się sprowadzić przez podobny ciąg do prostszej postaci.

Znaczenie tego szeregu łatwo otrzymamy uważając, że biorąc logarytmy będzie:

$$lx = l\,\frac{a+1}{a} + l\,\frac{b+1}{b} + l\,\frac{c+1}{c} + \cdots\cdot \qquad \text{(b)}$$

a że logarytmy ułamków wyrażają, jak wyżej podaliśmy, części tonu (przypisek 3), szereg więc ten będzie zbieżnym, gdyż będzie wyrażać summę coraz mniejszych części wyrażonych przez też logarytmy.

W naszej teoryi, gdy x wyraża stosunki drgań dźwięków, lx wyraża, jak wiemy, odległości tonów, przeto wzór (a) wyraża te stosunki wyrażone przez iloczyn stosunków coraz zbliżających się do jedności; wzór (b) wyraża części tonu, które coraz zbliżają się do zera.

Z tego widzimy, że stosunki, aby można było je opuścić, powinny być wyrażone przez ułamki, których licznik powinien być o jedność większy od mianownika i oba wyrażone przez liczby wielkie; jeżeli zaś ułamek niema tej postaci, to za pomocą ułamków ciągłych daje się do tej postaci sprowadzić.

Dodać tu winniśmy, że każdy ułamek rozwija się na iloczyn skończonej liczby czynników, ilości zaś niewspółmierne dają ten iloczyn złożony z nieskończonej liczby czynników.

Umiejąc rozwijać ilości na iloczyny czynników, przystąpmy teraz do wyłuszczenia własności szeregu (6). Szereg (6) może być przedłużony w oba kierunki: z jednej mamy wykładniki dodatne, z drugiej wykładniki odjemne, postać więc jego będzie:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}, \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}, \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}, \left(\frac{3}{2}\right)^{-0} = 1, \left(\frac{3}{2}\right)^{1}, \left(\frac{3}{2}\right)^{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^{3}, \ldots$$

Gdy jakikolwiek wyraz tego szeregu rozwiniemy na iloczyn, to następne wyrazy dają się wyrazić przez też same ułamki mnożąc je przez czynnik $\frac{3}{2}$ np.:

$$\frac{1}{2^4}\left(\frac{3}{2}\right)^{8} = \frac{8}{5} \cdot \frac{887}{886}$$

mamy koniecznie:

$$\frac{1}{2^5}\left(\frac{3}{2}\right)^{9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{887}{886}$$

$$= \frac{6}{5} \cdot \frac{887}{886}$$

Ztąd mamy pierwszą własność tego szeregu:

1) Gdy mamy przybliżoną wartość jakiegokolwiek wyrazu, wartość przybliżona następnego wyrazu zawsze daje się wyrazić przez tęż przybliżoną wartość pomnożoną przez $\frac{3}{2}$.

Ta własność ułatwia bardzo oznaczenie wartości tego szeregu wyrazów.

Ponieważ niektóre wyrazy szeregu powyższego jak 7, 12, 53... schodzą się z duosono, przeto oznaczając podstawę tego szeregu przez $a = \frac{3}{2}$ będzie:

$$a^{7} = 1, \text{ blizko o } \frac{16}{15} = \frac{1}{2} \text{ tonu różnicy}$$

$$a^{12} = 1, \quad ,, \quad \frac{75}{74} = \frac{1}{8} \quad ,,$$

$$a^{53} = 1, \quad ,, \quad \frac{482}{481} = \frac{1}{50} \quad ,,$$

dalej

$$a^{17} = 1, \quad ,, \quad \frac{26}{27} = \frac{1}{3} \quad ,,$$

$$a^{29} = 1, \quad ,, \quad \frac{40}{41} = \frac{1}{5} \quad ,,$$

$$a^{41} = 1, \quad ,, \quad \frac{87}{88} = \frac{1}{10} \quad ,,$$

Którąkolwiek weźmiemy granicę dla unisono, oznaczając ją przez $\bar{\omega}$ mamy zawsze

$$a^{\bar{\omega}} = 1$$

i $\bar{\omega}$ będzie *peryodem* wartości przybliżonych, tak że będzie:

$$a^{-m} = a^{\bar{\omega}} \cdot a^{-m} = a^{\bar{\omega}-m} \qquad \text{(c)}$$

zatem w granicach potęg $-\bar{\omega}$ i $\bar{\omega}$, potęgi odjemne mają stale toż samo przybliżenie jak i dodatne, tak że te wartości powtarzają się od $a^{-\bar{\omega}}$ do $a^0 = 1$ i od a^0 do $a^{\bar{\omega}}$, to jest są sobie równe.

$$\begin{array}{llllll} a^{-\bar{\omega}}, & a^{-(\bar{\omega}-1)}, & a^{-(\bar{\omega}-2)} & \ldots\ldots a^{-2}, & a^{-1}, & a^{0} \\ a^{0}, & a^{1}, & a^{2} & \ldots\ldots a^{\bar{\omega}-2}, & a^{\bar{\omega}-1}, & a^{\bar{\omega}} \end{array} \qquad \text{(d)}$$

Zatem mamy drugą własność:

2) *W szeregu (6) przedłużonym w obie strony, wartości przybliżone w stronie dodatnej są też same, jak w stronie odjemnej w granicach uważanego peryodu, tylko odwrotnie ułożone i ta tożsamość jest zupełnie ścisłą.*

Jeżeli część dodatną szeregu uważamy za nuty podwyższone, a w części odjemnej za zniżone, to szereg (6) wyraża ściśle tę własność, że w granicy jaką uważamy zawsze te zniżenia i podwyższenia są sobie zupełnie równe. Tak więc połowa dodatna szeregu jest ściśle równa połowie odjemnej tylko odwrotnie ułożona.

Ważna to własność prostuje nam wiele fałszywych dotychczas pojęć o zniżeniu i podwyższeniu tonów. A mianowicie dotychczas uważamy, że tony zniżone np. w granicy peryodu 12, są różne od tonów podwyższonych i ta różnica ma stanowić stosunek $\frac{25}{24}$ równoważny odległości $\frac{1}{3}$ części tonu, zatem to nie może być prawdą, gdy uważamy, że tony muzyczne składają szereg geometryczny ich stosunków, jak to jest koniecznem.

Z drugiej zaś strony jest to zgodne z praktyką, gdyż przyjmując liczbę 12 za peryod konieczny, zniżenia muszą ściśle odpowiadać podniesieniom tonów, ażeby między temi półtonami nastąpiła zupełna zgodność.

Ponieważ odwrotność z każdego wyrazu rozwiniętego na iloczyn np. a^m jest ściśle równa takiemuż wyrazowi z wykładnikiem odjemnym, to jest $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$, tylko ponieważ wtedy mianowniki mniejsze przejdą na liczniki, aby je sprowadzić do granic 1 i 2 dosyć pomnożyć przez 2, to jest będzie:

$$a^{-m} = 2\frac{1}{a^m}$$

$$a^m = 2\frac{1}{a^{-m}} \qquad (e)$$

Ztąd mamy nową własność szeregu (6).

