PAN
12108

Prof. Dr. K. Twardowski

Wielmożnemu Prof. Dr. K. Twardowskiemu
z wyrazami głębokiego szacunku
od autora.

12108

O związku między istnieniem granicy $\lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ a ciągłością funkcyi $f(x)$.

NAPISAŁ

W. SIERPIŃSKI.

WARSZAWA
WYDAWNICTWO REDAKCYI
PRAC MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH.

—

1913.

rcin.org.pl

rcin.org.pl

Połączone Biblioteki WFiS UW, IFiS PAN i PTF
P.12108
19012108000000

O związku między istnieniem granicy $\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ a ciągłością funkcyi $f(x)$.

12108

NAPISAŁ

W. SIERPIŃSKI.

WARSZAWA
WYDAWNICTWO REDAKCYI
PRAC MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH.

—

1913.

rcin.org.pl

12108

Instytut Filozofii i Socjologii
BIBLIOTEKA
P. A. N.

Osobne odbicie z tomu XXVI-go.

„PRAC MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH“.

K
19.12.59
A.568

Drukarnia Rubieszewskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.

rcin.org.pl

W. SIERPIŃSKI.

O związku między istnieniem granicy $\lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ a ciągłością funkcyi $f(x)$.

Sur la relation entre l' existence de la limite $\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ et la continuité de la fonction $f(x)$.

---

1. Celem niniejszej pracy jest bliższe zbadanie związku, jaki zachodzi między istnieniem dla danej funkcyi (zmiennej rzeczywistej) $f(x)$ i danej wartości x_0 granicy $\lim\limits_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}\right)_{x=x_0}$, czyli granicy

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0)}{h^2}, \tag{1}$$

a ciągłością funkcyi $f(x)$ dla wartości $x = x_0$.

Pewne ciekawe twierdzenia, dotyczące granicy (1), podał A. Harnack [1]. Zawdzięczamy mu np. twierdzenie, że jeżeli istnieje pochodna $f''(x_0)$, to istnieje też granica (1) i jest równa $f''(x_0)$ [2]. Twierdzenie to, jak zauważył Harnack, nie daje się odwrócić. Np. dla funkcyi $f(x)$, określonej przez warunki:

$$f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x}, \quad \text{dla} \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0,$$

---

[1]) Die allgemeine Sätze über den Zusammenhang der Funktionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableitungen. Math. Annalen **23** (1884), p. 224—284, oraz: Elemente der Diff. und Int. Rechn. Lipsk 1884.

[2]) Math. Annalen **23**, p. 260, albo: E. Pascal: Esercizii critici di calcolo diff. e int. Milano 1909, p. 124 lub w przekładzie polskim, Warszawa 1909, p. 100.

rcin.org.pl

istnieje dla $x_0 = 0$ granica (1) i jest równa zeru, natomiast $f''(0)$ nie istnieje; istnieje jednak pierwsza pochodna $f'(0)$. Dla funkcyi zaś $f(x) = |x|$, jak łatwo widzieć, dla $x_0 = 0$ granica (1) jest zerem, natomiast nie istnieje już nawet $f'(0)$.

W obu wspomnianych przykładach funkcya $f(x)$ jest ciągła.

2. Podamy obecnie przykład funkcyi $f(x)$, nieciągłej dla wartości x_0, dla której istnieje granica (1). Określimy w tym celu funkcyę $f(x)$ w następujący sposób:

Jeżeli x jest liczbą formy

$$\pm \frac{2^k}{3^n}, \quad \text{gdzie} \quad \begin{cases} k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \dots \\ n = 1, \ 2, \ 3, \dots, \end{cases} \tag{2}$$

to

$$f(x) = 3^n x,$$

dla wszystkich zaś innych rzeczywistych x:

$$f(x) = 0.$$

(Jasnem jest, że wartość funkcyi $f(x)$ będzie przez powyższe warunki wyznaczona jednoznacznie przy wszelkiem rzeczywistem x, gdyż każda liczba rzeczywista daje się conajwyżej w jeden tylko sposób przedstawić w postaci (2)).

Powiadam, że określona w powyższy sposób funkcya $f(x)$ będzie przy wszelkiem rzeczywistem x spełniała równanie funkcyjne:

$$f(2x) = 2f(x). \tag{3}$$

W samej rzeczy, jeżeli liczba rzeczywista x nie jest formy (2), to liczba $2x$ również nie może być formy (2) i, wobec definicyi naszej funkcyi, mamy wtedy: $f(x) = 0$, $f(2x) = 0$; równanie (3) jest zatem wtedy spełnione.

