NSTYTUT ORGANIZACJI I KIEROWANIA
POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MINISTERSTWA NAUKI SZKOLNICTWA WYŻSZEGO I TECHNIKI

ПРИМЕНЕНИЕ В ПРОМЫШЛЕННОСТИ МЕТОДОВ ОРГАНИЗАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ, КИБЕРНЕТИКИ И ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИИ

МАТЕРИАЛЫ СОВЕЩАНИЯ
ЭКСПЕРТОВ СТРАН-ЧЛЕНОВ СЭВ
БЫТОМ, ДЕКАБРЬ 1974

MATERIAŁY KONFERENCYJNE

WARSZAWA
1976

Redaktor
Piotr Oziębło
Redaktor techniczny
Iwona Dobrzyńska
Korekta
Barbara Czerwińska

Opracowanie naukowe
mgr inż. Jan Studziński

Лукасик С. (ПНР)
Международный коллектив ученых

ЗАДАЧА ПЛАНИРОВАНИЯ В ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ ОТРАСЛИ ЭКОНОМИКИ В УСЛОВИЯХ СТОХАСТИЧЕСКОГО СПРОСА

Легко заметить, что все экономические системы наделены иерархической структурой. Они разделены на подсистемы и отлельные звенья, обладающие самостоятельными правами принятия решений, каждое звено имеет возможность максимизировать свой собственный функционал, таким образом, иерархическая система — это принципиально многокритериальная система.

Математическая модель функционирования любой нерархической системы может интерпретироваться, вообще говоря, как игра с непротивоположными интересами. В предлагаемом докладе рассматривается задача планирования на уровне потребительской отрасли экономики, которая является примером такого рода системы. Работа имеет методологический характер, тем не менее, в вычислительные программы заложены данные, относящиеся к реальным экономическим процессам, в частности, это относится к модели процесса потребления.

1. Математическое описание

Рассматривается система производства и потребления некоторой категории потребительских товаров. Система состоит из подсистемы производства, потребления и центра (рис. 1), математическое описание которых приводится в дальнейшем.

Предполагается, что отрасли функционируют в рамках более сложной иерархической ситемы и что от управленческих органов высшего уровня получают суммарные ресурсы и агрегированные показатели для данной категории, т.е. агрегированный выпуск товаров

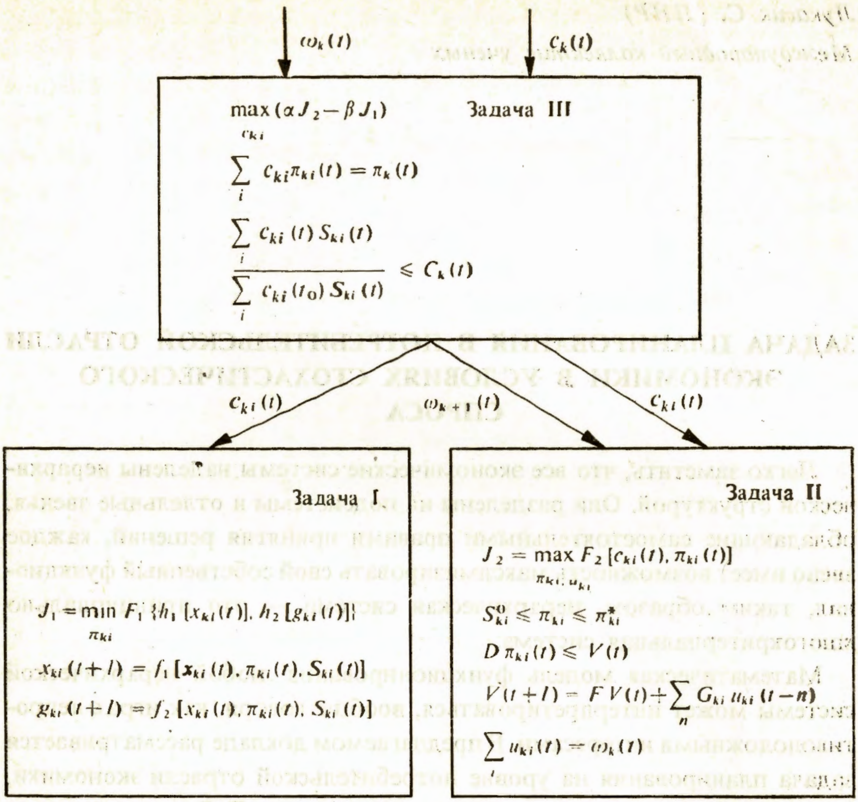

Рис. 1 Общая блок—схема системы производства и потребления; задача I: подсистема потребления, задача II: подсистема производства, задача III: подсистема центра