3) Każde dwa wyrazy równo oddalone od początku w szeregu (6), czyli mające też same wykładniki, są w takim z sobą związku, że odwracając jeden i mnożąc przez 2, otrzymujemy drugi, a zatem także cała część dodatna odwrócona i pomnożona przez 2 daje część odjemną i odwrotnie.

Równania (*c* i *e*) dają następne wyrażenia:

$$a^{\tilde{\omega}-m} = 2\frac{1}{a^m}$$

$$a^m = 2\frac{1}{a^{\tilde{\omega}-m}}$$

a także dla części odjemnej

$$a^{-(\tilde{\omega}-m)} = 2\frac{1}{a^{-m}}$$

$$a^{-m} = 2\frac{1}{a^{-(\tilde{\omega}-m)}}$$

Ztąd mamy własność nową:

4) Tak w części dodatnej jak odjemnej dwa wyrazy równo oddalone od wyrazów mających wykładniki 0 i $\tilde{\omega}$, są w takim związku, że jeden odwrócony i pomnożony przez 2 daje wyraz drugi.

Nakoniec mamy także:

$$a^m = a^{\tilde{\omega}} \quad a^m = a^{\tilde{\omega}+m}$$

podobnie $$a^{-m} = a^{-(\tilde{\omega}+m)}$$

gdyż $a^{\tilde{\omega}}$ = blizko 1, to jest że następne wyrazy po peryodzie $\tilde{\omega}$ powtarzają się, lecz o ile peryod $a^{\tilde{\omega}}$ bliższy jedności, to wyrazy są sobie bliżej równe, w ogóle zaś powtarzając się oddalają się od tej równości, równość więc ta zależy ściśle od wyrazu $a^{\tilde{\omega}}$ czyli od jego przybliżenia, a zatem od stosunku, który uważamy za mogący być opuszczonym, czyli od kommy.

Zatem mamy ostatnią własność:

5) Wyrazy szeregu (6) przeszedłszy za peryod przyjęty, powtarzają się w swej wartości, lecz o tyle o ile ten peryod zbliża się więcej do prawdziwej wartości 2, w ogóle zaś wyrazy są różne i dają dalsze podziały drobniejsze duosono.

Własności te ułatwiają nam bardzo obliczenie szeregu (6), sprowadzając toż obliczenie do pewnej ich części; jakoż sprowadzając je do tegoż samego duosono, dzieląc lub mnożąc przez potęgi z 2 i rozwijając na iloczyny czynników zbieżnych w sposób wyżej wskazany, czyli szukając reduktów najprostszych, którychby przybliżone wartości nie były mniejsze od ułamku $\frac{75}{74}$, jaki wypada dla peryodu 12 wyrazów, otrzymamy:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1.$$

$2\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{1} = \frac{3}{2}$
$2^2\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{16}{9} = \frac{9}{5} \cdot \frac{80}{81}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{8} = \frac{10}{9} \cdot \frac{81}{80}$
$2^2\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \frac{32}{27} = \frac{6}{5} \cdot \frac{80}{81}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{27}{16} = \frac{5}{3} \cdot \frac{81}{80}$
$2^3\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \frac{128}{81} = \frac{8}{5} \cdot \frac{80}{81}$	$\frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{4} = \frac{81}{64} = \frac{5}{4} \cdot \frac{81}{80}$
$2^3\left(\frac{3}{2}\right)^{-5} = \frac{256}{243} = \frac{18}{17} \cdot \frac{198}{199}$	$\frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{5} = \frac{243}{128} = \frac{17}{9} \cdot \frac{199}{198}$
$2^4\left(\frac{3}{2}\right)^{-6} = \frac{1024}{729} = \frac{24}{17} \cdot \frac{198}{199}$	$\frac{1}{2^3}\left(\frac{3}{2}\right)^{6} = \frac{729}{512} = \frac{17}{12} \cdot \frac{199}{198}$
$2^5\left(\frac{3}{2}\right)^{-7} = \frac{4096}{2187} = \frac{17}{9} \cdot \frac{198}{199}$	$\frac{1}{2^4}\left(\frac{3}{2}\right)^{7} = \frac{2187}{2048} = \frac{18}{17} \cdot \frac{199}{198}$
$2^5\left(\frac{3}{2}\right)^{-8} = \frac{8192}{6561} = \frac{5}{4} \cdot \frac{886}{887}$	$\frac{1}{2^4}\left(\frac{3}{2}\right)^{8} = \frac{6561}{4096} = \frac{8}{5} \cdot \frac{887}{886}$
$2^6\left(\frac{3}{2}\right)^{-9} = \frac{32768}{19683} = \frac{5}{3} \cdot \frac{886}{887}$	$\frac{1}{2^5}\left(\frac{3}{2}\right)^{9} = \frac{19683}{16384} = \frac{6}{5} \cdot \frac{887}{886}$
$2^6\left(\frac{3}{2}\right)^{-10} = \frac{65536}{59049} = \frac{10}{9} \cdot \frac{886}{887}$	$\frac{1}{2^5}\left(\frac{3}{2}\right)^{10} = \frac{59049}{32768} = \frac{9}{5} \cdot \frac{887}{886}$
$2^7\left(\frac{3}{2}\right)^{-11} = \frac{262144}{177147} = \frac{3}{2} \cdot \frac{74}{75}$	$\frac{1}{2^6}\left(\frac{3}{2}\right)^{11} = \frac{177147}{131072} = \frac{4}{3} \cdot \frac{75}{74}$
$2^7\left(\frac{3}{2}\right)^{-12} = \frac{524288}{531441} = 1 \cdot \frac{74}{75}$	$\frac{1}{2^7}\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{531441}{524288} = 1 \cdot \frac{75}{74}$

Ponieważ rozwijając też wyrażenia, można je otrzymywać w różnym stopniu przybliżenia, więc dla peryodu następnego 53 potrzeba wybierać takie najprostsze stosunki, które dają przybliżenie takie, jakie wypada dla tego peryodu, to jest $\frac{482}{481}$ lub większe i wtedy dosyć według powyższego obliczyć tylko dla połowy wyrazów to jest dla 26 pierwszych potęg, gdyż reszta będzie odwrotnemi wartościami pierwszych.

