

- 1.1.2. – metody elementów skończonych
- 2.2.2. – mechanika ośrodków ciągłych
- 8. – biomechanika

Piotr Kowalczyk

**NUMERYCZNA ANALIZA ROZKŁADU
NAPRĘŻEŃ W MIĄŻSZU PŁUCNYM
Z UWZGLĘDNIENIEM ODDZIAŁYWAŃ
MIĘDZY SZKIELETEM TKANKOWYM
A PRZEPLYWAJĄCYM POWIETRZEM**

1/1993

(praca doktorska)

P. 269

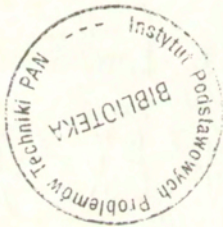


WARSZAWA 1993

Praca wpłynęła do Redakcji 7 stycznia 1993 r.

P r a c a d o k t o r s k a

recenzent - Prof.dr hab.inż.Józef Kubik
Prof.dr hab.inż.Krzysztof Kędzior



56689



Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark.wyd.4,60 Ark.druk.5,75
Oddano do drukarni w styczniu 1993 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp z o.o.
Warszawa, ul.Jasna 1

NUMERYCZNA ANALIZA ROZKŁADU NAPRĘŻEŃ W MIĄŻSZU PŁUCNYM
Z UWZGLĘDNIENIEM ODDZIAŁYWAŃ
MIĘDZY SZKIELETEM TKANKOWYM A PRZEPLYWAJĄCYM POWIETRZEM

Streszczenie

Praca przedstawia model numeryczny, pozwalający na przybliżone określenie rozkładu odkształceń i naprężeń w tkankach płucnych podczas procesu oddychania. Jej zakres obejmuje sformułowanie podstawowego układu równań różniczkowych zagadnienia, jego dyskretyzację w czasie i przestrzeni oraz budowę algorytmu rozwiązującego ten układ i jego implementację w programie komputerowym. Model obliczeniowy uwzględnia nieliniowe własności mechaniczne tkanek, duże deformacje oraz wpływ niejednorodności rozkładu ciśnień i przepływu gazu w przestrzeniach powietrznych płuc. W rozdziale 1 przedstawiono uzasadnienie podjęcia tematu i pokrótce omówiono dotychczasowy stan badań nad zagadnieniem mechaniki procesu oddychania. Rozdział 2 przedstawia model fizyczny zagadnienia. Omówiono w nim krótko anatomię i fizjologię płuc. Następnie przedstawiono stan wiedzy na temat własności mechanicznych tkanek płucnych i dokonano krytycznego przeglądu stosowanych dotychczas modeli konstytutywnych miąższu płucnego. W kolejnym podrozdziale analizowano przepływ powietrza w drogach oddechowych i przedstawiono model sprzężeń mechanicznych między tym przepływem a deformacją szkieletu tkankowego. Składa się on z układu modelowanych dyskretnie przewodów rurowych zatopionych w dwufazowym ośrodku poroatym wypełniającym przestrzeń płuc. Następnie rozpisano układ równań różniczkowych zagadnienia, obejmujący równanie przepływu w drzewie dużych dróg oddechowych, równanie równowagi w miąższu płucnym oraz równanie filtracji gazu w miąższu, wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi. W celu uproszczenia numerycznej realizacji mieszanego warunku brzegowego na przemieszczenia i naprężenia wprowadzono pojęcie warstwy kontaktowej, wyprowadzając dla niej dodatkowo równanie równowagi. W rozdziale 3 przedstawiono algorytm numeryczny służący do przybliżonego rozwiązania układu równań zagadnienia. Posłużono się metodą elementów skończonych w wersji przyrostkowej. Wyprowadzono macierzowe sformułowanie zagadnienia sprzężonego, w którym

niewiadomymi na każdym kroku są przyrosty przepływów w elementach drzewa dróg oddechowych oraz przyrosty wartości przemieszczeń i ciśnień w węzłach siatki elementów skończonych. Omówiono iteracyjną procedurę rozwiązywania układu przy niejawnym schemacie numerycznego całkowania po czasie. Przykłady obliczeń numerycznych wykonanych przy użyciu powyższego algorytmu zaimplementowanego w programie komputerowym omówione zostały w rozdziale 4. Badano m. in. statykę modelu płuc ludzkich pod działaniem ciężaru własnego mięszu oraz wpływ szybkości wdechu na lokalną wentylację i naprężenia w różnych regionach płuc. Rozdział 5 zawiera krytyczną analizę przedstawionego modelu i otrzymanych wyników oraz propozycje dalszych badań w tej dziedzinie. Zestawiono w nim również elementy oryginalne rozprawy.

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Cel i zawartość pracy

Celem niniejszej pracy jest budowa modelu numerycznego, pozwalającego na przybliżone określenie rozkładu odkształceń i naprężeń w tkankach płucnych podczas procesu oddychania. W obliczeniach uwzględnione są nieliniowe własności mechaniczne tkanek, duże deformacje oraz wpływ niejednorodności rozkładu ciśnień w przestrzeniach powietrznych płuc. Model obejmuje sformułowanie podstawowego układu równań różniczkowych zagadnienia, dyskretyzację tego układu w czasie i przestrzeni oraz budowę algorytmu rozwiązującego ten układ i jego implementację w programie komputerowym.

W rozdziale 1 przedstawiono uzasadnienie podjęcia tematu i pokrótce omówiono dotychczasowy stan badań nad zagadnieniem mechaniki procesu oddychania.

Rozdział 2 przedstawia model fizyczny zagadnienia. Omówiono w nim krótko anatomię i fizjologię płuc, wskazując na elementy istotne z punktu widzenia mechaniki oddychania. Następnie przedstawiono stan wiedzy na temat własności mechanicznych tkanek płucnych i dokonano krytycznego przeglądu stosowanych dotychczas modeli konstytutywnych mięszu płucnego, jako modelowego ośrodka ciągłego wypełniającego wnętrze organu. W kolejnym podrozdziale analizowano przepływ powietrza w drogach oddechowych i przedstawiono model sprzężeń mechanicznych między tym przepływem a deformacją szkieletu tkankowego. Składa się on z układu modelowanych dyskretnie przewodów rurowych zatopionych w dwufazowym ośrodku porowatym wypełniającym przestrzeń płuc. Następnie rozpisano układ równań różniczkowych zagadnienia, obejmujący równanie przepływu w drzewie dużych dróg oddechowych, równanie równowagi w mięszu płucnym oraz równanie filtracji gazu w mięszu, wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi. W celu uproszczenia numerycznej realizacji mieszanego warunku brzegowego na przemieszczenia i naprężenia wprowadzono pojęcie warstwy kontaktowej, wyprowadzając dla niej dodatkowo równanie równowagi. Niewiadomymi w układzie równań są wartości przepływu w duktach, pole przemieszczeń w mięszu i warstwie kontaktowej oraz pole ciśnień porowych w mięszu.

W rozdziale 3 przedstawiono algorytm numeryczny służący do przybliżonego rozwiązania układu równań zagadnienia przy użyciu komputera. Posłużono się metodą elementów skończonych w wersji przyrostowej. Wyprowadzono macierzowe sformułowanie zagadnienia sprzężonego, w którym niewiadomymi na każdym kroku są przyrosty przepływów w elementach drzewa dróg oddechowych oraz przyrosty wartości przemieszczeń i ciśnień w węzłach siatki elementów skończonych. Omówiono iteracyjną procedurę rozwiązywania

układu przy niejawnym schemacie numerycznego całkowania po czasie.

W rozdziale 4 przedstawiono przykłady obliczeń numerycznych wykonanych przy użyciu powyższego algorytmu zaimplementowanego w programie komputerowym. Przedstawiono proste testy na nieliniowe geometrycznie zagadnienie filtracji w osrodku porowatym, testy na poprawność działania elementów kontaktowych wprowadzonych do modelowania warunku brzegowego na powierzchni płuc, oraz przykłady obliczeń numerycznych dla modelu płuc. Badano statykę modelu pod działaniem ciężaru własnego mięszu oraz wpływ szybkości wdechu na lokalną wentylację i naprężenia w różnych regionach płuc.

Rozdział 5 zawiera krytyczną analizę przedstawionego modelu i otrzymanych wyników oraz propozycje dalszych badań w tej dziedzinie. Zestawiono w nim również elementy oryginalnie rozprawy.

1.2 Uzasadnienie podjęcia tematu i dotychczasowy stan badań

W światowej literaturze naukowej z dziedziny biomechaniki wiele uwagi poświęca się zagadnieniu teoretycznego określenia rozkładu naprężeń w tkankach płucnych w procesie oddychania. Problem ten ma istotne znaczenie w medycynie. Badania i obserwacje wskazują na związek rozkładu naprężeń z rozwojem niektórych chorób płuc (rozedma, odma opłucnowa, gruźlica) [46, 47]. Naprężenia w ściankach międzypęcherzykowych zmniejszają podatność warstwy nacyniowej znajdującej się w ich wnętrzu [14], co rzutuje na wielkość przepływu krwi przez miąższ, a tym samym na lokalną efektywność wymiany gazowej. Obecność naprężeń rozciągających wpływa ponadto na wielkości przekrojów i stateczność ścianek duktów powietrznych, a zatem na parametry wentylacji płuc. Znajomość rozkładu naprężeń w tkankach płucnych jest szczególnie pożądana w przypadku sztucznej wentylacji pacjentów z różnymi schorzeniami przy użyciu respiratorów [35]. Istnieje bowiem znaczne ryzyko uszkodzenia mechanicznego tkanek w rejonach o znacznej koncentracji naprężeń. Takie uszkodzenie zagraża życiu pacjenta. Znając rozkład naprężeń w poszczególnych fazach oddychania można tak kontrolować nastawy respiratora, aby nie dopuścić do przekroczenia przez naprężenia pewnego poziomu.

Doświadczalny pomiar naprężeń wewnątrz płuca podczas oddychania jest praktycznie niemożliwy. Istnieje zatem zapotrzebowanie na metody obliczeniowe pozwalające na teoretyczne wyznaczenie tych wielkości. Od czasu opublikowania przez Meada i in. pracy [33] przyjmuje się, że miąższ płucny jest makroskopowo jednorodnym osrodkiem trójwymiarowym, co pozwala formułować zagadnienie mechaniki płuca w kategoriach mechaniki osrodków ciągłych. Zasadniczym problemem w takim sformułowaniu jest określenie związków konstytutywnych dla miąższu. Jest to silnie odkształcalny osrodek o nieliniowych i niezachowawczych własnościach mechanicznych. Mechanizm dysypacji energii w procesie deformacji tkanki nie jest do końca wyjaśniony, zasadnicze znaczenie mają tu zmiany napięcia powierzchniowego płynu pokrywającego tkanki w kolejnych fazach cyklu oddechowego. Dodatkowym problemem są trudności w przeprowadzeniu pomiarów własności mechanicznych tkanek, dostępne dane eksperymentalne nie dają wystarczającej liczby informacji koniecznych do budowy zadowalającego modelu konstytutywnego. Podstawę do formułowania związków konstytutywnych stanowią zwykle jednowymiarowe wykresy $p - V$ (ciśnienie-objętość) uzyskiwane dla całych płuc [1], oraz nieliczne wyniki dwu- oraz trójwymiarowych badań wytrzymałościowych dokonywanych na wycinkach

mięszu [20, 26, 44] lub izolowanych błon tkankowych [11, 41, 42]. Warto zaznaczyć, że eksperymenty przeprowadza się najczęściej na tkankach zwierzęcych i prawie zawsze są to tkanki martwe. Równania konstytutywne formułowane są w kategoriach lepko-sprężystości lub sprężysto-lepko-plastyczności [19, 39], jednak w praktyce obliczeniowej częściej stosuje się uproszczone modele nieliniowo-sprężyste [10, 12, 16, 25, 29, 32, 43, i in.], oparte na koncepcji tak zwanej pseudosprężystości tkanek biologicznych, sformułowanej przez Fung m. in. w [13]. W pracach [16, 32, 35] można znaleźć przykłady obliczeń numerycznych zagadnień statyki płuca otrzymane w wyniku implementacji wybranych modeli sprężystych w programach metody elementów skończonych.

Autorzy prac publikowanych do tej pory skupiają się w swych rozważaniach na zagadnieniach statycznych ośrodka jednofazowego. Wpływ ruchu powietrza i krwi w obszarze mięszu na rozkład odkształceń i naprężeń w tkankach jest pomijany. Przyjmuje się, że rozkład ciśnień w duktach powietrznych i w pęcherzykach jest w każdej chwili stały, to znaczy, że różnice ciśnień powietrza w różnych obszarach płuc wyrównują się natychmiast. Założenie to w większości przypadków jest zasadne, nakłada jednak pewne ograniczenia na zakres stosowalności modelu. Na przykład w przypadku sztucznej wentylacji prowadzonej z podwyższoną częstotliwością (powyżej 1-2 Hz) można się spodziewać znacznych spadków ciśnienia wzdłuż kolejnych generacji drzewa duktów powietrznych. Wzrastający wpływ efektów dynamicznych związanych z ruchem powietrza w płucach na kształt krzywej $p - V$ (ciśnienie-objętość) przy częstotliwości powyżej 1 Hz odnotował Hildebrandt [18]. Niejednorodność rozkładu ciśnienia w różnych rejonach płuc może być wynikiem zmniejszenia drożności niektórych duktów powietrznych co ma miejsce np. w przypadku chronicznej rozedmy płuc [23]. Bake i in. [2] przedstawili wyniki obserwacji zróżnicowania wentylacji różnych regionów płuc w zależności od szybkości napełniania płuc powietrzem podczas wdechu. W takich sytuacjach znajomość rozkładu prędkości i ciśnień w przestrzeniach powietrznych płuc ma istotne znaczenie w analizie rozkładu naprężeń w mięszu płucnym. Naprężenia te z kolei mają wpływ na przepływ powietrza, są bowiem ważnym składnikiem równowagi odkształcalnych ścian duktów powietrznych i wpływają na zmiany ich przekrojów. Wyznaczenie tych naprężeń może mieć duże znaczenie przy analizie przepływu wydechowego, charakteryzującego się występowaniem znacznych podciśnień w duktach, w szczególności zjawiska jego limitacji, opisanego m. in. w pracy [28], a także zjawiska zamykania się duktów, związanego z utratą stateczności ich ścianek przy małych objętościach płuc i tworzenia się obszarów z uwięzionym gazem. Uwzględnienie niejednorodności rozkładu ciśnienia powietrza i sprzężeń mechanicznych między jego ruchem a deformacją tkanek w analizie rozkładu naprężeń w mięszu płucnym wydaje się zatem pożądanym rozszerzeniem dotychczas stosowanych modeli.

Rozdział 2

Model fizyczny

2.1 Budowa i funkcje fizjologiczne płuc

Płuca są organem zapewniającym wymianę gazową między powietrzem a krwią. Są one częścią układu oddechowego, na który ponadto składają się ściany klatki piersiowej oraz przepona. Płuca są delikatną trójwymiarową strukturą tkankową wypełniającą wraz z sercem przestrzeń klatki piersiowej. Struktura ta jest ograniczona od zewnątrz cienką błoną — opłucną — której powierzchnia zewnętrzna ściśle przylega do wewnętrznej powierzchni ścian klatki piersiowej. Dzięki obecności cienkiej warstwy płynu pomiędzy tymi powierzchniami mogą one ślizgać się po sobie praktycznie bez tarcia.

Powietrze jest doprowadzane do płuc przez tchawicę i wypływa z nich tą samą drogą. Podczas naturalnego oddechu jego przepływ jest wymuszany przez ruchy klatki piersiowej i przepony. W fazie wdechu płuca są wszechstronnie rozciągane. Znaczny wzrost ich objętości powoduje powstanie w ich wnętrzu podciśnienia i zasanie powietrza z zewnątrz. W fazie wydechu mięśnie klatki piersiowej i przepony rozluźniają się i siły sprężyste w rozciągniętych tkankach układu oddechowego powodują kurczenie się płuc i wypchnięcie powietrza na zewnątrz. W warunkach sztucznego oddychania przepływ powietrza wywołany jest przez odpowiednie sterowanie ciśnieniem zewnętrznym, podawanym do tchawicy. Zarówno płuca, jak klatka piersiowa wraz z przeponą pozostają w tym procesie bierne.

Krew wpływa do płuc tętnicą płucną, zaś wypływa żyłą płucną. Jej przepływ wymuszany jest przez pracę serca, utrzymującą odpowiedni gradient ciśnienia w naczyniach krwionośnych.

Tchawica, tętnica płucna i żyła płucna rozgałęziają się stopniowo wewnątrz płuc na coraz większą liczbę coraz mniejszych przewodów, tworząc rozbudowane struktury drzewiaste. Ocenia się, że drzewo duktów powietrznych człowieka składa się z 22–23 generacji rozgałęzień [45], zaś liczba generacji dla drzew tętniczego i żylnego wynosi 17 [14]. Najdrobniejsze gałązki tych trzech struktur spotykają się ze sobą w pęcherzykach płucnych.

Pęcherzyk jest podstawowym elementem funkcjonalnym płuc, gdyż w nim właśnie odbywa się wymiana gazowa. Jest to wypełniony powietrzem wielościan o ściankach zbudowanych z delikatnych błon tkankowych, zawierających warstwę kapilarnych naczyń krwionośnych. Pęcherzyki sąsiadują ze sobą nawzajem, to znaczy każda ścianka oddziela od siebie dwa pęcherzyki i jest dla nich wspólna. Każdy pęcherzyk jest wentylowany przez jeden dukt powietrzny, zaś każda ścianka jest zasilana krwią przez tętniczkę. Wymiar charakterystyczny pęcherzyka płucnego (przy 3/4 maksymalnej objętości płuc) równy jest

około 0.27 mm [45], zaś grubość ścianki międzypęcherzykowej waha się w granicach 3.5–6 μm , w zależności od ciśnienia krwi [14].

Liczba pęcherzyków w płucach wynosi około 300 milionów. Wraz z małymi duktami powietrznymi (o rozmiarach porównywalnych z rozmiarami pęcherzyków) wypełniają one ponad 95% objętości płuc [45] tworząc miąższ płucny (ang. *parenchyma*). W skali mikro jest to trójwymiarowa, cienkościenna struktura tkankowa zbudowana z silnie odkształcalnych błon tkankowych przenoszących siły rozciągające w swoich płaszczyznach. Powierzchnie zewnętrzne ścianek pokryte są cienką warstwą płynu fizjologicznego, wytwarzającego na styku z powietrzem napięcie powierzchniowe porównywalne z napięciem samych tkanek, będące zatem równie ważnym elementem przenoszącym obciążenia mechaniczne. Wewnątrz ścianek filtruje krew, której objętość praktycznie nie zmienia się w procesie deformacji miąższu [30], można więc uważać, że są one nieściśliwe. Znaczne zmiany objętości miąższu dotyczą przede wszystkim jego przestrzeni powietrznych.

W skali makro, z uwagi na małe rozmiary elementów strukturalnych miąższu, można go traktować jako ośrodek ciągły i opisywać za pomocą pojęć znanych z mechaniki kontinuum [33]. W opisie makroskopowym miąższ płucny jest silnie odkształcalnym, ściśliwym ośrodkiem wielofazowym o nieliniowych własnościach mechanicznych. Zakłada się, że wypełnia on całą objętość płuc, to znaczy, że niejednorodności w postaci dużych dróg oddechowych i naczyń krwionośnych powodują tylko lokalne efekty w rozkładzie naprężeń i odkształceń.

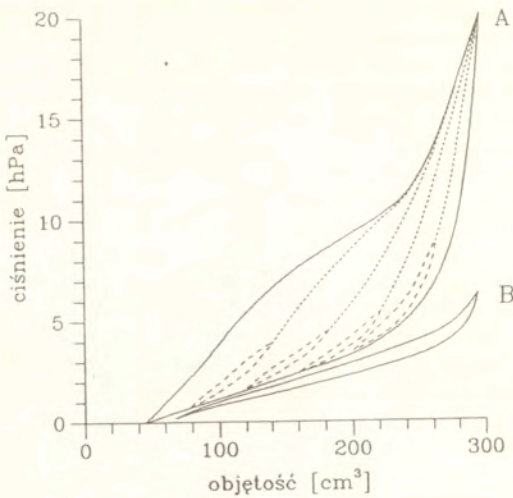
W świetle powyższych założeń hierarchiczne podziały płuc na coraz mniejsze elementy strukturalne (płuco lewe i prawe, płaty płucne, zraziki itd.) nie mają z punktu widzenia analizy mechanicznej istotnego znaczenia. Płuca są zatem traktowane jako jednolita bryła zbudowana z miąższu, wypełniająca przestrzeń klatki piersiowej (obecność serca jest zwykle pomijana). Kształt płuc przypomina eliptyczny stożek o zakrzywionych tworzących. W szczególnych przypadkach, np. przy oddychaniu w pozycji pionowej, można traktować płuca jako w przybliżeniu osiowosymetryczne, zarówno w sensie geometrii, jak też obciążień i przemieszczeń. Wykorzystanie tego założenia pozwala na znaczne uproszczenie i przyśpieszenie obliczeń numerycznych.

2.2 Własności mechaniczne miąższu płucnego

2.2.1 Wyniki badań doświadczalnych

Zasadniczym problemem przy określaniu własności mechanicznych tkanek płucnych są trudności w uzyskaniu wystarczających danych doświadczalnych. Badania mechaniczne prowadzone są zwykle na tkankach zwierzęcych i prawie zawsze są to tkanki martwe. Już sam ten fakt nasuwa liczne wątpliwości co do zakresu stosowalności wyników tych eksperymentów do modelowania zachowania się żywych tkanek ludzkich w procesie oddychania. Ponadto badania takie zwykle mają charakter wycinkowy, to znaczy nie zapewniają wystarczającej liczby informacji koniecznych do budowy pełnego modelu konstytutywnego, uwzględniającego wszystkie własności materiału.

Krzywe $p - V$. Podstawowym testem mechanicznym przeprowadzanym na płucach jest określenie jego krzywej $p - V$ (ciśnienie–objętość). Typowy kształt takiego wykresu dla obciążania (wdechu) i odciążania (wydechu) przedstawiony jest na rys. 2.1. Przy wentylacji roztworem soli (B) siły rozciągające miąższ przenoszone są wyłącznie przez błony

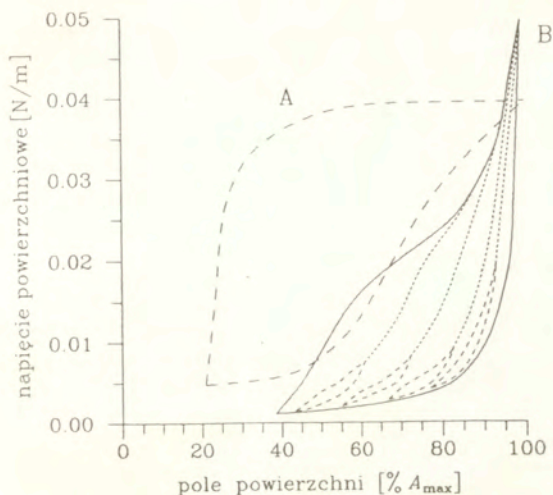


Rys. 2.1 Typowe krzywe $p-V$ dla płuc wentylowanych A) powietrzem, B) roztworem soli. (Na podst. [1])

tkankowe, ponieważ płyn powierzchniowy zostaje wypłukany. W tym przypadku miąższ płucny zachowuje się w sposób w przybliżeniu nieliniowo-sprężysty z nieznaczną dysypacją energii. Natomiast przy wentylacji powietrzem (A), gdy siły powierzchniowe biorą udział w przenoszeniu obciążeń mechanicznych, miąższ staje się znacznie sztywniejszy i pojawia się rozległa pętla histerezy. Mechanizm dysypacji energii w tym procesie nie jest do końca wyjaśniony. Istotną cechą krzywych $p-V$, zaobserwowaną m. in. przez Bachofena i in. [1] oraz Hildebrandta [18] jest ich niewrażliwość na zmiany prędkości cyklicznego obciążania, przynajmniej w zakresie małych częstotliwości (do 1 Hz).

Informacje ilościowe dostarczane przez krzywe $p-V$ nie mogą wystarczać do budowy modelu konstytutywnego miąższu. Opisują one tylko jednowymiarowe zachowanie się materiału i to tylko przy założeniu, że płuca odkształcają się w sposób jednorodny. Wykresy te dają natomiast wiele informacji jakościowych, nieosiągalnych w innych testach.

Testy trójwymiarowe. Kolejną grupę doświadczeń opisywanych w literaturze stanowią trójwymiarowe testy przeprowadzane na wycinkach miąższu lub płatach płucnych (próbki uzyskane z martwych organizmów w wyniku sekcji). W testach tych badano zachowanie próbek rozciąganych różnymi siłami w różnych kierunkach a także próbek w których powierzchnie wciskano sztywny stempel. Wyniki tego rodzaju doświadczeń dla tkanek zwierzęcych można znaleźć w pracach [20, 26, 44], natomiast w pracy [51] badano próbki tkanek ludzkich. Opisywane testy dostarczają znacznie więcej informacji ilościowych potrzebnych do formułowania trójwymiarowych związków konstytutywnych, jednak ich wiarygodność jest mniejsza. Wynika to między innymi z małej dokładności pomiaru odkształceń — płaty płucne są bryłami o nieregularnych kształtach, natomiast prostopadłościennie próbki miąższu zostały w rzeczywistości obciążone wieloma siłami skupionymi rozłożonymi na powierzchni ścianek, co przy małej sztywności materiału musi



Rys. 2.2 Krzywe $\gamma - A$ wyznaczone: A) z badań doświadczalnych na ekstrakcie płynu powierzchniowego z płuc oraz B) na podstawie analizy różnic między krzywymi $p - V$ dla płuc wentylowanych powietrzem i roztworem soli [1]

powodować trudne do zmierzenia lokalne dystorsje. Tej ostatniej niedogodności można uniknąć przeprowadzając pomiary na próbkach o małej grubości obciążonych tylko w dwóch kierunkach [44, 51] (można wówczas obserwować deformację wewnętrznych obszarów próbki, wystarczająco odległych od punktów przyłożenia sił). W tym przypadku jednak pomiary nie mogą obejmować zakresu odkształceń spotykanych w rzeczywistych stanach deformacji płuc, pojawia się więc wątpliwość co do możliwości ekstrapolacji zaproponowanego na ich podstawie równania konstytutywnego na zakres fizjologiczny. Ogólnym wnioskiem, jaki można wysnuć z tych doświadczeń, jest stwierdzenie, że mięsz posiada własności izotropowe, co jest zgodne z obserwacjami jego mikrostruktury, nie wykazującymi istnienia żadnych uprzywilejowanych kierunków.

Ponadto publikowane są wyniki testów na rozciąganie izolowanych błon międzypęcherzykowych [11, 41, 42]. Przy dodatkowych założeniach dotyczących geometrii mikrostruktury mięszu mogą one również służyć jako podstawa do formułowania jego makroskopowych związków konstytutywnych.

Krzywe $\gamma - A$. W celu określenia makroskopowych związków konstytutywnych dla warstwy powierzchniowej wyznacza się statyczne charakterystyki $\gamma - A$ (napięcie powierzchniowe - pole powierzchni). Można je otrzymać w drodze eksperymentów przeprowadzonych na próbkach ekstraktu płynu powierzchniowego [37, 38] lub na podstawie analizy różnic między krzywymi $p - V$ dla wentylacji powietrzem i roztworem soli [1, 50]. Należy zaznaczyć, że skład chemiczny badanego ekstraktu może jedynie w przybliżeniu odzwierciedlać rzeczywisty skład płynu w żywych płucach, zresztą zmieniający się w trakcie cyklu oddechowego. Drugi sposób wymaga z kolei znajomości pola powierzchni ścian

międzypęcherzykowych w każdej chwili cyklu oddechowego. W pracy [1] założono, że w trakcie jednorodnej deformacji objętościowej pole to zmienia się proporcjonalnie do $V^{2/3}$. Otrzymane przy tym założeniu wykresy różnią się znacznie od analogicznych krzywych eksperymentalnych (rys. 2.2). Wilson [50] wykazał, że różnice te mogą być mniejsze, jeżeli przy analizie krzywych $p - V$ uwzględni się możliwość zmian w geometrii błon tkankowych powodowanych przez działanie napięcia powierzchniowego. Pole powierzchni ścianek nie jest wówczas funkcją jedynie stanu deformacji i może zostać obliczone na podstawie dodatkowych badań morfometrycznych mikrostruktury mięszu w różnych fazach cyklu.

2.2.2 Modele konstytutywne

Jak wspomniano wcześniej, mięsz płucny posiada silnie nieliniowe i niezachowawcze własności mechaniczne. Rozległa pętla histerezy obserwowana przy cyklicznym obciążaniu mięszu wskazuje na występowanie efektów typu lepkosprężystego lub lepkoplastycznego, przy czym trudno jest wyjaśnić ich mechanizm na poziomie mikroskopowym. Matematyczny opis tych własności w postaci modelu konstytutywnego jest niezwykle trudny i taki model jak dotąd nie został zbudowany.

Jednowymiarowy model konstytutywny uwzględniający w sposób jawny zjawiska dysypacji energii został zaproponowany przez Hildebrandta [19] i rozszerzony przez Stamenovicia i in. [39]. Jest on oparty na rozbudowanej kombinacji prostych elementów sprężystych Hooke'a, lepkich Newtona i plastycznych Saint-Venanta. Testy wykazały przydatność modelu do opisu charakterystyk ciśnienie-objętość, jednak dla zagadnień ścinania nie jest on wystarczający.

W praktyce obliczeniowej korzysta się raczej z modeli uproszczonych, opartych na koncepcji pseudosprężystości tkanek biologicznych, sformułowanej przez Funga i przedstawionej m. in. w [13]. Opiera się ona na spostrzeżeniu, że pętla histerezy obserwowana przy cyklicznym obciążaniu tkanek ustala się po kilku wstępnych cyklach i pozostaje praktycznie niewrażliwa na zmiany prędkości obciążenia. Własność ta obserwowana jest dla wielu rodzajów tkanek, w szczególności również dla mięszu płucnego. Jeżeli więc tylko obciążanie mięszu odbywa się w ustalonych granicach, można go traktować jako ośrodek nieliniowo sprężysty o różnych równaniach konstytutywnych dla obciążania (wdechu) i odciążania (wydechu). Założenie to znacznie upraszcza budowę algorytmów numerycznych, choć niewątpliwie zawęża ich zakres stosowania do określonej klasy obciążeń cyklicznych, przy czym trzeba stwierdzić, że w fizjologii płuc mamy do czynienia głównie z takimi właśnie obciążeniami. Stąd w pracach poświęconych analizie mechanicznej mięszu płucnego najczęściej spotyka się sprężyste równania konstytutywne. Formułowane są one zwykle w ogólnej postaci

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}, \quad (2.1)$$

gdzie \mathbf{S} oznacza II tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa, \mathbf{E} — tensor odkształcenia Greena, zaś W jest pewną funkcją stanu odkształcenia, określoną osobno dla ścieżki obciążania i odciążania, analogiczną do funkcji gęstości energii odkształcenia w teorii sprężystości. W tym przypadku jednak funkcji tej nie przypisuje się żadnego sensu termodynamicznego. Wprowadza się ją głównie dla przejrzystości zapisu związków konstytutywnych. Dlatego używane w dalszej części pracy pojęcie „energii odkształcenia” nie odpowiada ściślemu znaczeniu tego określenia.

Ponieważ na siły wewnętrzne w mięszsu składają się napięcia w błonach tkankowych i napięcie powierzchniowe, energia odkształcenia mięszsu jest sumą energii zgromadzonej przez szkielet tkankowy i warstwę powierzchniową. W równaniach konstytutywnych spotykanych w literaturze zazwyczaj wyraźnie rozgranicza się te dwa składniki, ponieważ odpowiadają one dwóm elementom mikrostruktury o całkowicie odmiennych własnościach mechanicznych. Propozycje takich równań przedstawili m. in. Fung i in. [12, 16], Wilson [50] oraz Stamenović i Wilson [40]. Funkcja energii odkształcenia ma wówczas ogólną postać

$$W = W^{tis}(\mathbf{E}, \alpha) + \frac{A^{ref}}{V^{ref}} \int \gamma d\alpha, \quad (2.2)$$

gdzie $\alpha = A/A^{ref}$ wyraża deformację pola powierzchni ścianek międzypęcherzykowych względem pola w pewnej konfiguracji odniesienia. Wielkość ta nie jest w ogólnym przypadku funkcją stanu odkształcenia, ponieważ geometria mikrostruktury mięszsu (a więc również pole powierzchni ścianek) może ulegać zmianie pod wpływem zmian napięcia powierzchniowego [49, 50]. Jej wartość można wyznaczyć rozwiązując dodatkowe równanie

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{E}=\text{const}} = 0. \quad (2.3)$$

Jednowymiarowy model konstytutywny oparty na tych założeniach został sformułowany w pracy [50], a następnie rozszerzony do przypadku trójwymiarowego w pracy [40]. Do określenia postaci funkcji W posłużono się doświadczalnymi krzywymi $p - V$ (dla wentylacji powietrzem i roztworem soli) oraz $\gamma - A$, wynikami badań mechanicznych izolowanych błon tkankowych oraz przybliżonymi pomiarami pola powierzchni struktury tkankowej w różnych fazach cyklu oddechowego. Wyznaczona w ten sposób trójwymiarowa funkcja energii odkształcenia nie ma jednak postaci jawnej, co utrudnia jej zastosowanie w obliczeniach numerycznych.

Fung i in. [12, 16] zaproponowali prostszy model konstytutywny, w którym pomija się trudny zresztą do oszacowania wpływ napięcia powierzchniowego na geometrię mikrostruktury i własności mechaniczne szkieletu. W takim przypadku $W^{tis} = W^{tis}(\mathbf{E})$ oraz $\alpha = \alpha(\mathbf{E})$. W pracy [16] wykazano, że przy założeniu losowej orientacji przestrzennej ścianek międzypęcherzykowych, traktowanych jako wycinki gładkich powierzchni, deformacja ich pola jest funkcją dwóch pierwszych niezmienników tensora odkształcenia Greena,

$$\alpha^2 = \frac{4}{3}(J_1 + J_2) + 1. \quad (2.4)$$

Ponadto zachodzi wówczas równość

$$\frac{A^{ref}}{V^{ref}} = \frac{6}{\Delta}, \quad (2.5)$$

gdzie przez Δ oznaczono średni wymiar liniowy pęcherzyka. Równanie (2.2) można zatem zapisać w postaci

$$W = W^{tis}(\mathbf{E}) + \frac{6}{\Delta} \int \gamma d\alpha, \quad (2.6)$$

Przy poczynionych wyżej założeniach można przyjąć, że funkcja $W^{tis}(\mathbf{E})$ jest równa funkcji opisującej własności mechaniczne mięszsu wypełnionego roztworem soli. Stąd jej postać wyprowadzana jest z takich właśnie eksperymentów. W cytowanej powyżej pracy posłużono się wynikami otrzymanymi w trójwymiarowych testach mechanicznych Hopkina i in. [20] (dla tkanek psa) i zaproponowano izotropową funkcję wykładniczą,

$$W^{tis} = \frac{C'}{2} \exp(aJ_1^2 + bJ_2). \quad (2.7)$$

Wcześniej Lee i Frankus [29], opierając się na tych samych danych doświadczalnych podali inną, wielomianową postać funkcji W^{tis} względem niezmienników prawego tensora deformacji Cauchy'ego-Greena,

$$\begin{aligned} W^{tis} = & a_1 I_1 + a_2 (I_1^2 - 2I_2) + a_3 (I_1^3 - 3I_1 I_2 - 3I_3) \\ & + a_4 (I_1^4 - 4I_1^2 I_2 + 2I_2^2 + 4I_1 I_3) + b_1 I_2 + b_2 (I_2^2 - 2I_1 I_3) \\ & + c_1 I_3 + c_2 (I_1 I_2 - 3I_3) + c_3 (I_1^2 I_2 - 2I_2^2 - I_1 I_3). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dokładność tej funkcji w zestawieniu z danymi doświadczalnymi jest porównywalna z dokładnością funkcji (2.7) [16, tablica 1]. Funkcja wykładnicza ma jednak tę przewagę, że jest znacznie prostsza (zawiera jedynie trzy stałe materiałowe).