$$\pi_k(t)=\sum_i c_{ki}\,\pi_{ki}(t) \qquad (1)$$

и индекс цен

$$c_k(t)=\frac{\sum\limits_i c_{ki}(t)S_{ki}(t)}{\sum\limits_i c_{ki}(t_0)S_{ki}(t)} \qquad (2)$$

где: i — номер товара, k — номер категории.

Блок потребления описывается системой уравнений движения (4), (5), (6), (7) в координатах $x_{ki}(t)$, $g_{ki}(t)$.

Здесь: $x_{ki}(t)$ — запас i-го товара k-ой категории,

$g_{ki}(t)$ — дефицыт i-го товара k-ой категории,

$S_{ki}(t)$ — стохастический спрос на i-ый товар k-ой категории,

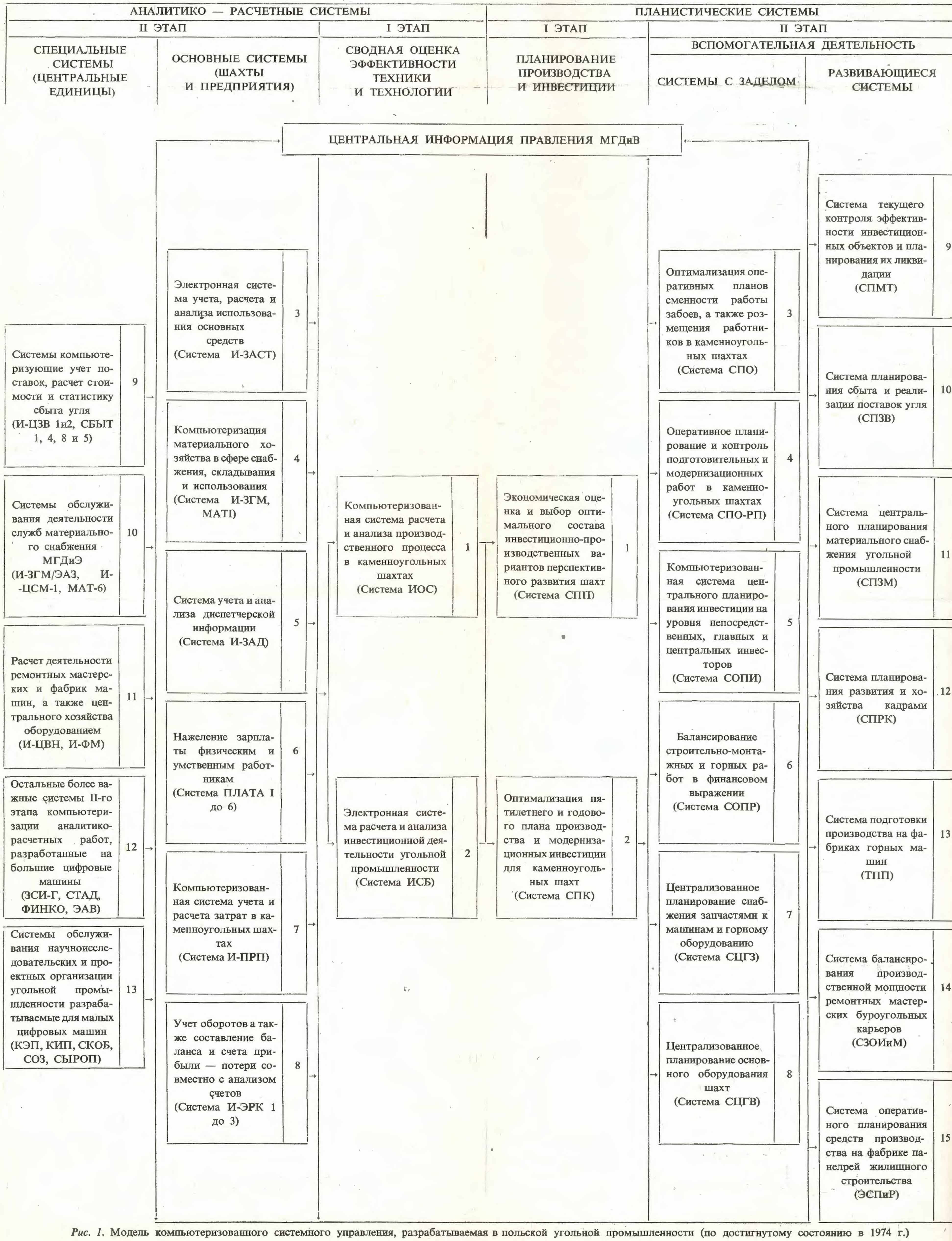

Рис. 1. Модель компьютеризованного системного управления, разрабатываемая в польской угольной промышленности (по достигнутому состоянию в 1974 г.)

$\pi_{ki}(t)$ — количество i-го товара k-ой категории, поступающее на вход системы потребления от блока производства,

$c_{ki}(t)$ — цена i-го товара k-ой категории.

Аргумент t означает время.

Спрос представляет собой многомерный стохастический процесс В модели системы учитывается эффект заместимости товаров в условиях дефицита некоторых из них.

Для описания поведения потребителей была принята система модифицированных функций Стоуна. Более подробно эта модель излагается в работе [1]. Стохастический спрос на i-ый товар k-ой категории описывается управлением

$$S_{ki}(t) = S^0_{ki}(t) + \frac{b_{ki}(t)}{c_{ki}(t)}\left[S_k(t) - \sum_i c_{ki}(t)\, S^0_{ki}(t)\right] \tag{3}$$