Jeżeli zaś

$$x = \pm \frac{2^k}{3^n}, \qquad (k \text{ całkowite, } n \text{ naturalne})$$

to $2x = \pm \frac{2^{k+1}}{3^n}$, gdzie wykładnik $k+1$ znowu jest całkowity; w myśl definicyi naszej funkcyi będzie więc:

$$f(x) = 3^n x, \qquad f(2x) = 3^n \cdot 2x,$$

skąd znowu wynika wzór (3).

Funkcya $f(x)$ spełnia więc równanie (3). Okażemy teraz, że dla $x_0 = 0$ jest ona nieciągła. W samej rzeczy, połóżmy

rcin.org.pl

$$x_n = \frac{1}{3^n};$$

będzie, w myśl definicyi naszej funkcyi:

$$f(x_n) = 3^n x_n = 1,$$

zatem

$$\lim_{n=\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} f(x_n) = 1,$$

natomiast stale $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$. Funkcya $f(x)$ posiada więc dla $x = 0$ nieciągłość 2-go rodzaju.

Wobec wzoru (3), mamy przy wszelkiem rzeczywistem h:

$$f(2h) - 2f(h) = 0,$$

a ponieważ $f(0) = 0$, więc mamy dla $x_0 = 0$ przy wszelkiem h:

$$f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0) = 0,$$

skąd wynika, że granica (1) istnieje i jest równa zeru.

Istnienie granicy (1) nie pociąga więc za sobą ciągłości funkcyi $f(x)$ dla $x = x_0$.

Badana przez nas funkcya nie jest nawet ograniczona, gdyż np.

$$f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 2^n,$$

przy wszelkiem naturalnem n.

3. Zauważymy, że możnaby nawet zbudować funkcyę $f(x)$, dla której istnieje każda z granic

$$\lim_{\Delta x=0} \left(\frac{\Delta^p f}{\Delta x^p}\right)_{x=x_0}, \quad (p = 2, 3, 4, \ldots) \tag{4}$$

pomimo że sama funkcya nie jest ciągła dla $x = x_0$. W samej rzeczy, określimy funkcyę $f(x)$ jak następuje:

Jeżeli x jest liczbą formy $\frac{w}{e^n}$, gdzie w jest liczbą wymierną $\neq 0$, n — liczbą naturalną, to

$$f(x) = e^n x,$$

w przeciwnym zaś razie

$$f(x) = 0.$$

(Jasnem jest, wobec przestępności liczby e, że żadna liczba rzeczywista różna od zera nie daje się dwoma różnemi sposobami przedstawić w postaci $\frac{w}{e^n}$).

rcin.org.pl

Powiadam, że będzie przy wszelkiem naturalnem $p > 1$:

$$(\Delta^p f)_{x=0} = 0, \tag{5}$$

t. zn. przy wszelkiem rzeczywistem h i naturalnem $p > 1$:

$$f(ph) - \binom{p}{1} f((p-1)h) + \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1} f(h) + (-1)^p f(0) = 0, \tag{6}$$

gdzie $\binom{p}{k}$ oznacza spółczynnik Newtonowski:

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1.2\ldots.k}.$$

W samej rzeczy, jeżeli h nie jest formy $\frac{w}{e^n}$ (w wymierne $\neq 0$, n — naturalne), to nie jest też tej formy żadna całkowita wielokrotność liczby h i wówczas, w myśl definicyi naszej funkcyi, każdy ze składników lewej strony wzoru (6) jest zerem.

Załóżmy teraz, że $h = \frac{w}{e^n}$, gdzie w jest wymierne $\neq 0$, n — naturalne. Będzie więc przy wszelkiem naturalnem k, $kh = \frac{kw}{e^n} = \frac{w_k}{e^n}$, gdzie w_k jest znowu liczbą wymierną $\neq 0$, zatem, w myśl definicyi naszej funkcyi: $f(kh) = e^n kh$, a że oczywiście $f(0) = 0$, więc lewa strona wzoru (6) przyjmuje teraz postać:

$$e^n h\left[p - \binom{p}{1}(p-1) + \binom{p}{2}(p-2) - \ldots. + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1}\right]. \tag{7}$$

Powiadam, że szereg, wypisany w nawiasie, jest zerem dla $p>1$. W samej rzeczy, mamy przy wszelkiem rzeczywistem x i naturalnem p:

$$(x-1)^p = x^p - \binom{p}{1}x^{p-1} + \binom{p}{2}x^{p-2} - \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1}x + (-1)^p,$$

skąd, biorąc pochodne względem x po obu stronach:

$$p(x-1)^{p-1} = p\,x^{p-1} - \binom{p}{1}(p-1)\,x^{p-2} + \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1};$$

zatem, kładąc $x = 1$, otrzymujemy dla $p > 1$:

$$0 = p - \binom{p}{1}(p-1) + \ldots. + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1},$$

c. b. d. o.

rcin.org.pl

Wyrażenie (7) jest więc zerem i wzór (6) znowu zachodzi. Udowodniliśmy więc wzór (5), skąd wynika, że dla $x_0=0$ istnieje każda z granic (4) i jest równa zeru. Funkcya nasza jest atoli dla $x=0$ nieciągła, a nawet w otoczeniu zera nie jest ograniczona, gdyż np.