W pracy [12] Fung zaproponował jeszcze inną postać funkcji W^{tis} , wyrażoną w wartościach odkształceń głównych Greena. Wyprowadził ją przy założeniu, że przestrzeń płuc jest wypełniona sześciennymi pęcherzykami o wymiarze liniowym Δ , kierunki siatki tej struktury pokrywają się z kierunkami głównymi stanu odkształcenia, a funkcja gęstości energii odkształcenia ścianek ma postać

$$W_{(i,j)}^{wall} = \frac{C}{2} \exp(a_1 E_i^2 + a_2 E_j^2 + 2a_4 E_i E_j), \quad (2.9)$$

gdzie pary wskaźników $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$ definiują trzy różne kierunki orientacji ścianek w konfiguracji początkowej. Wówczas

$$W^{tis} = \frac{1}{\Delta} (W_{(12)}^{wall} + W_{(23)}^{wall} + W_{(31)}^{wall}). \quad (2.10)$$

(Przy założeniu $a_1 = a_2$ otrzymujemy funkcję izotropową). Powyższa funkcja posłużyła do opisu wyników dwuwymiarowych testów mięszu płucnego psa [44] oraz człowieka [51]. Jej zaletą jest jasny sens fizyczny stałych materiałowych w świetle własności mechanicznych elementów mikrostruktury. Z punktu widzenia zastosowań obliczeniowych, przy analizie trójwymiarowych stanów odkształcenia o dowolnych i zmiennych kierunkach głównych, jest ona jednak niewygodna.

Analityczne postacie zależności $\gamma - A$ dla obciążania i odciążania, koniecznych do określenia makroskopowego równania konstytutywnego warstwy powierzchniowej, wyznaczane są na podstawie krzywych doświadczalnych lub wydedukowanych z analizy porównawczej wykresów $p - V$ dla wentylacji powietrzem i roztworem soli. Fung [12] zaproponował rozwinięcie obydwu charakterystyk w szeregi Fouriera,

$$\bar{\gamma} = \bar{\alpha} + \sum_{n=1}^N c_n \sin(n\pi\bar{\alpha}), \quad (2.11)$$

gdzie oznaczono

$$\bar{\gamma} = \frac{\gamma - \gamma_{\min}}{\gamma_{\max} - \gamma_{\min}}; \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha - \alpha_{\min}}{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}, \quad (2.12)$$

a następnie podał zestawy stałych c_n odpowiadające różnym badaniom doświadczalnym prezentowanym w literaturze [16]. Kowe i in. [24], analizując własności mechaniczne elementów mikrostruktury mięszu, posługiwali się zależnościami $\gamma - A$ w postaci

$$\gamma = \gamma_{\max}[1 - d_1 \exp(-d_2\alpha)] \quad \text{dla wdechu,} \quad (2.13)$$

$$\gamma = \epsilon_1 \alpha^{2.71} + \epsilon_2 \quad (2.14)$$

$$\text{lub } \gamma = \epsilon_3[1 - 5 \exp(-2.35\alpha)]^m + \epsilon_4 \quad \left. \vphantom{\gamma} \right\} \text{ dla wydechu,} \quad (2.15)$$

wynaczonymi na podstawie wyników badań eksperymentalnych Scarpellego i in. [37] oraz wykresów Wilsona [50] otrzymanych na podstawie analizy porównawczej krzywych $p - V$ (przy uwzględnieniu wpływu napięcia powierzchniowego na wielkość α).

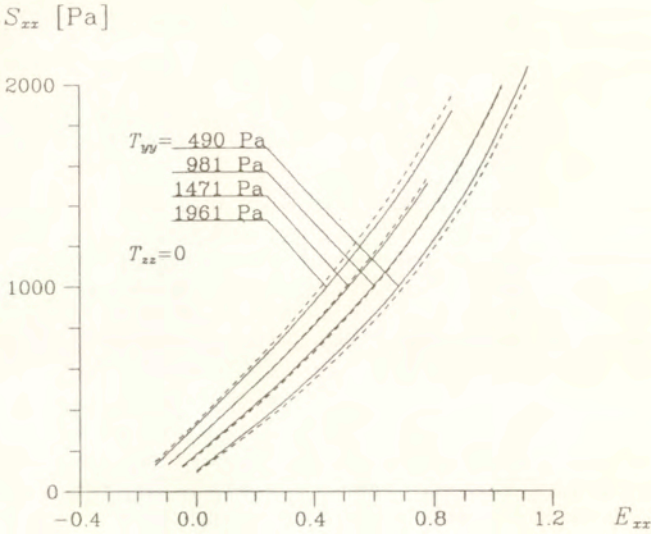
Istnieje w literaturze kilka propozycji pseudosprężystego równania konstytutywnego mięszu płucnego, w których traktuje się go jako jeden materiał, bez rozgraniczania wpływu tkanek i napięcia powierzchniowego. Można tu wymienić na przykład prosty model Lai-Fooka [25], w którym gęstość energii mięszu opisana jest wielomianem

$$W = a_0 J_1 + a_1 J_2 + a_2 J_1^2 + a_3 J_1 J_2 + a_4 J_1^3 + a_5 J_3, \quad (2.16)$$

gdzie J_1 , J_2 i J_3 są niezmiennikami podwojonego tensora Greena $2E_{ij}$, zaś a_0, \dots, a_5 są stałymi materiałowymi. Podstawą do sformułowania równania były jedno- i trójwymiarowe testy przeprowadzane na wystających płatach płucnych psa [26], przy czym badano tylko zachowanie materiału podczas cyklicznych deformacji o małej amplitudzie w otoczeniu stanu wszechstronnego rozciągania podciśnieniem p . W takich doświadczeniach pętla histerezy jest bardzo mała, zatem równanie konstytutywne może być stosowane zarówno dla obciążania, jak odciążania. Stałe materiałowe zależą liniowo od p . Inny przykład można znaleźć w pracy [32], gdzie do analizy numerycznej procesu deformacji mięszu (tylko obciążanie) posłużono się wspomnianą już postacią wielomianową (2.8), ze stałymi materiałowymi dobranymi na podstawie krzywych $p - V$ badanych na żywym człowieku podczas wdechu oraz przy pewnych dodatkowych założeniach dotyczących geometrii mikrostruktury. Prezentowane w obu modelach podejście do opisu mechanicznego mięszu pozwala na uzyskanie prostszych postaci równań konstytutywnych, z drugiej jednak strony nie uwzględnienie w sposób jawny specyficznych własności mechanicznych tkanek i warstwy powierzchniowej może prowadzić do trudnych do oszacowania błędów obliczeniowych.

Wybór modelu konstytutywnego do analizy numerycznej mięszu płucnego nie jest przy obecnym stanie wiedzy łatwy. Wśród autorów cytowanych prac panuje zgodność co do tego, że koncepcja pseudosprężystości jest dobrym przybliżeniem zjawiska dysypacji energii w procesie cyklicznej deformacji materiału. Zatem przy budowie modelu matematycznego zagadnienia w dalszej części niniejszej pracy równanie konstytutywne będzie zakładane w ogólnej postaci (2.1).

Do przeprowadzenia testów numerycznych konieczny jest wybór konkretnej postaci funkcji W . Wydaje się, że model Funga (2.6) uzupełniony dodatkowymi zależnościami $W^{tra}(E)$ i $\gamma(\alpha)$ wybranymi na przykład spośród równań (2.7–2.15) jest z punktu widzenia zastosowań obliczeniowych najbardziej przydatny. Jest on stosunkowo prosty, a przy tym uwzględnia najistotniejsze cechy mięszu jako materiału odkształcalnego — obecność histerezy oraz rozróżnienie sił wewnętrznych w błonach tkankowych i w warstwie powierzchniowej. Jego dokładność oczywiście można kwestionować, szczególnie założenie, że napięcie powierzchniowe nie wpływa na geometrię i własności mechaniczne szkieletu tkankowego wydaje się, w świetle rozważań Wilsona [49, 50], znacznym uproszczeniem. Należy jednak



Rys. 2.3 Krzywe $S_{zz}(E_{zz})$ wyznaczone w wyniku różniczkowania funkcji (2.10) (linie przerywane) oraz (2.7) dla zakresu obciążeń badanych w doświadczeniach Zenga i in. [51]. Stałe materiałowe C , $a_1 = a_2$, a_4 wyznaczone przez autorów do opisu krzywych doświadczalnych wynosiły odpowiednio 1157 Pa, 0.50, 0.32 dla obciążania oraz 863 Pa, 0.63, 0.39 dla odciążania (krzywe na rysunku przedstawiają naprężenia średnie), wartości stałych C' , a , b przyjęto odpowiednio: 2628 Pa, 0.479, -0.611. Przez T_{yy} i T_{zz} oznaczono składowe pierwszego tensora Pioli-Kirchhoffa.

zaznaczyć, że uwzględnienie tego faktu prowadzi do rozbudowanych wzorów z członami całkowitymi nie dającymi się obliczyć analitycznie [40], zastosowanie takiego modelu w algorytmie numerycznym wydłużyłoby zatem znacznie czas obliczeń.

Jeżeli chodzi o konkretną postać funkcji $W^{tis}(\mathbf{E})$, to trudno jest odpowiedzieć na pytanie, która z proponowanych w literaturze postaci (2.7-2.10) najlepiej nadaje się do makroskopowego opisu własności mechanicznych tkanek płucnych człowieka. Ich autorzy opierali się na wynikach różnych eksperymentów, przeprowadzanych na tkankach różnych ssaków i dla różnych zakresów obciążeń. Problem ten nie ma zapewne zasadniczego znaczenia, gdyż często można, odpowiednio dobierając współczynniki, opisać daną krzywą z dużą dokładnością różnymi równaniami konstytutywnymi. Porównania takiego dokonał Fung [16, tablica 1] dla funkcji (2.7) oraz (2.8) dla wyników eksperymentów na wycinkach mięszu psa [20], podobnie można wykazać, że funkcja (2.10) ze stałymi materiałowymi wyznaczonymi na podstawie doświadczeń na wycinkach mięszu ludzkiego [51] może być z dużą dokładnością przybliżona przez funkcję (2.7) (rys. 2.3, porównanie dla zakresu obciążeń badanych w omawianych doświadczeniach). Oczywiście podobne porównania przeprowadzone dla szerszego zakresu obciążeń, niż badany w eksperymentach, wykazują większe różnice między poszczególnymi modelami, dopóki jednak nie dysponujemy wynikami takich badań, wydaje się, że o wyborze postaci funkcji $W^{tis}(\mathbf{E})$ powinna

zadecydować przede wszystkim jej prostota. Z tego punktu widzenia postać (2.7) wydaje się najbardziej odpowiednia.

Ponieważ krzywe opisujące własności mechaniczne mięszsu otrzymane przy jego cyklicznej deformacji z wyeliminowanym wpływem napięcia powierzchniowego wykazują tylko nieznaczną histerezę, w niniejszej pracy uznaje się, że funkcja $W^{tis}(\mathbf{E})$ jest taka sama dla ścieżek obciążania i odciążania.

Podobnie, jak w przypadku krzywych $W^{tis}(\mathbf{E})$, również postaci zależności $\gamma(\alpha)$ proponowane w literaturze zależą w dużej mierze od tego, na jakich danych opierali się autorzy. Należy przy tym zaznaczyć, że założenie niewrażliwości geometrii mikrostruktury na działanie napięcia powierzchniowego, leżące u podstaw modelu Funga, stawia pod znakiem zapytania możliwość stosowania w równaniu (2.6) zależności $\gamma - \alpha$ wyznaczonych na podstawie eksperymentów. Jak już wspomniano w podrozdziale 2.2.1, krzywe te różnią się znacznie od funkcji $\gamma - \alpha$ wyprowadzonych przy wyżej wspomnianym założeniu z analizy porównawczej krzywych $p - V$ (dla wentylacji powietrzem i roztworem soli). Wydaje się, że nawet jeżeli te ostatnie obarczone są błędem, to jednak w omawianym modelu należy konsekwentnie korzystać z nich właśnie. W przeciwnym przypadku model nie będzie w stanie opisywać prawidłowo zachowania się mięszsu nawet w warunkach jednorodnego rozciągania podciśnieniem p . Błędy będą szczególnie widoczne przy dużych objętościach płuc. Podane wyżej równania (2.11–2.15), dobrze opisujące krzywe doświadczalne, w tym przypadku są jednak nieprzydatne. Znaczny wzrost sztywności przy dużych wartościach α , szczególnie dla krzywej odciążania, obserwowany np. na wykresach Bachofena i in. (rys. 2.2) nie daje się dobrze opisać szeregiem Fouriera z małą liczbą wyrazów, z kolei dla krzywej obciążania zupełnie nieadekwatne jest równanie (2.13). W literaturze nie spotyka się jednak równań opisujących tak uzyskane krzywe $\gamma - \alpha$. Wydaje się, że najbardziej odpowiednią zależnością dla obu gałęzi wykresu byłaby tu funkcja wykładnicza lub potęgowa.

Pseudosprężyste równanie konstytutywne stosowane do analizy cyklicznej deformacji materiału powinno być słuszne dla obciążeń o różnych wartościach granicznych. Powinno ono zatem opisywać nie tyle jedną parę krzywych, ale rodzinę takich par sparametryzowaną przez współrzędne punktów granicznych leżących w jakichś fizjologicznie dopuszczalnych granicach. Również z tego punktu widzenia przedstawione wyżej modele konstytutywne dla napięcia powierzchniowego nie są wystarczające. Cytowane przez ich autorów badania doświadczalne ekstraktu płynu powierzchniowego polegały na cyklicznym obciążaniu w ustalonych granicach, odpowiadających w przybliżeniu ekstremalnym wartościom pola powierzchni płynu osiągalnym w rzeczywistych płucach. Zatem, jeśli nawet funkcja $\gamma - A$ została zaproponowana w postaci ogólniejszej, niż wymagana do opisu tych tylko krzywych, jak np. szereg trygonometryczny (2.11), to do jej skutecznego zastosowania konieczna byłaby jeszcze znajomość zależności między współzynnikiem równania konstytutywne dla obu ścieżek dowolnego cyklu a wartościami jego parametrów granicznych. W żadnej ze znanych autorowi prac poświęconych modelom konstytutywnym mięszsu nie podejmuje się prób takich uogólnień. Wynika to zapewne w dużej mierze z braku wystarczających danych doświadczalnych dla różnych cyklów obciążania, niezbędnych do budowy takich równań konstytutywnych.

Lukę tę wypełniają częściowo badania charakterystyk $p - V$. Przykładowo w pracy [1] wyznaczono ścieżki obciążania dla kilku różnych wartości V_{\min} oraz małe pętle histerezy o tych samych wartościach $V_{\max} - V_{\min}$ (rys. 2.1). Wydedukowane na ich podstawie krzywe $\gamma - A$ (np. rys. 2.2) dają zatem nieco więcej informacji koniecznych do budowy modelu konstytutywnego o wyżej opisanych cechach.

Podanie postaci funkcji energii odkształcenia dla cykli o różnych punktach granicznych nadal jednak nie wystarcza dla potrzeb analizy naprężeń w miększu. W ogólnym przypadku, przy niejednorodnym rozkładzie odkształceń, nie jesteśmy w stanie przewidzieć, w jakich granicach będzie się odbywała cykliczna deformacja poszczególnych punktów obszaru płuc. W związku z tym stan naprężenia i odkształcenia przyjęty jako początkowy nie musi znajdować się na żadnej ze ścieżek obciążania lub odciążania, które ustalą się po pewnej liczbie cykli dla danego punktu. W modelu konstytutywnym musi być więc również uwzględniona możliwość „dochodzenia” do ustalonej pętli cyklicznej deformacji od dowolnego stanu początkowego.

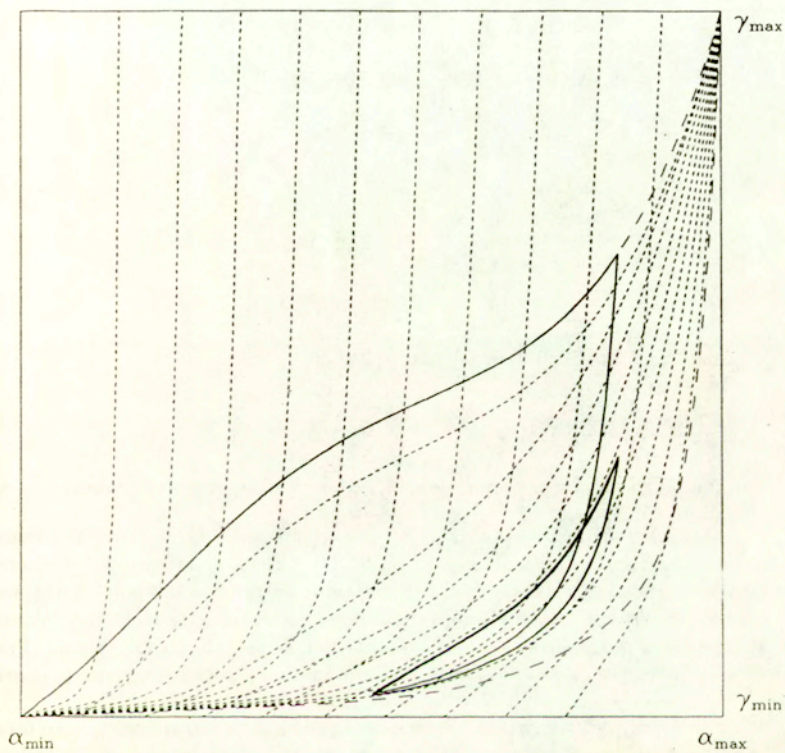
Spełnienie tych wymagań bez uwzględnienia w modelu w sposób jawny zjawisk dysypacji energii jest trudne i budzi znów wiele wątpliwości co do jego dokładności. Podejście takie było stosowane dla przypadku materiału sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem przez Mroza i Linda [34]. Autorzy opisywali zależności naprężeń od odkształceń dla różnych ścieżek obciążania i odciążania za pomocą tej samej nieliniowej funkcji sparametryzowanej przez wartości naprężeń i odkształceń w punkcie ostatniego zwrotu, tj. przejścia ze stanu obciążania do odciążania lub odwrotnie. W ten sposób można w uproszczony sposób opisywać zachowanie się materiału niesprężystego dla różnych historii obciążenia, w szczególności zaś ustalanie się pętli histerezy dla obciążeń cyklicznych (o ile taka ustalona pętla istnieje dla danego przypadku). Wydaje się, że analogiczne podejście można zastosować również w omawianym zagadnieniu. Należy w tym celu podać właściwy dla rozważanego materiału sposób parametryzacji równań konstytutywnych w zależności od współrzędnych punktu zwrotu (w tym przypadku wartości α^{rev} i γ^{rev}). Autor proponuje tu pokrycie całego obszaru dopuszczalnych wartości $\alpha_{\min} < \alpha < \alpha_{\max}$ i $\gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max}$ dwiema rodzinami charakterystyk (krzywe obciążania i odciążania). Wyznaczenie równania konstytutywnego dla nowej ścieżki w dowolnym punkcie zwrotu polega po prostu na znalezieniu (drogą analityczną lub w postępowaniu iteracyjnym) krzywej z odpowiedniej rodziny przechodzącej przez dany punkt.

Na rys. 2.4 przedstawiono przykład takich dwóch rodzin krzywych oraz przebieg zależności $(\gamma(\tau), \alpha(\tau))$ dla przykładowej, cyklicznej historii obciążania. Przebieg granicznych krzywych obciążania i odciążania (łączy punkty o ekstremalnych wartościach α i γ , na rysunku oznaczonych linią przerywaną o dłuższym skoku) odpowiada w przybliżeniu przebiegowi krzywych Bachofena i in. (rys. 2.2). Zgodnie z dalszymi spostrzeżeniami wynikającymi z analizy tych krzywych założono, że wszystkie charakterystyki obciążania zbiegają się w punkcie $(\alpha_{\max}, \gamma_{\max})$. Przez analogię uznano również, że krzywe odciążania zbiegają się w punkcie $(\alpha_{\min}, \gamma_{\min})$ (cytowane wykresy zawierają za mało danych do wysnucia takiego wniosku, ale przebiegi krzywych odciążania dla małych cykli sugerują taką ekstrapolację). Konkretnie, omawiane rodziny krzywych opisane są następującymi równaniami:

- obciążanie: -

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} = & -\frac{128}{3} c_1 \bar{\alpha} (\bar{\alpha} - 0.5) (\bar{\alpha} - 0.75) (\bar{\alpha} - 1) \\ & + 64 c_2 \bar{\alpha} (\bar{\alpha} - 0.25) (\bar{\alpha} - 0.75) (\bar{\alpha} - 1) \\ & - \frac{128}{3} c_3 \bar{\alpha} (\bar{\alpha} - 0.25) (\bar{\alpha} - 0.5) (\bar{\alpha} - 1) \\ & + \frac{32}{3} \bar{\alpha} (\bar{\alpha} - 0.25) (\bar{\alpha} - 0.5) (\bar{\alpha} - 0.75) \end{aligned} \quad (2.17)$$

gdzie bezwymiarowa wielkość $\bar{\gamma}$ zdefiniowana jest wzorem (2.12), natomiast



Rys. 2.4

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha - \alpha_p}{\alpha_{\max} - \alpha_p} \quad (2.18)$$

α_p jest parametrem określającym konkretną krzywą z danej rodziny, równym rzędnej punktu, w którym ta krzywa przecina prostą $\gamma = \gamma_{\min}$. Współczynniki c_1, c_2, c_3 zależą od α_p :

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.15920 - 0.07953 \frac{2}{\pi} \arctg[42.504(\bar{\alpha}_p - 0.13)], \\ c_2 &= 0.30515 - 0.14593 \frac{2}{\pi} \arctg[17.626(\bar{\alpha}_p - 0.13)], \\ c_3 &= 0.49160 - 0.14700 \frac{2}{\pi} \arctg[5.040(\bar{\alpha}_p - 0.13)], \end{aligned} \quad (2.19)$$

gdzie

$$\bar{\alpha}_p = \frac{\alpha_p - \alpha_{\min}}{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}} \quad (2.20)$$

- odciażanie:

$$\bar{\gamma} = \bar{\alpha} \left[1 + 0.28797(\bar{\alpha}^5 - 1) + 0.67268(\bar{\alpha}^{30} - 1) \right], \quad (2.21)$$

gdzie $\bar{\gamma}$ zdefiniowane jak wyżej, natomiast

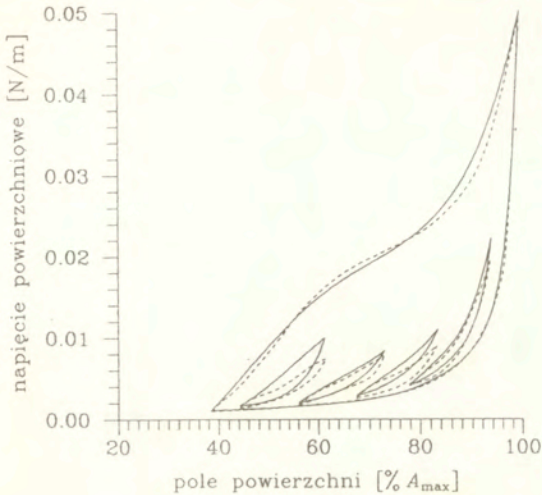
$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha - \alpha_{\min}}{\alpha_p - \alpha_{\min}} \quad (2.22)$$

odpowiada tym razem rzędnej punktu przecięcia danej krzywej z prostą $\gamma = \gamma_{\min}$.

W powyższych wzorach wartość α_{\min} została przyjęta jako 0.321, a zatem nieco zaniżona w stosunku do danych doświadczalnych (ok. 0.385). Celem tej operacji jest dostosowanie przedstawionego modelu konstytutywnego do możliwości opisu zachowania się mięszu pod obciążeniem pochodzącym od własnego ciężaru przy małych objętościach płuc. Wówczas w dolnych rejonach płuc lokalne wartości α są mniejsze niż średnie dla całych płuc. Przebieg krzywych $\gamma(\alpha)$ poza zakresem danym na cytowanych wykresach przyjęto *a priori* jako pewną ekstrapolację krzywych doświadczalnych.

Jak widać, przy cyklicznym obciążaniu został po kilku cyklach osiągnięty stan ustalonej pętli histerezy. Można wykazać, że stan ten nie zależy od warunków początkowych. Otwartą pozostaje kwestia, jak dalece można przez odpowiedni dobór równań charakterystyk aproksymować rzeczywiste ustalone pętle histerezy dla różnych cyklów, a także stany pośrednie, osiągnane przez materiał przed ustaleniem się pętli. Na rys. 2.5 przedstawiono porównanie ustalonych pętli histerezy $\gamma(\alpha)$ uzyskanych na podstawie doświadczeń Bachofena i in. (linia przerywana) oraz pętli wygenerowanych przez dane wyżej równania charakterystyk obciążania i odciażania (linia ciągła).

Przedstawione powyżej wyniki dotyczą krzywych odpowiadających własnościom mechanicznym surfaktantu płuc kota. Autorowi nie są niestety znane jakiegokolwiek badania płynu powierzchniowego z płuc ludzkich, w literaturze publikowane są jedynie wyniki uzyskane dla innych gatunków zwierząt. Ponieważ wyniki te nie różnią się od siebie znacznie pod względem ilościowym i jakościowym, wydaje się, że podane wyżej równania



Rys. 2.5

charakterystyk obciążania i odciążania mogą być zastosowane również w modelu konstytutywnym płuc ludzkich. Konieczne jest tylko przeskalowanie osi rzędnych, ponieważ wartość α w cyklu oddechowym człowieka zmienia się w węższym zakresie, zatem inne są wartości α_{min} i α_{max} .

Zastosowanie koncepcji pseudosprężystości w trójwymiarowych modelach konstytutywnych wymaga jeszcze sprecyzowania kryterium odciążania. W żadnej z cytowanych prac kwestia ta nie jest poruszana. Ponieważ jednak zjawisko histerezy dotyczy tylko napięcia powierzchniowego, wydaje się, że o tym, czy dany proces jest obciążaniem, czy odciążaniem, powinien decydować znak pochodnej czasowej parametru α .

Reasumując należy stwierdzić, że przedstawione powyżej modele konstytutywne są bardzo niedoskonałe i wyniki obliczeń uzyskane w wyniku ich zastosowania muszą nawiązywać wiele wątpliwości. Trudno jest nawet oszacować wielkość błędów jakie popełnia się w ich wyniku. Z drugiej jednak strony, współczesne ograniczenia techniczne uniemożliwiają przeprowadzenie eksperymentów mogących służyć za podstawę do dokładniejszej analizy własności mechanicznych mięszu w zależności od wielu czynników. Ponadto możliwość implementacji numerycznej modelu wymaga aby był on wystarczająco prosty. Stosowane w niniejszej pracy równania spełniają to wymaganie, stojące jednak w sprzeczności z wymaganiem wysokiej dokładności i wiarygodności. Biorąc pod uwagę wszystkie powyższe zastrzeżenia można jednak mieć nadzieję, że wyniki otrzymane na bazie przedstawionego modelu konstytutywnego pozwolą przynajmniej na jakościowo poprawny opis badanych zjawisk, zaś sama metodyka modelowania i wykonywania obliczeń umożliwi w przyszłości powtórzenie symulacji z uwzględnieniem bardziej realistycznych modeli konstytutywnych.

2.3 Analiza przepływu powietrza w drogach oddechowych

Jak już wspomniano przy omawianiu budowy płuc, powietrze porusza się w ich wnętrzu przewodami tworzącymi wielokrotnie rozgałęziającą się strukturę drzewiastą, zwaną dalej drzewem duktów powietrznych. Liczba generacji rozgałęzień duktów wynosi około 22–23 [45], przy czym tchawicy, będącej zwornikiem drzewa, przyporządkowuje się numer zerowy. Dla każdego rozgałęzienia długości i pola powierzchni przekrojów duktów dolnych maleją w stosunku do duktu górnego, jednak sumaryczne pole powierzchni przekroju za rozgałęzieniem jest większe niż przed nim¹. Oznacza to, że powietrze wpadające do płuc przez tchawicę jest następnie stopniowo spowalniane, aż w ostatnich generacjach duktów i zamykających je pęcherzykach osiąga prędkość niemal równą zeru. Prędkości występujące w przepływie są wystarczająco małe, aby traktować go jako nieściśliwy. Generalnie przepływ ten jest laminarny, choć przy większych prędkościach wentylacji w centralnych drogach oddechowych może wystąpić burzliwość.

Przepływ charakteryzujący się wyżej opisanymi cechami może być opisany równaniem Cauchy'ego-Lagrange'a. Zgodnie z tym równaniem ciśnienie w dowolnym punkcie przepływu P wyraża się wzorem

$$p = p_u^* - \int_{P_u}^P \mu k v dl - \int_{P_u}^P \rho \frac{\partial v}{\partial \tau} dl - \frac{\alpha}{2} \rho v^2, \quad (2.23)$$

gdzie: p_u^* – ciśnienie spiętrzenia w pewnym punkcie P_u leżącym powyżej punktu P ,
 v – prędkość przepływu,
 μ – lepkość gazu,
 ρ – gęstość gazu,
 k – współczynnik strat lepkościowych, zależny od geometrii przepływu,
 τ – czas,
 α – współczynnik Saint-Venanta, zależny od profilu przepływu (Dla przepływu laminarnego przyjmuje się $\alpha = 2$, dla burzliwego — $\alpha = 1$ [9]).

Ponieważ prędkość powietrza maleje wraz ze wzrostem numeru generacji, dwa ostatnie człony po prawej stronie równania (2.23), zależne monotonicznie od prędkości, mają znaczenie tylko w pierwszych kilku generacjach duktów. Człon opisujący straty lepkościowe jest wprawdzie proporcjonalny do v , zależy jednak również od współczynnika k , który narasta wraz ze zmniejszaniem się wymiarów geometrycznych duktów. Zatem w peryferyjnych strefach drzewa duktów powietrznych straty lepkościowe mają dominujące znaczenie, podczas gdy w centralnych drogach oddechowych ich wpływ na spadek ciśnienia jest mały. Potwierdzają to wyniki szczegółowej analizy teoretycznej przepływu wydechowego przeprowadzonej przez Lamberta i Wilsona [27].

Spostrzeżenie to sugeruje podział drzewa duktów powietrznych na dwie strefy, określane w niniejszej pracy umownymi symbolami A i B, w których przepływ ma jakościowo różny charakter. Strefa A obejmuje centralne drogi oddechowe i jest modelowana jako układ rozgałęziających się przewodów rurowych o schematycznie przyjętej geometrii. Przepływ w tej strefie opisywany jest równaniem ciągłości i równaniem Cauchy'ego-Lagrange'a w postaci (2.23). Strefa B obejmuje pozostałe, peryferyjne dukty powietrzne oraz pęcherzyki,

¹Prawidłowość ta nie dotyczy pierwszych trzech generacji duktów [45]

czyli przestrzenie powietrzne miąższu płucnego. W strefie tej dominują efekty lepkościowe. Ponadto strefa B charakteryzuje się dużą liczbą losowo zorientowanych duktów o małych rozmiarach. Pozwala to opisywać przepływ w tej strefie jako filtrację w trójwymiarowym ośrodku porowatym. Równanie (2.23) zostaje zastąpione przez prawo Darcy'ego

$$\mathbf{w} = -\frac{\bar{K}}{\mu} \phi \nabla^{\tau} p, \quad (2.24)$$

gdzie: \mathbf{w} – prędkość filtracji,

\bar{K} – tensorowy współczynnik przepuszczalności, zależny od geometrii przepływu,

ϕ – porowatość ośrodka,

$\nabla^{\tau} = \partial/\partial \mathbf{x}^{\tau}$ – operator gradientu w konfiguracji aktualnej (związanej z chwilą τ).

W dalszej części pracy termin „miąższ płucny” będzie używany jako określenie tego dwufazowego ośrodka porowatego, składającego się ze szkieletu tkankowego i filtrującego w jego porach gazu.

Określenie granicy między obiema strefami jest uwarunkowane parametrami rozważanego przepływu. Z danych przedstawionych przez Lamberta i Wilsona [27, tablica 1] wynika, że dla wydechu z szybkością $2 \text{ dm}^3/\text{s}$ strefa A obejmuje 6 generacji, natomiast przy szybkości $6 \text{ dm}^3/\text{s}$ rozszerza się ona do 9–11 generacji. W każdym jednak razie pojemność duktów strefy A nie przekracza kilku procent całej pojemności płuc. Można więc założyć w modelu fizycznym, że strefa B wraz ze strukturą tkankową miąższu wypełnia całą objętość płuc, natomiast dukty strefy A są w tę strukturę „wtopione”.

Ponadto w modelu fizycznym zagadnienia poczyniono następujące założenia:

- Dukty w strefie A mają przekrój kołowy o gładkich ściankach i stałej średnicy d , niezależnej od równowagi sił wokół ścianki. Założenie to jest słuszne dla dużych duktów, charakteryzujących się grubymi i względnie sztywnymi ściankami, pod warunkiem, że poprzeczne siły rozciągające są wystarczająco duże [21, 28]. Oznacza to, że dla małych objętości płuc przyjęty model jest słuszny tylko w przybliżeniu, ponieważ nie może uwzględnić np. efektów zamykania się duktów powietrznych wskutek spadku naprężeń rozciągających w miąższu lub ciśnienia wewnątrz duktu (przy dużej prędkości powietrza). Uwzględnienie w modelu tych zjawisk prowadziłoby jednak do jego znacznej komplikacji. Aby określić nawet w przybliżeniu pole przekroju takiego przewodu należałoby każdorazowo rozwiązać nieliniowe (geometrycznie i materiałowo) zagadnienie równowagi odkształcalnych ścian rurki zatopionej w ośrodku sprężystym. Współczynnik strat lepkościowych wzdłuż długości duktu ma zatem postać [9]

$$k = \begin{cases} \frac{8\pi}{A} & \text{dla przepływu laminarnego, } Re \leq 2300, \\ & \text{(ze wzoru Hageña-Poiseuille'a),} \\ \frac{0.03955\pi}{A} Re^{0.75} & \text{dla przepływu burzliwego, } Re > 4000, \\ & \text{(ze wzoru Blasiusa),} \end{cases} \quad (2.25)$$

gdzie A oznacza pole przekroju ductu, zaś $Re = \rho v d / \mu$ — liczbę Reynoldsa. Dla zakresu przejściowego $2300 < Re \leq 4000$ przyjęto wartość k jako średnią ważoną wartości dla przepływu laminarnego i burzliwego.