Nie rozwijając tych długich rachunków podamy tylko ostateczne wypadki.*)

Odległości	Stosunki	Odległości	Stosunki	Przybliżenia	Odległości	Stosunki	Odległości	Stosunki	Przybliżenia
— 1	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	.	— 14	$\frac{7}{4}$	14	$\frac{8}{7}$	$\frac{45453}{45454}$
— 2	$\frac{16}{9}$	2	$\frac{9}{8}$	.	— 15	$\frac{7}{6}$	15	$\frac{12}{7}$	$\frac{45453}{45454}$
— 3	$\frac{32}{27}$	3	$\frac{27}{16}$	.	— 16	$\frac{14}{9}$	16	$\frac{9}{7}$	$\frac{45453}{45454}$
— 4	$\frac{30}{19}$	4	$\frac{19}{15}$	$\frac{1216}{1215}$	— 17	$\frac{28}{27}$	17	$\frac{27}{14}$	$\frac{45453}{45454}$
— 5	$\frac{20}{19}$	5	$\frac{19}{10}$	$\frac{1216}{1215}$	— 18	$\frac{18}{13}$	18	$\frac{13}{9}$	$\frac{121213}{121214}$
— 6	$\frac{38}{27}$	6	$\frac{27}{19}$	$\frac{513}{512}$	— 19	$\frac{24}{13}$	19	$\frac{13}{12}$	$\frac{121213}{121213}$
— 7	$\frac{15}{8}$	7	$\frac{16}{15}$	$\frac{887}{886}$	— 20	$\frac{16}{13}$	20	$\frac{13}{8}$	$\frac{121213}{121214}$
— 8	$\frac{5}{4}$	8	$\frac{8}{5}$	$\frac{887}{886}$	— 21	$\frac{23}{14}$	21	$\frac{28}{23}$	$\frac{343435}{343434}$
— 9	$\frac{5}{3}$	9	$\frac{6}{5}$	$\frac{887}{886}$	— 22	$\frac{34}{31}$	22	$\frac{31}{17}$	$\frac{59592}{59591}$
— 10	$\frac{10}{9}$	10	$\frac{9}{5}$	$\frac{887}{886}$	— 23	$\frac{19}{13}$	23	$\frac{26}{19}$	$\frac{88885}{88884}$
— 11	$\frac{34}{23}$	11	$\frac{23}{17}$	$\frac{955}{954}$	— 24	$\frac{37}{19}$	24	$\frac{38}{37}$	$\frac{222280}{222279}$
— 12	$\frac{75}{74}$	12	$\frac{75}{74}$	$\frac{7813}{7812}$	— 25	$\frac{13}{10}$	25	$\frac{20}{13}$	$\frac{56560}{55559}$
— 13	$\frac{21}{16}$	13	$\frac{32}{21}$	$\frac{453}{454}$	— 26	$\frac{26}{15}$	23	$\frac{15}{13}$	$\frac{56560}{55559}$

*) Porównaj: Daniell'a. Zasady fizyki tłóm. J. Boguskiego, Warszawa 18 1886 r. zeszyt IV str. 478.

PRZYPISEK 5-ty

Oznaczenie różnych podziałów duosono i wyprowadzenie z nich całego systemu tonów muzycznych.

Mamy następne peryody główne: *)

$$7,\quad 12,\quad 53$$

odpowiadające im stosunki są:

$$\frac{16}{15},\quad \frac{75}{74},\quad \frac{482}{481},$$

które wyrażają odległości:

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{8},\quad \frac{1}{50} \text{ część całego tonu}$$

prócz tego mamy jeszcze trzy inne lecz mało przybliżone peryody:

$$17,\quad 29,\quad 41$$

ich stosunki $\frac{26}{27},\quad \frac{40}{41},\quad \frac{87}{88}$

a odległości $\frac{1}{3},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{1}{9}$ część tonu

Z tych peryodów, 12 wyrazowy, który stanowi 12 wyrazów kolejnych na skali muzycznej, daje podział z bardzo wielkiem przybliżeniem, gdyż różni się o $\frac{1}{8}$ część tonu od duosono i dzieli go na 12 części równych nazwanych półtonami.

Drugi peryod jeszcze większego przybliżenia obejmuje 53 wyrazy kolejne na skali muzycznej i dzieli to duosono na części równe, wyrażające odległości $\frac{1}{9}$ części tonu; 12-ty wyraz na skali jest właśnie pierwszym wyrazem i zarazem stosunkiem tego szeregu, i różni się tylko o $\frac{1}{50}$ część tonu od duosono, tak małą, że trzeba uważać ten podział za doskonały.

Wszystkie inne powyżej wymienione peryody, muszą dzielić duosono na części nierówne.

A że granice tych podziałów nie przechodzą granicy peryodu 12 tonów, przeto te peryody dają się wyrazić przez szeregi, skoro przyj-

*) Patrz przypisek 2-gi.

miemy liczbę 12 za stosunek i zredukujemy je według modułów oznaczających też peryody, i będzie:

$$G_{17}\ (0) = R\left(\div 0^{12}\right) \text{ mod. } 17$$

$$G_{29}\ (0) = R\left(\div 0^{12}\right) \text{ mod. } 29$$

$$G_{53}\ (0) = R\left(\div 0^{12}\right) \text{ mod. } 53$$

Zaczniemy rozwinięcie od największego peryodu 53, gdyż wszystkie inne będą jego częściami, oznaczając zarazem stosunki obliczone w przypisku 4 otrzymamy:

$$G_{53}\ (0) = \left\{\begin{array}{llllllllll} 0, & 12, & 24, & -17, & -5, & 7, & 19, & -22, & -10, & 2, \\ 1, & \frac{75}{74}, & \frac{38}{37}, & \frac{28}{27}, & \frac{20}{19}, & \frac{16}{15}, & \frac{13}{12}, & \frac{34}{31}, & \frac{10}{9}, & \frac{9}{8}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllllllllll} 14, & 26, & -15, & -3, & 9, & 21, & -20, & -8, & 4, & 16, & -25, & -13, \\ \frac{8}{7}, & \frac{15}{13}, & \frac{7}{6}, & \frac{32}{27}, & \frac{6}{5}, & \frac{28}{23}, & \frac{16}{13}, & \frac{5}{4}, & \frac{19}{15}, & \frac{9}{7}, & \frac{13}{10}, & \frac{21}{16}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllllllllll} -1, & 11, & 23, & -18, & -6, & 6, & 18, & -23, & -11, & 1, & 13, & 25, \\ \frac{4}{3}, & \frac{23}{17}, & \frac{26}{19}, & \frac{18}{13}, & \frac{38}{27}, & \frac{27}{19}, & \frac{13}{9}, & \frac{19}{13}, & \frac{34}{23}, & \frac{3}{2}, & \frac{32}{21}, & \frac{20}{13}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllllllllll} -16, & -4, & 8, & 20, & -31, & -9, & 3, & 15, & -26, & -14, & -2, & 10, \\ \frac{14}{9}, & \frac{30}{19}, & \frac{8}{5}, & \frac{13}{8}, & \frac{23}{14}, & \frac{5}{3}, & \frac{27}{16}, & \frac{12}{7}, & \frac{26}{15}, & \frac{7}{4}, & \frac{16}{9}, & \frac{9}{5}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllllll} 22, & -19, & -7, & -5, & 17, & -24, & -12, & 0 \\ \frac{34}{31}, & \frac{24}{13}, & \frac{15}{8}, & \frac{19}{10}, & \frac{27}{14}, & \frac{37}{19}, & \frac{148}{75}, & 2 \end{array}\right\}$$

Biorąc stosunki między temi wyrazami, otrzymamy ułamki, które dają się wyrazić z bardzo wielkiem przybliżeniem przez ułamek $\frac{81}{80}$ wyrażający odległości $\frac{1}{9}$ części całego tonu a mianowicie:

$$\frac{64}{63} = \frac{81}{80} \cdot \frac{301}{300} \qquad \frac{85}{84} = \frac{81}{80} \cdot \frac{1700}{1701}$$

$$\frac{70}{69} = \frac{81}{80} \cdot \frac{509}{508} \qquad \frac{91}{90} = \frac{81}{80} \cdot \frac{728}{729}$$

$$\frac{75}{74} = \frac{81}{80} \cdot \frac{1000}{999} \qquad \frac{105}{104} = \frac{81}{80} \cdot \frac{350}{351}$$

są więc wszystkie bardzo blisko sobie równe, czyli że duosono zupełnie równo dzieli się na 53 części, stanowiące $\frac{1}{9}$ część całego tonu.