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^n = 0, \quad \text{zaś} \quad f\left(\left(\frac{2}{e}\right)^n\right) = 2^n.$$

4. Podane w poprzednich artykułach przykłady funkcyj nieciągłych, dla których istnieje granica (1), były zarazem funkcyami, które nie są ograniczone w otoczeniu punktu x_0. Zachodzi wobec tego pytanie, czy można zbudować funkcyę ograniczoną, nieciągłą dla danej wartości $x=x_0$, dla której istnieje granica (1)?

Odpowiedź na to pytanie daje następujące twierdzenie:

Jeżeli dla danej funkcyi $f(x)$, ograniczonej w otoczeniu punktu x_0 istnieje granica (1), to funkcya ta jest dla wartości x_0 ciągła. Twierdzenie to jest natychmiastowym wnioskiem z następującego twierdzenia:

Jeżeli funkcya $f(x)$ jest ograniczona w otoczeniu punktu x_0 i jeżeli

$$\lim_{h=0}\,(f(x+2h)-2f(x+h)+f(x))=0, \tag{8}$$

to funkcya $f(x)$ jest ciągła dla $x=x_0$.

Dowód. Połóżmy

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\varphi(h); \tag{9}$$

będzie więc

$$f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)=\varphi(2h)-2\varphi(h)$$

i warunek (8) daje:

$$\lim\,(\varphi(2h)-2\varphi(h))=0, \tag{10}$$

zatem też:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{t=0}\left[\varphi(t)-2\varphi\left(\frac{t}{2}\right)\right]=0,\\
&\lim_{t=0}\left[\varphi\left(\frac{t}{2}\right)-2\varphi\left(\frac{t}{2^2}\right)\right]=0,\\
&\quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\lim_{t=0}\left[\varphi\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)-2\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)\right]=0
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Mnożąc drugie z równań (11) przez 2, trzecie przez $2^2, \ldots$, ostatnie przez 2^{n-1} i dodając stronami, otrzymujemy przy wszelkiem naturalnem n:

rcin.org.pl

$$\lim_{t=0}\left[\varphi(t) - 2^n\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)\right] = 0,$$

zatem, dla $|t| < \delta_n$, gdzie δ_n oznacza liczbę dodatnią zależną jedynie od n:

$$\left|\varphi(t) - 2^n\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)\right| < 1. \tag{12}$$

Z założenia, że funkcya $f(x)$ jest ograniczona w otoczeniu punktu x_0, wynika, że istnieje takie $\delta_0 > 0$ oraz takie M, iż dla $|t| < \delta_0$:

$$|f(x_0 + t)| < M,$$

zatem, w myśl (9):

$$|\varphi(t)| < 2M.$$

Będzie więc, wobec (12), przy wszelkiem t, mniejszem bezwzględnie od każdej z liczb δ_n i δ_0:

$$\left|\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)\right| < \frac{2M+1}{2^n}. \tag{13}$$

Niech teraz ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Obierzmy n tak wielkie, iżby było

$$\frac{2M+1}{2^n} < \varepsilon \tag{14}$$

i oznaczmy przez δ niewiększą z liczb $\frac{\delta_n}{2^n}$ i $\frac{\delta_0}{2^n}$.

Dla

$$|h| < \delta \tag{15}$$

będzie jednocześnie

$$|h| < \frac{\delta_n}{2^n} \quad \text{oraz} \quad |h| < \frac{\delta_0}{2^n};$$

kładąc

$$t = 2^n h, \tag{16}$$

będziemy więc mieli dla t nierówności

$$|t| < \delta_n \quad \text{oraz} \quad |t| < \delta_0,$$

które pociągają za sobą nierówność (13), czyli, wobec (16) i (14), nierówność:

$$|\varphi(h)| < \varepsilon. \tag{17}$$

Dowiedliśmy więc, że do każdego dodatniego ε można dobrać takie dodatnie δ, iżby nierówność (15) pociągała za sobą nierówność (17), czyli, wobec (9), nierówność

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

rcin.org.pl

Dowodzi to, że funkcya $f(x)$ jest ciągła dla $x = x_0$, c. b. d. o.