- Pomija się straty energii na rozgałęzieniach oraz straty w punktach wymiany fazy płynnej między strefami A i B. Ponadto pomija się stratę wlotową przy wdechu, natomiast uwzględnia się stratę wylotową przy wydechu (tzn. zakłada się, że ciśnienie zewnętrzne jest równe przy wdechu ciśnieniu spiętrzenia, zaś przy wydechu — ciśnieniu statycznemu w przepływie).
- Długości ductów zmieniają się zgodnie z deformacją otaczającego je mięszsu, tzn. sztywność ich ścianek na rozciąganie wzdłużne jest mała. Prędkość zmian długości ductów jest przy tym znacznie mniejsza niż prędkość przepływu w ich wnętrzu, zatem można przyjąć, że wydatek przepływu $q = vA$ jest jednakowy w każdym przekroju ductu pomiędzy rozgałęzieniami.
- Zakłada się izotropię tensora przepuszczalności, tzn.

$$\mathbf{K} = \lambda \mathbf{I}, \quad (2.26)$$

gdzie λ jest skalarnym współczynnikiem przepuszczalności. Wykorzystuje się tu fakt, że w fizjologii płuc odkształcenia typu objętościowego są z reguły znacznie większe niż odkształcenia postaciowe. Wzór Darcy'ego (2.24) przybiera wówczas postać

$$\mathbf{w} = -\frac{\lambda}{\mu} \phi \nabla^T p. \quad (2.27)$$

Założenie to jest uzasadnione dla dużych objętości płuc, przy małych objętościach odkształcenia postaciowe narastają i wzór (2.27) jest znów jedynie przybliżeniem rzeczywistej zależności między filtracją a gradientem ciśnienia. Z drugiej strony jednak brak jest wystarczających danych do określenia anizotropowej postaci tensora przepuszczalności mięszsu w funkcji jego deformacji, zatem w niniejszej pracy stosowane będzie powyższe równanie filtracji.

- Zarówno porowatość ϕ , jak przepuszczalność λ , zależą od deformacji objętościowej mięszsu. Ze względu na nieściśliwość fazy stałej mamy

$$1 - \phi = \frac{1 - \phi^t}{J}, \quad (2.28)$$

natomiast przy założeniu małej grubości ścianek, to znaczy, że dylatacja przestrzeni porowych w skali mikro jest w przybliżeniu równa dylatacji mięszsu w skali makro, zachodzi związek

$$\lambda = \left(J \frac{\phi}{\phi^t} \right)^{2/3} \lambda^t. \quad (2.29)$$

Wielkości ϕ^t i λ^t odnoszą się do konfiguracji odniesienia, $J = V/V^t$ oznacza deformację objętościową. Wyprowadzenie równania (2.29) znajduje się w dodatku A.

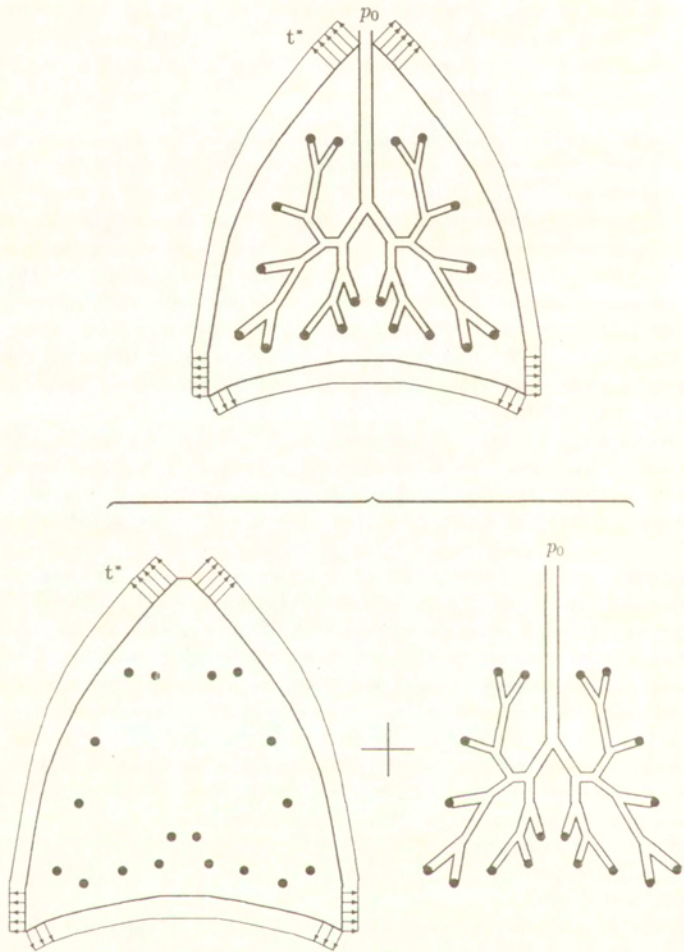
- Z punktu widzenia mechaniki mięszu, zatopione w nim dukty należące do strefy A są obiektami jednowymiarowymi, którym nie przypisuje się żadnych własności mechanicznych. Oznacza to, że globalne rozwiązanie problemu statyki tego ośrodka nie wykaże w okolicach tych duktów żadnych koncentracji naprężeń. Mogą one zostać następnie wyznaczone przez rozwiązanie zagadnienia lokalnego deformacji ośrodka z niejednorodnością w postaci walca o innych własnościach mechanicznych. Zakłada się, że równanie konstytutywne fazy stałej mięszu uwzględni fakt, że jest on równomiernie drenowany przez przewody rurowe różnej wielkości (odnosi się to także do naczyń krwionośnych).

Reasumując, rozważane w niniejszej pracy zagadnienie mechaniki płuc w procesie oddychania jest superpozycją dwóch sprzężonych ze sobą zagadnień: przepływu w przestrzennym układzie rozgałęziających się przewodów rurowych oraz deformacji trójwymiarowego, dwufazowego ośrodka porowatego. Przyjęty model fizyczny przedstawiono schematycznie na rys. 2.6. Sprężenie mechaniczne między oboma układami ma miejsce przede wszystkim w punktach wymiany fazy płynnej między nimi, oznaczonych na rysunku kółkami. Punkty te będą nazywane w dalszej części pracy *punktami przejściowymi*. Dodatkową przyczyną sprzężeń jest fakt, że geometria dużych duktów powietrznych zależy od stanu deformacji otaczającego je mięszu. Warto przy tym zaznaczyć, że w zagadnieniu mechaniki dwufazowego ośrodka porowatego występują również sprzężenia pomiędzy deformacją szkieletu a filtracją fazy płynnej.

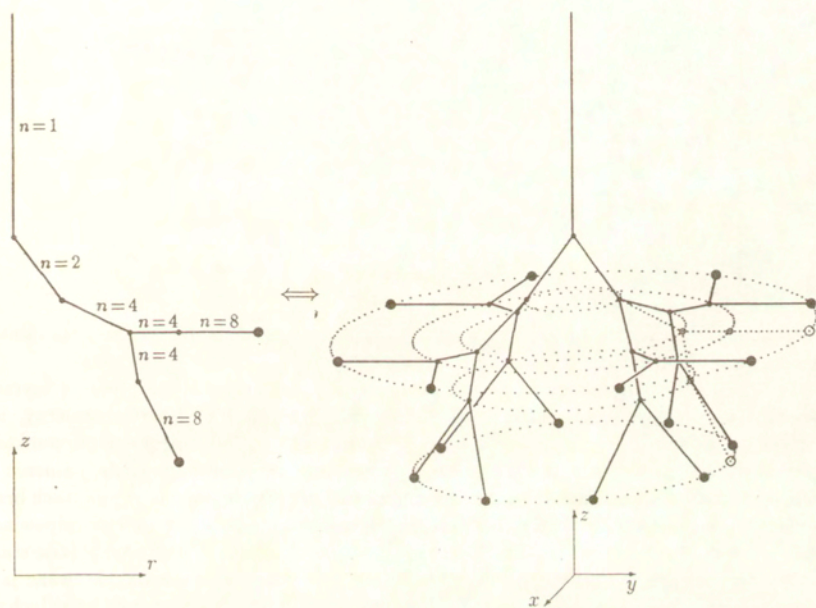
Oznaczone na rys. 2.6 przez t^* siły zewnętrzne działające na mięsz, pochodzące od klatki piersiowej i przepony, nie są w rzeczywistości znane. Warunek brzegowy na powierzchni zewnętrznej płuc ma charakter mieszany: wiadomo, że nie ma tam naprężeń stycznych oraz zakłada się, że znany jest kształt klatki piersiowej w poszczególnych fazach oddechu².

Jak już wspomniano w podrozdziale 2.1, przy pewnych założeniach płuca można traktować jako obiekt osiowosymetryczny, w którym przemieszczenia i przepływy w kierunku obwodowym są pomijalnie małe. Uwzględnienie tego faktu w modelu fizycznym pozwala na zmniejszenie o jeden wymiaru zagadnienia, co znacznie zwiększa możliwości obliczeniowe zbudowanego na jego podstawie algorytmu numerycznego. W przypadku mięszu płucnego przejście od opisu we współrzędnych kartezjańskich $\{x, y, z\}$ do opisu we współrzędnych walcowych $\{r, z\}$ jest oczywiste. Inaczej rzecz się ma z układem dużych duktów powietrznych, który z natury nie jest osiowosymetryczny, poza szczególnym przypadkiem pojedynczego ductu o osi pokrywającej się z osią układu. Można jednak w tym przypadku wprowadzić pewne uproszczenie w schemacie geometrii drzewa duktów, zakładając, że punkty ich rozgałęzień są rozłożone równomiernie na okręgach odpowiadających punktom w układzie współrzędnych $\{r, z\}$. Model takiego drzewa w przestrzeni dwuwymiarowej ma również postać systemu rozgałęziających się odcinków, z których każdy odpowiada pewnej liczbie n jednakowych fizycznych duktów rozłożonych na powierzchni stożkowej utworzonej przez obrót tego odcinka wokół osi symetrii układu (rys. 2.7). W tym sensie punkt, modelujący w układzie $\{r, z\}$ punkt przejściowy, odpowiada również pewnej liczbie fizycznych punktów przejściowych, rozłożonych równomiernie na zdefiniowanym przez

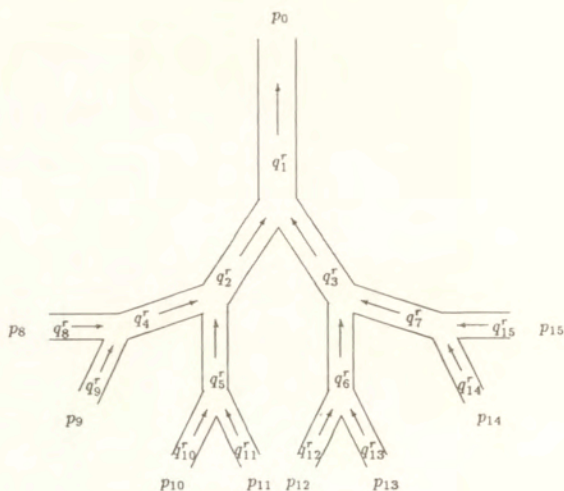
²Założenie to jest słuszne tylko dla oddychania naturalnego, gdzie zmiany kształtu klatki piersiowej stanowią wymuszenie dla deformacji płuc. W procesie sztucznej wentylacji ogólnie nie jesteśmy w stanie przewidzieć jak będą się przemieszczać bierne w tym przypadku ściany klatki piersiowej i przepona pod wpływem wewnętrznego ciśnienia. Zastosowanie opisywanego modelu do tego zagadnienia wymagałoby dodatkowych założeń na temat własności mechanicznych narządów sąsiadujących z płucami.



Rys. 2.6 Model fizyczny



Rys. 2.7 Interpretacja modelu drzewa duktów dla przypadku osiowosymetrycznego



Rys. 2.8

niego okręgu. Jeśli rozkład ten jest wystarczająco gęsty, można założyć, że pola ciśnień porowych i przepływów w mięszu są osiowoosymetryczne.

W tak zdefiniowanym modelu pewien problem może się wiązać z interpretacją fizyczną naprężeń i ciśnień w mięszu. Rozkład ciśnień porowych nie jest równomierny, ich wartości w poszczególnych punktach zależą, ogólnie biorąc, od odległości od punktów przejściowych. Ciśnienie w pęcherzykach rzeczywistego mięszu odpowiada ciśnieniu w punktach modelu najbardziej oddalonych od punktów przejściowych, np. w punktach brzegowych lub leżących na osi symetrii. W pozostałym obszarze ciśnienie porowe odpowiada ciśnieniu w duktach powietrznych dalszych generacji. Stąd wartości naprężeń w fazie stałej modelowego mięszu, zależące od wartości ciśnień porowych, mogą być traktowane jako naprężenia w szkielecie tkankowym również tylko w punktach wystarczająco odległych od punktów przejściowych. W bezpośrednim sąsiedztwie tych punktów ich sens fizyczny jest trudny do zinterpretowania.

2.4 Podstawowy układ równań

2.4.1 Przepływ w dużych duktach powietrznych

Dany jest przestrzenny układ duktów jak na rys. 2.8. Zakładamy, że wszystkie rozgałęzienia są regularne, tzn. jeden dukt rozgałęzia się tylko na dwa dukty. Wprowadzamy numerację odcinków duktów pomiędzy rozgałęzieniami lub swobodnymi końcami, rozpoczynając od duktów-zwornika drzewa, a kończąc na duktach nie rozgałęziających się. Liczbę wszystkich odcinków, zwanych dalej elementami drzewa, oznaczamy przez N^r . Każdemu i -temu elementowi przyporządkowujemy parametry geometryczne: długość l_i , średnicę d_i i pole

przekroju $A_i = \pi d_i^2/4$, a także niewiadomą $q_i^r = v_i A_i$ oznaczającą objętościowy wydatek przepływu. Dodatni znak q_i^r oznacza przepływ w kierunku elementu górnego (wydech). Zakładając, że znane są ciśnienia na wszystkich końcach swobodnych układu, możemy zapisać:

- dla rozgałęzień elementów — równanie ciągłości

$$q_i^r - q_{i_1}^r - q_{i_2}^r = 0, \quad (2.30)$$

gdzie i jest numerem elementu powyżej rozgałęzienia, a i_1 i i_2 numerami elementów dolnych, oraz

- dla elementów nie rozgałęziających się — zdyskretyzowane równanie Cauchy'ego-Lagrange'a (2.23):

$$\sum_{j \in c^i} \rho v_j l_j + \sum_{j \in c^i} \mu k_j v_j l_j = p_i - p_0 \quad \text{dla wdechu}, \quad (2.31)$$

$$\sum_{j \in c^i} \rho v_j l_j + \sum_{j \in c^i} \mu k_j v_j l_j + \frac{\alpha}{2} \rho v_1^2 = p_i - p_0 \quad \text{dla wydechu}, \quad (2.32)$$

gdzie

$$v_i = \frac{q_i^r}{A_i}, \quad (2.33)$$

natomiast c^i jest zbiorem numerów wszystkich elementów na drodze od pierwszego do i -tego.

Równania (2.30) wraz z równaniami (2.31) lub (2.32) oraz (2.33) stanowią zamknięty układ N^r równań z N^r niewiadomymi. Dla wdechu i przepływu laminarnego jest on liniowy, w pozostałych przypadkach współczynniki występujące przy niektórych niewiadomych zależą od nich. Można ten układ zapisać w formie macierzowej

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N^b \times N^r} \\ \mathbf{A}'_{N^a \times N^r} \end{bmatrix} \{ \mathbf{q}'_{N^r \times 1} \} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}^o_{N^b \times N^r} \\ (\mathbf{B}' + \mathbf{B}'')_{N^a \times N^r} \end{bmatrix} \{ \mathbf{q}'_{N^r \times 1} \} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_{N^b \times 1} \\ (\mathbf{p} - p_0 \mathbf{1})_{N^a \times 1} \end{Bmatrix}, \quad (2.34)$$

gdzie N^b i N^a oznaczają odpowiednio liczby elementów rozgałęziających się i nierozgałęziających się (wymieniających fazę płynną z mięszem), a wektory \mathbf{q}' i \mathbf{p} zawierają odpowiednio niewiadome wartości przepływów w elementach oraz wartości ciśnień w punktach przejściowych. Elementy macierzy występujących w układzie mają postać:

$$A'_{i,j} = \begin{cases} \rho \frac{l_j}{A_j}; & j \in c^i, \\ 0; & j \notin c^i, \end{cases} \quad (2.35)$$

$$B^o_{i,j} = \begin{cases} 1; & j = i, \\ -1; & j = i_1 \vee j = i_2 \quad (\text{por. oznaczenia w (2.30)}) \\ 0; & \text{pozostałe } j, \end{cases} \quad (2.36)$$

$$B'_{i,j} = \begin{cases} \mu k_j \frac{l_j}{A_j}; & j \in c^i, k_j \text{ — według (2.25)} \\ 0; & j \notin c^i, \end{cases} \quad (2.37)$$

$$B''_{i,j} = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} \rho \frac{q_1^r}{A_1^2}; & j = 1, \text{ dla wydechu,} \\ 0; & j = 1, \text{ dla wdechu oraz } j \neq 1. \end{cases} \quad (2.38)$$

Układ (2.34) można zapisać zwięźlej:

$$\mathbf{A}q^r + \mathbf{B}q^r = \mathbf{p}^* - p_0 \mathbf{1}^*, \quad (2.39)$$

pamiętając, że wektory oznaczone gwiazdką mają niezerowe wartości tylko w ostatnich N^n równaniach, tj. dla elementów nierozgałęziających się.

Warunkami brzegowymi dla tego układu równań są funkcje $p_0(\tau)$ oraz $\mathbf{p}^*(\tau)$. Ta ostatnia, opisująca zmiany ciśnień w punktach przejściowych, nie jest znana i zostanie wyrugowana w wyniku sprzężenia tego układu z układem równań zagadnienia mechaniki mięszu. To samo dotyczy zmieniających się w trakcie deformacji mięszu parametrów geometrycznych poszczególnych duktów, występujących we współczynnikach macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} . Zakłada się, że w chwili początkowej wartości ciśnień i prędkości są zerowe.

W przypadku modelu osiowosymetrycznego układ równań dla tego zagadnienia może być wyprowadzony w podobny sposób. Zasadnicza różnica polega na tym, że każdy i -ty element drzewa w modelu fizycznym odpowiada grupie n_i fizycznych duktów rozłożonych na zdefiniowanej przez niego powierzchni obrotowej (rys. 2.7). Niewiadoma wielkość q_i^r oznacza sumaryczny wydatek objętościowy przepływu we wszystkich tych duktach, podzielony przez 2π . Prędkość przepływu w rzeczywistym dukcie należącym do takiego elementu równa jest więc

$$v_i = q_i^r \frac{2\pi}{n_i A_i}. \quad (2.40)$$

Uwzględniając tę zależność, można przepisać wyprowadzone powyżej równania (2.30), (2.31), (2.32), (2.34) i (2.39) w niezmienionej postaci, przy czym elementy macierzy cząstkowych \mathbf{A}' , \mathbf{B}' i \mathbf{B}'' w układzie równań (2.34) wyrażają się wzorami:

$$A'_{ij} = \begin{cases} \rho \frac{2\pi l_j}{n_j A_j}; & j \in c^i, \\ 0; & j \notin c^i, \end{cases} \quad (2.41)$$

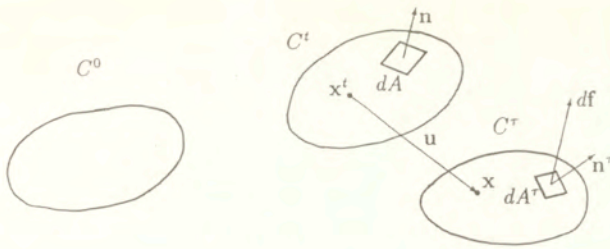
$$B'_{ij} = \begin{cases} \mu k_j \frac{2\pi l_j}{n_j A_j}; & j \in c^i, k_j - \text{wzłlug (2.25)} \\ 0; & j \notin c^i, \end{cases} \quad (2.42)$$

$$B''_{ij} = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} \rho \frac{4\pi^2 q_1^r}{A_1^2}; & j = 1, \text{ dla wydechu.} \\ 0; & j = 1, \text{ dla wdechu oraz } j \neq 1. \end{cases} \quad (2.43)$$

Należy ponadto zaznaczyć, że w modelu osiowosymetrycznym w naturalny sposób mogą wystąpić rozgałęzienia z tylko jednym dolnym elementem, posiadającym za to większą wartość n_i , niż element górny. Stąd w równaniu (2.30) może w ogóle nie wystąpić niewiadoma z indeksem i_2 , co rzutuje także na definicję elementów macierzy \mathbf{B}'' w równaniu (2.36).

2.4.2 Zagadnienie mechaniki mięszu

Matematyczne podstawy mechaniki dwufazowych ośrodków porowatych w zakresie liniowym zostały sformułowane w pracach Biota, m. in. [4, 5, 6]. W pracy [7] rozszerzył on poprzednie rozważania na przypadek dużych odkształceń. Na bazie liniowej teorii Biota wielu autorów sformułowało algorytmy numeryczne i zbudowało programy, rozwiązujące



Rys. 2.9

zagadnienia mechaniki nasyconych ośrodków porowatych (np. gruntów, skal). Wymienić tu można prace [17, 31, 36, 53]. Wspólną cechą tych sformułowań jest wybór pól przemieszczenia fazy stałej i ciśnienia w fazie płynnej jako niewiadomych w układzie równań zagadnienia.

Wyprowadzony poniżej układ równań różniczkowych dla mechaniki mięszu płucnego jest rozszerzeniem omówionych sformułowań, z uwzględnieniem nieliniowości zarówno geometrycznych (duże odkształcenia), jak materiałowych (nieliniowa sprężystość). Układ obejmuje wektorowe równanie równowagi oraz równanie ciągłości przepływu (zachowania masy). Równania te określone są w całym obszarze płuc, oznaczanym dalej przez Ω . Warunki brzegowe dla obu równań zadawane są na powierzchni zewnętrznej płuc $\partial\Omega$ oraz w izolowanych punktach przejściowych wewnątrz mięszu. Układ jest uzupełniony przez równanie konstytutywne oraz prawo filtracji. Równania są sformułowane dla dowolnej chwili τ w uaktualnionym opisie Lagrange'a. Za konfigurację odniesienia przyjęto konfigurację C^t związaną z pewną chwilą t , która w implementacji numerycznej będzie odpowiadać końcowi poprzedniego kroku czasowego.

Niech x^t oznacza wektor położenia cząstki w chwili t względem pewnego nieruchomego punktu w przestrzeni, zaś $x = x^t + u(x^t, \tau)$ — aktualne położenie tej cząstki (rys. 2.9). Przez cząstkę rozumie się tu nieskończenie mały element zawierający te same punkty fazy stałej. Gradient deformacji od chwili t do chwili τ oraz jego pochodna po czasie wyrażają się wzorami:

$$F = \nabla x = I + \nabla u, \quad \dot{F} = \nabla \dot{u}, \quad (2.44)$$

gdzie I oznacza tensor jednostkowy, u przemieszczenie, a wektorowy operator $\nabla = \partial/\partial x^t$.

Równanie równowagi

Równanie równowagi elementu mięszu ma w tym opisie postać

$$\operatorname{div} T + g^* = 0, \quad (2.45)$$

gdzie T oznacza pierwszy tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa, zaś g^* — siły masowe związane z ciężarem mięszu, a ściślej biorąc jego fazy stałej, gdyż gęstość powietrza jest znikoma w porównaniu z gęstością tkanek. Oznaczając tę ostatnią (w odniesieniu do objętości ośrodka w konfiguracji odniesienia) przez ρ^{par} zapisujemy

$$g = -\rho^{par} g e_v, \quad (2.46)$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie a e_v — wersor definiujący kierunek pionowy (w stosowanych dalej układach współrzędnych, kartezjańskim i walcowym, wersor ten będzie równy odpowiednio e_3 i e_z). Siły masowe g^* są w przedstawianym modelu traktowane jako znane. Naprężenie T jest zdefiniowane wzorem

$$Tn = t = \frac{df}{dA}, \quad (2.47)$$

gdzie df oznacza wypadkową sił wewnętrznych działających przez element powierzchni, posiadający w konfiguracji C^t pole dA i wektor normalny n (rys. 2.9). Operator div działa na drugi wskaźnik tensora T . Po zróżniczkowaniu względem czasu równanie równowagi przyjmuje postać

$$div \dot{T} + \dot{g}^* = 0. \quad (2.48)$$

Drugi człon po lewej stronie powyższego równania ma w większości zastosowań wartość zerową (zmiany wektora sił ciężkości mogłyby być spowodowane przemieszczaniem się krwi w mięszu, pomijamy w przedstawianym modelu, lub zmianami pozycji organizmu podczas oddychania, które również nie będą uwzględniane w przykładach obliczeniowych). Dla zachowania ogólności rozważań będzie jednak uwzględniany w dalszych przekształceniach.

Wypadkowa siła df działająca przez dowolny element powierzchni dA w ośrodku jest sumą sił wewnętrznych w fazie stałej (oznaczanych wskaźnikiem (s)) i składowej pochodzącej od ciśnienia porowego w fazie płynnej

$$df = df^{(s)} - pn^T dA^T, \quad (2.49)$$

gdzie n^T oznacza wektor jednostkowy normalny do rozważanego elementu w konfiguracji aktualnej, a dA^T — jego pole w tej konfiguracji. Wielkości te związane są z wielkościami n i dA zależnościami

$$n^T dA^T = GndA, \quad (2.50)$$

gdzie

$$G = JF^{-T}, \quad J = \det F. \quad (2.51)$$

Wskaźnik $-T$ oznacza transpozycję tensora odwrotnego.

Dla uproszczenia dalszego zapisu zakładamy, że ciśnienie p działa na całej powierzchni przekroju, a nie tylko na jej części przypadającej na pory, symbol $df^{(s)}$ oznacza zatem wypadkową siłę w błonach szkieletu przecinających dA pomniejszoną o część siły $-pn^T dA^T$ przypadającej na przekroje tych błon. Odnosząc siłę df do pola powierzchni elementu w konfiguracji C^t i korzystając z zależności (2.50) otrzymujemy wyrażenie na wektor naprężenia

$$t = t^{(s)} - pGn. \quad (2.52)$$

Pierwszy tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa ma zatem postać

$$T = T^{(s)} - pG = FS^{(s)} - pG. \quad (2.53)$$

Różniczkując powyższe równanie po czasie, otrzymujemy

$$\dot{T} = \dot{F}S^{(s)} + \dot{F}S^{(s)} - p\dot{G} - \dot{p}G. \quad (2.54)$$

Wyrażone w prędkościach równanie konstytutywne fazy stałej ma w konfiguracji C^t ogólną postać

$$\dot{\mathbf{S}}^{(s)} = \mathbf{C} : \dot{\mathbf{E}}, \quad (2.55)$$

gdzie

$$\mathbf{C}(\mathbf{E}) = \frac{\partial^2 W^t}{\partial \mathbf{E}^2} \quad (2.56)$$

jest styczonym tensorem konstytutywnym czwartego rzędu, natomiast W^t jest funkcją energii odkształcenia zdefiniowaną wzorem (2.1). Wskaźnik t przy jej nazwie podkreśla, że jej postać zależy od przyjętej konfiguracji odniesienia (zależności między pochodnymi cząstkowymi funkcji gęstości energii odkształcenia po składowych stanu odkształcenia w różnych konfiguracjach odniesienia podano w dodatku B). \mathbf{E} oznacza tensor całkowitego nieliniowego odkształcenia elementu ośrodka w chwili τ względem konfiguracji C^t i jest sumą tensora Almansiego ${}^0\mathbf{A}^t$ mierzonego w chwili t i tensora Greena ${}^t\mathbf{E}^\tau = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I})$ opisującego odkształcenie od konfiguracji odniesienia do aktualnej. Pochodna tensora odkształcenia wyraża się wzorem

$$\dot{\mathbf{E}} = {}^t\dot{\mathbf{E}}^\tau = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F} + \mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}). \quad (2.57)$$

Stąd, wykorzystując symetrię tensora \mathbf{C} względem dwóch ostatnich wskaźników, możemy zapisać

$$\dot{\mathbf{S}}^{(s)} = \mathbf{C} : [\mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}]. \quad (2.58)$$

Ponadto zachodzą zależności:

$$\dot{J} = J \operatorname{tr}[\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}] = \operatorname{tr}[\mathbf{G}\dot{\mathbf{F}}^T], \quad (2.59)$$

$$\dot{\mathbf{F}}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}, \quad (2.60)$$

$$\dot{\mathbf{G}} = J(\operatorname{tr}[\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}]\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{F}}^T)\mathbf{F}^{-T} = \frac{1}{J}(\operatorname{tr}[\mathbf{G}\dot{\mathbf{F}}^T]\mathbf{I} - \mathbf{G}\dot{\mathbf{F}}^T)\mathbf{G}. \quad (2.61)$$

Ostatecznie zatem pochodna po czasie I tensora Pioli-Kirchhoffa występująca w równaniu (2.48) ma postać

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{F}\mathbf{C} : [\mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}] + \dot{\mathbf{F}}\mathbf{S}^{(s)} - \frac{p}{J}(\operatorname{tr}[\mathbf{G}\dot{\mathbf{F}}^T]\mathbf{I} - \mathbf{G}\dot{\mathbf{F}}^T)\mathbf{G} - \dot{p}\mathbf{G}. \quad (2.62)$$

Równanie zachowania masy

Równanie zachowania masy fazy płynnej w dowolnym elemencie ośrodka, posiadającym w konfiguracji C^t objętość V i pole powierzchni bocznej A , można zapisać w konfiguracji aktualnej następująco

$$\frac{d}{d\tau} \int_{V^\tau} \phi \rho dV^\tau + \int_{A^\tau} \rho \bar{\mathbf{w}}^\tau \cdot \mathbf{n} dA^\tau = 0. \quad (2.63)$$

Przez ρ oznaczono gęstość fazy płynnej a przez $\bar{\mathbf{w}}^\tau$ — wektor przepływu objętościowego przez jednostkę powierzchni mierzoną w konfiguracji aktualnej. Wielkość ta wyraża się wzorem

$$\bar{\mathbf{w}}^\tau = \phi \mathbf{w} = -\phi^2 \frac{\lambda}{\mu} \nabla^\tau p, \quad (2.64)$$

w którym wykorzystano prawo Darcy'ego (2.27). Uwzględniając (2.50) i zależności:

$$dV^\tau = J dV, \quad \nabla^\tau = \mathbf{F}^{-T} \nabla, \quad (2.65)$$

oraz definiując wielkość

$$\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{w}}^\tau, \quad (2.66)$$

opisującą przepływ przez jednostkę powierzchni mierzoną w konfiguracji C^t , przepisujemy (2.63) w tej konfiguracji:

$$\int_V \frac{d}{d\tau} (\phi \rho J) dV + \int_A \rho \bar{\mathbf{w}}^T \mathbf{n} dA = 0. \quad (2.67)$$

Prawo Darcy'ego ma w konfiguracji C^t postać

$$\mathbf{w} = -\phi \frac{\lambda}{\mu} \mathbf{F}^{-T} \nabla p. \quad (2.68)$$

Równanie (2.66) można zatem, przy uwzględnieniu (2.51), przepisać w formie

$$\bar{\mathbf{w}} = -\phi^2 \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{J} \mathbf{G}^T \mathbf{G} \nabla p. \quad (2.69)$$

Po zastosowaniu twierdzenia Gaussa,

$$\int_A \mathbf{v}^T \mathbf{n} dA = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV, \quad \text{dla dowolnego wektora } \mathbf{v}, \quad (2.70)$$

i uwzględnieniu dowolności obszaru całkowania otrzymujemy równanie ciągłości przepływu (zachowania masy) w formie różniczkowej

$$\frac{d}{d\tau} (\phi \rho J) + \operatorname{div}(\rho \bar{\mathbf{w}}) = 0. \quad (2.71)$$

W niniejszej pracy rozważane będą dwa modele fazy płynnej: model płynu nieściśliwego ($\rho = \text{const}$) oraz model gazu doskonałego w warunkach izotermicznych ($\rho = \bar{p}/RT$, $RT = \text{const}$). Przez \bar{p} oznaczono tu ciśnienie absolutne, $\bar{p} = p + \bar{p}_{at}$. W pierwszym przypadku równanie (2.71) upraszcza się do postaci

$$\operatorname{tr}[\mathbf{G}\dot{\mathbf{F}}^T] + \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}} = 0, \quad (2.72)$$

w drugim natomiast przybiera ono formę

$$\operatorname{tr}[\mathbf{G}\dot{\mathbf{F}}^T] + \frac{1}{\bar{p}} \dot{p} \phi J + \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}} + \frac{1}{\bar{p}} \bar{\mathbf{w}}^T \nabla p = 0. \quad (2.73)$$

W powyższych wzorach wykorzystano zależności (2.28) i (2.59).

Warunki brzegowe

Dla równania zachowania masy (2.71) zakładamy warunki brzegowe dwojakiego rodzaju: albo w danym punkcie brzegu znane jest ciśnienie fazy płynnej p^* , albo objętościowy wydatek przepływu $q^* = \bar{w}n$. Powierzchnia zewnętrzna płuc $\partial\Omega$ jest zatem sumą powierzchni cząstkowych $\partial\Omega^p$ i $\partial\Omega^q$, odpowiadających wymienionym warunkom. W rzeczywistości do modelowania procesu oddychania wystarcza tylko ten drugi rodzaj warunku brzegowego — na powierzchni zewnętrznej płuc przepływ jest zerowy natomiast w punktach przejściowych może być wyznaczony w wyniku sprzężenia rozważanego układu równań z równaniami przepływu w dużych duktach powietrznych (2.39). Warunek brzegowy na ciśnienie jest jednak przydatny w wycinkowych testach numerycznych budowanego algorytmu.