Za liczby oznaczające odległości, kładąc nuty ze skali kwint, otrzymalibyśmy łatwo, przedłużając skalę za pomocą bemoli i krzyżów w obie strony, wszystkie składające szereg części tonów.

Ten podział jednak jest za drobny, i połowa tonów nie może być przez ucho nasze ocenioną, gdyż ucho nasze ocenia zaledwie ćwierci tonu.

Aby rozwinąć teraz peryod 17-o wyrazowy, dosyć jest z powyższego peryodu wybrać tylko liczby nie przechodzące granicy pół modułu, którym jest liczba ± 8, a wyrażając za pomocą skali przez odpowiednie nuty, otrzymamy:

$$G_{17}\,(0) = \begin{cases} 0, -5, \ 7, \ 2, -3, -8, \ 4, -1, -6, \ 6, \ 1, -4, \\ d, \ e^{b}, \ d^{x}, \ e, \ f, \ g^{b}, \ f^{x}, \ g, \ a^{b}, \ g^{x}, \ a, \ h^{b}, \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccc} 8, & 3, & -2, & -7, & 5, & 0. \\ a^{x}, & h, & c, & d^{b}, & c^{x}, & d. \end{array}$$

a ponieważ w szeregu gammy 53 wyrazowej podziały są równe, zatem tu będą odległości $\frac{4}{9}$ i $\frac{1}{9}$ części tonu naprzemian idące i ta gamma będzie złożona z 7-miu półtonów, 5-ciu $\frac{1}{3}$ części tonu i 5-ciu $\frac{1}{9}$ części tonu, zatem ma podział nie równy.

Podobnie peryod 29-o wyrazowy obejmuje liczby w granicach ± 14 i będzie zawierać:

$$G_{29}\,(0) = \begin{cases} 0, \ 12, -5, \ 7, -10, \ 2, \ 14, -3, \ 9, -8, \ 4, \\ d, \ c^{xx}, \ e^{b}, \ d^{x}, \ f^{b}, \ e, \ d^{xx}, \ f, \ e^{x}, \ g^{b}, \ f^{x}, \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} -13, & -1, & 11, & -6, & 6, & -11, & 1, & 13, & -4, & 8, \\ a^{bb}, & g, & f^{xx}, & a^{b}, & g^{x}, & h^{bb}, & a, & g^{xx}, & h^{b}, & a^{x}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} -9, & 3, & -14, & -2, & 10, & -7, & 5, & -12, & 0, \\ c^{b}, & h, & d^{bb}, & c, & h^{x}, & d^{b}, & c^{x}, & e^{bb}, & d, \end{array}$$

obejmuje odległości $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{9}$ części tonu, i składa się z 12-tu $\frac{1}{3}$ tonu i 17-tu $\frac{1}{9}$ tonu, zatem jest to podział także nierówny; — podwyższając jednak dodatne lub zniżając odjemne będące $\frac{1}{9}$ częścią tonu o $\frac{1}{9}$ część tonu, zamienia się tę gammę na ćwierciową; jakoż ta zmiana dopełnia się przez dodanie liczby 12 do sześciu tonów następnych ± 9, ± 10, ± 11, ± 12, ± 13, ± 14, zamieniając je na ± 21, ± 22, ± 23, ± 24, ± 25, ± 26, przez co $\frac{1}{3}$ części tonów sąsiednie zniżą się do $\frac{1}{4}$; a $\frac{1}{9}$ części tonów podwyższą się również do $\frac{1}{4}$ i cała ta gamma będzie się składać z 24 ćwierci tonu i 5 dodatkowych $\frac{1}{9}$ części tonu; — ten podział daje się dobrze odróżnić uchem naszem i da nam cały system tonów muzycznych objęty liczbami odległości ± 14, zawierającej 29 tonów, które mogą być odróżniane na instrumentach o tonie ciągłym.

Te to 29 tonów obejmują nasze skale linijne N. 1 i 2, które przedstawiają cały system muzyczny i więcej ich być nie może. Gamma więc 29 tonowa obejmuje cały system tonów dziś używanych w muzyce.

Tu także widzimy, że pięć odległości dodatkowych i równych $\frac{1}{9}$ części tonu przypadają między:

$$-5,\quad 7 = e^{b},\quad d^{x}$$
$$-8,\quad 4 = g^{b},\quad f^{x}$$
$$-6,\quad 6 = a^{b},\quad g^{x}$$
$$-4,\quad 8 = h^{b},\quad a^{x}$$
$$-7,\quad 5 = d^{b},\quad c^{x}$$

zatem tony bemolowe i krzyżykowe przypadające między całemi tonami gammy dyatonicznej, różnią się od siebie o $\frac{1}{9}$ część tonu, zatem prawie są równe i tak między d i e przypadają dwa tony, które idą kolejno tak: d, e^{b}, d^{x}, e, to jest tak, że ton podwyższony d^{x} jest bliższy następnego e, a znowu ton zmniejszony e^{b} jest bliższy poprzedniego d, co się ściśle zachowuje co do innych tonów, i rozstrzyga ten punkt sporny muzyków z akustykami na stronę muzyków; — a ztąd wypada, że stosunek dla wprowadzenia nowych tonów w gammie nie może być $\frac{25}{24}$, którego używa się w akustyce, a z którego wypada kolej d, d^{x}, e^{b}, e, lecz większy od tego ułamku $\frac{18}{17}$. *)

---

*) Patrz Durutte „Lois générales du système harmonique" Paris 1855 § 33. Resumé d'accustique musicale

PRZYPISEK 6-ty

O rozciągu i zawartości szeregów muzycznych.

Można jeszcze oznaczyć tak rozciąg, jak zawartość szeregu w funkcyi stosunku szeregu; jakoż niech będzie szereg zawierający n wyrazów o stosunku a

$$x,\ x+a,\ x+2a, \dots\ x+(n-1)a$$

Rozciąg jego jest to różnica dwóch skrajnych wyrazów, zatem

$$E = x+(n-1)a - x = (n-1)a \qquad \textbf{(a)}$$

to jest rozciąg jest zawsze równy stosunkowi szeregu wziętemu tyle razy, ile jest wyrazów, mniej jednym.