где: $S^0_{ki}(t)$ — элементарный, нижный уровень потребления i-го товара k-ой категории,

$S_k(t)$ — индекс спроса для всех товаров k-ой категории,

$b_{ki}(t)$ — пример модели (стохастический процесс),

$$b_{ki}(t) = m_{ki}(t) + \sigma_i(t)$$

$m_{ki}(t)$ — детерминистическая составляющая процесса $b_{ki}(t)$.

Процесс
$$\sigma(t) = \begin{Bmatrix} \sigma_1(t) \\ \vdots \\ \sigma_i(t) \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

получается на выходе линейной системы

$$\sigma(t) = A\sigma(t-1) + BV(t)$$

Здесь A, B — матрицы системы,

$V(t)$ — дискретный белый шум единичного уровня.

Задача блока потребления (задача I) формируется следующим образом:

$$x^*_{ki}(t+1) = x_{ki}(t) + \varphi^{(1)}_{ki}[x_{ki}(t), \pi_{ki}(t), S_{ki}(t)] \tag{4}$$

$$g^*_{ki}(t+1) = -x_{ki}(t) + \varphi^{(2)}_{ki}[x_{ki}(t), \pi_{ki}(t), S_{ki}(t)] \tag{5}$$

$$x_{ki}(t+1) = x^*_{ki}(t+1) - \varphi^{(3)}_{ki}[x^*_k(t+1), g^*_k(t+1)] \tag{6}$$

$$g_{ki}(t+1) = g^*_{ki}(t+1) - \sum_{j \neq i} \gamma^{-1}_{ij}\, \varphi^{(3)}_{ki}[x^*_{ki}(t+1), g^*_k(t+1)] \tag{7}$$

где: $x^*_{ki}(t)$, $g^*_{ki}(t)$ — соответственно запас и дефицит i-ого товара k-ой категории без учета заместимости,

$x_{ki}(t)$, $g_{ki}(t)$ — запас и дефицит i-ого товара k-ой категории с учетом заместимости;

$\pi_{ki}(t)$ — поставка i-го товара k-ой категории,

$S_{ki}(t)$ — спрос на i-тый товар k-ой категории,

γ_{ij} — коэффициент заместимости товаров i и j.