Warunki brzegowe na przemieszczenia i siły, związane z równaniem równowagi, są w rozważanym zagadnieniu bardziej skomplikowane. Jak już wspomniano wcześniej, zewnętrzna powierzchnia płuc ślizga się bez tarcia po wewnętrznej powierzchni klatki piersiowej, dopasowując się do niej kształtem. Oznacza to, że przemieszczenia punktów brzegowych nie są znane, ale znane jest równanie rodziny powierzchni, na których punkty te znajdują się w dowolnej chwili procesu deformacji. Wiadomo ponadto, że punkty brzegowe rozmieszczają się na powierzchni brzegowej w taki sposób, aby siły brzegowe były do niej w każdym punkcie prostopadłe.

Warunki tego typu trudno jest w sposób bezpośredni zastosować w algorytmie obliczeniowym. Mamy tu do czynienia z typowym zagadnieniem kontaktowym dla przypadku zerowego tarcia, przy dwustronnym charakterze więzów między kontaktującymi się powierzchniami. W algorytmach obliczeniowych dla tego typu zagadnień zakłada się zwykle istnienie między rozważanymi powierzchniami strefy kontaktowej, która oddziałuje na te powierzchnie siłami zależnymi od ich wzajemnego położenia. Zależność tę przyjmuje się w taki sposób, aby w warunkach równowagi sił założone warunki brzegowe na powierzchniach były spełnione z żadaną dokładnością. W rozważanym przypadku oddziaływania styczne powinny być przyjęte jako zerowe, natomiast oddziaływania normalne — jako szybko rosnąca funkcja odstępów między powierzchnią płuc a powierzchnią wewnętrzną klatki piersiowej.

Ogólnie, możliwe są tu dwa podejścia. W pierwszym z nich odstęp między powierzchniami \mathcal{A} i \mathcal{B} w punkcie $x \in \mathcal{A}$ definiowany jest jako

$$d(x) = \min_{y \in \mathcal{B}} \|x - y\| \quad (2.74)$$

a reakcja na brzegu jako np.

$$\sigma_n(x) = kd(x), \quad (2.75)$$

gdzie k jest założoną arbitralnie stałą materiałową. Wadą tego podejścia jest fakt, że w ogólnym przypadku zwykle nie jest możliwe podanie analitycznej zależności między odstępem $d(x)$ a wektorem przemieszczenia $u(x)$ w rozważanym punkcie, a tym samym również zależności między siłami na powierzchni brzegowej płuc a jej przemieszczeniami. Do wyznaczenia tych wielkości konieczne jest wówczas postępowanie iteracyjne, co wiąże się z znacznymi komplikacjami przy budowie algorytmu numerycznego.

Drugie podejście, zastosowane w niniejszej pracy, polega na założeniu, że w strefie kontaktowej, podobnie jak w całym obszarze płuc, istnieje pole deformacji i naprężeń, spełniające warunki ciągłości i równowagi zarówno wewnątrz strefy jak i na jej brzegu. Równanie konstytutywne ośrodka wypełniającego strefę przyjęto następująco:

$$\sigma^{(pl)} = -p^{(pl)} \mathbf{I}; \quad p^{(pl)} = -\frac{1}{2}k \frac{dV}{dA^0} = -k\delta \frac{dA}{dA^0}, \quad (2.76)$$

gdzie σ oznacza naprężenie Cauchy'ego, 2δ — grubość strefy, natomiast dA^0 jest początkowym polem powierzchni kontaktu dla danego elementu strefy. Wskaźnik (pl) odnoszący się do wielkości zdefiniowanych dla strefy kontaktowej, sugeruje pewną analogię pomiędzy tą strefą a przestrzenią międzyopłucnową (ang. *pleura* — opłucna) otaczającą rzeczywiste płuca. Tak sformułowane równanie konstytutywne zapewnia spełnienie warunku zerowego tarcia, natomiast odpowiedni dobór współczynnika k pozwala na utrzymywanie objętości, a tym samym grubości strefy w żądanych granicach.

Jako konfigurację odniesienia dla punktów strefy przyjmujemy pewną fikcyjną konfigurację C^r , w której grubość strefy jest stała i skończona i wynosi $2\hat{\delta} > 0$ (w przeciwieństwie do zmiennej grubości 2δ mogącej przyjmować wartości zerowe i ujemne), natomiast pole powierzchni jej elementu, odpowiadające rzeczywistemu polu dA wynosi w tej konfiguracji $d\hat{A}$ (rys. 2.10). Oznaczając przez ξ wektor położenia dowolnego punktu strefy w tej konfiguracji, definiujemy

$$\nabla^r = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (2.77)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \nabla^r \mathbf{x}, \quad \hat{J} = \det \hat{\mathbf{F}}, \quad \hat{\mathbf{G}} = \hat{J} \hat{\mathbf{F}}^{-T}, \quad (2.78)$$

$$\hat{\mathbf{F}}^t = \nabla^r \mathbf{x}^t, \quad \hat{J}^t = \det \hat{\mathbf{F}}^t, \quad \hat{\mathbf{G}}^t = \hat{J}^t \hat{\mathbf{F}}^{t-T}. \quad (2.79)$$

(W przypadku, gdy $\hat{J} = 0$ i przekształcenie $\hat{\mathbf{F}}^{-1}$ nie jest określone, definicję tensora $\hat{\mathbf{G}}$ należy rozumieć jako granicę $\lim_{\hat{\mathbf{F}}_i \rightarrow -\hat{\mathbf{F}}} \hat{J}_i \hat{\mathbf{F}}_i^{-T}$. Podobnie dla $\hat{\mathbf{G}}^t$.) Gradient $\hat{\mathbf{F}}$ można wyrazić jako funkcję przemieszczenia \mathbf{u} od chwili t do τ . Jest mianowicie

$$\hat{\mathbf{F}} = \nabla^r \mathbf{x}^t + \nabla^r \mathbf{u}, \quad \hat{\dot{\mathbf{F}}} = \nabla^r \dot{\mathbf{u}}. \quad (2.80)$$

Równanie równowagi rozpisane w konfiguracji C^r ma postać

$$\text{div}^r \hat{\mathbf{T}}^{(pl)} = 0, \quad (2.81)$$

lub, po zróżniczkowaniu względem czasu dla elementu strefy

$$\text{div}^r \dot{\hat{\mathbf{T}}}^{(pl)} = 0. \quad (2.82)$$

gdzie przez $\hat{\mathbf{T}}^{(pl)}$ oznaczono I tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa w strefie kontaktowej,

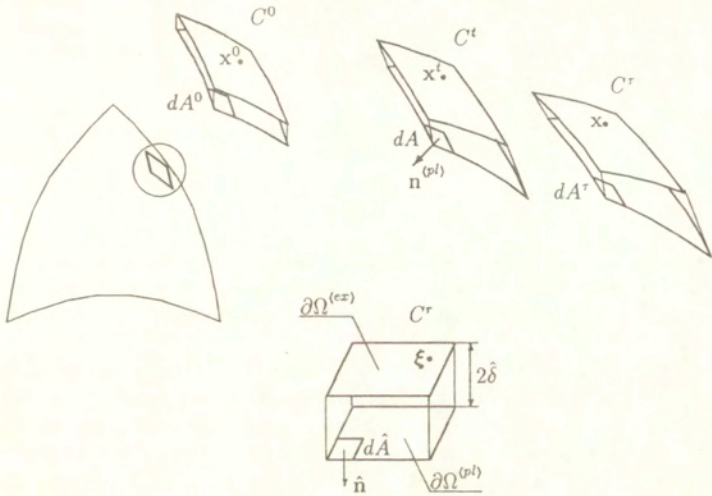
$$\hat{\mathbf{T}}^{(pl)} = \sigma^{(pl)} \hat{\mathbf{G}} = k \frac{\hat{J} \hat{\delta} d\hat{A}}{dA^0} \hat{\mathbf{G}} = k' \hat{J} \hat{\mathbf{G}}. \quad (2.83)$$

Jego pochodna po czasie, zgodnie z podanymi wcześniej zależnościami (2.59-2.61), wyraża się wzorem

$$\dot{\hat{\mathbf{T}}}^{(pl)} = k' (2\text{tr}[\hat{\mathbf{G}} \dot{\hat{\mathbf{F}}}^T] \mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}} \dot{\hat{\mathbf{F}}}^T) \hat{\mathbf{G}}. \quad (2.84)$$

Wskaźnik r przy symbolu operatora *div* oznacza różniczkowanie względem współrzędnych ξ . Współczynnik $k' = k\hat{\delta} d\hat{A}/dA^0$ można także zapisać w postaci

$$k' = k \frac{\hat{\delta}}{\|\hat{\mathbf{G}}^0 \hat{\mathbf{n}}\|}, \quad (2.85)$$



Rys. 2.10

w której wykorzystano dla $t = 0$ analogiczną do (2.50) zależność

$$\mathbf{n}^{(pl)} dA = \mathbf{G}^t \hat{\mathbf{n}} d\hat{A} \quad (2.86)$$

oraz fakt, że wektor $\mathbf{n}^{(pl)}$ ma długość 1.

Warunek brzegowy na powierzchni wewnętrznej strefy, $\partial\Omega^{pl}$, stanowiącej jednocześnie podobszar powierzchni zewnętrznej płuc, $\partial\Omega$, opisuje równowagę sił na tej powierzchni:

$$\hat{\mathbf{T}}\mathbf{n} + \hat{\mathbf{T}}^{(pl)} \mathbf{n}^{(pl)} = 0 \quad (\mathbf{n} = -\mathbf{n}^{(pl)}). \quad (2.87)$$

Warunek ten, w odróżnieniu od równania równowagi (2.82), został zapisany w konfiguracji C^t , zatem tensor $\mathbf{T}^{(pl)}$ nie jest tożsamy ze zdefiniowanym wzorem (2.83) tensorem $\hat{\mathbf{T}}^{(pl)}$. Zachodzi między nimi związek

$$\mathbf{T}^{(pl)} = \hat{\mathbf{T}}^{(pl)} \hat{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G} = \hat{\mathbf{T}}^{(pl)} \mathbf{G}^{t-1}. \quad (2.88)$$

Podstawiając (2.86) można przekształcić warunek brzegowy (2.87) do postaci

$$\hat{\mathbf{T}}\mathbf{n} + \hat{\mathbf{T}}^{(pl)} \hat{\mathbf{n}} \frac{d\hat{A}}{dA} = 0, \quad (2.89)$$

o tyle wygodniejszej, że wyrugowano z niej człony, które w przypadku zerowej grubości strefy kontaktowej byłyby nieoznaczone.

Na powierzchni zewnętrznej strefy, $\partial\Omega^{ex}$, zakładamy warunek brzegowy w postaci

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^*. \quad (2.90)$$

W niektórych testach numerycznych omawianego algorytmu stosowana będzie prostsza postać warunków brzegowych, w której zakłada się w każdym punkcie powierzchni brzegowej $\partial\Omega$ znajomość albo sił \mathbf{Tn} albo przemieszczeń \mathbf{u} . Stąd, dla zachowania ogólności zapisu, będziemy dalej zakładać, że powierzchnia płuc składa się z trzech części:

$$\partial\Omega = \partial\Omega^\sigma \cup \partial\Omega^u \cup \partial\Omega^{pl}, \quad (2.91)$$

odpowiadających powyższym dwóm warunkom brzegowym oraz omówionemu wcześniej warunkowi kontaktowemu.

Warunki początkowe

Za konfigurację zerową, to jest taką, w której przemieszczenia i ciśnienia porowe są równe zeru, przyjmujemy konfigurację odpowiadającą zerowemu stanowi naprężeń w szkielecie tkankowym fazy stałej. Zakładamy, że znany jest kształt powierzchni $\partial\Omega^{ex}$ odpowiadający temu stanowi.

W chwili początkowej $\tau = 0$ konfiguracja ta będzie jednak wstępnie zdeformowana przez siły napięcia powierzchniowego oraz siły masowe wynikające z ciężaru płuc. Te pierwsze spowodują powstanie w mięszszu jednorodnego stanu naprężeń rozciągających i przy zadanym kształcie powierzchni zewnętrznej nie powinny teoretycznie zmienić stanu odkształcenia w ośrodku, ze względu jednak na przybliżone spełnienie warunków brzegowych na powierzchni $\partial\Omega$ spowodują one w omawianym modelu powstanie pola przemieszczeń o wartościach rzędu grubości strefy kontaktowej. Siły ciężkości powodują, szczególnie przy małych objętościach płuc, znaczną dystorsję mięszszu. Rozwiązanie zagadnienia mechaniki płuc musi się zatem rozpocząć od rozwiązania zagadnienia równowagi fazy stałej mięszszu w chwili początkowej (przy $p(\mathbf{x}) = 0$)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{g}^* = 0 & \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{Tn} = \mathbf{t}^* & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^\sigma, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^* & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^u, \\ \mathbf{Tn} + \dot{\mathbf{T}}^{(pl)} \mathbf{n} \frac{d\dot{A}}{dA} = 0 & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^{pl}, \\ \operatorname{div}^r \dot{\mathbf{T}}^{(pl)} = 0 & \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega^{pl}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^* & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^{ex}, \end{array} \right. \quad (2.92)$$

przy \mathbf{T} i $\dot{\mathbf{T}}^{(pl)}$ danych wzorami (2.53; $p = 0$) i (2.83). W celu zachowania spójności ze stosowanym w dalszej części pracy sformulowaniem przyrostowym, przekształcimy powyższy układ do postaci

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \dot{\mathbf{T}} + \dot{\mathbf{g}}^* = 0 & \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \dot{\mathbf{T}}\mathbf{n} = \dot{\mathbf{t}}^* & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^\sigma, \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^* & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^u, \\ \dot{\mathbf{T}}\mathbf{n} + \dot{\mathbf{T}}^{(pl)} \mathbf{n} \frac{d\dot{A}}{dA} = 0, & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^{pl}, \\ \operatorname{div}^r \dot{\mathbf{T}}^{(pl)} = 0 & \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega^{pl}, \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^* & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^{ex}, \end{array} \right. \quad (2.93)$$

przy $\dot{\mathbf{T}}$ i $\dot{\mathbf{T}}^{(pl)}$ danych wzorami (2.62; $p \equiv 0$) i (2.84) oraz przy założeniu, że siły wewnętrzne związane z napięciem powierzchniowym oraz obciążenie grawitacyjne narastają według jakiejś funkcji w pewnym przedziale czasowym poprzedzającym chwilę początkową analizy właściwego zagadnienia sprężonego.

Pole przemieszczeń otrzymane w wyniku scałkowania rozwiązania układu (2.93) w tym przedziale czasowym oraz zerowe pole ciśnień porowych stanowią warunki początkowe dla zapisanego poniżej układu równań różniczkowych zagadnienia (2.94).

Układ równań zagadnienia

Ostatecznie, układ równań z warunkami brzegowymi dla zagadnienia mechaniki miększu przybiera postać:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \dot{\mathbf{T}} + \dot{\mathbf{g}}^* = 0 & \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \dot{\mathbf{T}} \mathbf{n} = \dot{\mathbf{t}}^* & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^\sigma, \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^* & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^u, \\ \dot{\mathbf{T}} \mathbf{n} + \dot{\mathbf{T}}^{(pl)} \hat{\mathbf{n}} \frac{d\hat{A}}{dA} = 0, & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^{pl}, \\ \operatorname{div}^r \dot{\mathbf{T}}^{(pl)} = 0 & \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega^{pl}, \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^* & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^{ex}, \\ \operatorname{tr}[\mathbf{G}\dot{\mathbf{F}}^T] + \frac{1}{\bar{p}} \dot{p} \phi J + \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}} + \frac{1}{\bar{p}} \bar{\mathbf{w}}^T \nabla p = 0 & \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \bar{\mathbf{w}}^T \mathbf{n} = q^* & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^q, \\ \dot{p} = \dot{p}^* & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^p, \end{array} \right. \quad (2.94)$$

$$\partial\Omega^r = \partial\Omega^\sigma \cup \partial\Omega^u \cup \partial\Omega^{pl} = \partial\Omega^q \cup \partial\Omega^p,$$

gdzie

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{F}\mathbf{C} : [\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}] + \dot{\mathbf{F}}\mathbf{S}^{(s)} - \frac{p}{J} (\operatorname{tr}[\mathbf{G}\dot{\mathbf{F}}^T] \mathbf{I} - \mathbf{G}\dot{\mathbf{F}}^T) \mathbf{G} - \dot{p} \mathbf{G}, \quad (2.95)$$

$$\dot{\mathbf{T}}^{(pl)} = k' (2 \operatorname{tr}[\dot{\mathbf{G}}\dot{\mathbf{F}}^T] \mathbf{I} - \dot{\mathbf{G}}\dot{\mathbf{F}}^T) \dot{\mathbf{G}}, \quad (2.96)$$

$$\bar{\mathbf{w}} = -\phi^2 \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{J} \mathbf{G}^T \mathbf{G} \nabla p, \quad (2.97)$$

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{F}} = \nabla \dot{\mathbf{u}}, \quad (2.98)$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \nabla^r \dot{\mathbf{x}} = \nabla^r \dot{\mathbf{x}}^i + \nabla^r \dot{\mathbf{u}}, \quad \dot{\dot{\mathbf{F}}} = \nabla^r \dot{\dot{\mathbf{u}}}, \quad (2.99)$$

oraz

$$\mathbf{G} = J\mathbf{F}^{-T}; \quad \dot{\mathbf{G}} = \dot{J}\dot{\mathbf{F}}^{-T}. \quad (2.100)$$

Niewiadomymi w tym układzie są pierwsze pochodne po czasie pól przemieszczeń \dot{u} (na obszarze $\Omega \cup \Omega^{pl}$) i ciśnień porowych \dot{p} (na obszarze Ω). W przypadku pominięcia ściśliwości powietrza w czwartym równaniu znikają czony zawierające czynnik $1/\bar{p}$ przy pochodnych pola ciśnień \dot{p} i ∇p .

Warto zwrócić uwagę na fakt, że przy pominięciu sprzężeń mechanicznych między fazami ośrodka porowatego i założeniu, że $p(\mathbf{x}, \tau) \equiv 0$ układ (2.94) sprowadza się do postaci (2.93). Omawiane w dalszej części pracy przekształcenia i wyprowadzony numeryczny algorytm rozwiązywania są zatem słuszne również dla zagadnienia początkowej deformacji ośrodka.

Równania zagadnienia rozpisane w notacji wskaźnikowej we współrzędnych kartezjańskich oraz walcowych

Wyprowadzone powyżej równań zostaną rozpisane w notacji wskaźnikowej. Obowiązuje umowa sumacyjna, tzn. wskaźniki powtarzające się w iloczynach oznaczają ich sumowanie po całym zakresie wartości przyjmowanych przez dany wskaźnik. Zapis $a_{,i}$ oznacza różniczkowanie po i -tej współrzędnej przestrzennej w odpowiedniej dla danego kontekstu konfiguracji odniesienia, tzn. dla wielkości zdefiniowanych w obszarze Ω — w konfiguracji C^t , zaś dla wielkości zdefiniowanych w obszarze Ω^{pl} — w konfiguracji C^r .

Dla zagadnienia trójwymiarowego układ (2.94) można rozpisać w kartezjańskim układzie współrzędnych o bazie $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Równania (2.94–2.99) przybierają odpowiednio postać:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{T}_{ij,j} + \dot{g}_i^* = 0 & \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \dot{T}_{ij}n_j = \dot{t}_i^* & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^\sigma, \\ \dot{u}_i = \dot{u}_i^* & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^u, \\ \dot{T}_{ij}n_j + \dot{T}_{ij}^{(pl)}\hat{n}_j \frac{d\hat{A}}{dA} = 0 & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^{pl}, \\ \dot{T}_{ij}^{(pl)} = 0 & \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega^{pl}, \\ \dot{u}_i = \dot{u}_i^* & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^{\varepsilon\sigma}, \\ G_{ki}\dot{u}_{k,i} + \frac{1}{\bar{p}}\phi J\dot{p} + \bar{w}_{i,i} + \frac{1}{\bar{p}}p_{,i}\bar{w}_i = 0 & \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \bar{w}_in_i = q^* & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^q, \\ \dot{p} = \dot{p}^* & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^p. \end{array} \right. \quad (2.101)$$

$$\dot{T}_{ij} = F_{ik}C_{kjl m}F_{nl}\dot{u}_{n,m} + S_{ij}^{(s)}\dot{u}_{i,k} - \frac{p}{J}(G_{nm}G_{ij} - G_{im}G_{nj})\dot{u}_{n,m} - JF_{ji}^{-1}\dot{p}, \quad (2.102)$$

$$\dot{T}_{ij}^{(pl)} = k'(2\dot{G}_{nm}\dot{G}_{ij} - \dot{G}_{im}\dot{G}_{nj})\dot{u}_{n,m}, \quad (2.103)$$

$$\bar{w}_i = -\phi^2 \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{J} G_{ki} G_{kj} p_{,j}. \quad (2.104)$$

$$F_{ij} = \delta_{ij} + u_{i,j}, \quad \hat{F}_{ij} = \dot{u}_{i,j}, \quad (2.105)$$

$$\hat{F}_{ij} = x_{i,j}^t + u_{i,j}, \quad \dot{\hat{F}}_{ij} = \dot{u}_{i,j} \quad (2.106)$$

Wskaźniki i, j, k, l, m i n przyjmują wartości 1, 2 i 3.

Dla zagadnienia osiowosymetrycznego układ równań zostanie rozpisany we współrzędnych walcowych $\{r, \varphi, z\}$ (niezbędne zależności między pochodnymi przestrzennymi wektorów bazowych oraz dowolnych wielkości tensorowych w krzywoliniowym układzie współrzędnych podano w dodatku C). Pomijając wszystkie pochodne obwodowe i składowe obwodowe przemieszczeń i przepływów, i przyjmując umowę, że wskaźniki i, j, k, l, m i n przyjmują tylko wartości r i z , zapisujemy:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} \dot{T}_{rr,r} + \frac{1}{r}(\dot{T}_{rr} - \dot{T}_{\varphi\varphi}) + \dot{T}_{rz,z} = 0 \\ \dot{T}_{zr,r} + \frac{1}{r}\dot{T}_{zr} + \dot{T}_{zz,z} + \dot{g}_z^* = 0 \end{array} \\ \dot{T}_{ij}n_j = \dot{i}_i^* \\ \dot{u}_i = \dot{u}_i^* \\ \dot{T}_{ij}n_j + \dot{T}_{ij}^{(pl)}\hat{n}_j \frac{d\hat{A}}{dA} = 0 \\ \dot{T}_{rr,r} + \frac{1}{r}(\dot{T}_{rr}^{(pl)} - \dot{T}_{\varphi\varphi}^{(pl)}) + \dot{T}_{rz,z}^{(pl)} = 0 \\ \dot{T}_{zr,r} + \frac{1}{r}\dot{T}_{zr}^{(pl)} + \dot{T}_{zz,z}^{(pl)} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dla } x \in \Omega, \\ \text{dla } x \in \partial\Omega^\sigma, \\ \text{dla } x \in \partial\Omega^u, \\ \text{dla } x \in \partial\Omega^{pl}, \\ \text{dla } x \in \Omega^{pl}, \\ \text{dla } x \in \partial\Omega^{ex}, \\ \text{dla } x \in \Omega, \\ \text{dla } x \in \partial\Omega^q, \\ \text{dla } x \in \partial\Omega^p. \end{array} \quad (2.107)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{ki}\dot{u}_{k,i} + G_{\varphi\varphi}\frac{\dot{u}_r}{r} + \frac{1}{p}\phi J\dot{p} + \bar{w}_{i,i} + \frac{\bar{w}_r}{r} + \frac{1}{p}p_{,i}\bar{w}_i = 0 \\ \bar{w}_i n_i = q^* \\ \dot{p} = \dot{p}^* \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dla } x \in \Omega, \\ \text{dla } x \in \partial\Omega^q, \\ \text{dla } x \in \partial\Omega^p. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \dot{T}_{ij} = & F_{ik} \left(C_{kjlm} F_{nl} \dot{u}_{n,m} + C_{kj\varphi\varphi} F_{\varphi\varphi} \frac{\dot{u}_r}{r} \right) + S_{kj}^{(s)} \dot{u}_{i,k} \\ & - \frac{p}{J} (G_{nm} G_{ij} - G_{im} G_{nj}) \dot{u}_{n,m} - \frac{p}{J} G_{\varphi\varphi} G_{ij} \frac{\dot{u}_r}{r} - G_{ij} \dot{p}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} \dot{T}_{\varphi\varphi} = & F_{\varphi\varphi} \left(C_{\varphi\varphi lm} F_{nl} \dot{u}_{n,m} + C_{\varphi\varphi\varphi\varphi} F_{\varphi\varphi} \frac{\dot{u}_r}{r} \right) + S_{\varphi\varphi}^{(s)} \frac{\dot{u}_r}{r} \\ & - \frac{p}{J} G_{nm} G_{\varphi\varphi} \dot{u}_{n,m} - G_{\varphi\varphi} \dot{p}, \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\dot{T}_{ij}^{(pl)} = k'(2\hat{G}_{nm}\hat{G}_{ij} - \hat{G}_{im}\hat{G}_{nj})\dot{u}_{n,m} + 2k'\hat{G}_{\varphi\varphi}\hat{G}_{ij}\frac{\dot{u}_r}{r}, \quad (2.110)$$

$$\dot{T}_{\varphi\varphi}^{(pl)} = 2k'\hat{G}_{nm}\hat{G}_{\varphi\varphi}\dot{u}_{n,m}, \quad (2.111)$$

$$\bar{w}_i = -\phi^2 \frac{\lambda}{\mu} G_{ki} G_{kj} p_{,j}. \quad (2.112)$$

$$F_{ij} = \delta_{ij} + u_{i,j}, \quad F_{\varphi\varphi} = 1 + \frac{u_r}{r}, \quad F_{i\varphi} = F_{\varphi i} = 0, \quad (2.113)$$

$$\dot{F}_{ij} = \dot{u}_{i,j}, \quad \dot{F}_{\varphi\varphi} = \frac{\dot{u}_r}{r}, \quad \dot{F}_{i\varphi} = \dot{F}_{\varphi i} = 0, \quad (2.114)$$

$$\hat{F}_{ij} = x_{i,j}^t + u_{i,j}, \quad \hat{F}_{\varphi\varphi} = \frac{x_r^t + u_r}{\hat{r}}, \quad \hat{F}_{i\varphi} = \hat{F}_{\varphi i} = 0, \quad (2.115)$$

$$\dot{\hat{F}}_{ij} = \dot{u}_{i,j}, \quad \dot{\hat{F}}_{\varphi\varphi} = \frac{\dot{u}_r}{\hat{r}}, \quad \dot{\hat{F}}_{i\varphi} = \dot{\hat{F}}_{\varphi i} = 0. \quad (2.116)$$

Wskaźniki φ , r i z są numerami współrzędnych i nie podlegają sumowaniu.

Rozdział 3

Model numeryczny

Matematyczne sformułowanie zagadnienia mechaniki płuc obejmuje układ równań dla przepływu w dużych duktach powietrznych (2.39), w którym niewiadomymi są dyskretne wartości przepływów w poszczególnych odcinkach drzewa, oraz układ równań dla deformacji mięszu (2.94), w którym niewiadomymi są ciągle pola przemieszczeń i ciśnień porowych. Oba układy są układami nieliniowych równań różniczkowych sprzężonych ze sobą przez warunki brzegowe w punktach przejściowych, a także przez ukrytą zależność obu macierzy układu (2.39) od przemieszczeń mięszu, wpływających na deformację drzewa duktów powietrznych.

Utworzenie modelu numerycznego tego zagadnienia wymaga dokonania dyskretyzacji obu układów równań, zarówno w przestrzeni, jak w czasie. Celem tej operacji jest zastąpienie układu równań różniczkowych układem równań algebraicznych, którego niewiadomymi są dyskretne wartości poszukiwanych pól w określonych punktach przestrzeni i osi czasu, lub przyrosty tych wartości w określonych przedziałach czasowych.

3.1 Dyskretyzacja przestrzenna

Niewiadome układu równań (2.39), opisującego przepływ w dużych duktach powietrznych, są już zdyskretyzowane w przestrzeni. Dlatego w niniejszym podrozdziale będzie omawiany tylko układ równań (2.94–2.100).

Wprowadźmy zestawy funkcji kształtu, $\Phi(\mathbf{x})$ i $\Psi(\mathbf{x})$ opisujących w przybliżony sposób pola przemieszczeń i ciśnień w przestrzeni:

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, \tau) &= \Phi_{i\alpha}(\mathbf{x})q_\alpha^u(\tau), & \alpha &= 1, \dots, N^u, & \mathbf{x} &\in \Omega \cup \Omega^l, \\ p(\mathbf{x}, \tau) &= \Psi_\beta(\mathbf{x})q_\beta^p(\tau), & \beta &= 1, \dots, N^p, & \mathbf{x} &\in \Omega, \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdzie \mathbf{q}^u i \mathbf{q}^p są niewiadomymi wektorami dyskretnych parametrów o wymiarze odpowiednio przemieszczenia i ciśnienia, zaś N^u i N^p oznaczają odpowiednio długości tych wektorów. Wskaźnik i , podobnie, jak występujące w dalszej części tego podrozdziału wskaźniki j, k, l, m i n , przebiega dla zagadnienia trójwymiarowego przez zbiór wartości $\{1, 2, 3\}$, natomiast dla zagadnienia osiowosymetrycznego — zbiór wartości $\{r, z\}$. Zachodzą zależności:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= \Phi_{i\alpha} \dot{q}_\alpha^u, & u_{i,j} &= \Phi_{i\alpha} q_\alpha^u q_\beta^p, \\ \dot{p} &= \Psi_\beta \dot{q}_\beta^p, & p_j &= \Psi_\beta q_\beta^p. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Funkcje kształtu dobieramy w sposób właściwy dla metody elementów skończonych [52], to znaczy wybieramy pewien zbiór punktów węzłowych w obszarze Ω i zakładamy, że każda z funkcji przyjmuje wartość 1 w odpowiadającym jej punkcie węzłowym oraz zeruje się w pozostałych węzłach. Wektory q^u i q^p zawierają wówczas wartości poszukiwanych pól w poszczególnych węzłach.

Zakładamy, że przybliżone rozwiązanie (3.1) spełnia warunki brzegowe na $\partial\Omega^u$, $\partial\Omega^p$ i $\partial\Omega^{ex}$.

Po podstawieniu (3.2) do równań (2.101–2.106) otrzymujemy zdyskretyzowany układ równań dla przypadku trójwymiarowego:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{T}_{ij,j} + \dot{g}_i^* = -\vartheta_{1i} & \text{dla } x \in \Omega, \\ \dot{T}_{ij}n_j - \dot{t}_i^* = \vartheta_{2i} & \text{dla } x \in \partial\Omega^\sigma, \\ \dot{T}_{ij}n_j + \dot{T}_{ij}^{(pl)}\hat{n}_j \frac{d\hat{A}}{dA} = \vartheta_{3i} & \text{dla } x \in \partial\Omega^{pl}, \\ \dot{T}_{ij,j}^{(pl)} = \vartheta_{4i} & \text{dla } x \in \Omega^{pl}, \\ G_{ki}\Phi_{k\alpha,i}\dot{q}_\alpha^u + \frac{1}{p}\phi J\Psi_\beta\dot{q}_\beta^p + \bar{w}_{i,i} + \frac{1}{p}p_{,i}\bar{w}_i = -\vartheta_5 & \text{dla } x \in \Omega, \\ \bar{w}_i n_i - q^* = \vartheta_6 & \text{dla } x \in \partial\Omega^q, \end{array} \right. \quad (3.3)$$

gdzie:

$$\dot{T}_{ij} = \left[F_{ik}C_{kijm}F_{nl}\Phi_{n\alpha,m} + S_{kj}^{(s)}\Phi_{i\alpha,k} - \frac{p}{J}(G_{nm}G_{ij} - G_{im}G_{nj})\Phi_{n\alpha,m} \right] \dot{q}_\alpha^u - G_{ij}\Psi_\beta\dot{q}_\beta^p, \quad (3.4)$$

$$\dot{T}_{ij}^{(pl)} = k'(2\hat{G}_{nm}\hat{G}_{ij} - \hat{G}_{in}\hat{G}_{nj})\Phi_{n\alpha,m}\dot{q}_\alpha^u, \quad (3.5)$$

$$\bar{w}_i = -\phi^2 \frac{\lambda}{\mu J} G_{ki}G_{kj}\Psi_{\beta,j}\dot{q}_\beta^p, \quad (3.6)$$

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \Phi_{i\alpha,j}\dot{q}_\alpha^u, \quad \dot{F}_{ij} = \Phi_{i\alpha,j}\dot{q}_\alpha^u, \quad (3.7)$$

$$\hat{F}_{ij} = x_{i,j}^t + \Phi_{i\alpha,j}\dot{q}_\alpha^u, \quad \dot{\hat{F}}_{ij} = \Phi_{i\alpha,j}\dot{q}_\alpha^u. \quad (3.8)$$

Ze względu na zastąpienie rozwiązania ścisłego rozwiązaniem przybliżonym, po prawych stronach równań układu (3.3) pojawiają się w miejsce zer pola resztkowe ϑ .