Ciekawem byłoby wiedzieć, czy dla funkcyi $f(x)$, ograniczonej w otoczeniu punktu x_0, warunek

$$\lim_{\Delta x = 0} (\Delta^3 f(x))_{x=x_0} = 0,$$

czyli warunek

$$\lim_{h=0} [f(x_0+3h) - 3f(x_0+2h) + 3f(x_0+h) - f(x_0)] = 0$$

również pociąga za sobą ciągłość funkcyi dla $x = x_0$. Zagadnienie to uważam za bardzo trudne.

5. Wobec dowiedzionego w poprzednim artykule twierdzenia, że istnienie granicy (1) pociąga za sobą dla funkcyi ograniczonej jej ciągłość w punkcie x_0, godnem uwagi jest, że istnienie granicy

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} \text{ [1]} \tag{18}$$

nie pociąga za sobą, nawet dla funkcyi ograniczonej, jej ciągłości w punkcie x_0. Np. dla funkcyi, określonej przez warunki:

$$f(x) = 1, \quad \text{dla} \quad x > 0,$$

$$f(x) = -1 \quad \text{dla} \quad x < 0,$$

$$f(0) = 0,$$

dla $x_0 = 0$ granica (18), jak łatwo widzieć, istnieje i jest zerem, zaś sama funkcya jest nieciągła dla $x = 0$, ale ograniczona dla wszystkich wartości rzeczywistych x.

Istnienie granicy (18) nie pociąga więc za sobą istnienia granicy (1); ale i naodwrót, gdyż np. dla funkcyi $f(x) = |x|$ istnieje granica (1) dla $x_0 = 0$, ale nie istnieje granica (18). Zachodzi jednak

Twierdzenie. Jeżeli dla danej funkcyi $f(x)$ i danej wartości $x = x_0$ istnieją obie granice (1) i (18), to są one sobie równe.

Dowód. Załóżmy, że dla danej funkcyi $f(x)$ i danej wartości x_0 istnieją obie granice (1) i (18) i połóżmy:

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0)}{h^2} = A, \tag{19}$$

[1]) Jest to tak zwana uogólniona druga pochodna (Schwarza).

rcin.org.pl

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}=B. \tag{20}$$

Wobec (19) możemy też napisać:

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0-2h)-2f(x_0-h)+f(x_0)}{h^2}=A, \tag{21}$$

zaś, wobec (20):

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0+2h)-2f(x)+f(x_0-2h)}{h^2}=4B. \tag{22}$$

Wobec (22) i (20) mamy:

$$\lim_{h=0} \left[\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0)+f(x_0-2h)}{h^2} - 2\,\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}\right]=2B,$$

co możemy też napisać w postaci:

$$\lim_{h=0} \left[\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2} + \frac{f(x_0-2h)-2f(x_0-h)+f(x_0)}{h^2}\right]=2B,$$

co, wobec (19) i (21) daje:

$$2A=2B,$$

skąd $A=B$, c. b. d. o.

6. Opierając się na znanym pewniku Zermelo[1]), dowiódł G. Hamel[2]), że istnieją funkcye, nieciągłe dla każdej wartości zmiennej, spełniające równanie funkcyjne

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Dla każdej takiej funkcyi będzie przy wszelkiem x i wszelkiem h, jak łatwo widzieć:

$$f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)=0,$$

jako też:

$$f(x+h)-2f(x)+f(x-h)=0,$$

zatem granice (1) i (18) istnieją przy wszelkiem x i są zerem.

---

1) Pewnik ten brzmi: „Dla każdej mnogości zbiorów Z, nie posiadających elementów wspólnych, istnieje mnogość M, zawierająca po jednym i tylko jednym elemencie z każdego ze zbiorów Z" (Zob. Math. Ann. **59**, p. 517 oraz **65**, p. 266).

2) Math. Ann. **60**, p. 459—462.

rcin.org.pl

Istnieją więc funkcye wszędzie nieciągłe, dla których granice (1) i (18) są zerem przy wszelkiem x.

Dla funkcyj Hamela będzie też przy wszelkiem x, h, k:

$$f(x+k+h)-f(x+k)-f(x+h)+f(x)=0,$$

zatem

$$\lim_{k=0}\ \lim_{h=0} \frac{f(x+k+h)-f(x+k)-f(x+h)+f(x)}{kh}=0$$

przy wszelkiem rzeczywistem x, pomimo że pochodna $f''(x)$ nie istnieje dla żadnej wartości x.

Lwów, w listopadzie 1913 r.

rcin.org.pl

Instytut Filozofii i Socjologii
BIBLIOTEKA
P. A. N.

rcin.org.pl

rcin.org.pl

PAN 12108
Połączone Biblioteki WFiS UW, IFiS PAN i PTF
P.12108
19012108000000
rcin.org.pl