Функции $\varphi^{(1)}_{ki}(t)$, $\varphi^{(2)}_{ki}(t)$, $\varphi^{(3)}_{ki}(t)$ имеют вид:

$$\varphi^{(1)}_{ki}\left[x_{ki}(t), \pi_{ki}(t), S_{ki}(t)\right] = \begin{cases} \pi_{ki}(t) - S_{ki}(t) & \text{для} \quad \Theta_{ki}(t) > 0 \\ -x_{ki}(t) & \text{для} \quad \Theta_{ki}(t) \leqslant 0 \end{cases} \tag{8}$$

$$\varphi^{(2)}_{ki}\left[x_{ki}(t), \pi_{ki}(t), S_{ki}(t)\right] = \begin{cases} S_{ki}(t) - \pi_{ki}(t) & \text{для} \quad \Theta_{ki}(t) \leqslant 0 \\ x_{ki}(t) & \text{для} \quad \Theta_{ki}(t) > 0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\varphi^{(3)}_{ki}\left[x_{ki}(t), \pi_{ki}(t), S_{ki}(t)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{j \neq i} \gamma_{ij}\, g^*_i(t+1) & \text{для} \quad \Lambda_{ki}(t) > 0 \\ x^*_{ki}(t+1) & \text{для} \quad \Lambda_{ki}(t) \leqslant 0 \end{cases} \tag{10}$$

где: $\Lambda_{ki}(t) = x^*_{ki}(t+1) - \sum\limits_{j \neq i} \gamma_{ij}\, b^*_j(t+1)$,

$\Theta_{ki}(t) = x_{ki}(t) + \pi_{ki}(t) - S_{ki}(t)$.

В дальнейшем вместо

$$\varphi^{(1)}_{ki}\left[x_{ki}(t), \pi_{ki}(t), S_{ki}(t)\right],$$

$$\varphi^{(2)}_{ki}\left[x_{ki}(t), \pi_{ki}(t), S_{ki}(t)\right], \ldots \text{ и т.д.}$$

будем писать $\varphi^{(1)}_{ki}(t)$, $\varphi^{(2)}_{ki}(t)$, ... и т.д.

Оптимальные значения поставок

$$\pi^*_{ki}(t), \quad t = t_0, \ldots, T, \quad i = 1, 2, \ldots, I_k$$

определяются из условия

$$\min_{\pi_{ki}(t)} J_1(T) = \min_{\pi_{ki}(t)} E\left\{ \sum_{t=t_0}^{T} \mathop{N}_{k=1}^{K} \left[h_1[x_{ki}(t)] + h_2[g_{ki}(t)]\right]\right\} \tag{11}$$

где: E — оператор матожидания,

h_1, h_2 — функции штрафа.

Предполагается, что статистические характеристики процесса спроса $S_k(t)$ известны.

Блока производства описывается системой уравнений развития производственных мощностей $V(t)$:

$$V(t+1) = FV(t) + \sum_{n=0}^{N} G_{ki} u_{ki}(t-n) \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{J} u_{ki}(t) = w_k(t) \tag{13}$$

и функций производства

$$D\pi_{ki}(t) \leqslant V(t) \tag{14}$$

где $w_k(t)$ — сумма ресурсов для производства всех товаров k-ой категории.

Задача производителя (задача II) сводится к определению вектора поставок

$$\pi_{ki}^{0}(t) \qquad i = 1, 2, \ldots, I_k \qquad t = t_0, \ldots, T$$

и распределению ресурсов $u_{ki}(t)$, доставляющих максимум функционалу

$$J_2 = \sum_{t=t_0}^{T} \sum_{i=1}^{I_k} c_{ki}(t)\,\pi_{ki}(t) \tag{15}$$

при ограничениях (12), (13), (14), и ограничении

$$S_{ki}^{0}(t) \leqslant \pi_{ki}(t) \leqslant \pi_{ki}^{*}(t) \tag{16}$$

где: $S_{ki}^{0}(t)$ — элементарный нижний уровень потребления i-го товара k-ой категории,

$\pi_{ki}^{*}(t)$ — исчисленные заказы блока потребления на i-ый товар k-ой категории.

Задача центра (задача III) заключается в определении вектора цен

$$c_{ki}(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

доставляющего минимум функционалу центра при ограничениях (1) (2). В данном случае в роли этого функционала принята взвешенная сумма функционалов подсистем потребления и производства, т.е.

$$J = E\{\alpha J_1 - \beta J_2\} \tag{17}$$

2. Алгоритм решения задачи

Для полной постановки задачи необходимо ввести систему поведенческих гипотез. Итак, фиксируется следующая последовательность шагов:

блок производства — блок дотребления — центр.