Ta prawda ma miejsce, gdy szereg nie podległ redukcyi, lecz gdy szereg jest zredukowanym według danego modułu p, wtedy i liczba $(n-1)a$ powinna być zmniejszoną pewną liczbą razy danego modułu, co można wyrazić w ten sposób:

$$E = R\,(n-1)a, \text{ mod. } p \qquad \textbf{(b)}$$

Zawartość szeregu znowu jest jego summą wyrazów zmniejszoną n razy wziętym pierwszym wyrazem, to jest

$$S = \Sigma_1^{n-1}(x+ka) - nx$$

co daje

$$S = \frac{n(n-1)}{2}a \qquad \textbf{(c)}$$

to jest zawartość jest równa stosunkowi wziętemu $n\frac{(n-1)}{2}$ razy.

I znowu, jeżeli szereg podległ redukcyi, wtedy ta ilość musi być zmniejszoną modułem wziętym pewną liczbę razy, co można wyrazić tak

$$S = R\left(\frac{n(n-1)}{2}a\right) \text{ mod } p. \qquad \textbf{(d)}$$

Te wyrażenia (a i c) lub (b i d) dowodzą, że wszystkie własności szeregów zależą od stosunku i od redukcyi według danego modułu.

Durutte w dziele „Technie ou lois générales du système harmonique" Paris 1855 podaje trzy równania, wyłącznie dla akordów, a mianowicie:

Funkcyę $F_m(x)$ akordów, która jest iloczynem z liczb wyrażających odległości tonów na skali kwint, ponieważ te liczby składają jak wiemy szereg arytmetyczny, przeto ich iloczyn może mieć znaczenie tylko odnośnie do tonów wyrażonych jako stosunki pod postacią $\left(\frac{3}{2}\right)^m$, a nigdy jako odległości.

Drugie równanie wyrażające summę tychże odległości oznacza naszą zawartość w postaci

$$\varphi_n(x) = nx + 4t - 3t'$$

zastosowane do szeregu tercyi, odpowiadającego akordom.

Nakoniec trzecie równanie w postaci

$$t + t' = n\frac{(n-1)}{2}$$

które wraz z powyższym, po wyrzuceniu t lub t' daje nasze równanie (*c* i *d*) i wyraża summę wyrazów szeregu zawsze w zastosowaniu do tercyi.

Pierwsze więc matematycznie nic nie znaczy a tylko komplikuje zadanie, dwa drugie wyrażają ściśle tylko jedno równanie.

Durutte nie wyprowadził praw muzycznych przez nas podanych, gdyż nie doszedł do właściwego początku gammy naturalnej i chromatycznej, a przyjąć je musiał tak, jak podała praktyka muzyczna, dla tego też uważał każdy związek muzyczny (gammy, akorda, i t. d) nie jako szereg tonów, lecz jako funkcyę tych tonów będącą ich iloczynem, gdyż w summie ich niknął każdy ton po szczególe, a ztąd dalej summę wyrazów $\varphi_m(x)$ szeregu musiał uważać w związku z $m-1$ tą pochodną funkcyi iloczynowej powyższej, która jest właśnie summą tych odległości.—Ztąd to dzieło jego zawierające teoryę akordów, jako przedstawiające jeden więcej krok na drodze postępu teoryi muzycznej, musiało się stać rozwlekłem, drobiazgowem i przepełnionem wzorami matematycznemi zupełnie zbytecznemi.

PRZYPISEK 7-my

Oznaczenie granic w jakich zmieniają się interwale, gdy zmieniamy ton fundamentalny gamm.

Jeżeli w szeregu kwint, wyrażonym przez potęgi z ułamku $\frac{3}{2}$, bierzemy jakikolwiek wyraz za początek i dzielimy przez niego wszystkie inne wyrazy szeregu, wartości tych ułamków nie przestają być potęgami z $\frac{3}{2}$ i nic się w szeregu nie zmienia, tylko początek jego przesuwa się na ten wyraz i wszystkie wyrazy są jeszcze ściśle potęgami kolejnemi z $\frac{3}{2}$.

Nie tak jest, gdy szereg kwint wyrazimy w ułamkach przybliżonych, które dla 12 tonów są zawarte w gammie chromatycznej, a które właściwie stanowią szereg tonów muzycznych, wtedy ze zmianą tonu fundamentalnego, wszystkie wyrazy trzeba podzielić przez odpowiednie ułamki i wtedy wyrazy gammy zmieniają się, lecz w pewnych ścieśnionych granicach.

Jakoż wykonywając to kolejne dzielenie, biorąc każdy wyraz gammy kolejno za ton fundamentalny, otrzymamy następującą tablicę, w której w pierwszej kolumnie pionowej są ułamki przez które dzielimy następne wyrazy gammy, a w następnych wartości, odpowiednie tymże wyrazom gammy, ułożonym według porządku gammy chromatycznej:

Ton fundamentalny		Pr.	1 półt.	Sk.	3 półt.	T.	Kr.	6 półt.	Kn.	8 półt.	Sx.	10 półt.	Sp.	Okt
P.	1	1	$\frac{18}{17}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	* $\frac{24}{17}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{17}{9}$	2
1	$\frac{18}{17}$	1	$\frac{85}{81}$	$\frac{17}{15}$	$\frac{85}{72}$	$\frac{34}{27}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{68}{45}$	$\frac{85}{54}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{289}{162}$	$\frac{17}{9}$	2
Sk.	$\frac{10}{9}$	1	$\frac{27}{25}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{108}{85}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{81}{50}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{162}{85}$	2
3	$\frac{6}{5}$	1	$\frac{25}{24}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{20}{17}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{25}{18}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{85}{54}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{30}{17}$	$\frac{50}{27}$	2
T.	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{16}{15}$	$\frac{96}{85}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{32}{25}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{68}{45}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{144}{85}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{48}{25}$	2
Kr.	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{18}{17}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{17}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$	2
6	$\frac{17}{12}$	1	$\frac{18}{17}$	$\frac{96}{85}$	$\frac{20}{17}$	$\frac{108}{85}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{24}{17}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{85}{54}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{85}{48}$	$\frac{17}{9}$	2
Kn	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{34}{27}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{24}{17}$	$\frac{40}{27}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{17}{9}$	2
8	$\frac{8}{5}$	1	$\frac{25}{24}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{85}{72}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{34}$	$\frac{25}{18}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{85}{48}$	$\frac{15}{8}$	2
Sx	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{27}{25}$	$\frac{17}{15}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{108}{85}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{48}{25}$	2
10	$\frac{9}{5}$	1	$\frac{85}{81}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{20}{17}$	$\frac{100}{81}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{25}{18}$	$\frac{40}{27}$	$\frac{85}{54}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{50}{27}$	2
Sp.	$\frac{17}{9}$	1	$\frac{18}{17}$	$\frac{324}{289}$	$\frac{20}{17}$	$\frac{108}{84}$	$\frac{45}{34}$	$\frac{24}{17}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{17}$	$\frac{144}{85}$	$\frac{30}{17}$	$\frac{162}{85}$	2

Do obliczenia tej tablicy przyjęliśmy w wyrazie środkowym $\frac{24}{17}$ lub $\frac{17}{12}$ dla uproszczenia wypadków, z powodu że $\frac{24}{17}=\frac{17}{12}\cdot\frac{288}{280}$, te ułamki są prawie zupełnie równe.