Analogiczny układ równań dla przypadku osiowoosymetrycznego można otrzymać wstawiając (3.2) do równań (2.107–2.116):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{T}_{rr,r} + \frac{1}{r}(\dot{T}_{rr} - \dot{T}_{\varphi\varphi}) + \dot{T}_{rz,z} = \vartheta_{1r} \\ \dot{T}_{zr,r} + \frac{1}{r}\dot{T}_{zr} + \dot{T}_{zz,z} + \dot{g}_z^* = \vartheta_{1z} \\ \dot{T}_{ij}n_j - \dot{i}_i^* = \vartheta_{2i} \\ \dot{T}_{ij}n_j + \dot{T}_{ij}^{(pl)}\hat{n}_j \frac{d\hat{A}}{dA} = \vartheta_{3i} \\ \dot{T}_{rr,r}^{(pl)} + \frac{1}{\hat{r}}(\dot{T}_{rr}^{(pl)} - \dot{T}_{\varphi\varphi}^{(pl)}) + \dot{T}_{rz,z}^{(pl)} = 0 \\ \dot{T}_{zr,r}^{(pl)} + \frac{1}{\hat{r}}\dot{T}_{zr}^{(pl)} + \dot{T}_{zz,z}^{(pl)} = \vartheta_{4i} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^\sigma, \\ \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^{pl}, \\ \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega^{pl}, \end{array} \quad (3.9)$$

$$\left(G_{ki}\Phi_{k\alpha,i} + G_{\varphi\varphi} \frac{\Phi_{r\alpha}}{r} \right) \dot{q}_\alpha^u + \frac{1}{\bar{p}}\phi J\Psi_\beta \dot{q}_\beta^p \\ + \bar{w}_{i,i} + \frac{\bar{w}_r}{r} + \frac{1}{\bar{p}}\Psi_{\beta,i}q_\beta^p \bar{w}_i = -\vartheta_5 \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \bar{w}_i n_i - q^* = \vartheta_6 \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega^q,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \dot{T}_{ij} = & \left[F_{ik} \left(C_{kjlm} F_{nl} \Phi_{n\alpha,m} + C_{kj\varphi\varphi} F_{\varphi\varphi} \frac{\Phi_{r\alpha}}{r} \right) + S_{kj}^{(s)} \Phi_{i\alpha,k} \right. \\ & \left. - \frac{p}{J} (G_{nm} G_{ij} - G_{im} G_{nj}) \Phi_{n\alpha,m} - \frac{p}{J} G_{\varphi\varphi} G_{ij} \frac{\Phi_{r\alpha}}{r} \right] \dot{q}_\alpha^u - G_{ij} \Psi_\beta \dot{q}_\beta^p, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{T}_{\varphi\varphi} = & \left[F_{\varphi\varphi} \left(C_{\varphi\varphi lm} F_{nl} \Phi_{n\alpha,m} + C_{\varphi\varphi\varphi\varphi} F_{\varphi\varphi} \frac{\Phi_{r\alpha}}{r} \right) + S_{\varphi\varphi}^{(s)} \frac{\Phi_{r\alpha}}{r} \right. \\ & \left. - \frac{p}{J} G_{nm} G_{\varphi\varphi} \Phi_{n\alpha,m} \right] \dot{q}_\alpha^u - G_{\varphi\varphi} \Psi_\beta \dot{q}_\beta^p, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\dot{T}_{ij}^{(pl)} = \left[k'(2\hat{G}_{nm}\hat{G}_{ij} - \hat{G}_{im}\hat{G}_{nj})\Phi_{n\alpha,m} + 2k'\hat{G}_{\varphi\varphi}\hat{G}_{ij} \frac{\Phi_{r\alpha}}{\hat{r}} \right] \dot{q}_\alpha^u, \quad (3.12)$$

$$\dot{T}_{\varphi\varphi}^{(pl)} = 2k'\hat{G}_{nm}\hat{G}_{\varphi\varphi}\Phi_{r\alpha,m}\dot{q}_\alpha^u, \quad (3.13)$$

$$\bar{w}_i = -\phi^2 \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{J} G_{ki} G_{kj} \Psi_{\beta,j} \dot{q}_\beta^p, \quad (3.14)$$

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \Phi_{i\alpha,j} \dot{q}_\alpha^u, \quad F_{\varphi\varphi} = 1 + \frac{\Phi_{r\alpha}}{r} \dot{q}_\alpha^u, \quad F_{i\varphi} = F_{\varphi i} = 0, \quad (3.15)$$

$$\dot{F}_{ij} = \Phi_{i\alpha,j} \dot{q}_\alpha^u, \quad \dot{F}_{\varphi\varphi} = \frac{\Phi_{r\alpha}}{r} \dot{q}_\alpha^u, \quad \dot{F}_{i\varphi} = \dot{F}_{\varphi i} = 0, \quad (3.16)$$

$$\hat{F}_{ij} = x_{i,j}^t + \Phi_{i\alpha,j} \dot{q}_\alpha^u, \quad \hat{F}_{\varphi\varphi} = \frac{x_r^t}{\hat{r}} + \frac{\Phi_{r\alpha}}{\hat{r}} \dot{q}_\alpha^u, \quad \hat{F}_{i\varphi} = \hat{F}_{\varphi i} = 0, \quad (3.17)$$

$$\dot{\hat{F}}_{ij} = \Phi_{i\alpha,j} \dot{q}_\alpha^u, \quad \dot{\hat{F}}_{\varphi\varphi} = \frac{\Phi_{r\alpha}}{\hat{r}} \dot{q}_\alpha^u, \quad \dot{\hat{F}}_{i\varphi} = \dot{\hat{F}}_{\varphi i} = 0. \quad (3.18)$$

Do minimalizacji pól reszkowych stosujemy metodę Galerkiną, żądając spełnienia następujących warunków:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \vartheta_{1i} \Phi_{i\gamma} d\Omega + \int_{\partial\Omega^\sigma} \vartheta_{2i} \Phi_{i\gamma} d(\partial\Omega) + \int_{\partial\Omega^\mu} \vartheta_{3i} \Phi_{i\gamma} d(\partial\Omega) + \int_{\Omega^\mu} \vartheta_{4i} \Phi_{i\gamma} d\Omega = 0, \\ \int_{\Omega} \vartheta_5 \Psi_\eta d\Omega + \int_{\partial\Omega^\eta} \vartheta_6 \Psi_\eta d(\partial\Omega) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \gamma = 1, \dots, N^u, \\ \eta = 1, \dots, N^p. \end{array} \quad (3.19)$$

Po podstawieniu do powyższych równań wyrażań na pola resztkowe ϑ , (3.3) lub (3.9), i zastosowaniu twierdzenia Gaussa otrzymujemy układ nieliniowych równań różniczkowych na wektory \mathbf{q}^u i \mathbf{q}^p . Układ ten można zapisać w postaci macierzejowej

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{K}_{N^u \times N^u} & \mathbf{L}_{N^u \times N^p} \\ \mathbf{L}_{N^p \times N^u}^T & \mathbf{S}_{N^p \times N^p} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{q}}_{N^u \times 1}^u \\ \dot{\mathbf{q}}_{N^p \times 1}^p \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{N^u \times N^u} & \mathbf{0}_{N^u \times N^p} \\ \mathbf{0}_{N^p \times N^u} & \mathbf{H}_{N^p \times N^p} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_{N^u \times 1}^u \\ \mathbf{q}_{N^p \times 1}^p \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{f}}_{N^u \times 1}^* \\ (\mathbf{q}^* + \mathbf{h})_{N^p \times 1} \end{array} \right\}, \quad (3.20)$$

przy czym elementy macierzy \mathbf{K} , \mathbf{L} , \mathbf{S} , \mathbf{H} i wektora \mathbf{h} zależą od niewiadomych, natomiast elementy wektorów oznaczonych gwiazdką są funkcjami warunków brzegowych. Jawne postacie wszystkich tych macierzy i wektorów, zarówno dla przypadku trójwymiarowego, jak dla osiowej symetrii, zamieszczone są w dodatku D.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że macierze: sztywności fazy stałej \mathbf{K} , ściśliwości fazy płynnej \mathbf{S} oraz przepuszczalności \mathbf{H} są symetryczne. W przypadku pominięcia ściśliwości powietrza macierz \mathbf{S} oraz wektor \mathbf{h} znikają.

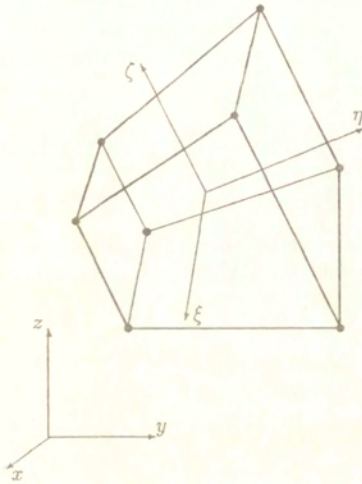
3.2 Rodzaje elementów skończonych

W niniejszej pracy do dyskretyzacji obszaru porowatego mięszu użyte zostały elementy izoparametryczne, opisane m. in. w [3, 52]. W zagadnieniu trójwymiarowym zastosowano elementy ośmiowęzłowe o funkcjach kształtu liniowych względem każdej z trzech współrzędnych lokalnych, natomiast w zagadnieniu osiowosymetrycznym — dwuwymiarowe elementy toroidalne o czterech lub ośmiu węzłach, w których funkcje kształtu są odpowiednio liniowe lub kwadratowe względem każdej współrzędnej lokalnej (rys. 3.1). Całkowanie po objętości lub powierzchni elementu wielkości występujących w wzorach (D.4–D.14) lub (D.18–D.28) sprowadza się do całkowania z odpowiednią wagą po objętości lub powierzchni właściwego dla danego typu elementu wzorcowego w pewnej fikcyjnej konfiguracji C^f . Element taki ma dla zagadnienia trójwymiarowego kształt sześcianu, a dla zagadnienia dwuwymiarowego — kwadratu. Współrzędne wierzchołków elementu wzorcowego przyjmują w układzie lokalnym wartości 1 lub -1 (rys. 3.1).

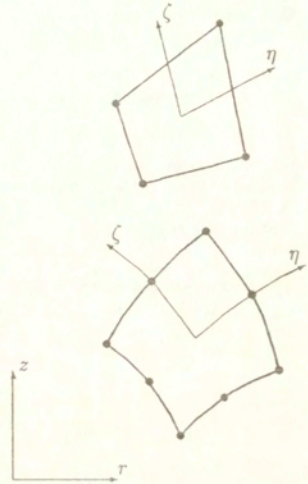
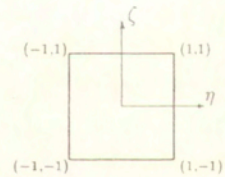
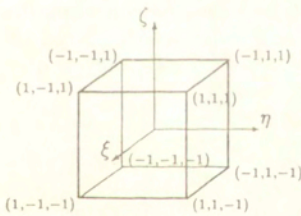
Wszystkie składowe wektorowego pola przemieszczeń oraz skalarnie pole ciśnienia opisywane są na obszarze elementu tymi samymi skalarnymi funkcjami kształtu $f_{iW}(\mathbf{x})$ (W oznacza numer węzła). Każdemu punktowi węzłowemu przyporządkowany jest jeden niewiadomy parametr typu ciśnieniowego i N^d parametrów typu przemieszczeniowego, gdzie N^d oznacza wymiar zagadnienia. Jeżeli przez N^w oznaczymy liczbę węzłów, to $N^p = N^w$ oraz $N^u = N^d N^w$ (3.1). Wskaźnik β definiujący numer elementu wektora \mathbf{q}^p jest równy numerowi węzła W , natomiast analogiczny wskaźnik α dla wektora \mathbf{q}^u można opisać parą liczb (n, W) , gdzie n jest numerem składowej przemieszczenia, opisywanej przez parametr q_{α} . Zachodzą wówczas związki:

$$\Phi_{i\alpha}(\mathbf{x}) = \delta_{in} f_{iW}(\mathbf{x}), \quad \Psi_\beta(\mathbf{x}) = f_{iW}(\mathbf{x}), \quad W = 1, \dots, N^w. \quad (3.21)$$

zagadnienie trójwymiarowe



zagadnienie dwuwymiarowe

konfiguracja rzeczywista, C^t konfiguracja wzorcowa, C^f

Rys. 3.1 Elementy skończone używane w dyskretyzacji przestrzennej

Do dyskretyzacji strefy kontaktowej użyto podobnych elementów izoparametrycznych, przyjmując dodatkowo założenie, że konfiguracja wzorcowa, w której całkowane są w rzeczywistości wszystkie macierze i wektory układu równań, pokrywa się z konfiguracją C^r (rys. 2.10). Przyjęto przy tym umowę, że kierunek prostopadły do powierzchni kontaktowych w konfiguracji wzorcowej odpowiada współrzędnej ζ . Współrzędna ta przyjmuje na powierzchni wewnętrznej $\partial\Omega^{pi}$ wartość -1 a na zewnętrznej $\partial\Omega^{ex}$ — wartość 1 ($\delta = 1$). Zakłada się, że punkty węzłowe leżą tylko na tych dwóch powierzchniach, tzn. nawet w elementach drugiego rzędu funkcje kształtu są liniowe względem ζ .

Występującą we wzorach dla zagadnienia osiowoosymetrycznego wielkość \hat{r} przyjęto jako równą jedności. Jej wartość nie ma zresztą istotnego znaczenia, można wykazać, że po podstawieniu zależności (2.115) do wzorów (D.18–D.28) wielkość ta zostanie wyrugowana.

3.3 Sformułowanie macierzowe dla zagadnienia sprzężonego

Zbierzmy razem wyprowadzone już układy równań różniczkowych w postaci macierzowej dla zagadnień: przepływu w dużych duktach powietrznych, (2.39), oraz mechaniki mięszsu, (3.20):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^u \\ \dot{\mathbf{q}}^p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^u \\ \mathbf{q}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{f}}^* \\ \mathbf{q}^* + \mathbf{h} \end{Bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}^r + \mathbf{B}\mathbf{q}^r = \mathbf{p}^* - p_0\mathbf{1}^*. \quad (3.23)$$

Oba układy równań są ze sobą sprzężone przez warunki brzegowe w punktach przejściowych, reprezentowane przez wektory \mathbf{q}^* i \mathbf{p}^* . Wektor \mathbf{q}^* zawiera wartości przepływów w tych punktach, które to wartości równe są określonym elementom wektora niewiadomych \mathbf{q}^r . Z kolei wektor \mathbf{p}^* zawiera wartości ciśnien porowych w punktach przejściowych, równe odpowiednim elementom wektora niewiadomych \mathbf{q}^p . Zachodzą równości:

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{J}\mathbf{q}^r, \quad \mathbf{p}^* = \mathbf{J}^T\mathbf{q}^p, \quad (3.24)$$

w których $\mathbf{J}_{N^p \times N^r}$ oznacza macierz przyporządkowującą numery elementów nierozgałęziających się w modelu drzewa duktów powietrznych globalnym numerom stopni swobody odpowiadającym ciśnieniom w punktach przejściowych w zdyskretyzowanym modelu mięszsu. Macierz ta składa się z zer i nielicznych jedynek.

Podstawiając zależności (3.24) do (3.22) i (3.23) otrzymujemy macierzowe sformułowanie dla całego zagadnienia mechaniki płuc:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^u \\ \dot{\mathbf{q}}^p \\ \dot{\mathbf{q}}^r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & -\mathbf{J} \\ 0 & -\mathbf{J}^T & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^u \\ \mathbf{q}^p \\ \mathbf{q}^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{f}}^* \\ \mathbf{h} \\ -p_0\mathbf{1}^* \end{Bmatrix}, \quad (3.25)$$

3.4 Dyskretyzacja czasowa

Wybieramy na osi czasu dyskretny zbiór punktów $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$, dzielący ją na przedziały o długości $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Zakładamy, że wewnątrz każdego przedziału poszukiwane rozwiązanie zmienia się liniowo, tzn. dla $t_{i-1} \leq \tau \leq t_i$ zachodzi:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^u(\tau) &= \mathbf{q}^u(t_{i-1}) + \frac{\tau - t_{i-1}}{\Delta t_i} [\mathbf{q}^u(t_i) - \mathbf{q}^u(t_{i-1})], \\ \mathbf{q}^p(\tau) &= \mathbf{q}^p(t_{i-1}) + \frac{\tau - t_{i-1}}{\Delta t_i} [\mathbf{q}^p(t_i) - \mathbf{q}^p(t_{i-1})], \\ \mathbf{q}^r(\tau) &= \mathbf{q}^r(t_{i-1}) + \frac{\tau - t_{i-1}}{\Delta t_i} [\mathbf{q}^r(t_i) - \mathbf{q}^r(t_{i-1})]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Rozważmy przedział czasowy $[t, t + \Delta t]$. Zakładamy, że znane są wartości \mathbf{q}^u , \mathbf{q}^p i \mathbf{q}^r w chwili t . W celu znalezienia rozwiązania układu (3.25) na tym przedziale, żądamy, aby był on ściśle spełniony w pewnej chwili $\tau = t + \alpha \Delta t$, gdzie α jest parametrem niejawności schematu całkowania i przyjmuje wartości z przedziału $[0, 1]$. Oznaczając przez $\Delta \mathbf{q}^u$, $\Delta \mathbf{q}^p$ i $\Delta \mathbf{q}^r$ przyrosty poszukiwanych wektorów na rozważanym przedziale czasowym, zapisujemy:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^u &= \mathbf{q}^u(t) + \alpha \Delta \mathbf{q}^u, \\ \mathbf{q}^p &= \mathbf{q}^p(t) + \alpha \Delta \mathbf{q}^p, \\ \mathbf{q}^r &= \mathbf{q}^r(t) + \alpha \Delta \mathbf{q}^r. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Układ równań (3.25) można teraz zapisać w formie przyrostowej:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{S} + \alpha \Delta t \mathbf{H} & -\alpha \Delta t \mathbf{J} \\ \mathbf{0} & -\alpha \Delta t \mathbf{J}^T & \mathbf{A} + \alpha \Delta t \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q}^u \\ \Delta \mathbf{q}^p \\ \Delta \mathbf{q}^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{f}^* \\ \Delta t [\mathbf{h} - \mathbf{H} \mathbf{q}^p(t) + \mathbf{J} \mathbf{q}^r(t)] \\ \Delta t [-\mathbf{p}_0 \mathbf{1}^* + \mathbf{J}^T \mathbf{q}^r(t) - \mathbf{B} \mathbf{q}^r(t)] \end{Bmatrix}. \quad (3.28)$$

Układ ten jest nieliniowy. Występujące w nim macierze zależą od wartości niewiadomych pól w chwili τ , a zatem, na podstawie (3.27), od przyrostów wektorów parametrów węzłowych (z wyjątkiem przypadku całkowania jawnego, $\alpha = 0$).

Wartości $\mathbf{q}^u(t)$, $\mathbf{q}^p(t)$ i $\mathbf{q}^r(t)$, powiększone o obliczone w wyniku rozwiązania układu (3.28) przyrosty, przyjmowane są następnie jako początkowe wartości parametrów węzłowych w następnym kroku czasowym. To założenie prowadzi do nieuniknionych błędów obliczeniowych spowodowanych kumulowaniem się błędów wynikających z przybliżonego charakteru rozwiązania $\{\Delta \mathbf{q}^u, \Delta \mathbf{q}^p, \Delta \mathbf{q}^r\}$ na każdym kroku. Nie ma na przykład żadnej gwarancji spełnienia na końcu każdego kroku równań równowagi (2.45) i (2.81), które po dyskretyzacji przestrzennej i uwzględnieniu warunków brzegowych przybierają postać

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi_{i_7, j} T_{ij} d\Omega + \int_{\Omega}^{\text{pl}} \Phi_{i_7, j} \hat{T}_{ij} d\Omega &= \int_{\partial\Omega^{\sigma}} \Phi_{i_7, t_i^*} d(\partial\Omega) + \int_{\Omega} \Phi_{i_7, g_i^*} d\Omega \\ &\quad \text{(we współrzędnych kartezjańskich),} \\ \int_{\Omega} \left(\Phi_{i_7, j} T_{ij} + \frac{\Phi_{i_7}}{r} T_{\varphi\varphi} \right) d\Omega + \int_{\Omega^{\text{pl}}} \left(\Phi_{i_7, j} \hat{T}_{ij} + \frac{\Phi_{i_7}}{r} \hat{T}_{\varphi\varphi} \right) d\Omega &= \int_{\partial\Omega^{\sigma}} \Phi_{i_7, t_i^*} d(\partial\Omega) + \int_{\Omega} \Phi_{i_7, g_i^*} d\Omega \\ &\quad \text{(we współrzędnych walcowych),} \end{aligned} \quad (3.29)$$

przy T_{ij} i \hat{T}_{ij} obliczonych ze wzorów (2.53) i (2.83). Omawiane błędy można ograniczyć przyjmując w równaniach (3.28)

$$\Delta f^* = f^*(t + \Delta t) - \int_{\Omega} \Phi_{i\gamma j} T_{ij}(t) d\Omega - \int_{\Omega^{pt}} \Phi_{i\gamma j} \hat{T}_{ij}(t) d\Omega$$

(we współrzędnych kartezjańskich),

$$\Delta f^* = f^*(t + \Delta t) - \int_{\Omega} \left(\Phi_{i\gamma j} T_{ij} + \frac{\Phi_{r\gamma}}{r} T_{\varphi\varphi} \right) d\Omega - \int_{\Omega^{pt}} \left(\Phi_{i\gamma j} \hat{T}_{ij} + \frac{\Phi_{r\gamma}}{\hat{r}} \hat{T}_{\varphi\varphi} \right) d\Omega$$

(we współrzędnych walcowych). (3.30)

zamiast prostego $\Delta f^* = f^*(t + \Delta t) - f^*(t)$. Przy takim sformułowaniu błędy odejścia od ścieżki równowagi są na bieżąco korygowane w kolejnych krokach czasowych.

3.5 Schemat rozwiązania iteracyjnego

Rozwiązanie układu równań (3.28) dla $\alpha \neq 0$ wymaga postępowania iteracyjnego. Procedura zastosowana w niniejszej pracy przebiega następująco:

1. Przyjęcie początkowych wartości predyktorów rozwiązania $\Delta q_{(pr)}^u$, $\Delta q_{(pr)}^p$ i $\Delta q_{(pr)}^r$, w postaci, na przykład, wektorów zerowych, lub rozwiązań z poprzedniego kroku czasowego,
2. Budowa wszystkich występujących w układzie (3.28) macierzy i wektorów dla chwili $\tau = t + \alpha \Delta t$,
3. Rozwiązanie układu równań (3.28) i wyznaczenie wektorów Δq^u , Δq^p i Δq^r ,
4. Sprawdzenie warunków zbieżności:

$$\begin{aligned} \|\Delta q_{(pr)}^u - \Delta q^u\| &< \varepsilon \|\Delta q^u\| \\ \|\Delta q_{(pr)}^p - \Delta q^p\| &< \varepsilon \|\Delta q^p\| \\ \|\Delta q_{(pr)}^r - \Delta q^r\| &< \varepsilon \|\Delta q^r\| \end{aligned}$$

gdzie, dla dowolnego wektora v , $\|v\| = \sqrt{v_\alpha v_\alpha}$,

5. Jeśli nie wszystkie warunki są spełnione, to obliczenie nowych predyktorów:

$$\begin{aligned} \Delta q_{(pr)}^u &= \gamma \Delta q^u + (1 - \gamma) \Delta q_{(pr)}^u \\ \Delta q_{(pr)}^p &= \gamma \Delta q^p + (1 - \gamma) \Delta q_{(pr)}^p \\ \Delta q_{(pr)}^r &= \gamma \Delta q^r + (1 - \gamma) \Delta q_{(pr)}^r \end{aligned}$$

i przejście do punktu 2.

6. W przeciwnym przypadku — koniec iteracji.

Dobór współczynnika γ decyduje o istnieniu i szybkości zbieżności procedury iteracyjnej. Jeżeli $\gamma = 1$, to nowy predyktor jest po prostu równy rozwiązaniu z poprzedniej iteracji. Dla $\gamma < 1$ mamy do czynienia z podrelaksacją, a dla $\gamma > 1$ — z nadrelaksacją.

Bezpośrednie rozwiązanie układu równań w punkcie 3. jest bardzo kosztowne numerycznie, z uwagi na duże rozmiary macierzy układu. Ponieważ macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} są

niesymetryczne, cała macierz układu staje się niesymetryczna. Nie ma ona również struktury pasmowej, chociaż tę cechę posiadają niektóre macierze składowe — \mathbf{K} , \mathbf{S} i \mathbf{H} . W tej sytuacji naturalne wydaje się rozwiązywanie tego układu drogą rozprzęgnięcia na mniejsze układy równań i zastosowanie procedury iteracyjnej, zapewniającej stopniowe uzyskanie zgodności między rozwiązaniami tych układów. Rozprzęgnięcie uzyskuje się przez wymnożenie macierzy sprzęgających \mathbf{L} , \mathbf{L}^T , $\alpha\Delta t\mathbf{J}$ i $\alpha\Delta t\mathbf{J}^T$ przez odpowiednie predyktory rozwiązań i przeniesienie wyników tych mnożeń na prawą stronę układu. Przybiera on wówczas postać:

$$\begin{cases} \mathbf{K}\Delta\mathbf{q}^u = \Delta\mathbf{f}^* - \mathbf{L}\Delta\mathbf{q}_{(pr')}^p \\ [\mathbf{S} + \alpha\Delta t\mathbf{H}]\Delta\mathbf{q}^p = \Delta t[\mathbf{h} - \mathbf{H}\mathbf{q}^p(t) + \mathbf{J}\mathbf{q}^r(t)] - \mathbf{L}^T\Delta\mathbf{q}_{(pr')}^u + \mathbf{J}\Delta\mathbf{q}_{(pr')}^r \\ [\mathbf{A} + \alpha\Delta t\mathbf{B}]\Delta\mathbf{q}^r = \Delta t[-p_0\mathbf{1}^* + \mathbf{J}^T\mathbf{q}^r(t) - \mathbf{B}\mathbf{q}^r(t)] + \mathbf{J}^T\Delta\mathbf{q}_{(pr')}^p \end{cases} \quad (3.31)$$

Rozwiązanie układu (3.31) dla konkretnych wartości występujących w nim macierzy i wektorów przebiega według następującej procedury:

1. Odwrócenie macierzy \mathbf{K} , $\mathbf{S} + \alpha\Delta t\mathbf{H}$ i $\mathbf{A} + \alpha\Delta t\mathbf{B}$,
2. Przyjęcie początkowych wartości predyktorów rozwiązania $\Delta\mathbf{q}_{(pr')}^u$, $\Delta\mathbf{q}_{(pr')}^p$ i $\Delta\mathbf{q}_{(pr')}^r$,
3. Wyznaczenie wektorów rozwiązania $\Delta\mathbf{q}^u$, $\Delta\mathbf{q}^p$ i $\Delta\mathbf{q}^r$ w wyniku podstawienia odwrotnego,
4. Sprawdzenie warunków zbieżności:

$$\begin{aligned} \|\Delta\mathbf{q}_{(pr')}^u - \Delta\mathbf{q}^u\| &< \varepsilon' \|\Delta\mathbf{q}^u\| \\ \|\Delta\mathbf{q}_{(pr')}^p - \Delta\mathbf{q}^p\| &< \varepsilon' \|\Delta\mathbf{q}^p\| \\ \|\Delta\mathbf{q}_{(pr')}^r - \Delta\mathbf{q}^r\| &< \varepsilon' \|\Delta\mathbf{q}^r\| \end{aligned}$$

5. Jeśli nie wszystkie warunki są spełnione, to obliczenie nowych predyktorów:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{q}_{(pr')}^u &= \gamma' \Delta\mathbf{q}^u + (1 - \gamma') \Delta\mathbf{q}_{(pr')}^u \\ \Delta\mathbf{q}_{(pr')}^p &= \gamma' \Delta\mathbf{q}^p + (1 - \gamma') \Delta\mathbf{q}_{(pr')}^p \\ \Delta\mathbf{q}_{(pr')}^r &= \gamma' \Delta\mathbf{q}^r + (1 - \gamma') \Delta\mathbf{q}_{(pr')}^r \end{aligned}$$

i przejście do punktu 3.

6. W przeciwnym przypadku — koniec iteracji.

Procedura rozprzęgnięcia nie musi być zastosowana do wszystkich trzech układów jednocześnie. Możliwe są także wersje, w których na prawą stronę układu przenieszone są tylko macierze \mathbf{L} i \mathbf{L}^T , lub tylko $\alpha\Delta t\mathbf{J}$ i $\alpha\Delta t\mathbf{J}^T$. W obliczeniach niniejszej pracy korzystano głównie z tej drugiej możliwości, ze względu na problemy z uzyskaniem zadowalającej zbieżności procedury iteracyjnej w przypadku rozprzęgnięcia pierwszych dwóch układów (3.31).

Rozdział 4

Wyniki testów numerycznych

Przedstawiony w poprzednim rozdziale algorytm numeryczny został zaimplementowany w programie komputerowym. Program ten bazuje na opracowanym w Zakładzie Teorii Konstrukcji Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN programie NANZAM, służącym do nieliniowej analizy dwu- i trójwymiarowych zagadnień mechaniki. Kod źródłowy napisany został w języku FORTRAN i liczy w ostatecznej wersji 5450 linii. Obliczenia przeprowadzono na komputerach typu Sparc-2 firmy SUN w IPPT PAN oraz Risc-6000 firmy IBM w Instytucie Mechaniki na Politechnice w Darmstadt (RFN). Oba komputery dysponują pamięcią operacyjną 16MB i pracują pod systemem operacyjnym UNIX. Podczas obliczeń posługiwano się zapisem liczb rzeczywistych w podwójnej precyzji.

4.1 Deformacja i filtracja w silnie odkształcalnym ośrodku porowatym

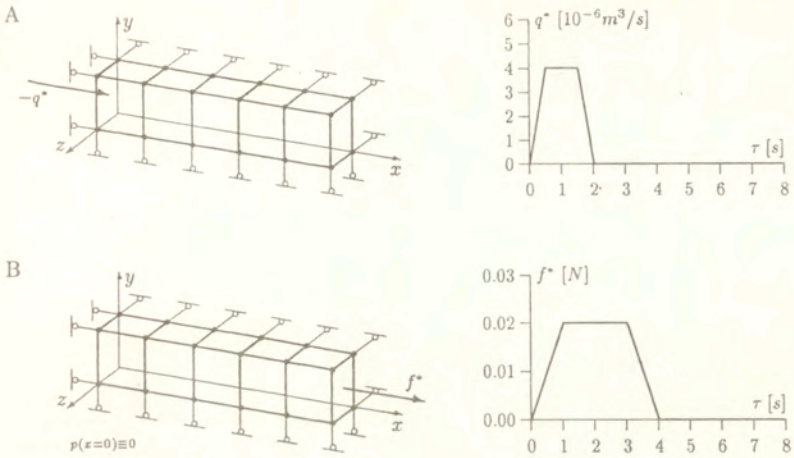
W omawianym prostym przykładzie badano zachowanie się prostopadłościennego wycinka dwufazowego ośrodka porowatego o długości $l = 5$ cm i przekroju kwadratowym o boku 1 cm pod dwoma różnymi rodzajami obciążenia. Model podzielono na 5 sześciennych elementów o liniowych funkcjach kształtu. Dyskretyzacja przestrzenna oraz sposób utwierdzenia i obciążenia przedstawione są na rys. 4.1. Założono ponadto nieściśliwość fazy płynnej oraz nieprzepuszczalność powierzchni bocznej modelu z wyjątkiem ścianki $x = 0$.

Przyjęto prosty model konstytutywny liniowej hipersprężystości, z funkcją energii odkształcenia w postaci

$$W = \frac{E}{1 + \nu} \left(\frac{1}{2} \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} J_1^2 - J_2 \right). \quad (4.1)$$

Stale materiałowe dobrano tak, aby były podobnego rzędu wielkości, co odpowiednie parametry rzeczywistego mięszu płucnego. Przyjęto:

$$\begin{aligned} \text{moduł Younga,} & \quad E = 300 \text{ Pa,} \\ \text{współczynnik Poissona,} & \quad \nu = 0.2, \\ \text{przepuszczalność,} & \quad \lambda = 10^{-5} \frac{\text{m}^4}{\text{Ns}}, \\ \text{porowatość,} & \quad \phi = 1. \end{aligned}$$

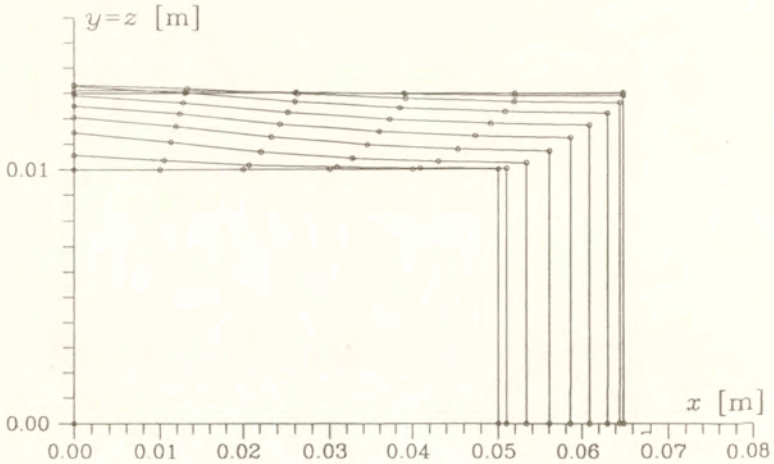


Rys. 4.1 Dyskretyzacja przestrzenna i warunki brzegowe w teście na deformację i filtrację w silnie odkształcalnym ośrodku porowatym, A — obciążenie zadane przepływem przez ściankę $x = x^0 = 0$, B — obciążenie ścianki $x(x^0 = l)$ zadana siłą przy swobodnej filtracji przez ściankę $x = x^0 = 0$.

Opisany powyżej zdyskretyzowany model obciążano na dwa sposoby. W pierwszym z nich faza płynna jest pompowana do wnętrza ośrodka przez ściankę $x = 0$. Wydatek objętościowy przepływu w funkcji czasu $q^*(\tau)$ jest zadany i rozłożony równomiernie na powierzchni tej ścianki. W drugim przypadku model jest rozciągany w kierunku x przez siłę o zadanych wartościach $f^*(\tau)$, przyłożoną do ścianki o początkowej współrzędnej $x^0 = l$ i także równomiernie rozłożoną na jej powierzchni. W obu przypadkach przebieg obciążenia w czasie ma charakter trapezoidalny i przedstawiony jest na rys. 4.1. Długość kroku czasowego Δt dobrano tak, aby faza narastania obciążenia od zera do wartości maksymalnej była podzielona na 10 kroków, zatem, dla obu przypadków założono odpowiednio wartości 0.05 s i 0.1 s. Wartości parametru niejawności całkowania po czasie α oraz parametru relaksacji γ przyjęto jako równe 1.

Na rys. 4.2 przedstawiono deformację modelu w kolejnych fazach obciążenia dla przypadku A. Widoczna jest wyraźna nierównomierność odkształceń w zależności od odległości od źródła fazy płynnej, wynikająca ze znacznych spadków ciśnienia wzdłuż długości modelu. Wykresy $p(x^0)$ na końcach poszczególnych kroków czasowych przedstawione są na rys. 4.3A.