Относительно порядка передачи и структуры информации между подсистемами предполагается, что центр сообщает подсистемам цены C_{ki} и ресурсы $w_k(t)$, блок производства сообщает в блок потребления минимальный уровень потребления $S_{ki}^0(t)$ и заказ $\pi_{ki}^*(t)$, оба блока нижнего уровня сообщают в центр свои оптимальные решения.

Таким образом, исходная игровая задача сводится к некоторой процедуре поочередной оптимизации [1].

Предложенный метод не требует построения итерационных процедур в функциональных пространствах распределений вероятностей. Идея заключается в следующем.

Пусть функции $h_1[x(t)]$ и $h_2[g(t)]$ линейны. Обозначая

$$E\{x(t/t_0)\} = \bar{x}(t), \qquad E\{g(t/t_0)\} = \bar{g}(t)$$

$$E\{\varphi(t/t_0)\} = \bar{\varphi}(t)$$

получаем

$$J_1 = \sum_t \sum_i [\mu_{ki}\bar{x}_{ki}(t) + \tau_{ki}\bar{g}_{ki}(t)] \tag{18}$$

$$\bar{x}_{ki}(t) = \bar{x}_{ki}(t-1) + \bar{\varphi}_{ki}^{(4)}(t) \tag{19}$$

$$\bar{g}_{ki}(t) = -\bar{x}_{ki}(t) + \bar{\varphi}_{ki}^{(5)}(t) \tag{20}$$

где μ_{ki}, τ_{ki} — коэффициенты.

Таким образом, задача сведена к детерминистической постановке.

Для ее решения воспользуемся дискретным принципом максимума. Вводится гамильтониан

$$H(t) = \sum_{k=1}^{K} -\mu_{ki}\bar{x}_{ki}(t) - \tau_{ki}g_{ki}(t) + \psi_{ki}^{(1)}(t)[\bar{x}_{ki}(t) - \bar{\varphi}_{ki}^{(4)}(t)] +$$
$$+\psi_{ki}^{(2)}(t)[-\bar{x}_{ki}(t) + \bar{\varphi}_{ki}^{(5)}(t)] \tag{21}$$

Из уравнений

$$\psi_{ki}^{(1)}(t) = \frac{\partial H(t+1)}{\partial \bar{x}_{ki}(t)}, \qquad \psi_{ki}^{(2)} = \frac{\partial H(t+1)}{\partial \bar{g}_{ki}(t)} \tag{22}$$

получается система в сопряженных переменных:

$$\psi_{ki}^{(1)}(t-1) = -\mu_{ki} + \psi_{ki}^{(1)}(t)\left[1 + \frac{\partial\bar{\varphi}_{ki}^{(1)}(t)}{\partial\bar{x}_{ki}(t)} - \frac{\partial\bar{\varphi}_{ki}^{(3)}(t)}{\partial\bar{x}_{ki}(t)}\right] +$$
$$+\psi_{ki}^{(2)}(t)\left[-1 + \frac{\partial\bar{\varphi}_{ki}^{(2)}(t)}{\partial\bar{x}_{ki}(t)} - \sum_{i\neq k}\gamma_{ik}^{-1}\frac{\partial\bar{\varphi}_i^{(3)}}{\partial\bar{x}_{ki}(t)}\right] \tag{23}$$

$$\psi_{ki}^{(2)}(t-1) = -\tau_{ki} \tag{24}$$

где: $$\frac{\partial \varphi_{ki}^{(1)}(t)}{\partial \bar{x}_{ki}(t)} = \frac{1}{2}\left[1 - p\left[\pi_{ki}(t) \leqslant S_{ki}(t) \leqslant x_{ki}^{\max}(t) + \pi_{ki}(t)\right]\right]$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_{ki}^{(2)}(t)}{\partial \bar{x}_{ki}(t)} = \frac{1}{2}\, p\left[\pi_{ki}(t) \leqslant S_{ki}(t) \leqslant \pi_{ki}(t) + x_{ki}^{\max}(t)\right]$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_{ki}^{(3)}(t)}{\partial \bar{x}_{ki}(t)} = \left[1 + \frac{\partial \bar{\varphi}_{ki}^{(1)}(t)}{\partial \bar{x}_{ki}(t)}\right] p\left[x_{ki}(t+1) = 0\right]$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_{ki}^{(3)}(t)}{\partial \bar{x}_{ki}(t)} = \gamma_{ik}\left[\frac{\partial \bar{\varphi}_{ki}^{(2)}(t)}{\partial \bar{x}_{ki}(t)} - 1\right] p\left[x_{ki}(t+1) > 0\right]$$