Widzimy tu, że ze zmianą tonu fundamentalnego, stosunki odpowiednich tonów gammy chromatycznej zmieniają się, a dla oznaczenia bliższego tych nowych stosunków, potrzeba je wyrazić w stosunku do wyrazów pierwotnych gammy, dla tego ułożymy je w następującej tablicy koleją wartości.

1 półtonu	Sekunda	3 półtonu	Tercya	Kwarta	6 półtonu
$\frac{27}{25}=\frac{18}{17}\cdot\frac{51}{50}$	$\frac{17}{15}=\frac{10}{9}\cdot\frac{51}{50}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{32}{25}=\frac{5}{4}\cdot\frac{43}{42}$	$\frac{27}{20}=\frac{4}{3}\cdot\frac{81}{80}$	$\frac{36}{25}=\frac{17}{12}\cdot\frac{62}{61}$
$\frac{16}{15}=\frac{18}{17}\cdot\frac{136}{135}$	$\frac{96}{85}=\frac{10}{9}\cdot\frac{62}{61}$	$\frac{85}{72}=\frac{6}{5}\cdot\frac{61}{62}$	$\frac{108}{85}=\frac{5}{4}\cdot\frac{62}{61}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{17}{12}=\frac{24}{17}$
$\frac{18}{17}$	$\frac{9}{8}=\frac{10}{9}\cdot\frac{81}{80}$	$\frac{20}{17}=\frac{6}{5}\cdot\frac{50}{51}$	$\frac{34}{27}=\frac{5}{4}\cdot\frac{136}{135}$	$\frac{45}{34}=\frac{4}{3}\cdot\frac{135}{136}$	$\frac{25}{18}=\frac{17}{12}\cdot\frac{50}{51}$
$\frac{85}{81}=\frac{18}{17}\cdot\frac{112}{113}$	$\frac{324}{289}=\frac{10}{9}\cdot\frac{113}{112}$	.	$\frac{5}{4}$	.	.
$\frac{25}{24}=\frac{18}{17}\cdot\frac{61}{62}$	$\frac{10}{9}$	.	$\frac{100}{81}=\frac{5}{4}\cdot\frac{80}{81}$	.	.

Kwinta	8 półtonu	Sexta	10 półtonu	Septyma
$\frac{68}{45}=\frac{3}{2}\cdot\frac{136}{135}$	$\frac{81}{50}=\frac{8}{5}\cdot\frac{81}{80}$	$\frac{17}{10}=\frac{5}{3}\cdot\frac{51}{50}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{48}{25}=\frac{17}{9}\cdot\frac{62}{61}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{144}{85}=\frac{5}{3}\cdot\frac{62}{61}$	$\frac{289}{162}=\frac{9}{5}\cdot\frac{112}{113}$	$\frac{162}{85}=\frac{17}{9}\cdot\frac{113}{112}$
$\frac{40}{27}=\frac{3}{2}\cdot\frac{80}{81}$	$\frac{27}{17}=\frac{8}{5}\cdot\frac{135}{136}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}=\frac{9}{5}\cdot\frac{80}{81}$	$\frac{17}{9}$
.	$\frac{85}{54}=\frac{8}{5}\cdot\frac{61}{62}$	.	$\frac{85}{48}=\frac{9}{5}\cdot\frac{61}{62}$	$\frac{15}{8}=\frac{17}{9}\cdot\frac{135}{136}$
.	$\frac{25}{16}=\frac{8}{5}\cdot\frac{42}{43}$	.	$\frac{30}{17}=\frac{9}{5}\cdot\frac{50}{51}$	$\frac{50}{27}=\frac{17}{9}\cdot\frac{50}{51}$

Uwaga. W tej tablicy w ułamkach końcowych, gdy wypadały liczniki i mianowniki różne więcej jak o jedność, zostały sprowadzone do tej formy za pomocą reduktów, aby można oznaczyć ściśle ich wielkość.

Z tej tablicy widzimy:

1) Że każdy ton zmienia się w granicach bardzo szczupłych a najwyżej różnice te stanowią ułamki $\frac{43}{42}=\frac{1}{5}$ części tonu i $\frac{136}{135}=\frac{1}{15}$ części tonu, tak że odległości im odpowiadające są zawarte w granicach o $\frac{1}{5}$ część tonu wyższe lub niższe. *)

2) Z ułamków, o jakie się różnią wartości jednego i tegoż samego interwalu, jedne są bardzo małe i stanowią $\frac{81}{80}=\frac{1}{9}$ części tonu, $\frac{113}{112}=\frac{1}{12}$ części, $\frac{136}{135}=\frac{1}{15}$ części tonu i te mogą być bez żadnej niedogodności opuszczone, gdyż te części tonu są niemożliwe do odróżnienia nawet przez najlepsze ucho; — inne zaś stanowią: $\frac{43}{42}=\frac{1}{5}$ część, $\frac{51}{50}=\frac{1}{6}$ część, $\frac{62}{61}=\frac{1}{7}$ część tonu, i te raz powiększają, drugi raz zmniejszają ten interwal.

3) Pomiędzy bardzo małemi ułamkami mamy $\frac{1}{9}$ część tonu równą stosunkowi $\frac{81}{80}$ który zowiemy *kommą*, ztąd wypada że stosunki

$$\frac{9}{8},\ \frac{32}{27},\ \frac{100}{81},\ \frac{27}{20},\ \frac{40}{27},\ \frac{16}{9},\ \text{i t. d.}$$

można uważać za ściśle równe

$$\frac{10}{9},\ \frac{6}{5},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{9}{5}\ \text{i t. d.}$$

Zatem dla czego dotychczas we wszystkich dziełach fizycznych i muzycznych nazywamy $\frac{9}{8}$ tonem major a $\frac{10}{9}$ tonem minor, kiedy różnica między niemi jest bardzo mała i nie może być ocenioną przez ucho najdelikatniejsze, nie wiemy; zdaje się że ten błąd zrodziła prostota tych stosunków.

Z tych dwóch ułamków przyjęliśmy $\frac{10}{9}$ za oznaczenie sekundy, jako lepiej odpowiedni i dający symetryę wypadków, gdyż jego odwrotność daje stosunek $\frac{9}{5}$ wyrażający 10 półton; — gdy odwrotność $\frac{9}{8}$ daje ułamek $\frac{16}{9}$, nie znajdujący się między stosunkami wyrażającemi gammę.

*) Patrz przypisek 3-ci.

Kwestya, o którą tu idzie, lepiej się przedstawi, gdy połączymy stosunki ich z sobą i porównamy z innemi, i tak:

	Półtony	Cały ton	Tercye
Majorowe	$\frac{18}{17}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$
Minorowe	$\frac{25}{24}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{6}{5}$
Stosunki	$\frac{51}{50}$	$\frac{81}{80}$	$\frac{25}{24}$
Części tonu całego .	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$

zatem różnica tonów major i minor właściwie powinna być taż sama i równa $\frac{1}{3}$ lub $\frac{1}{4}$ tonu, tymczasem w półtonach jest $\frac{1}{6}$ a w całych tonach $\frac{1}{9}$, co jest absurdum widocznem. — Zatem te nazwy powinny odpowiadać innym właściwym stosunkom.