Rys. 4.3B. przedstawia analogiczne wykresy dla przypadku obciążenia siłą rozciągającą. Ponieważ faza stała jest ściśliwa w skali makro (liczba Poissona $\nu = 0.2$) obciążenie tego rodzaju zwiększa objętość ośrodka. Z uwagi na nieściśliwość obu faz w skali mikro taka zmiana objętości musi być sprzężona z przepływem fazy płynnej do ośrodka i powstaniem w jego wnętrzu podciśnienia o ekstremalnym gradiencie w przekroju $x = 0$ (źródło fazy płynnej) i o ekstremalnej wartości w punkcie najbardziej oddalonym od tego przekroju. W fazie ustalonego obciążenia ($1 < \tau < 3$ s) ciśnienia w punktach modelu w dużym stopniu wyrównują się, zaś w fazie odciążania następuje zmniejszenie objętości modelu, co wiąże się

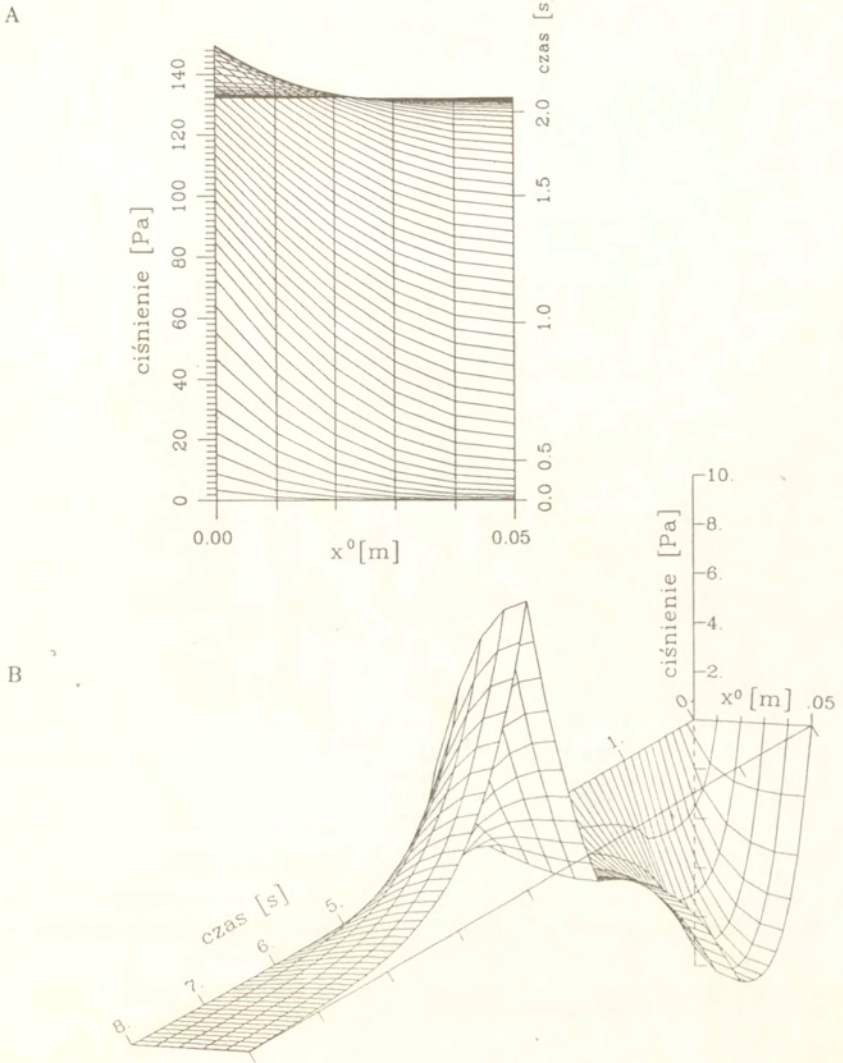


Rys. 4.2 Deformacja przekroju $y = 0$ (lub $z = 0$) modelu przedstawionego na rys. 4.1 w wyniku obciążenia przepływem (przypadek A). Przedstawiono obrys początkowy (prostokąt o wymiarach 0.05×0.01 m) i kolejne obrysy w odstępach czasowych 0.25 s. Ze względu na czytelność rysunku wymiar poprzeczny przeskalowano w stosunku trzykrotnym.

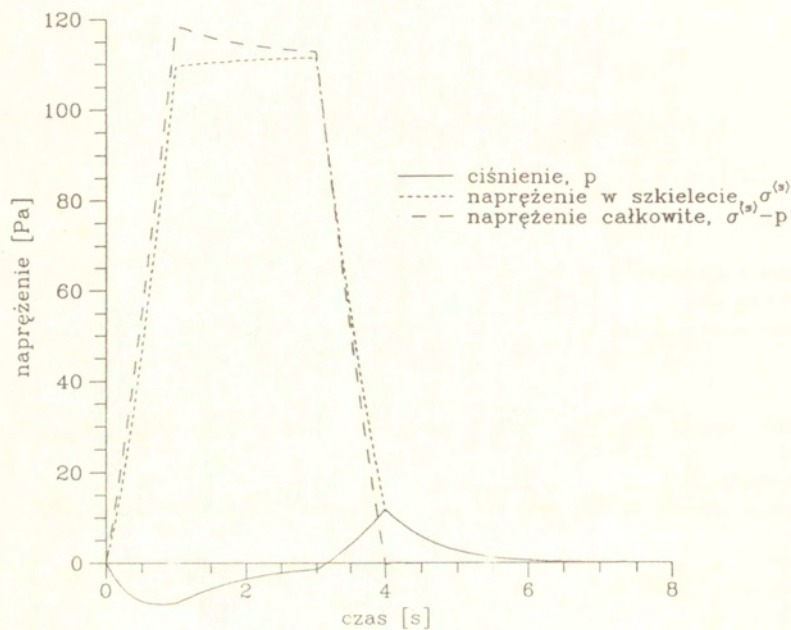
z wpływem fazy płynnej na zewnątrz i powstaniem nadciśnienia w jego wnętrzu. Warto zwrócić uwagę na wyraźną różnicę w kształcie krzywych opisujących spadek ciśnienia w dowolnym punkcie ośrodka w fazie obciążania i jego wzrost w fazie obciążania. Widoczna jest ona również na rys. 4.4 (linia ciągła) oraz 4.5 i 4.6. W miarę wzrostu siły obciążającej spadek wartości ciśnienia jest coraz mniejszy, a w końcowej fazie obciążania ($0.7 < \tau < 1$ s) zaczyna ono nawet nieznacznie wzrastać. W fazie odciążania obserwuje się zjawisko odwrotne — w miarę upływu czasu przyrost ciśnienia jest szybszy. Efekty te związane są z występowaniem dużych deformacji i towarzyszących im zmian sztywności ośrodka. W końcowej fazie obciążania i w początkowej fazie odciążania naprężenia w kierunku x osiągają rząd wielkości porównywalny z modulem Younga, zatem sztywność fazy stałej na rozciąganie w tym kierunku wyraźnie wzrasta (w sformułowaniu MES przejawia się to w zwiększonym udziale elementów macierzy K^e w globalnej macierzy sztywności modelu K , por. dodatek D). Ten sam przyrost obciążenia powoduje zatem wtedy mniejszy przyrost deformacji i mniejsze zaburzenie pola ciśnień porowych niż na początku procesu obciążania lub pod koniec procesu odciążania, gdy naprężenia są małe.

Rys. 4.4 przedstawia przebiegi wartości naprężenia i ciśnienia porowego w przekroju $x^0 = l$. Udział naprężeń w fazie płynnej (tj. ciśnienia porowego za znakiem „-”) w przenoszeniu obciążenia zewnętrznego nie przekracza 10%. Ekstremalne wartości bezwzględne ciśnienia wzrastają jednak wraz ze wzrostem szybkości zmian obciążenia (rys. 4.5).

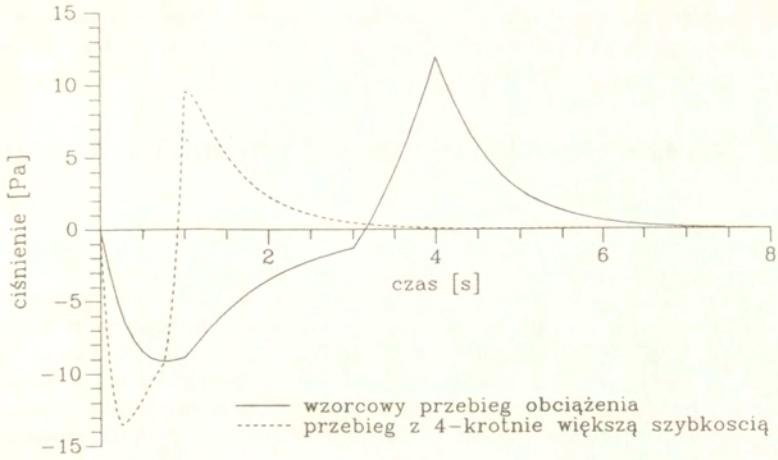
Rys. 4.6 ilustruje wrażliwość otrzymanego rozwiązania na dobór parametrów dyskretyzacji czasowej. Pokazano ją na przykładzie przebiegu ciśnienia w 1/5 początkowej długości modelu, gdyż tu rozrzut wyników dla różnych wartości parametrów był najwyraź-



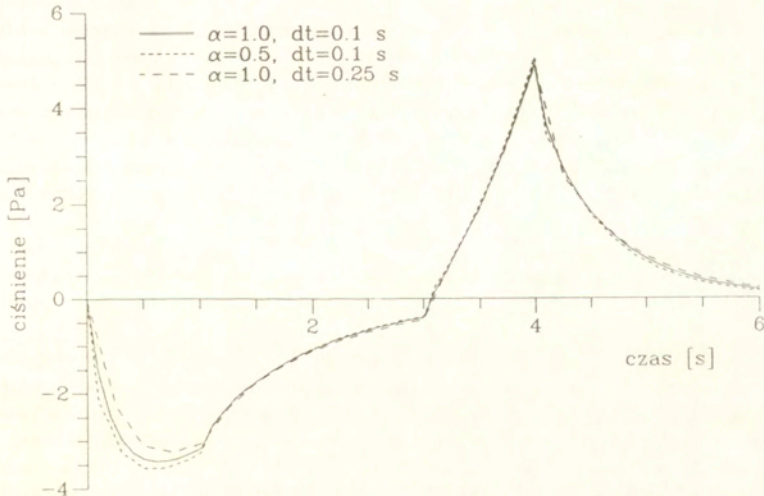
Rys. 4.3 Rozkłady ciśnienia wzdłuż długości modelu w poszczególnych krokach czasowych (przedstawione w konfiguracji początkowej, tj. w funkcji współrzędnej x^0). A — zadany przepływ, B — zadana siła rozciągająca. Ciśnienie mierzone jest na krawędzi o początkowych współrzędnych $y^0 = z^0 = 0.01$ m.



Rys. 4.4 Porównanie wartości ciśnienia porowego, makroskopowego naprężenia Cauchy'ego w szkielecie (fazie stałej) i sumarycznego naprężenia w ośrodku, zmierzonych w węzle o początkowych współrzędnych $(x^0, y^0, z^0) = (0.05, 0.01, 0.01)$ dla przypadku obciążenia zadaną siłą rozciągającą.



Rys. 4.5 Przebiegi wartości ciśnienia porowego w węźle o początkowych współrzędnych $(x^0, y^0, z^0) = (0.05, 0.01, 0.01)$ dla przypadku obciążenia zadaną siłą rozciągającą, realizowanego z różnymi szybkościami.



Rys. 4.6 Przebiegi wartości ciśnienia porowego w węźle o początkowych współrzędnych $(x^0, y^0, z^0) = (0.01, 0.01, 0.01)$ (w $1/5$ długości modelu) dla przypadku obciążenia zadaną siłą rozciągającą, przy różnych wartościach parametrów całkowania numerycznego po czasie.

niej widoczny. Z przedstawionych wykresów widać m. in., że krzywa uzyskana dla $\alpha = 1$ jest względnie gładka w porównaniu z tą dla $\alpha = 0.5$, co sugeruje stosowanie w zagadnieniu sprzężonym mechaniki mięszu schematu całkowania niejawnego z tą pierwszą wartością omawianego parametru

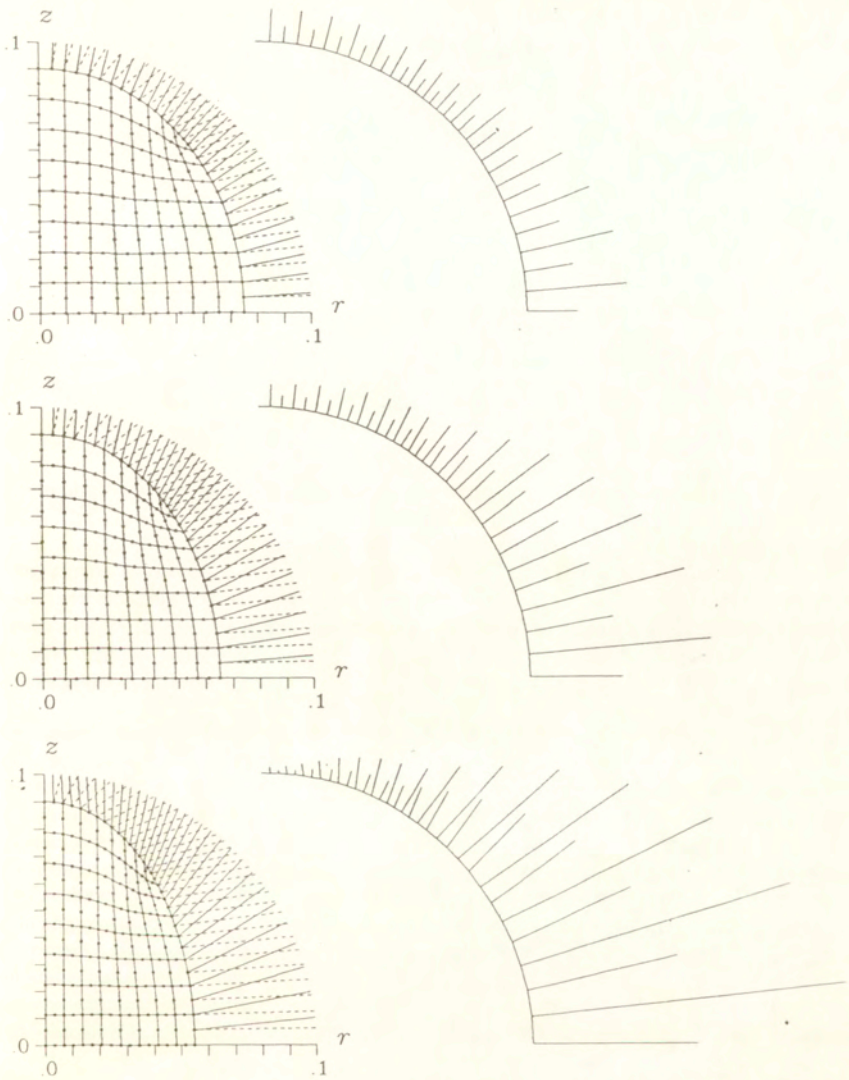
4.2 Deformacja z kontaktowym warunkiem brzegowym

Celem omawianych w niniejszym podrozdziale przykładów numerycznych jest przetestowanie przedstawionych w podrozdziale 2.4.2 elementów kontaktowych służących do implementacji w programie MES warunku brzegowego na beztarciowy poślizg po zadanej deformującej się powierzchni. Do testów wybrano model w kształcie osiowosymetrycznej elipsoidy o kilku różnych zestawach wartości wymiarów początkowych r i h , deformującej się tak, aby w konfiguracji końcowej osiągnąć kształt kuli o promieniu $R = 0.1$ m. Zakłada się przy tym, że na powierzchni modelu nie występują naprężenia styczne. Wymuszeniem w tym procesie jest zadany w sposób arbitralny ruch węzłów należących do zewnętrznej powierzchni strefy kontaktowej.

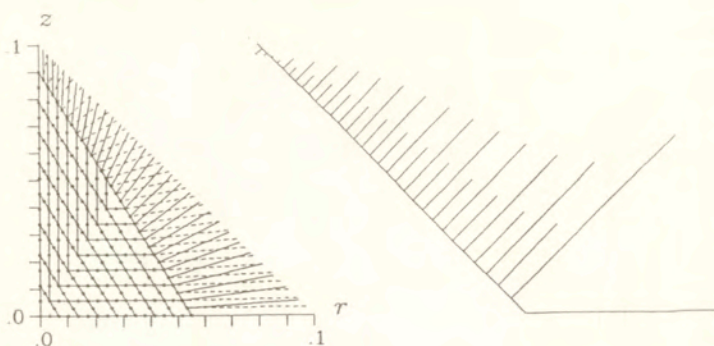
Przyjęto, że materiał, z którego zbudowany jest model, jest jednofazowym ośrodkiem hipersprężystym, o funkcji energii odkształcenia danej wzorem (4.1) i o wartościach stałych materiałowych $E = 500$ Pa i $\nu = 0.3$. Współczynnik k dla strefy kontaktowej przyjęto jako równy 10^7 Pa/m, co oznacza, że przy naprężeniach normalnych na brzegu rzędu E grubość tej strefy nie powinna przekraczać $0.001R$. Do dyskretyzacji przestrzennej użyto toroidalnych elementów skończonych o ośmiu węzłach. Z uwagi na symetrię modelowano tylko połówkę elipsoidy, zadając odpowiednie warunki brzegowe na powierzchni $z = 0$.

Na rys. 4.7 przedstawiono wyniki testów dla trzech różnych geometrii początkowych. Wysokość połowki modelu wynosi we wszystkich przypadkach $0.9R$, natomiast jego promień odpowiednio $0.75R$, $0.65R$ i $0.55R$. Po lewej stronie rysunku przedstawiono podział na elementy skończone w konfiguracji początkowej oraz końcowe wektory przemieszczeń węzłów brzegowych. Linia przerywaną oznaczono zadane przemieszczenia zewnętrznej powierzchni warstwy kontaktowej, natomiast linią ciągłą — przemieszczenia powierzchni wewnętrznej, odpowiadającej fizycznej powierzchni brzegowej elipsoidy. Po prawej stronie rysunku wykreślono końcowy kształt tej ostatniej powierzchni i reakcje w należących do niej węzłach. Reakcje w modelu osiowosymetrycznym rozumiane są jako wydatki sił działających na okręgach odpowiadających węzłom odniesione do jednostki długości obwodu.

Analizując kierunki wektorów reakcji, które teoretycznie powinny być prostopadłe do powierzchni brzegowej, można wnioskować, że dokładność stosowanego modelu numerycznego jest zupełnie dobra w pierwszym z trzech omawianych testów, natomiast maleje wraz ze wzrostem względnych przemieszczeń obu powierzchni warstwy kontaktowej. Nie bez znaczenia pozostaje tu ponadto krzywizna tych powierzchni oraz założona wartość współczynnika sztywności warstwy k . W celu zbadania wpływu tej pierwszej wielkości na niedokładność modelu numerycznego zagadnienia przeprowadzono dodatkowy test, w którym zamiast elipsoidy deformowano stożek o początkowych wymiarach $h^0 = 0.9R$ i $r^0 = 0.55R$, którego tworzące mają zerową krzywiznę. Stożek ten w końcowej konfiguracji przybierał kształt również stożka, ale o wymiarach $h = r = R$. Z wyników przedstawionych na rys. 4.8 widać, że błąd spełnienia warunku prostopadłości reakcji do powierzchni brze-



Rys. 4.7 Przemieszczenia i reakcje w węzłach brzegowych elipsydy dla trzech różnych geometrii początkowych.



Rys. 4.8 Przemieszczenia i reakcje w węzłach brzegowych stożka.

gowej jest nieznaczny w zestawieniu z analogicznymi wynikami dla elipsoidy o podobnym stopniu deformacji.

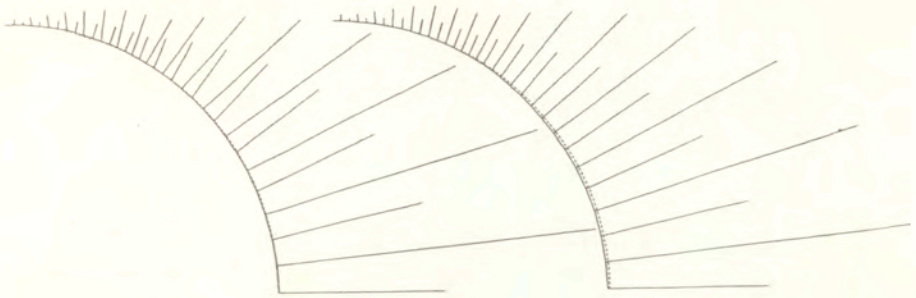
Rys. 4.9 przedstawia porównanie wyników dla $r^0 = 0.55R$ przy dwóch różniących się o rząd wielkości wartościach k . Dziesięciokrotne zmniejszenie tej wielkości znacznie poprawia dokładność rozwiązania jeśli chodzi o warunek zerowego tarcia, w widoczny sposób powoduje jednak zwiększenie grubości warstwy kontaktowej (do ok. $0.012R$), a zatem zmniejszenie dokładności odwzorowania w modelu zadanej powierzchni brzojowej.

Na rys. 4.10 przedstawiono wpływ gęstości siatki MES i rodzaju użytych elementów na niedokładność spełnienia warunku prostokątowości reakcji na powierzchni brzojowej do tej powierzchni. Z przedstawionych wykresów można wywnioskować m. in., że zastąpienie elementów drugiego rzędu elementami liniowymi przy jednoczesnym zagęszczeniu siatki w stosunku 2 w każdym kierunku powoduje wyraźne pogorszenie dokładności rozwiązania. Zwraca również uwagę fakt, że dokładność rozwiązania jest lepsza w obszarze, w którym przyjęta siatka elementów skończonych ma nieco mniejszą długość boku. Nie wydaje się, aby fakt ten miał związek z konkretną geometrią siatki w rejonie rozważanego fragmentu brzoju (chodzi tu o kształt elementów skończonych, a w szczególności o obecność elementu o kącie wierzchołkowym równym 180 stopni). Przeczy temu przedstawiona na omawianym rysunku krzywa wykreślona linią przerywaną i oznaczona trójkątami, opisująca rozwiązanie dla siatki nieco zmienionej w sąsiedztwie powierzchni brzojowej. Krzywa ta ma podobny przebieg do krzywej oznaczonej kwadratami.

Reasumując, zaproponowany w niniejszej pracy sposób realizacji w modelu MES kontaktowego warunku brzojowego daje zadowalające wyniki, z wyraźnym zastrzeżeniem, że jego zakres stosowności jest ograniczony. Duże względne poślizgi kontaktujących się powierzchni przy ich jednoczesnym zakrzywieniu zmniejszają dokładność przedstawionego modelu. W konkretnym zagadnieniu mechaniki płuc modelowanie warunków brzojowych w omówiony sposób daje jednak dobre wyniki, co zostanie pokazane w dalszych testach.

$$k = 10^7 \text{ Pa/m}$$

$$k = 10^6 \text{ Pa/m}$$

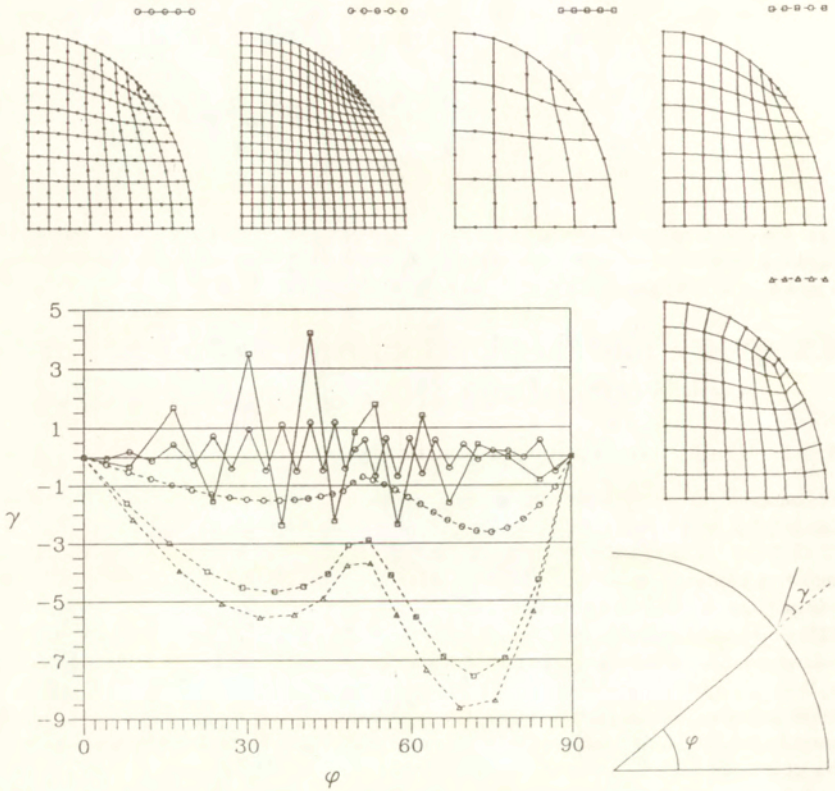


Rys. 4.9 Końcowy kształt powierzchni brzegowej i reakcje dla $r^0 = 0.55R$ przy różnych wartościach współczynnika k . Linia przerywana przedstawia teoretyczny kształt powierzchni brzegowej, odwzorowany w modelu przez węzły zewnętrznej powierzchni strefy kontaktowej.

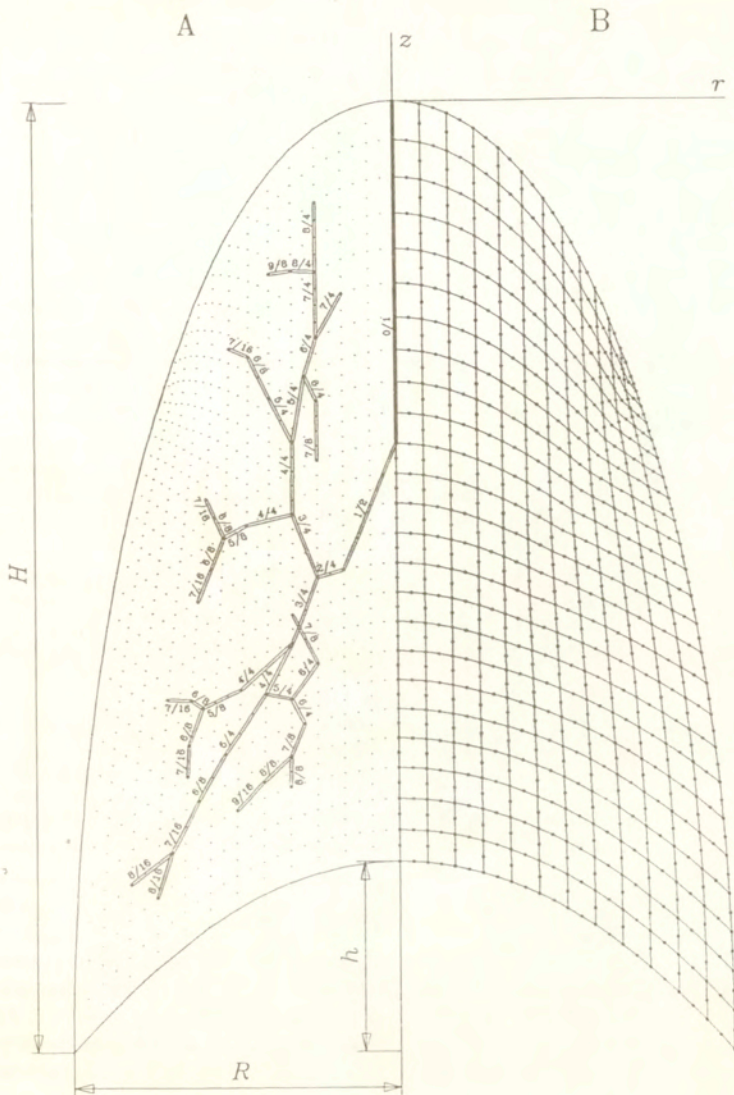
4.3 Testy modelu płuc ludzkich dla różnych przypadków obciążenia

4.3.1 Dane materiałowe i geometryczne

W omawianych przykładach zastosowano model konstytutywny opisany w podrozdziale 2.2.2, zdefiniowany wzorami (2.6), (2.7) z wartościami stałych jak na rys. 2.3 oraz (2.17–2.22). Wobec braku dokładnych danych dotyczących konfiguracji odpowiadającej zerowym naprężeniom w błonach tkankowych przyjęto, że stan ten ma miejsce wtedy, gdy pojemność miąższu (rozumiana jako objętość przestrzeni porowych, $V\phi$) wynosi ok. 23% pojemności maksymalnej, oznaczanej symbolem TLC (ang. *total lung capacity*). Do takiego wniosku skłania analiza przebiegu krzywej $p - V$ przedstawionej przez Westa [47, s. 176], gdzie zerowe ciśnienie odpowiada wprawdzie pojemności 19% TLC , ale ponieważ część naprężeń rozciągających przenoszona jest przez napięcie powierzchniowe, należy wnioskować, że błony tkankowe są w tej konfiguracji poddane nieznacznemu ścisnaniu. Na podstawie danych przedstawionych w cytowanej powyżej książce (s. 172) przyjęto ponadto, że czynnościowa pojemność zalegająca, czyli minimalna pojemność płuc osiągnięta w normalnym, naturalnym cyklu oddechowym, oznaczana symbolem FRC (ang. *functional residual capacity*), wynosi dla pozycji wyprostowanej 50.5% TLC . Przy tej pojemności, zgodnie z wyliczeniami Westa i in. [48], średnia gęstość miąższu wynosi 0.23 g/cm^3 , zatem przy założeniu, że gęstość samych tkanek w skali mikro równa jest 1 g/cm^3 można przyjąć, że objętość fazy stałej w miąższu wynosi 15.1% TLC . Dla uproszczenia przyjęto, że gęstość miąższu i udział objętościowy tkanek w konfiguracji odniesienia są jednakowe w całej objętości płuc (w rzeczywistości w dolnej części płuc gromadzi się więcej krwi, zatem gęstość miąższu jest większa, niż w górnych rejonach). W tabelicy 4.1 zestawiono wartości różnych wielkości opisujących stan deformacji miąższu w stosunku do konfiguracji odniesienia dla kilku charakterystycznych wartości pojemności płuc (są to wielkości średnie, odpowiadające jednorodnemu stanowi odkształcenia i naprężenia).



Rys. 4.10 Odchyłki kierunku wektorów reakcji w węłach brzegowych od kierunku normalnego do powierzchni brzegowej w tych punktach, dla różnych siatek elementów skończonych. Kąty na osiach wykresu mierzone są w stopniach



Rys. 4.11 Geometria i podział na elementy skończone modelu płuc, używanego w testach numerycznych, A — drzewo dużych duktów powietrznych, B — miąższ płucny. Pary liczb przy elementach drzewa duktów oznaczają odpowiednio numer generacji i liczbę fizycznych duktów na obwodzie odpowiadającym elementowi.

pojemność, C	0.23 TLC ($\sigma^{(tts)} = 0$)	0.325 TLC	0.505 TLC (FRC)	0.75 TLC	TLC
objętość, $V = C + V^{(tts)}$	0.381 TLC	0.476 TLC	0.656 TLC	0.901 TLC	1.151 TLC
deformacja objętościowa, J	1.000	1.249	1.722	2.365	3.021
deformacja powierzchniowa, α	1.000	1.160	1.437	1.775	2.090
deformacja liniowa	1.000	1.077	1.199	1.332	1.446
wodkształcenie gł. Greena, E	0.000	0.080	0.219	0.388	0.545
porowatość, ϕ	0.604	0.683	0.770	0.832	0.869
gęstość, ρ [g/cm^3]	0.396	0.317	0.230	0.168	0.131

Tablica 4.1

nr generacji	średnica [mm]	pole przekroju [mm ²]	długość [mm]
0	18.0	254.5	120.
1	12.2	117.1	47.82
2	8.28	53.90	19.06
3	5.62	24.81	7.60
4	4.45	15.57	12.67
5	3.51	9.695	10.69
6	2.81	6.191	9.01
7	2.27	4.054	7.61
8	1.86	2.721	6.42
9	1.54	1.873	5.41

Tablica 4.2 Statystyczne dane morfometryczne dla pierwszych dziesięciu generacji duktów powietrznych płuc ludzkich przy pojemności 75% TLC i przy założeniu regularnych podziałów, tj. że każdy dukt n -tej generacji dzieli się na 2 dukty generacji $n + 1$. Na podst. [45].

Przyjęto dla uproszczenia, że płuca są bryłą osiowosymetryczną. Założono, że wewnętrzna powierzchnia klatki piersiowej ma kształt połówki elipsoidy o wysokości $H = 21$ cm (w konfiguracji odniesienia) i promieniu $R = 0.35H$, natomiast górna powierzchnia przepony ma kształt odwróconego wycinka paraboloidy o wysokości $h = 0.2H$ (rys. 4.11). Przyjęto, że w cyklu oddechowym obie powierzchnie deformują się przez jednokładność o środku w wierzchołku płuc. W konfiguracji odpowiadającej TLC wysokość płuc wynosi zatem ok. 30 cm.

Do modelowania obszaru płuc użyto ośmiowęzłowych elementów toroidalnych. Ponadto na powierzchni bocznej płuc zastosowano sześciowęzłowe elementy kontaktowe. Wartość stałej k dla strefy kontaktowej przyjęto jako 10^7 Pa/m. Podział na elementy przedstawiony jest na rys. 4.11B.

Podział na elementy drzewa dużych duktów powietrznych przedstawia rys. 4.11A. Jego geometrię przyjęto w sposób arbitralny, kierując się zasadą, że podczas deformacji, w której

kształt płuc się nie zmienia, oraz przy pominięciu efektów grawitacyjnych, rozkład ciśnienia w punktach miąższu leżących najdalej od punktów przejściowych (np. na brzegu lub na osi symetrii) powinien być możliwie najbardziej równomierny. Ciśnienie w tych punktach ma sens fizyczny ciśnienia w pęcherzykach miąższu. Pola przekrojów duktów poszczególnych generacji przyjęto na podstawie danych morfometrycznych Weibla [45], zestawionych w tabelicy 4.2. Z uwagi na uproszczony sposób modelowania drzewa, długości duktów w omawianym modelu różnią się wyraźnie od wyznaczonych w cytowanej publikacji.

Pozostałe dukty, o numerach generacji powyżej 8–10, modelowano jako przestrzenie porowe miąższu. Jego przepuszczalność oszacowano również na podstawie danych Weibla przyjmując, że dysypacja energii związana z efektami lepkości we wszystkich duktach i pęcherzykach zasilanych przez pewien konkretny dukt przepływem o wydatku objętościowym q powinna być równa dysypacji w kulistym wycinku ośrodka porowatego o objętości równej objętości tych duktów i pęcherzyków wraz ze szkieletem tkankowym, zasilanym takim samym przepływem o źródle w środku kuli. Oszacowanie to jest mało dokładne z dwóch powodów. Po pierwsze, rzeczywisty obszar zasilany przez dowolny dukt (dotyczy to zwłaszcza niskich numerów generacji) może mieć bardzo nieregularny kształt. Po drugie, teoretyczne rozwiązanie dla filtracji w trójwymiarowym ośrodku porowatym z punktowym źródłem fazy płynnej wykazuje, przy założeniu słuszności prawa Darcy, nieskończenie wielkie wartości spadku ciśnienia i dysypacji w sąsiedztwie źródła. Przyjęto zatem, że ów modelowy obszar kulisty jest zasilany poprzez współśrodkową powierzchnię sferyczną o średnicy równej średnicy zasilającego duktu. Jasne jest jednak, że przyjęcie innej wartości tej średnicy miałyby znaczny wpływ na wynik. Można jednak założyć, że obliczona w ten sposób wartość współczynnika przepuszczalności $\lambda \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4/\text{Ns}$ jest słuszna przynajmniej jeśli chodzi o rząd wielkości. (Powyższy wynik odpowiada pojemności 75% TLC ; w konfiguracji C^0 , zgodnie ze wzorem (2.29), $\lambda \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4/\text{Ns}$).