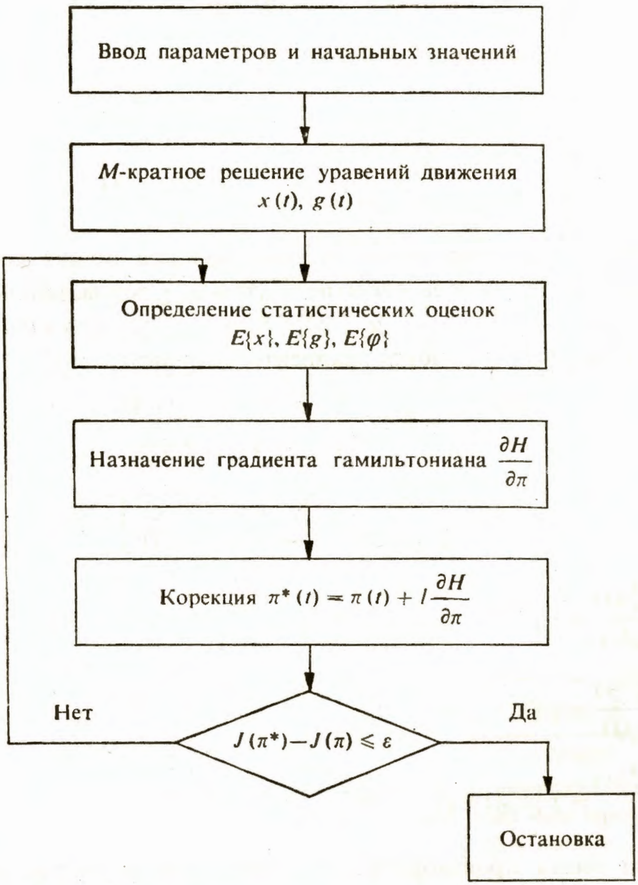

Рис. 2. Блок—схема алгоритма оптимизации поставок

Блок-схема алгоритма оптимизации представлена на рис. 2. Для заданных начальных значений

$$\pi_{ki}^{0}(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad i = 1, 2, \dots, I_k$$

M-кратно решается система уравнений (4), (5), (6), (7), набирается статистика

$$\bar{x}_{ki}(t) = E\{x_{ki}(t)\} \approx \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} x_{ki}^{(m)}(t)$$

$$\bar{g}_{ki}(t) = E\{g_{ki}(t)\} \approx \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} x_{ki}^{(m)}(t)$$

и определяется оценка переменных

$$y_{ki}(t) = p[x_{ki}(t) = 0] \approx \frac{N[x_{ki}(t) = 0]}{M}$$

$$y_{ki}^{*}(t) = p[x_{ki}^{*}(t) = 0] \approx \frac{N[x_{ki}^{*}(t) = 0]}{M}$$

Параметр $y_{ki}^{*}(t)$ определяет сколько раз при общих количествах иммитаций M, случалось событие $x_{ki}^{*}(t) = 0$. Следовательно для начальных условий $\psi_{ki}^{(1)}(T) = -\mu_{ki}$, $\psi_{ki}^{(2)}(T) = -\tau_{ki}$ решается сопряженная система (23), и определяются градиенты гамильтониана

$$\frac{\partial H(t)}{\partial \pi_{ki}(t)} = \psi_{ki}^{(1)}(t)\left[\frac{\partial \bar{\varphi}_{ki}^{(1)}(\,)}{\partial \pi_{ki}(t)} - \frac{\partial \bar{\varphi}_{ki}^{(3)}(t)}{\partial \pi_{ki}(t)}\right] -$$

$$- \tau_{ki}\left[\frac{\partial \bar{\varphi}_{ki}^{(2)}(t)}{\partial \pi_{ki}(t)} - \sum_{j \neq i} \gamma_{ji}^{-1} \frac{\partial \bar{\varphi}_{i}^{(3)}(t)}{\partial \pi_{ki}(t)}\right] \qquad (25)$$

где: $$\frac{\partial \bar{\varphi}_{ki}^{(1)}(t)}{\partial \pi_{ki}(t)} = p[x_{ki}^{*}(t+1) > 0]$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_{ki}^{(2)}(t)}{\partial \pi_{ki}(t)} = p[x_{ki}^{*}(t+1) = 0]$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_{ki}^{(3)}(t)}{\partial \pi_{ki}(t)} = p[x_{ki}^{*}(t+1) > 0]\, p[x_{ki}(t+1) = 0]$$

Задача блока производства есть по существу задача линейного динамического программирования. Для ее решения применялись методы и процедуры, разработанные в Институте проблем управления АН СССР [6].