Podobnie za stosunek pierwszego półtonu przyjęliśmy $\frac{18}{17}$, w miejsce dotąd używanego ułamku $\frac{16}{15}$; z tej prostej przyczyny, że jest to półton średni, jak widzimy w przypisku 2; — a także że przy ułamku $\frac{16}{15}$, septyma powinna być odwróconym tym ułamkiem to jest $\frac{15}{8}$, tymczasem średnia jej wartość wypada $\frac{17}{9}$ i jest odwróconym ułamkiem $\frac{18}{17}$, a wtedy $\frac{15}{8}$ wyraża septymę zniżoną czyli minor, gdy przyjmując $\frac{18}{17}$, ona jest major, jak być powinno.

4) Każdy półton ma dwie granice wartości, a mianowicie jedną największą, drugą najmniejszą, tak że wypadają potrójne wartości, których jednak znaczenie jest zupełnie inne od znaczenia dziś używanego major i minor.

Otóż zostawiając nazwy major i minor zniżeniu lub podwyższeniu tonów o $\frac{1}{2}$ tonu, czyli o stosunek $\frac{18}{17}$ lub $\frac{25}{24}$, różnice w odległościach jakie tu mamy, wynoszące nie więcej jak $\frac{1}{5}$ część tonu, nazwiemy *dużemi* i *małemi* odległościami, gdy to przyjmiemy tablica powyższa uczy nas:

1) Interwal pierwszego półtonu ma pięć wartości idących w następnym porządku wartości co do wielkości:

$$\frac{27}{25} > \frac{16}{15} > x > \frac{18}{17} > \frac{85}{81} > \frac{25}{24}$$

a że średnia wartość wypadająca z równego podziału duosono na 12 części równych: $x = 1{,}0591$ *) przypada w środku i jest bardzo blizka ułamkowi $\frac{18}{17}$, który będzie wyrażał półton średni i będzie się różnił od najwyższego $\frac{27}{25}$ o $\frac{1}{6}$ część tonu, a od najniższego $\frac{25}{24}$ o $\frac{1}{7}$ część tonu. Zatem $\frac{27}{25}$ będzie półtonem dużym a $\frac{25}{24}$ półtonem małym. Ułamek zaś $\frac{16}{15}$ jako blizko znaczny z $\frac{18}{17}$ nie może być półtonem major.

2) Interwal sekundy czyli tonu całego ma również pięć wartości:

$$\frac{17}{15} > \frac{96}{85} > \frac{9}{8} > x > \frac{10}{9}$$

a że średnia wartość $x = 1{,}1224$, przypada między $\frac{9}{8}$ i $\frac{10}{9}$ i znacznie bliżej $\frac{10}{9}$, przeto ten ułamek daje ton średni i jest zarazem najniższym.

Najwyższy zaś ton ma wartość $\frac{17}{15}$ i jest większy o $\frac{1}{6}$ część tonu od średniego, będzie więc wyrażał *ton duży*; zatem nie mamy wyrażenia dla tonu małego, a to, co dziś zowiemy tonem major z wartością $\frac{9}{8}$ i tonem minor z wartością $\frac{10}{9}$, nic innego oba nie wyraża jak tylko ton średni, gdyż stosunek między niemi jest $\frac{1}{9}$ częścią całego tonu, nieocenialną dla ucha.

3) Interwal trzeciego półtonu ma tylko trzy wartości:

$$\frac{6}{5} > x > \frac{85}{72} > \frac{20}{17}$$

porównywając je z wartością średnią: $x = 1{,}1892$, która najbliższą jest $\frac{6}{5}$, tu znowu mamy największą wartość równą środkowej, która będzie wyrażała *trzeci półton średni*. Inne wartości są mniejsze, a najmniejszy

---

*) Patrz przypisek 3-ci.

$\frac{20}{17}$ jako o $\frac{1}{6}$ część tonu mniejszy od średniego, będzie *trzecim półtonem małym*, zatem tu nie mamy tonu dużego.

4) Interwał tercyi ma następujące wartości:

$$\frac{32}{25} > \frac{108}{85} > \frac{34}{27} > x > \frac{5}{4} > \frac{100}{81}$$

średnia wartość $x = 1{,}2599$ przypada blizko $\frac{5}{4}$, zatem jest to *średnia tercya* i jest zarazem najniższą wartością, gdyż ostatnia liczba jest o $\frac{1}{9}$ tonu niższa od $\frac{5}{4}$, zatem zlewa się z nią. Reszta wartości jest większych od $\frac{5}{4}$, a największy $\frac{32}{25}$, większy o $\frac{1}{5}$ część tonu będzie *tercyą dużą*, nie mamy tu znowu tercyi małej.

5) Interwał kwarty ma trzy wartości i wszystkie bardzo blizkie $\frac{4}{3}$, nie ma tu wcale wartości małych i dużych, i ta wartość $\frac{4}{3}$ jest bardzo blizka tonowi średniemu $1{,}3348$, przeto jest to *kwarta średnia*, którą dla tej przyczyny że w przemianach nie doznaje żadnej zmiany, nazywamy także *czystą*.

6) Interwał 6-go półtonu środkowego ma takie wartości:

$$\frac{36}{25} > \frac{17}{12} > x > \frac{24}{17} > \frac{25}{18}$$

wartość średnia $x = 1{,}41421$, przypada między ułamkami $\frac{17}{12}$ i $\frac{24}{17}$ bliżej do $\frac{24}{17}$, które bardzo mało się różnią od siebie; dla tego wartości te obie uważać będziemy za *szósty półton średni*, mamy tu jednak dwa tony graniczne, jeden najwyższy $\frac{36}{25}$ będzie *półtonem dużym*, drugi najniższy $\frac{25}{18}$ *półtonem małym*, różne jeden o $\frac{1}{6}$, drugi o $\frac{1}{7}$ część tonu od średniego.

7) Interwał kwinty ma trzy wartości bardzo blizkie $\frac{3}{2}$ i bardzo blizkie tonowi średniemu $1{,}4983$, przeto jest to *kwinta średnia*, a że nie mamy ani wartości dużych ani małych, przeto jeszcze tak jak kwarta nazywa się *kwintą czystą* lub czasem sprawiedliwą.

8) Interwał ósmego półtonu ma wartości:

$$\frac{81}{50} > \frac{8}{5} > x > \frac{27}{17} > \frac{85}{54} > \frac{25}{16}$$

wartość średnia jest $1{,}5874$ i przypada bardzo blizko $\frac{8}{5}$, a że jeszcze najwyższa wartość $\frac{81}{50}$ mało różni się od $\frac{8}{5}$, przeto $\frac{8}{5}$ jest najwyższym tonem i zarazem *ósmym półtonem średnim*, a zatem $\frac{25}{16}$ będzie *ósmym półtonem małym* i o $\frac{1}{5}$ część tonu różny od średniego.—Dużego zaś półtonu niema.