4.3.2 Model płuc obciążony własnym ciężarem

Celem niniejszych testów było zbadanie prawidłowości działania modelu numerycznego płuc w zakresie dużych deformacji postaciowych miąższu, występujących w rzeczywistych płucach jako skutek działania ciężaru własnego tkanek i krwi. W testach tych efekty sprzężeń mechanicznych nie były brane pod uwagę, miąższ traktowany jest jako materiał jednofazowy. Przeprowadzono je dla trzech różnych objętości płuc, odpowiadających pojemnościom 0.325, 0.505 i 0.975 TLC . Przed przyłożeniem obciążenia grawitacyjnego model płuc był rozciągnięty w sposób jednorodny¹ do zadanej objętości, przy czym panujący w nim stan naprężenia odpowiadał ekstremalnej ścieżce odciążania na wykresie $\gamma - \alpha$. Taki wybór początkowego stanu naprężenia wynika z faktu, że przy założonym modelu konstytutywnym ustalone pętle $\gamma - \alpha$ uzyskane po kilku cyklach obciążenia mają tendencję do sytuowania się w pobliżu ekstremalnej ścieżki odciążania, wydaje się zatem, że przyjęcie początkowego stanu naprężenia jako leżącego na tej krzywej zapewni dobre przybliżenie wartości naprężeń w następującym dalej procesie obciążania niezależnie od tego, jakiemu cyklowi odpowiadałby przebieg $\gamma - \alpha$ w tym procesie. Średnie naprężenie rozciągające w miąższu przyjmowało dla trzech badanych objętości odpowiednio wartości: 186, 477 i 1935 Pa z odchyłkami rzędu 1%. Następnie przykładano obciążenie grawitacyjne w 12 krokach,

¹Ścisłej biorąc, w sposób jednorodny została zdeformowana zewnętrzna powierzchnia strefy kontaktowej, podczas gdy wewnątrz miąższu, z uwagi na przybliżony charakter spełnienia warunków brzegowych, wystąpiły nieznaczne odkształcenia postaciowe

w których ciężar narastał proporcjonalnie do funkcji $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{\text{krök}}{12}\right)$. Ekstremalne wartości naprężeń rozciągających zmierzono na brzegu w punktach o rzędnej $r = 0$. Wynosiły one dla 0.325 *TLC* — 108 i 627 Pa, dla 0.505 *TLC* — 173 i 816 Pa, zaś dla 0.975 *TLC* — 1787 i 2183 Pa.

Dla porównania, West [47, s. 183] publikuje wyniki badań doświadczalnych, w których badano wartości podciśnienia w warstwie międzyopłucnowej, którego odpowiednikiem w modelu jest naprężenie normalne na brzegu płuc. Dla *FRC* (a więc 0.505 *TLC*) wartości zmierzone w analogicznych punktach wynoszą odpowiednio 49 i 735 Pa. Obie są zatem niższe, niż otrzymane w niniejszej pracy, co może jednak wynikać z niewielkich różnic w geometrii i własnościach mechanicznych badanych płuc a także w definicji wartości *FRC* (jest ona określona z dokładnością do kilku procent). Natomiast różnica między wartością maksymalną a minimalną w modelu numerycznym jest porównywalna z tą otrzymaną w eksperymencie. West publikuje również wyniki dla *TLC*, które wyraźnie odbiegają od otrzymanych w omawianych testach numerycznych, mianowicie naprężenie na brzegu waha się w granicach od 3236 do 3923 Pa. Rozbieżność tę można wytłumaczyć zapewne niedoskonałością zastosowanego modelu konstytutywnego, zwłaszcza jeśli chodzi o napięcie powierzchniowe, którego wartość maksymalna może być w rzeczywistości większa, niż przyjęta na podstawie danych zwierzęcych. Ponadto przy dużych wartościach odkształceń sztywność mięszsu znacznie wzrasta, zatem wrażliwość wartości naprężeń na niewielkie zmiany stałych materiałowych jest również znacznie większa niż przy małych odkształceniach.

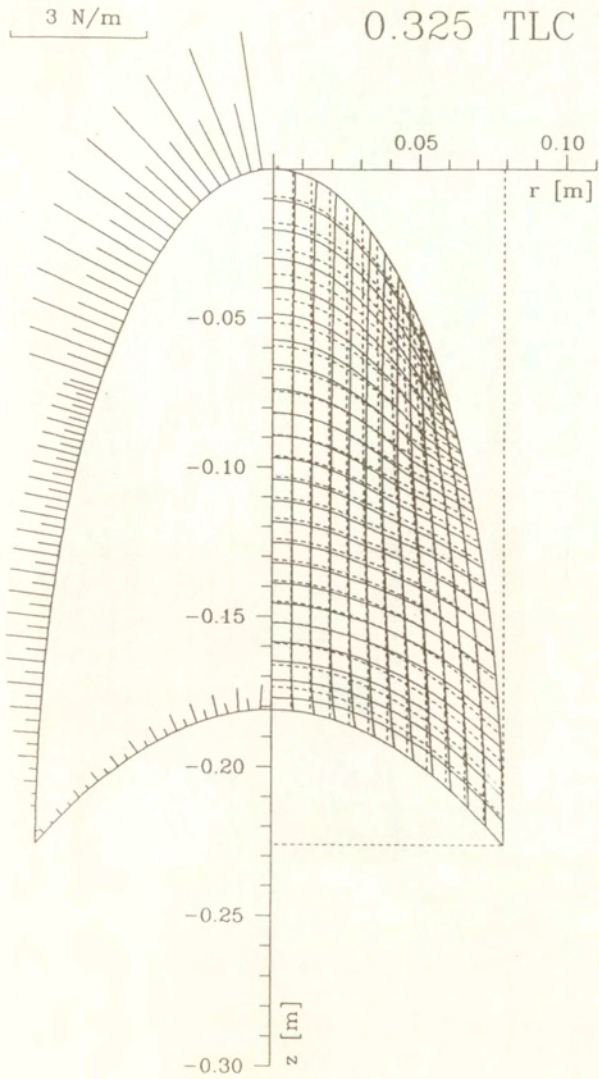
Wyniki testów przedstawiające deformację mięszsu oraz reakcje węzłowe na powierzchni płuc zamieszczone są na rys. 4.12, 4.13 oraz 4.14. Linia przerywaną oznaczono geometrię siatki elementów przed przyłożeniem obciążenia grawitacyjnego, natomiast linią ciągłą — końcową geometrię siatki. Jak widać, warunek prostopadłości reakcji do powierzchni brzegowej jest spełniony z dobrą dokładnością. Jedynie na rys. 4.12 w środkowym rejonie przepony widoczne jest zaburzenie w kierunkach tych sił. Wydaje się, że ma to związek z niestatecznością przyjętego równania konstytutywnego w warunkach dużych odkształceń postaciowych i małych wydłużeń względnych, jakie mają miejsce właśnie w sąsiedztwie omawianego fragmentu brzegu. Dla porównania, na rys. 4.15 przedstawiono reakcje obliczone dla tej samej objętości płuc przy założeniu liniowego równania konstytutywnego ($E = 1300$ Pa, $\nu = 0.25$), wykazujące wyraźnie mniejsze odchylenie od kierunku normalnego do brzegu.

Widoczny na rys. 4.12–4.14 skok wartości reakcji w okolicach 1/3 wysokości płuc (licząc od góry) wynika ze skokowej zmiany gęstości siatki elementów skończonych leżących przy brzegu.

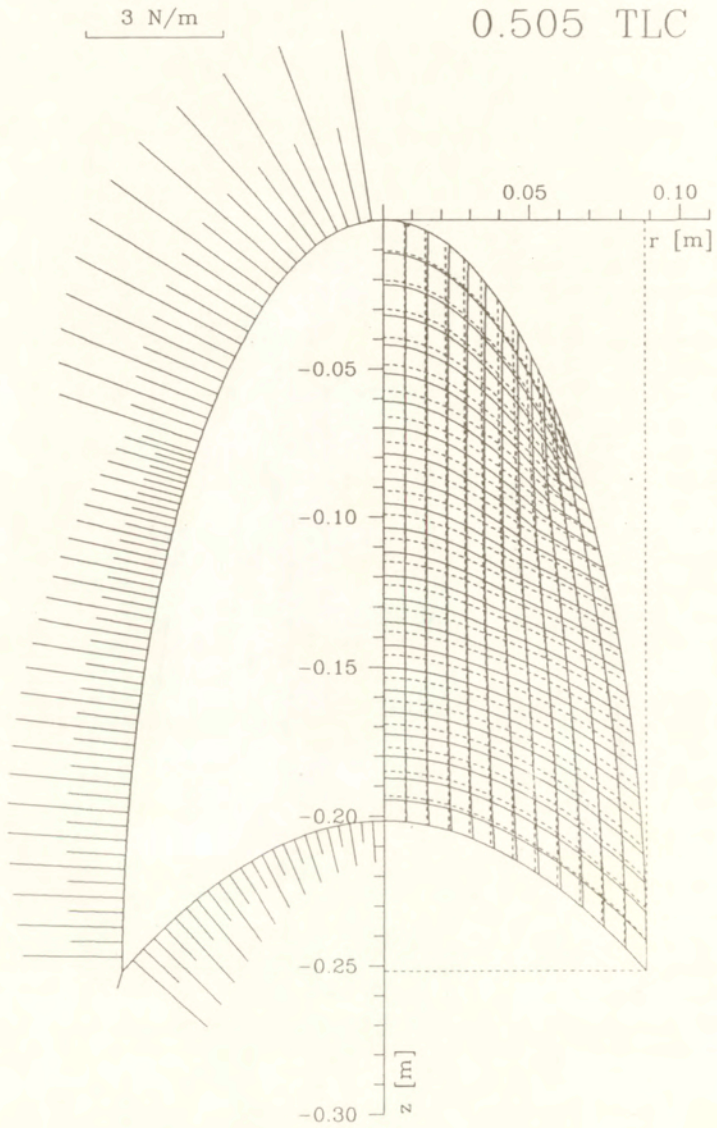
Wartości 0.325 i 0.975 *TLC* są wartościami granicznymi, poza którymi numeryczna realizacja obciążenia ciężarem własnym przy zastosowaniu omówionego modelu konstytutywnego nie jest możliwa z uwagi na lokalne przekraczanie przez parametr deformacji powierzchniowej α wartości granicznych, poza którymi równanie konstytutywne dla napięcia powierzchniowego nie jest określone.

4.3.3 Efekty sprzężeń mechanicznych przy wdechu realizowanym z różną szybkością

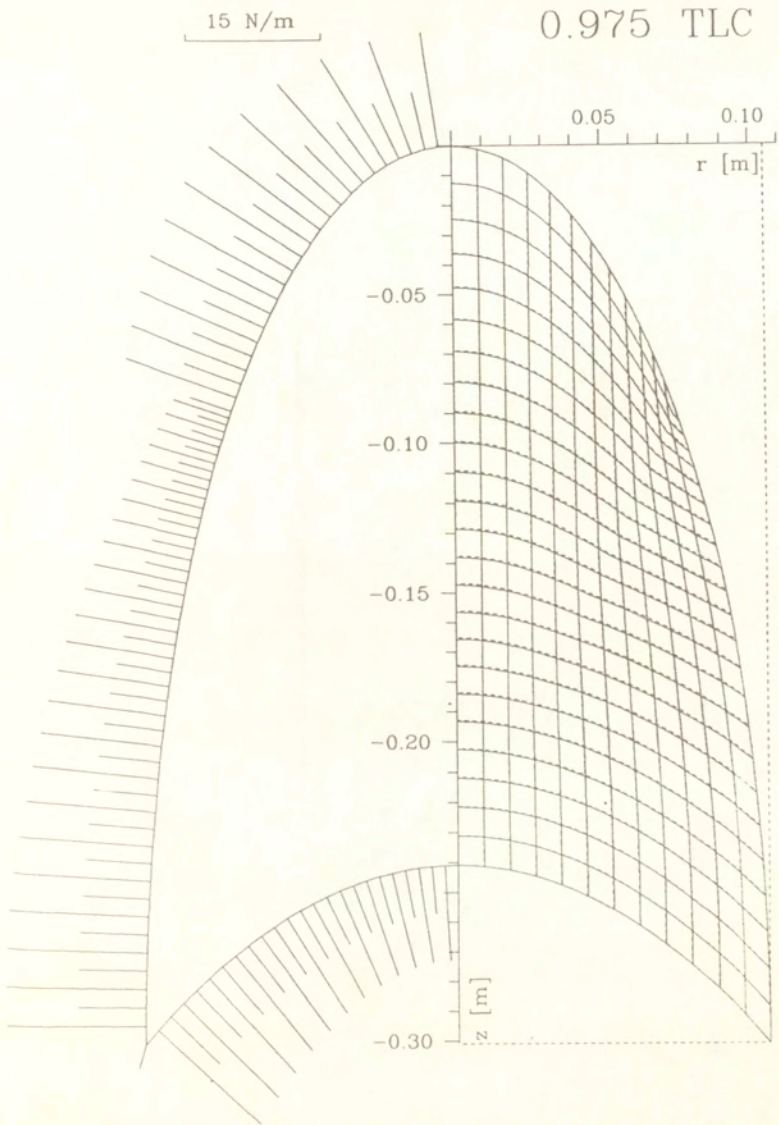
Uzyskanie danych doświadczalnych dotyczących rozkładu naprężeń w tkankach płucnych jest niezwykle trudne, zatem weryfikacja wyników otrzymanych za pomocą omawianego



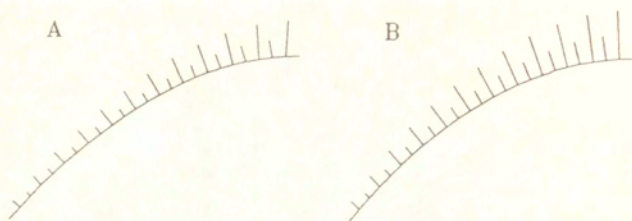
Rys. 4.12



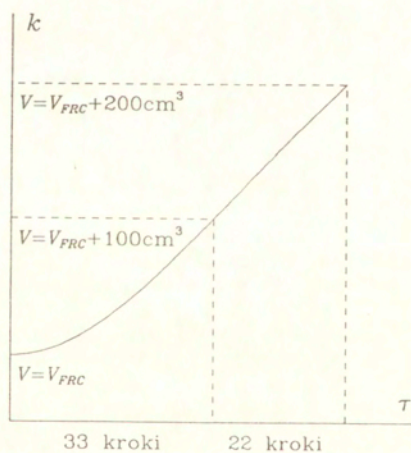
Rys. 4.13



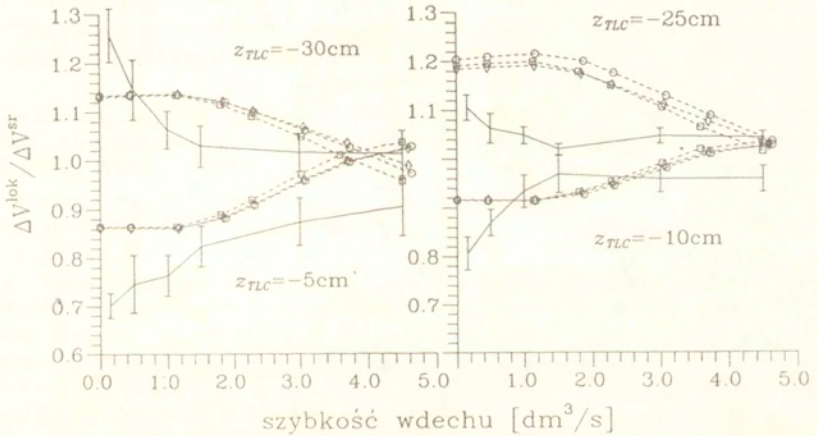
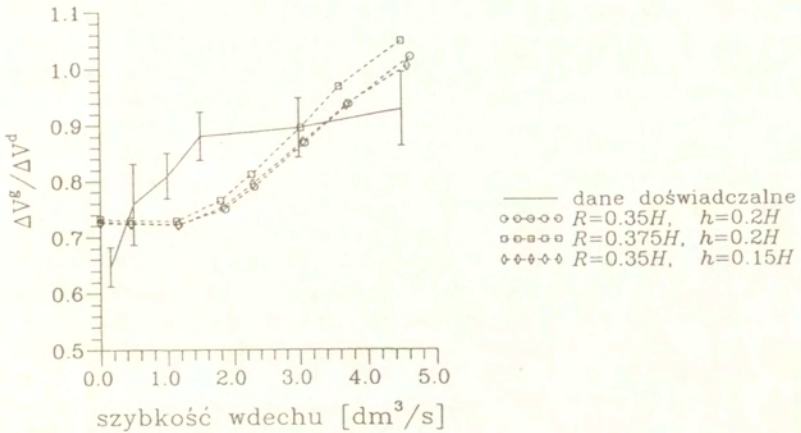
Rys. 4.14



Rys. 4.15 Reakcje węzłowe na dolnej powierzchni modelu płuc. A — nieliniowy model konstytutywny (powtórzenie fragmentu rys. 4.12), B — model Hooke'a



Rys. 4.16



Rys. 4.17 Porównanie doświadczalnych i analitycznych wykresów przedstawiających wpływ szybkości wdechu na lokalną wentylację w różnych rejonach płuc.

modelu numerycznego jest możliwa tylko w zakresie deformacji. Celem omawianych testów było porównanie wyników obliczeń numerycznych z danymi doświadczalnymi opublikowanymi przez Bake'a i in. [2]. W przeprowadzonych przez nich badaniach pacjenci wdychali w pozycji pionowej pewną ilość powietrza z różną szybkością, natomiast urządzenia pomiarowe rejestrowały dystrybucję tej porcji gazu w różnych regionach płuc. Wdech rozpoczynał się przy pojemności płuc równej w przybliżeniu FRC , pomiar natomiast rozpoczynał się po wciągnięciu do płuc pierwszych 100 cm^3 gazu, kiedy to jego prędkość w tchawicy była już ustalona. Pomiar kończył się z chwilą przepłynięcia do płuc następných 100 cm^3 powietrza. Rejestrowano przyrost lokalnej pojemności pęcherzyków w punktach, których współrzędna pionowa mierzona w konfiguracji odpowiadającej TLC od wierzchołka płuc w dół wynosiła odpowiednio 5, 10, 15, 20, 25 i 30 cm. Zdefiniowano ponadto przyrosty pojemności górnych i dolnych regionów płuc, ΔV^g i ΔV^d (z uwagi na niesciślność tkanek przyrost objętości ΔV równy jest przyrostowi pojemności ΔC), jako średnie wartości przyrostów zmierzonych odpowiednio 5 i 10 cm oraz 25 i 30 cm poniżej wierzchołka płuc.

Wyniki przedstawione na rys. 4.17 (linia ciągła) wskazują na znaczne różnice w wentylacji lokalnej w funkcji współrzędnej pionowej przy małych szybkościach wdechu. W miarę wzrostu tej szybkości wspomniane różnice zacieraają się. Istnienie tych różnic daje się wytłumaczyć w ten sposób, że górne partie płuc już na początku wdechu są bardziej rozciągnięte od dolnych wskutek działania ciężaru płuc, zatem w trakcie wdechu ich wentylacja jest mniejsza (na końcu wdechu, przy pojemności bliskiej TLC , płuca są rozciągnięte w przybliżeniu jednorodnie). Zmniejszanie się tych różnic, przynajmniej na początku wdechu, przy większych jego szybkościach wynika z faktu, że dolne partie płuc, początkowo mniej rozciągnięte, mają również mniejszą przepuszczalność dla wdychanego powietrza. Duktury powietrzne w miąższu mają mniejsze rozmiary, co zwiększa opory ruchu gazu na drodze od dużych dróg oddechowych do pęcherzyków. Stąd wynika zmniejszenie wentylacji tych regionów na korzyść górnej części płuc, gdzie opory są małe.

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla trzech modeli różniących się nieco proporcjami geometrycznymi. Wysokość początkowa H wynosiła we wszystkich przypadkach 21 cm, natomiast R i h wynosiły odpowiednio: $0.35H$ i $0.2H$, $0.375H$ i $0.2H$, oraz $0.35H$ i $0.15H$. Obciążenie realizowane było następująco: Najpierw zadawane były przemieszczenia ścian klatki piersiowej i przepony (w modelu numerycznym — przemieszczenia węzłów zewnętrznej powierzchni strefy kontaktowej), tak, aby kształt tej powierzchni pozostał taki sam, natomiast jego objętość wynosiła 1.722 objętości początkowej, co odpowiada FRC . Obliczony w tej konfiguracji, w przybliżeniu jednorodny stan naprężenia odpowiadał ekstremalnej ścieżce odciążania na wykresie $\gamma - \alpha$. Następnie przykładano obciążenie grawitacyjne w sposób omówiony w poprzednim przykładzie. Teraz rozpoczynał się „wdech”, w którym zewnętrzna powierzchnia strefy kontaktowej deformowała się dalej przez jednokładność o stosunku k zmieniającym się w czasie początkowo kosinusoidalnie, a następnie liniowo (rys. 4.16). W ciągu pierwszych 33 kroków pojemność płuc zwiększała się o 100 cm^3 , w ciągu następnych 22 kroków — o następne 100 cm^3 . Lokalnie przyrosty pojemności odpowiadające danym doświadczalnym równe były zatem różnicy między pojemnościami zmierzonymi w 55-tym i 33-tym kroku. Kroki czasowe były równej długości, różnej jednak dla różnych testów. Długość kroku decydowała zatem o szybkości wdechu, zmieniającej się od ok. 0.46 do 4.6 dm^3/s . (Dla szybkości poniżej 1 dm^3/s konieczne było dwukrotne zagęszczenie kroków czasowych, zatem pomiar przeprowadzano dla 66-tego i 110-tego kroku. Długość kroku czasowego wahała się dla różnych testów w granicach 0.001–0.005 s.) Dodatkowo przeprowadzono dla każdego z trzech przypadków geometrii test statyczny, bez

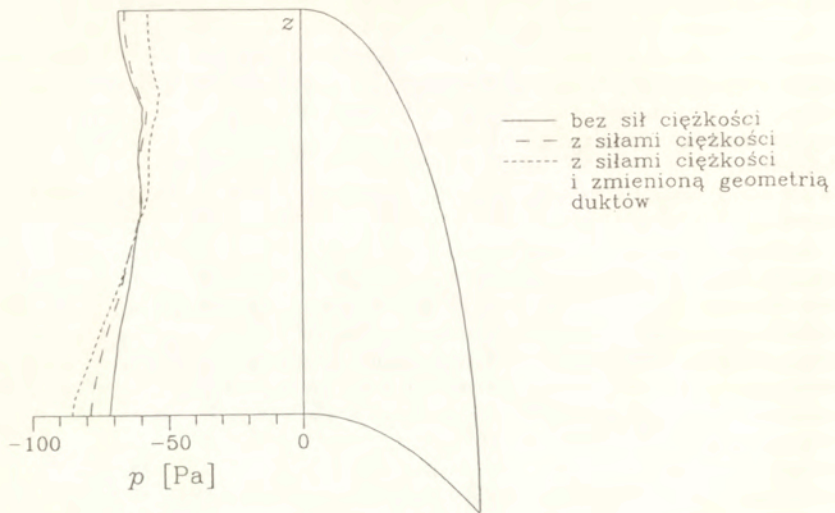
uwzględnienia sprężen, co odpowiada nieskończenie małej szybkości wdechu.

Zmiany lokalnej pojemności, definiowanej jako ϕJV^0 , rejestrowano w elementach przylegających do osi symetrii ($r = 0$), w punktach Gaussa leżących najbliżej tej osi, a także w elementach przylegających do dolnej powierzchni brzegowej, w punktach Gaussa leżących najbliżej tej powierzchni. Jako współrzędną pionową odpowiadającą konfiguracji *TLC* przyjęto współrzędną zmierzoną w rzeczywistości dla 0.975 *TLC*. Wielkości ΔV^0 i ΔV^d zdefiniowano odpowiednio jako średnie dla pierwszych 9-ciu elementów licząc od góry oraz dla dwunastu elementów przylegających do dolnej części brzegu. Wyniki zestawiono z danymi doświadczalnymi na rys. 4.17.

Analiza otrzymanych rezultatów wskazuje na wyraźną rozbieżność z danymi doświadczalnymi. Przede wszystkim zauważalne są różnice ilościowe dla szybkości wdechu bliskich zeru. Wynikają one z niedoskonałości przyjętego modelu konstytutywnego. Sądząc po wynikach eksperymentów, początkowe różnice w deformacji górnych i dolnych regionów rzeczywistych płuc są większe niż wyznaczone przez program numeryczny. Druga wyraźna różnica polega na tym, że zmiana w dystrybucji wdychanego powietrza jest widoczna w rzeczywistości już dla niewielkich szybkości wdechu, podczas gdy w otrzymanych wynikach numerycznych można ją zaobserwować dopiero powyżej $2 \text{ dm}^3/\text{s}$. Oznacza to, że przedstawiony model płuc uwzględnił tylko częściowo efekty sprężen mechanicznych pomiędzy przepływem gazu a deformacją szkieletu tkankowego. Zdaniem autora, wynika to z przyjęcia założenia o stałym przekroju modelowanych dyskretnie dużych dróg powietrznych. Założenie to jest słuszne w warunkach dużych naprężeń rozciągających. Przy małych naprężeniach sztywność ścianek tych przewodów maleje, w rzeczywistości obserwuje się zmiany kształtu duktów, zaś w momencie pojawienia się naprężeń ujemnych może dojść do zamknięcia się duktu i wyłączenia obszaru płuc z oddychania. Jak już wspomniano w podrozdziale 2.3, uwzględnienie tych efektów w modelu jest niezwykle trudne i prowadziłoby do jego znacznej komplikacji.

Istotną natomiast cechą rozwiązania numerycznego, pozwalającą, przy wszystkich powyższych zastrzeżeniach, na optymistyczną ocenę zaprezentowanego modelu, jest wyraźna zależność dystrybucji wentylacji w górnych i dolnych regionach płuc od szybkości tej wentylacji. Przy większych szybkościach wdechu rozplyw powietrza do różnych części płuc jest bardziej wyrównany, niż w warunkach statycznych. Zatem przynajmniej pod względem jakościowym wyniki są właściwe.

Warto zwrócić w tym miejscu uwagę na wpływ szybkości wdechu na wartości naprężeń w mięszu. Przykładowo dla $q = 4.6 \text{ dm}^3/\text{s}$ ekstremalne wartości naprężeń normalnych na brzegu płuc przy objętości $V_{FRC} + 200 \text{ cm}^3/\text{s}$ wynosiły 1112 Pa w górnym wierzchołku i 454 Pa w środku podstawy płuc, podczas gdy wartości naprężenia σ_{22} w fazie stałej w tych punktach wynosiły odpowiednio 897 i 238 Pa. Pozostała część sił brzegowych równoważona była przez podciśnienie w porach mięszu, wynoszące odpowiednio -214 i -233 Pa (zatem błąd w spełnieniu warunku równowagi mieści się w granicach 2% maksymalnej wartości naprężenia). Dla porównania, wartości naprężeń w tych punktach przy obciążaniu statycznym wynosiły 884 i 276 Pa. Autor nie dysponuje niestety żadnymi danymi doświadczalnymi mogącymi zweryfikować te wyniki. Na ich podstawie można wnioskować, że szybkość wdechu ma niewielki wpływ na wartości naprężeń w mięszu. Wpływ ten zauważalny jest zwłaszcza w dolnych częściach płuc, przy czym różnica między wartościami ekstremalnymi naprężeń jest większa przy wdechu szybkim niż przy powolnym. Wyraźnie natomiast wzrasta przy szybkim wdechu naprężenie normalne na brzegu, odpowiadające podciśnieniu w warstwie międzyopłucnowej, co wiąże się



Rys. 4.18

ze wzrostem podciśnienia w pęcherzykach miąższu.

Przy omawianiu przykładów, w których modeluje się osobno porowaty miąższ i dyskretny układ dużych dróg oddechowych warto zwrócić uwagę na problem doboru geometrii tego ostatniego. Jak już wspomniano, została ona założona z góry w taki sposób, aby powietrze na drodze do wszystkich obszarów jednorodnie zdeformowanych płuc napotykało w przybliżeniu jednakowe opory ruchu, a więc, aby rozkład ciśnienia w miąższu przy powolnym oddechu był możliwie jak najbardziej wyrównany. Założenie to jest raczej intuicyjne, autorowi nie są znane ściśle dane na temat geometrii tych przewodów w rzeczywistych płucach. Należy się spodziewać, że zmiana tej geometrii w modelu może mieć wpływ na otrzymane wyniki. Rys. 4.18 przedstawia rozkład ciśnienia porowego wzdłuż osi symetrii modelu powstały w wyniku wykonania małego przyrostu objętości płuc od *FRC* w jednym kroku czasowym, dla trzech przypadków: a) bez uwzględnienia ciężaru własnego, b) z uwzględnieniem ciężaru własnego i c) z uwzględnieniem ciężaru własnego i przy całym drzewie dróg oddechowych przesuniętym do góry o jedną długość elementu. W tym ostatnim przypadku widoczna jest wyraźna zmiana rozkładu ciśnienia — w górnej części płuc podciśnienie jest o 13% niższe, zaś w dolnej — o 8% wyższe niż przed zmianą geometrii drzewa. Zgodnie zatem z przewidywaniami, zmiana ta polepsza wentylację górnych rejonów płuc na niekorzyść dolnych.

Rozdział 5

Wnioski

5.1 Krytyczna ocena zaprezentowanego modelu. Proponowane kierunki dalszych badań

Celem niniejszej pracy było stworzenie modelu mechanicznego płuc, za pomocą którego można byłoby analizować rozkład odkształceń, naprężeń i ciśnień powietrza w procesie oddychania przy uwzględnieniu sprzężeń mechanicznych między deformacją szkieletu tkankowego a przepływem powietrza. W modelu uwzględnione są duże deformacje oraz nieliniowe i niezachowawcze własności mechaniczne mięszsu płucnego.

Na podstawie analizy wyników testów numerycznych można wnioskować, że model nadaje się do celu, do którego został stworzony, przy czym o ile otrzymane wyniki od strony jakościowej nie budzą poważniejszych zastrzeżeń, to konkretne wartości liczbowe znacznie odbiegają od tych mierzonych w eksperymentach.

Zasadniczym mankamentem przedstawionego modelu jest przybliżony charakter równania konstytutywnego mięszsu płucnego jako ośrodka ciągłego. Przyjęta postać, oparta na koncepcji pseudosprężystości, jest uproszczona, bazuje na założeniu o braku wpływu napięcia powierzchniowego na geometrię mikrostruktury mięszsu. Ponadto współczesne ograniczenia techniczne uniemożliwiają przeprowadzenie badań pozwalających na określenie z wystarczającą dokładnością stałych materiałowych w równaniu konstytutywnym. Nie jest też znany mechanizm ustalania się pętli histerezy w cyklicznym obciążaniu, nie ma zatem gwarancji, że przyjęta technika parametryzacji wykresów $\gamma - \alpha$, potwierdzona porównaniem z kilkoma pętlami uzyskanymi podczas deformacji objętościowej płuc, jest również słuszna w zakresie deformacji postaciowych. Wobec braku danych dotyczących napięcia powierzchniowego surfaktantu ludzkiego posłużono się danymi zwierzęcymi, co również ma wpływ na dokładność modelu. Konsekwencją niedokładności przyjętego modelu jest zapewne widoczna na rys. 4.17 różnica między doświadczalnymi i teoretycznymi wartościami wentylacji lokalnej w różnych punktach płuc przy bliskich zeru prędkościach wdechu. Wynika z niej, że początkowe różnice w deformacji górnych i dolnych regionów płuc są większe w rzeczywistych płucach, niż w modelu.

Reasumując, do skutecznego modelowania zagadnień mechanicznych w płucach konieczne jest znalezienie metod doświadczalnych umożliwiających przeprowadzenie dokładniejszych badań nad własnościami mechanicznymi tkanek, a także poszukiwania modelu konstytutywnego lepiej odzwierciedlającego rzeczywiste zachowanie się materiału. Zdaniem autora, makroskopowe równanie konstytutywne mięszsu powinno zostać

wyprowadzone na podstawie analizy jego mikrostruktury i własności mechanicznych jej elementów. Interesujący przykład stosunkowo dokładnego opisu geometrii mięszu przy użyciu prostych wielościanów zaprezentował niedawno Fung [15]. Wydaje się, że do analizy takiej struktury przydatne mogą być techniki numeryczne (MES).

Konieczne jest także przeprowadzenie badań analizujących zachowanie się mięszu pod działaniem małych sił ściskających. Na obecnym etapie nie wiadomo w jakim zakresie cienkościenna struktura tkankowa o ściankach wypełnionych krwią może przenosić naprężenia ściskające. W przedstawionym modelu przyjęto założenie, że stosowane równanie konstytutywne jest słuszne dla dowolnych odkształceń, brak jest jednak danych mogących potwierdzić lub obalić to założenie.

Zasadnicza nieścisłość przedstawionego modelu sprzężeń mechanicznych polega na nieuwzględnieniu zmian geometrii przekroju dużych duktów powietrznych związanych ze spadkiem naprężeń rozciągających w otaczającym je mięszu lub spadkiem ciśnienia w przepływającym w ich wnętrzu gazie. Jak już wspomniano w podrozdziale 2.3, modelowanie tego zjawiska jest trudne, wymaga bowiem analitycznego lub numerycznego rozwiązania zagadnienia statyki rury zatopionej w ośrodku odkształcalnym z uwzględnieniem nieliniowej geometrii i własności materiałowych. Niedokładność ta sprawia, że omawiany model uwzględnia efekty sprzężeń mechanicznych tylko częściowo, co zapewne jest powodem małej wrażliwości dystrybucji wdechowego powietrza w różnych regionach płuc na prędkość wdechu w zakresie poniżej $2 \text{ dm}^3/\text{s}$.

Wydaje się, że w dalszych pracach badawczych w tej dziedzinie konieczne będzie podjęcie prób choćby uproszczonego uwzględnienia w modelu tej własności. Umożliwiłoby to modelowanie takich zjawisk, jak limitacja przepływu wydechowego oraz zamykanie się duktów w obszarach poddanych naprężeniom ściskającym. W tym przypadku model wymagałby dodatkowej modyfikacji — konieczne byłoby wprowadzenie do porowatego mięszu nieprzepuszczalnych przegród, oddzielających od siebie obszary zasilane przez różne dukty powietrzne, w celu uniemożliwienia powietrzu uwięzionemu w pewnym obszarze mięszu wskutek zamknięcia się ductu wypływania na jego zewnątrz przez pory modelowego ośrodka. Na obecnym etapie wprowadzanie takich przegród nie wydaje się konieczne, powietrze i tak może swobodnie przepływać między różnymi częściami płuc poprzez duże dukty powietrzne, mające większą przepuszczalność niż pory mięszu.

W przedstawionym modelu przyjęto z konieczności dość uproszczoną relację między tensorem przepuszczalności porowatego mięszu a stanem jego deformacji. Relacja ta nie uwzględnia anizotropowych zmian przepuszczalności w wyniku odkształceń postaciowych. Może to również mieć wpływ na nieścisłość otrzymanych wyników. Do określenia dokładniejszej relacji konieczne byłoby odwołanie się do mikrostruktury przestrzeni powietrznych mięszu i analiza geometrii przepływu w zależności od deformacji tych przestrzeni. Jest to również interesujący, choć zarazem trudny temat dla przyszłych badań.