Задача подбора оптимальных в смысле функционала (18) цен, из множества цен равновесия подсистем производства и потребления, решалась методом безградиентного поиска.

4. Результаты счета

Задача решалась на ЭВМ для трех категорий товаров (по три товара в каждой категории). Были приняты следующие значения параметров

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}05 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix},$$

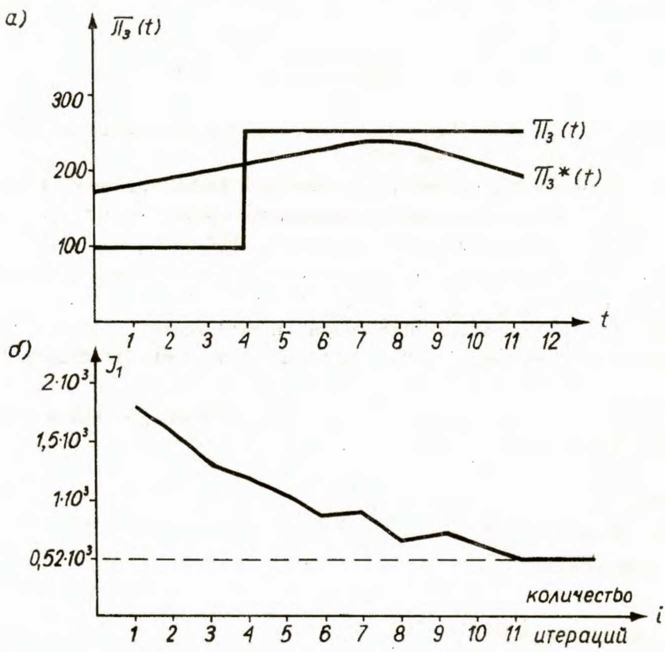

Рис. 3. Результаты счета примерной задачи; а) изменение поставок одного из товаров, $\kappa = 3$; б) изменения функционала процесса потребления; $\Pi_k(t)$ — начальные значения, $\Pi_k^*(t)$ — оптимальные значение, $J_1(t) = E\left\{\sum_{t=t_0}^{T} [\mu_k(x(t)) + \tau_k(q(t)]\right\}$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}9 & 0{,}9 \\ 0{,}88 & 0{,}9 & 0{,}8 \\ 0{,}95 & 0{,}95 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}04 & 0{,}01 \\ 0{,}02 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}01 & 0 & 0{,}4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 1{,}2 \\ 0{,}8 & 1{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}7 \end{bmatrix}, \quad \mu_{ki} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}, \quad \tau_{ki} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}3 \\ 0{,}3 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} M = 25, \ T = 12, \\ \alpha = 0{,}5, \ \beta = 0{,}3. \end{matrix}$$

Ограничения (8) учитывались методом функции штрафа. На рис. 3*а* представлены примеры изменения поставок одного из товаров $\pi_{ki}(t)$; $t_0 \leqslant t \leqslant T$, в течение поиска их оптимальных значений. Изменения значения функционала процесса потребления в функции количества итераций представлены на рис. 3*б*.

Литература

[1] Моделирование системы управления спросом и производством. Отчет МКУ ОТ № 5 (2), 74 МКУ, Москва 1974.

[2] *Аоки М.*: Оптимизация стохастических систем. Изд-во „Наука" 1971.

[3] *Булинская Е. В.*: Некоторые задачи оптимального управления запасами. Теория вероятностей и ее применения, т. IX, вып. 3, 1964.

[4] *Дынкин Е. В.*: Конечные и остаточные статистики для семейств распределений вероятностей. Успехи математических наук, т. 1, 1951.

[5] *Моисеев Н. Н.*: Информационная теория иерархических систем. Труды Всесоюзной школы, семинара по управлению большими системами, Тбилиси 1973.

[6] *Пропой А. И.*: Элементы теории оптимальных дискретных процессов. Изд-во „Наука" 1973