9) Interwal sexty ma wartość:

$$\frac{17}{10} > \frac{144}{85} > x > \frac{5}{3}$$

a że prawdziwa wartość jest 1,6818 i bardzo blizka $\frac{5}{3}$, przeto ten ułamek wyraża *sextę średnią*. Reszta wartości jest większa i największa $\frac{17}{10}$ będzie *sextą dużą*, sexty małej tu niema.

10) Interwal dziesiątego półtonu ma następujące wartości:

$$\frac{9}{5} > x > \frac{16}{9} > \frac{85}{48} > \frac{30}{17}$$

a że średnia wartość 1,7818 środkuje między $\frac{9}{5}$ i $\frac{16}{9}$, które różnią się o mały ułamek $\frac{81}{80}$; przeto *dziesiąty półton średni* ma wartość $\frac{9}{5}$. Reszta jest mniejsza, a najmniejszy $\frac{30}{17}$ będzie *półtonem małym*, dużego zaś niema.

11) Interwal septymy ma wartości:

$$\frac{48}{25} > \frac{162}{85} > \frac{17}{9} > x > \frac{15}{8} > \frac{50}{27}$$

średnia wartość 1,8877 jest bardzo blizka $\frac{17}{9}$ i to będzie *septyma średnia*, tu mamy wartości duże i małe, zatem $\frac{48}{25}$ będzie *septymą dużą*, a $\frac{15}{8}$ septymą małą, gdyż $\frac{15}{8}$ i $\frac{50}{27}$ różnią się o $\frac{81}{80}$ czyli kommę.

12) Nakoniec oktawa jest niezmienna i równa 2, przedstawia więc *oktawę* czystą i nie ma tu ani małej ani dużej.

Zbierając wszystkie te wartości, otrzymamy następującą tablicę:

Interwale	1 półt.	Sek.	3 półt.	Terc.	Kwa.	6 półt.	Kwi	8 półt.	Sexta	10 półt.	Sept.	Okt.
duże .	$\frac{27}{25}$	$\frac{17}{15}$	.	$\frac{32}{25}$	.	$\frac{36}{25}$	.	.	$\frac{17}{10}$	.	$\frac{48}{25}$	.
średnie	$\frac{18}{17}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{24}{17}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{17}{9}$	2
małe .	$\frac{25}{24}$	.	$\frac{20}{17}$	.	.	$\frac{25}{18}$	.	$\frac{25}{16}$	.	$\frac{30}{17}$	$\frac{50}{27}$	.

Otóż ostatecznie ta tablica wyjaśnia nam następne prawa muzyczne:

1° Trzy interwale tylko kwarty, kwinty i oktawy, w przemianach są zawsze stałe: niezmienne i dla tego zowią się *czystemi*.

2° Trzy interwale sekundy, tercyi i sexty są tylko średnie i duże.

3° Trzy interwale 3-go, 8-go i 10-go półtonu są znowu tylko średnie i małe.

4° Trzy ostatnie interwale 1-go i 6-go półtonu i septymy, mają po trzy wartości: duże, średnie i małe.

5° Wszystkie odległości tak małe jak duże, różnią się od średnich o $\frac{1}{5}$ lub $\frac{1}{6}$ część tonu.

6° Jeżeli szereg interwali dużych odwrócimy i pomnożymy przez 2, otrzymamy szereg interwali małych w odwrotnym porządku, i tak samo z małemi mnożąc przez 2 i odwracając, otrzymamy interwale duże w odwrotnym porządku. Jeżeli szereg interwali średnich odwrócimy i pomnożymy przez dwa, otrzymamy tenże szereg w odwrotnym porządku. Wszystko to wypada z własności szeregu kwint.

Takie są własności interwali składających gammę chromatyczną, to jest, gamma ta składa się z samych interwali średnich i czystych, które zmieniają się w rozciągłości $\frac{1}{5}$ części tonu.

Aby zaś mieć zmiany interwali składających gammę dyatoniczną, wybierzmy stosunki odpowiadające tylko siedmiu odległościom głównym, i układając w podobną tablicę, otrzymamy łącząc tony duże i małe ze średniemi, jako o $\frac{1}{5}$ część tylko różne, i przyjmując je za majorowe w obec tonów minorowych o $\frac{1}{2}$ tonu niższych, będzie:

Interwale	Sekun.	Tercya	Kwarta	Kwinta	Sexta	Sept.	Okt.
major .	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{12}$	.	$\frac{5}{3}$	$\frac{17}{9}$	.
czyste .	.	.	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	.	.	2
minor .	$\frac{18}{17}$	$\frac{6}{5}$	.	$\frac{24}{17}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	.

Tablica ta dowodzi nam, że wszystkie tony średnie: sekundy, tercye, sexty i septymy, dopełniają się tonami średniemi niższych półtonów, to jest 1, 3, 8, 10 półtonem, które są równe o $\frac{1}{2}$ tonu i stanowią dla nich tony minorowe, zatem średnie ich wartości stają się majorowe. Dalej kwarta i kwinta są czyste i dopełniają się tonem średnim zawartego między niemi 6-go półtonu $\frac{17}{12}=\frac{24}{17}$ tak, że dla kwarty stanowi on kwartę major, a dla kwinty kwintę minor, i prócz tego kwarta niema kwarty minor, a kwinta kwinty major, co też rzeczywiście jest przyjęte w muzyce.

Wszystkie więc tony składające gammę siedmiotonową major, są majorowe lub czyste; wszystkie znowu tony, składające gammę chromatyczną, są średnie lub czyste.

PRZYPISEK 8-my

O temperamencie muzycznym.

Temperamentem w muzyce nazywamy działanie podwyższenia lub zniżenia niektórych tonów, dla przyprowadzenia ich do tożsamości, lub też wprowadzenia między dwa tony nowego tonu przez podwyższenie jednego lub zniżenie drugiego.

Ponieważ nie znano dokładnego podziału duosono na części równe, za pomocą skali kwint i prawa, że wszystkie związki muzyczne niczem innem nie są, jak szeregami geometrycznemi, bez względu przez jakie wyrażają się ułamki przybliżone, rzeczywista zachodziła potrzeba wprowadzenia między dwa tony pośrednich, i temperament w muzyce miał racyą bytu, a najlepszym temperamentem był podział na części równe; lecz w obec praw wyżej przytoczonych, temperament staje się zbytecznym, gdyż podziały otrzymane tą drogą i związki muzyczne, jako szeregi podległe redukcyi, nie potrzebują być zmieniane, gdy pamiętamy, że przybliżenia podawane w postaci reduktów czyli ułamków prostych, są tylko wyrażeniami przybliżonemi, które zmieniać się mogą według potrzeby na ściślejsze i według granicy tychże samych związków, i że przy wyrażeniu tonów przez odległości, to jest przez liczby całe, będące logarytmami stosunków wyrażających te tony, — stosunki te stają się nam zupełnie bezużyteczne, a ztąd i stopień ich przybliżenia tembardziej nie ma żadnego znaczenia w naszej teoryi muzyki, a tylko ich odległości, które ściśle zależą od skali kwint.

Witkowski. ZASADY MATEMAT. MUZYKI