Z analizy wykresów przedstawionych na rys. 4.17 wynika, że pomimo istotnych rozbieżności jeśli chodzi o wartości liczbowe pomiędzy danymi doświadczalnymi a wynikami numerycznymi analityczny opis zjawiska sprzężeń mechanicznych w procesie oddychania jest przynajmniej jakościowo poprawny. Zgodnie z obserwacjami, znaczny wzrost szybkości wdechu powoduje polepszenie wentylacji bardziej rozciągniętych górnych rejonów płuc kosztem mniej rozciągniętych rejonów dolnych. Wydaje się, że zastosowanie dokładniejszego opisu własności materiałowych i uwzględnienie deformacji przekroju dużych duktów powietrznych pozwoli w przyszłości na uzyskanie rozwiązań również ilościowo zgodnych z doświadczeniami.

Wpływ szybkości wdechu na wartości ekstremalnych naprężeń w mięszu okazuje się nie być znaczny. Zdaniem autora, uściślenie modelu według wyżej wymienionych sugestii prowadziłoby do wyników wykazujących większą wrażliwość naprężeń na efekty sprzężeń mechanicznych, szczególnie w rejonie obszarów z uwiezionym powietrzem, powstałych w wyniku zamykania się duktów. Nawet jeśli te przewidywania nie byłyby słuszne, przedstawiony model może służyć do weryfikacji dokładności wyników obliczeń statycznych dla konkretnych przypadków procesu oddychania.

Elementy kontaktowe użyte do modelowania warunku brzegowego na powierzchni płuc są, zdaniem autora, adekwatnym narzędziem do tego celu. Jak wynika z analizy kierunków reakcji na rys. 4.12–4.14 warunek brzegowy spełniony jest z zadowalającą dokładnością. Wyniki testów przeprowadzonych w podrozdziale 4.2 dowodzą, że elementy te mogą być stosowane dla stosunkowo szerokiego zakresu deformacji i wzajemnych poślizgów kontaktujących się powierzchni. Nadają się one zatem do modelowania zagadnienia kontaktowego w różnego rodzaju problemach mechaniki. W przyszłości należałoby jednak uogólnić je na przypadek kontaktu z tarciami. W zastosowaniu do analizy mechaniki płuc nasuwa się też sugestia, aby przez odpowiedni dobór własności mechanicznych tych elementów dostosować je również do modelowania zachowania się błony opłucnowej, której obecność w niniejszej pracy została pominięta.

5.2 Elementy oryginalne rozprawy

Do elementów oryginalnych niniejszej rozprawy należy zaliczyć:

- Podjęcie analizy sprzężeń mechanicznych w procesie oddychania. W dotychczas publikowanych pracach analizuje się jedynie statyczną deformację mięszu płucnego lub analizę przepływu powietrza bez powiązania geometrii przepływu z rozkładem naprężeń i odkształceń w płucach (wyjątek stanowi praca Lamberta i Wilsona [27], którzy przy założeniu liniowego równania konstytutywnego mięszu i jego jednorodnej deformacji analizowali wpływ objętości płuc na przepływ wydechowy).
- Uogólnienie publikowanych dotychczas pseudosprężystych modeli konstytutywnych na przypadek cyklicznego obciążania w dowolnych ustalonych granicach, nawet jeśli nie są one znane na początku obliczeń, wraz z podaniem sposobu dochodzenia do ustalonej pętli histerezy od dowolnego punktu początkowego. Znane dotąd modele konstytutywne nie wystarczają do analizy numerycznej trójwymiarowego stanu odkształcenia w płucach, gdyż ich postać jest podawana dla konkretnych wartości granicznych cyklu i tylko dla takiego cyklu model ten jest stosowalny. W rzeczywistych cyklach płucach każdy punkt mięszu deformuje się cyklicznie w innych granicach, trudnych zresztą do przewidzenia na początku obliczeń. Przedstawione uogólnienie spełnia wymagania procedury numerycznej, choć trudno jest ocenić, w jakim stopniu model ten odwzorowuje rzeczywiste zachowanie się mięszu.
- Podanie numerycznego sposobu realizacji warunku brzegowego na powierzchni płuc za pomocą elementów kontaktowych. Elementy takie były stosowane przez Buczkowskiego [8], jednak tylko dla zakresu małych odkształceń. Zastosowana metoda zapewnia dużą dokładność w rozważanym zakresie deformacji, przy tym jest łatwa do zaimplementowania w programie metody elementów skończonych.
- Opracowanie efektywnego programu komputerowego mogącego w przyszłości stać się podstawą analiz numerycznych o szerokim zastosowaniu praktycznym.

Dodatek A

Wyprowadzenie zależności współczynnika przepuszczalności mięszu od jego dylatacji (2.29)

Przepiszmy ogólną postać prawa filtracji Darcy'ego, podaną w podrozdziale 2.3 we wzorze (2.24)

$$\mathbf{w} = -\frac{\bar{K}}{\mu} \phi \nabla^\tau p. \quad (\text{A.1})$$

Występujący w tym równaniu tensor przepuszczalności \bar{K} jest odwrotnością tensora sprzężenia dyfuzyjnego, którego współczynniki w kartezjańskim układzie współrzędnych mają postać [22]

$$\bar{K}_{ij}^{-1} = \frac{1}{2V} \int_{A_{sJ}} (\nabla_i^\tau B_{kj} + \nabla_k^\tau B_{ij}) n_k dA. \quad (\text{A.2})$$

V oznacza objętość elementu ośrodka, A_{sJ} — całkowite pole powierzchni interfazy, tj. styku pomiędzy szkieletem a płynem w tym elemencie, zaś tensorowe pole \mathbf{B} wiąże makroskopową prędkość filtracji fazy płynnej z jej fluktuacjami w poszczególnych punktach przestrzeni porowych,

$$\mathbf{w}^{(lok)} - \mathbf{w} = \mathbf{B}\mathbf{w}. \quad (\text{A.3})$$

Operator ∇^τ oznacza gradient względem współrzędnych w konfiguracji aktualnej, \mathbf{x}^τ .

Jeśli makroskopowa deformacja mięszu od chwili t do chwili τ ma charakter wyłącznie objętościowy o stosunku $V/V^t = J$, to można założyć, że w skali mikro powierzchnie środkowe ścianek szkieletu przekształcają się przez podobieństwo o skali $J^{1/3}$. Pozostałe punkty ścianek przekształcają się w inny sposób, ponieważ ścianki zachowują stałą objętość, jednak przy założeniu, że są one wystarczająco cienkie, można przyjąć, że przestrzenie porowe w skali mikro przekształcają się również przez podobieństwo, którego skala wynosi $(J \frac{\phi}{\phi^t})^{1/3}$. Zachodzą wówczas związki:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}^\tau(\mathbf{x})) = \mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{n}^\tau = \mathbf{n}. \quad (\text{A.4})$$

Uwzględniając ponadto zależności: $dA = (J \frac{\phi}{\phi^t})^{2/3} dA^t$ i $\nabla^\tau = (J \frac{\phi}{\phi^t})^{-1/3} \nabla^t$, otrzymujemy

$$\bar{K}_{ij}^{-1} = \left(J \frac{\phi}{\phi^t} \right)^{-2/3} \bar{K}_{ij}^{-1}(t), \quad (\text{A.5})$$

a dla przypadku izotropii, gdy $\bar{K}_{ij} = \lambda \delta_{ij}$,

$$\lambda = \left(J \frac{\phi}{\phi^t} \right)^{2/3} \lambda^t. \quad (\text{A.6})$$

Dodatek B

Zależności pomiędzy tensorami odkształcenia, naprężenia i stałych materiałowych w różnych konfiguracjach odniesienia

Rozważmy ciało jak na rys. 2.9, deformujące się od chwili $\tau = 0$ do chwili τ traktowanej jako aktualna. Niech $W^0(\mathbf{E}^0)$ oznacza gęstość energii odkształcenia w konfiguracji początkowej C^0 wyrażoną w funkcji tensora Greena opisującego odkształcenie od chwili początkowej do aktualnej względem tej konfiguracji. Składowe II tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa w chwili τ w dowolnym kartezjańskim układzie współrzędnych równe są na podst. (2.1)

$$S_{ij}^0 = \frac{\partial W^0}{\partial E_{ij}^0}, \quad (\text{B.1})$$

natomiast składowe stycznego tensora zależności konstytutywnych, zdefiniowanego wzorem (2.56), równe są

$$C_{ijkl}^0 = \frac{\partial^2 W^0}{\partial E_{ij}^0 \partial E_{kl}^0}. \quad (\text{B.2})$$

Rozważmy następnie inną konfigurację odniesienia C^t , związaną z pewną chwilą $\tau = t$. Oznaczmy przez \mathbf{F}^0 gradient deformacji od chwili początkowej do chwili t , tzn.

$$\mathbf{F}^0 = \frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial \mathbf{x}^0}, \quad J^0 = \det \mathbf{F}^0. \quad (\text{B.3})$$

Odształcenie od chwili początkowej do aktualnej względem tej konfiguracji opisane jest nieliniowym tensorem \mathbf{E} , związanym z tensorem \mathbf{E}^0 zależnością

$$E_{mn}^0 = F_{im}^0 F_{jn}^0 E_{ij} \quad (\text{B.4})$$

Zależność gęstości energii odkształcenia W w konfiguracji C^t od tensora \mathbf{E} opisywana jest funkcją inną niż zależność $W^0(\mathbf{E}^0)$ w konfiguracji początkowej i trudno jest podać ogólną postać transformacji tych dwóch funkcji. Można to natomiast zrobić dla ich pochodnych cząstkowych po składowych stanu odkształcenia, wykorzystując zależność

$$\frac{\partial}{\partial E_{ij}} = F_{im}^0 F_{jn}^0 \frac{\partial}{\partial E_{mn}^0}. \quad (\text{B.5})$$

I tak składowe II tensora Pioli-Kirchhoffa w konfiguracji C^t mają postać

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = \frac{1}{J^0} \frac{\partial W^0}{\partial E_{ij}} = \frac{1}{J^0} F_{im}^0 F_{jn}^0 S_{mn}^0 \quad . \quad (\text{B.6})$$

natomiast składowe stycznego tensora konstytutywnego wyrażają się wzorem

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{1}{J^0} \frac{\partial^2 W^0}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{1}{J^0} F_{im}^0 F_{jn}^0 F_{kp}^0 F_{lq}^0 C_{mnpq}^0 \quad . \quad (\text{B.7})$$

Dodatek C

Pochodne przestrzenne wektorów i tensorów w układzie współrzędnych walcowych

W przestrzeni trójwymiarowej dany jest układ współrzędnych kartezjańskich $\{x^m\}$ o bazie \mathbf{i}_m , $m = 1 \dots 3$ oraz układ współrzędnych krzywoliniowych $\{y^n\}$ o lokalnej bazie $\mathbf{g}_k(y^n)$ i kobazie $\mathbf{g}^k(y^n)$, $k, n = 1 \dots 3$. Współrzędne $\{x^m\}$ odpowiadają fizycznym współrzędnym $\{x, y, z\}$, natomiast $\{y^n\}$ — odpowiednio współrzędnym walcowym $\{r, \varphi, z\}$. Zachodzą związki:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, & r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\y &= r \sin \varphi, & \varphi &= \arctg \frac{y}{x}, \\z &= z, & z &= z.\end{aligned}\tag{C.1}$$

Pomiędzy wektorami bazy lokalnej \mathbf{g}_k i wersorami \mathbf{i}_m zachodzą zależności:

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial x^m}{\partial y^k} \mathbf{i}_m, \quad \mathbf{i}_m = \frac{\partial y^j}{\partial x^m} \mathbf{g}_j,\tag{C.2}$$

gdzie

$$\frac{\partial x^m}{\partial y^k} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial y^k}{\partial x^m} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\tag{C.3}$$

Pochodne przestrzenne wektorów bazowych we współrzędnych $\{y^k\}$ można zatem wyznaczyć ze wzoru

$$\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial y^l} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial y^k \partial y^l} \mathbf{i}_m = \frac{\partial^2 x^m}{\partial y^k \partial y^l} \frac{\partial y^j}{\partial x^m} \mathbf{g}_j = \Gamma_{kl}^j \mathbf{g}_j.\tag{C.4}$$

gdzie przez Γ_{kl}^j oznaczono symbole Christoffela. Dla rozważanego układu współrzędnych symbole te mają następujące wartości:

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \text{pozostałe } \Gamma_{kl}^j = 0.\tag{C.5}$$

Dowolny wektor \mathbf{v} można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów bazy \mathbf{g}_k ,

$$\mathbf{v} = v^j \mathbf{g}_j.\tag{C.6}$$

Jego gradient w układzie współrzędnych $\{y^k\}$ ma postać

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y^k} \otimes \mathbf{g}^k = \left(\frac{\partial v^j}{\partial y^k} \mathbf{g}_j + v^j \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial y^k} \right) \otimes \mathbf{g}^k = (v^j{}_{,k} + \Gamma_{kl}^j v^l) \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k \\ &= v^j{}_{;k} \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k,\end{aligned}\quad (\text{C.7})$$

natomiast jego dywergencja —

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = v^k{}_{;k} = v^k{}_{,k} + \Gamma_{kl}^k v^l. \quad (\text{C.8})$$

Podstawiając do powyższych zależności wartości symboli Christoffela dla współrzędnych walcowych (C.5) oraz wprowadzając składowe fizyczne wektora \mathbf{v} ,

$$v_r = v^1, \quad v_\varphi = r v^2, \quad v_z = v^3, \quad (\text{C.9})$$

odpowiadające znormalizowanej, ortogonalnej bazie lokalnej o wersorach \mathbf{e}_k , równoległych odpowiednio do wektorów \mathbf{g}^k i \mathbf{g}_k , otrzymujemy:

$$v^j{}_{;k} = \begin{bmatrix} v_{r,r} & v_{r,\varphi} - v_\varphi & v_{r,z} \\ \frac{1}{r} v_{\varphi,r} & \frac{1}{r} (v_{\varphi,\varphi} + v_r) & \frac{1}{r} v_{\varphi,z} \\ v_{z,r} & v_{z,\varphi} & v_{z,z} \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

$$v^k{}_{;k} = v_{r,r} + \frac{1}{r} (v_{\varphi,\varphi} + v_r) + v_{z,z} \quad (\text{C.11})$$

Dowolny tensor drugiego rzędu \mathbf{T} można przedstawić jako

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j. \quad (\text{C.12})$$

Jego gradient w układzie współrzędnych krzywoliniowych ma postać

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{T} &= \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y^k} \otimes \mathbf{g}^k = \left(\frac{\partial T^{ij}}{\partial y^k} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j + T^{ij} \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial y^k} \otimes \mathbf{g}_j + T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial y^k} \right) \otimes \mathbf{g}^k = \\ &= (T^{ij}{}_{,k} + \Gamma_{kl}^i T^{lj} + \Gamma_{kl}^j T^{il}) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k = T^{ij}{}_{;k} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k,\end{aligned}\quad (\text{C.13})$$

natomiast jego dywergencja po drugiej współrzędnej —

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = T^{ij}{}_{;j} \mathbf{g}_i = (T^{ij}{}_{,j} + \Gamma_{jl}^i T^{lj} + \Gamma_{jl}^j T^{il}) \mathbf{g}_i. \quad (\text{C.14})$$

Podobnie, jak poprzednio, podstawiając do powyższej zależności wartości symboli Christoffela dla współrzędnych walcowych (C.5) oraz wprowadzając składowe fizyczne tensora \mathbf{T} ,

$$\begin{aligned}T_{rr} &= T^{11}, & T_{r\varphi} &= r T^{12}, & T_{rz} &= T^{13}, \\ T_{\varphi r} &= r T^{21}, & T_{\varphi\varphi} &= r^2 T^{22}, & T_{\varphi z} &= r T^{23}, \\ T_{zr} &= T^{31}, & T_{z\varphi} &= r T^{32}, & T_{zz} &= T^{33},\end{aligned}\quad (\text{C.15})$$

otrzymujemy

$$T^{ij}{}_{;j} = \left\{ \begin{array}{l} T_{rr,r} + \frac{1}{r} T_{r\varphi,\varphi} + T_{rz,z} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) \\ \frac{1}{r} \left[T_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} T_{\varphi\varphi,\varphi} + T_{\varphi z,z} + \frac{1}{r} (T_{r\varphi} + T_{\varphi r}) \right] \\ T_{zr,r} + \frac{1}{r} T_{z\varphi,\varphi} + T_{zz,z} + \frac{1}{r} T_{zr} \end{array} \right\}. \quad (\text{C.16})$$

Dodatek D

Postacie współczynników macierzy układu (3.20)

Jawne postacie współczynników macierzy układu równań (3.20) dla przypadku trójwymiarowego otrzymujemy podstawiając równania (3.3) do (3.19) a następnie stosując twierdzenie Gaussa

$$\int_{\partial\Omega} v_k n_k d(\partial\Omega) = \int_{\Omega} v_{k,k} d\Omega, \quad \text{dla dowolnego wektora } \{v_k(x_i)\}, \quad (D.1)$$

$$\int_{\partial\Omega^{pl}} \hat{v}_k \hat{n}_k d(\partial\Omega) = \int_{\Omega^{pl}} \hat{v}_{k,k} d\Omega, \quad \text{dla dowolnego wektora } \{\hat{v}_k(\xi_i)\}. \quad (D.2)$$

Układ (3.19) przybiera wówczas formę:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi_{i\gamma,j} \dot{T}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \Phi_{i\gamma,j} \dot{T}_{ij}^{(pl)} d\Omega = \int_{\partial\Omega^{\sigma}} \Phi_{i\gamma} \dot{t}_i^* d(\partial\Omega) + \int_{\Omega} \Phi_{i\gamma} \dot{g}_i^* d\Omega \\ & \int_{\Omega} \left(-\Psi_{\eta} G_{ki} \Phi_{\kappa\alpha,i} \dot{q}_{\alpha}^{\kappa} - \Psi_{\eta} \frac{1}{p} \phi J \Psi_{\beta} \dot{q}^{\beta} + \Psi_{\eta,i} \dot{w}_i \right) d\Omega \\ & = \int_{\partial\Omega^q} \Psi_{\eta} \dot{q}^* d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} \Psi_{\eta} \frac{1}{p} p_{,i} \dot{w}_i d\Omega \end{aligned} \right. \quad (D.3)$$

Stąd, po uwzględnieniu (3.4–3.6), możemy zapisać współczynniki macierzy układu (3.20) w postaci:

$$K_{\gamma\alpha} = K_{\gamma\alpha}^c + K_{\gamma\alpha}^{\sigma} + K_{\gamma\alpha}^p + K_{\gamma\alpha}^{pl} \quad (D.4)$$

$$K_{\gamma\alpha}^c = \int_{\Omega} \Phi_{i\gamma,j} F_{ik} C_{kijm} F_{nl} \Phi_{n\alpha,m} d\Omega \quad (D.5)$$

$$K_{\gamma\alpha}^{\sigma} = \int_{\Omega} \Phi_{i\gamma,j} S_{kj}^{(\sigma)} \Phi_{i\alpha,k} d\Omega \quad (D.6)$$

$$K_{\gamma\alpha}^p = - \int_{\Omega} \Phi_{i\gamma,j} \frac{p}{J} (G_{nm} G_{ij} - G_{im} G_{nj}) \Phi_{n\alpha,m} d\Omega \quad (D.7)$$

$$K_{\gamma\alpha}^{pl} = \int_{\Omega^{pl}} \Phi_{i\gamma,j} k' (2G_{nm} G_{ij} - G_{im} G_{nj}) \Phi_{n\alpha,m} d\Omega \quad (D.8)$$

$$L_{\gamma\beta} = - \int_{\Omega} \Phi_{i\gamma,j} G_{ij} \Psi_{\beta} d\Omega \quad (D.9)$$

$$S_{\eta\beta} = - \int_{\Omega} \Psi_{\eta} \frac{1}{p} \phi J \Psi_{\beta} d\Omega \quad (D.10)$$

$$H_{\eta\beta} = - \int_{\Omega} \Psi_{\eta,i} \frac{\phi^2 \lambda}{J \mu} G_{ki} G_{kj} \Psi_{\beta,j} d\Omega \quad (D.11)$$

$$h_\eta = - \int_\Omega \Psi_\eta \frac{1}{p} p_{,i} \frac{\phi^2 \lambda}{J \mu} G_{ki} G_{kj} p_{,j} d\Omega \quad (D.12)$$

$$\dot{j}_\gamma^* = \int_{\partial\Omega^\sigma} \Phi_{i\gamma} \dot{i}_i^* d(\partial\Omega) + \int_\Omega \Phi_{i\gamma} \dot{g}_i^* d\Omega \quad (D.13)$$

$$q_\eta^* = \int_{\partial\Omega^\varphi} \Psi_\eta q^* d(\partial\Omega) \quad (D.14)$$

Dla przypadku symetrii osiowej wartości współczynników macierzy układu otrzymuje się przez podstawienie do równań (3.19) zależności (3.9) i, podobnie jak w poprzednim przypadku, zastosowanie twierdzenia Gaussa

$$\int_{\partial\Omega} v_k n_k d(\partial\Omega) \quad \text{dla dowolnego wektora } \{v_k(x_i)\}, \quad (D.15)$$

$$\int_{\partial\Omega^{pl}} \hat{v}_k \hat{n}_k d(\partial\Omega) = \int_{\Omega^{pl}} \text{dla dowolnego wektora } \{v_k(\xi_i)\}. \quad (D.16)$$

Równania (3.19) można przepisać w formie:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_\Omega \left(\Phi_{i\gamma,j} \dot{T}_{ij} + \frac{\Phi_{r\gamma}}{r} \dot{T}_{\varphi\varphi} \right) d\Omega + \int_{\Omega^{pl}} \left(\Phi_{i\gamma,j} \dot{T}_{ij}^{(pl)} + \frac{\Phi_{r\gamma}}{r} \dot{T}_{\varphi\varphi}^{(pl)} \right) d\Omega \\ & \qquad \qquad \qquad = \int_{\partial\Omega^\sigma} \Phi_{i\gamma} \dot{i}_i^* d(\partial\Omega) + \int_\Omega \Phi_{i\gamma} \dot{g}_i^* d\Omega \\ & \int_\Omega \left[-\Psi_\eta \left(G_{ki} \Phi_{k\alpha,i} + G_{\varphi\varphi} \frac{\Phi_{r\alpha}}{r} \right) \dot{q}_\alpha^* - \Psi_\eta \frac{1}{p} \phi J \Psi_\beta \dot{q}^p + \Psi_{\eta,i} \dot{w}_i \right] d\Omega \\ & \qquad \qquad \qquad = \int_{\partial\Omega^\varphi} \Psi_\eta q^* d(\partial\Omega) - \int_\Omega \Psi_\eta \frac{1}{p} p_{,i} \dot{w}_i d\Omega \end{aligned} \right. \quad (D.17)$$

Po uwzględnieniu (3.10–3.14) zapisujemy współczynniki macierzy układu (3.20) w postaci:

$$K_{\gamma\alpha} = K_{\gamma\alpha}^c + K_{\gamma\alpha}^\sigma + K_{\gamma\alpha}^p + K_{\gamma\alpha}^{pl} \quad (D.18)$$

$$K_{\gamma\alpha}^c = \int_\Omega \left[\Phi_{i\gamma,j} F_{ik} C_{kijlm} F_{nl} \Phi_{n\alpha,m} + \Phi_{i\gamma,j} F_{ik} C_{kj\varphi\varphi} F_{\varphi\varphi} \frac{\Phi_{r\alpha}}{r} + \frac{\Phi_{r\gamma}}{r} F_{\varphi\varphi} C_{\varphi\varphi l m} F_{nl} \Phi_{n\alpha,m} + \frac{\Phi_{r\gamma}}{r} F_{\varphi\varphi} C_{\varphi\varphi\varphi\varphi} F_{\varphi\varphi} \frac{\Phi_{r\alpha}}{r} \right] d\Omega \quad (D.19)$$

$$K_{\gamma\alpha}^\sigma = \int_\Omega \left(\Phi_{i\gamma,j} S_{kj}^{(s)} \Phi_{i\alpha,k} + \frac{1}{r} \Phi_{r\gamma} S_{\varphi\varphi}^{(s)} \Phi_{r\alpha} \right) d\Omega \quad (D.20)$$

$$K_{\gamma\alpha}^p = - \int_\Omega \frac{p}{J} \left[\Phi_{i\gamma,j} (G_{nm} G_{ij} - G_{im} G_{nj}) \Phi_{n\alpha,m} + \Phi_{i\gamma,j} G_{\varphi\varphi} G_{ij} \frac{1}{r} \Phi_{r\alpha} + \frac{1}{r} \Phi_{r\gamma} G_{nm} G_{\varphi\varphi} \Phi_{n\alpha,m} \right] d\Omega \quad (D.21)$$

$$K_{\gamma\alpha}^{pl} = - \int_{\Omega^{pl}} k' \left[\Phi_{i\gamma,j} (2\hat{G}_{nm} \hat{G}_{ij} - \hat{G}_{im} \hat{G}_{nj}) \Phi_{n\alpha,m} + \Phi_{i\gamma,j} 2\hat{G}_{\varphi\varphi} \hat{G}_{ij} \frac{1}{r} \Phi_{r\alpha} + \frac{1}{r} \Phi_{r\gamma} 2\hat{G}_{nm} \hat{G}_{\varphi\varphi} \Phi_{r\alpha,m} \right] d\Omega \quad (D.22)$$

$$L_{\gamma\beta} = - \int_\Omega \left(\Phi_{i\gamma,j} G_{ij} + \frac{1}{r} \Phi_{r\gamma} G_{\varphi\varphi} \right) \Psi_\beta d\Omega \quad (D.23)$$

$$S_{\eta\beta} = - \int_\Omega \Psi_\eta \frac{1}{p} \phi J \Psi_\beta d\Omega \quad (D.24)$$

- [15] Y.C. Fung. A model of the lung structure and its validation. *Journal of Applied Physiology*, 64:2132-2141, 1988.
- [16] Y.C. Fung, P. Tong, and P. Patitucci. Stress and strain in the lung. *Journal of the Engineering Mechanics Division. Proceedings of the ASCE*, 104:201-223, 1978.
- [17] J. Ghaboussi and E.L. Wilson. Flow of compressible fluid in porous elastic media. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 5:419-442, 1973.
- [18] J. Hildebrandt. Dynamic properties of air-filled excised cat lungs determined by liquid plethysmograph. *Journal of Applied Physiology*, 27:246-250, 1969.
- [19] J. Hildebrandt. Pressure-volume data of cat lung interpreted by a plastoelastic, linear viscoelastic model. *Journal of Applied Physiology*, 28:365-372, 1970.
- [20] F.G. Hoppin, Jr., G.C. Lee, and S.V. Dawson. Properties of lung parenchyma in distortion. *Journal of Applied Physiology*, 39:742-751, 1975.
- [21] R.E. Hyatt and R.E. Flath. Influences of lung parenchyma on pressure-diameter behavior of bronchi. *Journal of Applied Physiology*, 21:1448-1452, 1966.
- [22] M. Kaczmarek. *Analiza sprzężeń mechanicznych w ośrodku porowatym wypełnionym płynem z uwzględnieniem struktury wewnętrznej szkieletu*. Praca doktorska. IPPT, Warszawa, 1989.
- [23] H. Kobayashi, T. Abe, T. Kawashiro, K. Tanabe, and T. Yokoyama. Estimation of the distribution profile of airway resistance in the lungs. *Computers and Biomedical Research*, 20:507-525, 1987.
- [24] R. Kowe, R.C. Schroter, F.L. Matthews, and D. Hitchings. Analysis of elastic and surface tension effects in the lung alveolus using finite element methods. *Journal of Biomechanics*, 19:541-549, 1986.
- [25] S.J. Lai-Fook. Lung parenchyma as a prestressed compressible continuum. *Journal of Biomechanics*, 10:357-366, 1977.
- [26] S.J. Lai-Fook, T.A. Wilson, R.E. Hyatt, and J.R. Rodarte. Elastic constants of inflated lobes of dog lungs. *Journal of Applied Physiology*, 40:508-513, 1976.
- [27] R.K. Lambert and T.A. Wilson. A model for the elastic properties of lung and their effect on expiratory flow. *Journal of Applied Physiology*, 34:34-48, 1973.
- [28] R.K. Lambert, T.A. Wilson, R.E. Hyatt, and J.R. Rodarte. A computational model for expiratory flow. *Journal of Applied Physiology*, 52:44-56, 1982.
- [29] G.C. Lee and A. Frankus. Elasticity properties of lung parenchyma derived from experimental distortion data. *Biophysical Journal*, 15:481-493, 1975.
- [30] J.S. Lee, T. Fallon, M. Hunter, Q. Ye, and L.P. Lee. Respiratory effect on the blood volume of pulmonary capillaries. *Transactions of the ASME. Journal of Biomechanical Engineering*, 110:150-154, 1988.

- [31] R.W. Lewis and B.A. Schrefler. *The Finite Element Method in the Deformation and Consolidation of Porous Media*. Wiley, Chichester, 1987.
- [32] J.T. Liu and G.C. Lee. Static finite deformation analysis of the lung. *Journal of the Engineering Mechanics Division. Proceedings of the ASCE*, 104:225–238, 1978.
- [33] J. Mead, T. Takishima, and D. Leith. Stress distribution in lung: a model of pulmonary elasticity. *Journal of Applied Physiology*, 28:596–608, 1970.
- [34] Z. Mróz and N.C. Lind. Simplified theories of cyclic plasticity. *Acta Mechanica*, 22:131–152, 1975.
- [35] R. Rudowski. *Systemy eksperckie we wspomaganiu sztucznej wentylacji płuc*. Ossolineum, Wrocław, 1990.
- [36] R.S. Sandhu and E.L. Wilson. Finite element analysis of flow in saturated porous media. *Journal of the Engineering Mechanics Division. Proceedings of the ASCE*, 95:641–652, 1969.
- [37] E.M. Scarpelli, B.C. Clutario, and F.A. Taylor. Preliminary identification of the lung surfactant system. *Journal of Applied Physiology*, 6:880–886, 1967.
- [38] H. Slama, W. Schoedel, and E. Hansen. Lung surfactant: Film kinetics at the surface of an air bubble during prolonged oscillation of its volume. *Respiration Physiology*, 19:233–243, 1973.
- [39] D. Stamenović, G.M. Glass, G.M. Barnas, and J.J. Fredberg. Viscoplasticity of respiratory tissues. *Journal of Applied Physiology*, 69:973–988, 1990.
- [40] D. Stamenović and T.A. Wilson. A strain energy function for lung parenchyma. *Transactions of the ASME. Journal of Biomechanical Engineering*, 107:81–86, 1985.
- [41] T. Sugihara, J. Hildebrandt, and C.J. Martin. Viscoelastic properties of alveolar wall. *Journal of Applied Physiology*, 33:93–98, 1972.
- [42] T. Sugihara, C.J. Martin, and J. Hildebrandt. Length-tension properties of alveolar wall in man. *Journal of Applied Physiology*, 30:874–878, 1971.
- [43] J. Tani, M. Nakamura, H. Sasaki, T. Okubo, T. Takashima, and J. Hildebrandt. Mechanical behavior of lung parenchyma as a compressible continuum. A theoretical analysis. *Tohoku Journal of Experimental Medicine*, 137:125–136, 1982.
- [44] D.L. Vawter, Y.C. Fung, and J.B. West. Elasticity of excised dog's lung parenchyma. *Journal of Applied Physiology*, 45:261–269, 1978.
- [45] E.R. Weibel. *Morphometry of the Human Lung*. Academic Press, New York, 1963.
- [46] J.B. West. Distribution of mechanical stress in lung, a possible factor in localization of pulmonary disease. *The Lancet*, 839–841, 1971.
- [47] J.B. West. *Regional Differences in the Lung*. Academic Press, New York, 1977.

- [48] J.B. West and F.L. Matthews. Stress, strains, and surface pressures in the lung caused by its weight. *Journal of Applied Physiology*, 32:332-345, 1972.
- [49] T.A. Wilson. Parenchymal mechanics at the alveolar level. *Federation Proceedings*, 38:7-10, 1979.
- [50] T.A. Wilson. Surface tension-surface area curves calculated from pressure-volume curves. *Journal of Applied Physiology*, 53:1512-1520, 1982.
- [51] Y.J. Zeng, D. Yager, and Y.C. Fung. Measurement of the mechanical properties of the human lung tissue. *Transactions of the ASME. Journal of Biomechanical Engineering*, 109:169-174, 1987.
- [52] O.C. Zienkiewicz. *Metoda elementów skończonych*. Arkady, Warszawa, 1972.
- [53] O.C. Zienkiewicz, C. Humpheson, and R.W. Lewis. An unified approach to soil mechanics problems including plasticity and visco-plasticity. G. Gudehus, ed., *Finite Elements in Geomechanics*, chapter 4, 151-177. Wiley, London, 1977.

Spis treści

1	Wstęp	5
1.1	Cel i zawartość pracy	5
1.2	Uzasadnienie podjęcia tematu i dotychczasowy stan badań	6
2	Model fizyczny	8
2.1	Budowa i funkcje fizjologiczne płuc	8
2.2	Własności mechaniczne mięszu płucnego	9
2.2.1	Wyniki badań doświadczalnych	9
2.2.2	Modele konstytutywne	12
2.3	Analiza przepływu powietrza w drogach oddechowych	22
2.4	Podstawowy układ równań	28
2.4.1	Przepływ w dużych duktach powietrznych	28
2.4.2	Zagadnienie mechaniki mięszu	30
3.	Model numeryczny	43
3.1	Dyskretyzacja przestrzenna	43
3.2	Rodzaje elementów skończonych	46
3.3	Sformułowanie macierzowe dla zagadnienia sprzężonego	48
3.4	Dyskretyzacja czasowa	49
3.5	Schemat rozwiązania iteracyjnego	50
4	Wyniki testów numerycznych	52
4.1	Deformacja i filtracja w silnie odkształcalnym ośrodku porowatym	52
4.2	Deformacja z kontaktowym warunkiem brzegowym	58
4.3	Testy modelu płuc ludzkich dla różnych przypadków obciążenia	61
4.3.1	Dane materiałowe i geometryczne	61
4.3.2	Model płuc obciążony własnym ciężarem	65
4.3.3	Efekty sprzężeń mechanicznych przy wdechu realizowanym z różną szybkością	66
5	Wnioski	75
5.1	Krytyczna ocena zaprezentowanego modelu. Proponowane kierunki dalszych badań	75
5.2	Elementy oryginalne rozprawy	77
A	Wyprowadzenie zależności współczynnika przepuszczalności mięszu od jego dylatacji (2.29)	78

B	Zależności pomiędzy tensorami odkształcenia, naprężenia i stałych materiałowych w różnych konfiguracjach odniesienia	80
C	Pochodne przestrzenne wektorów i tensorów w układzie współrzędnych walcowych	82
D	Postacie współczynników macierzy układu (3.20)	84
	Bibliografia	87



56689