MÉTHODE

POUR LA

RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM.

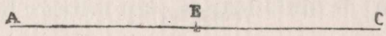
Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite $a+e$ à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On *adégalera,* pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par e, ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression.

Voici un exemple :

Soit à partager la droite AC (*fig.* 91) *en* E, *en sorte que* AE $\times$ EC *soit maximum*.

Fig. 91.



Posons AC $= b$; soit a un des segments, l'autre sera $b - a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b, le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$;

Il doit être *adégalé au précédent :* $ba - a^2$;

Supprimant les termes communs : $be \backsim 2ae + e^2$;

Divisant tous les termes : $b \backsim 2a + e$;

Supprimez e : $b = 2a$.

Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b.

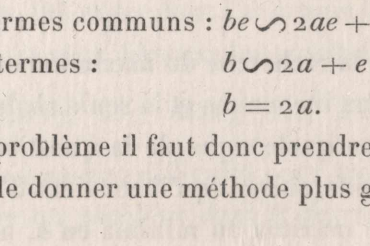
Il est impossible de donner une méthode plus générale.

DES TANGENTES DES LIGNES COURBES.

Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques.

Soit donnée, par exemple, la parabole BDN (*fig.* 92), de sommet D,

Fig. 92.



de diamètre DC; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.

Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O, dont on mène l'ordonnée OI, en même temps que l'ordonnée BC du point B, on aura : $\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DI}} > \frac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{OI}^2}$, puisque le point O est extérieur à la parabole. Mais $\frac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{OI}^2} = \frac{\mathrm{CE}^2}{\mathrm{IE}^2}$, à cause de la similitude des triangles. Donc $\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DI}} > \frac{\mathrm{CE}^2}{\mathrm{IE}^2}$.

Or le point B est donné, donc l'ordonnée BC, donc le point C, donc CD. Soit donc $\mathrm{CD} = d$, donnée. Posons $\mathrm{CE} = a$ et $\mathrm{CI} = e$; on aura $\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$.

Faisons le produit des moyens et des extrêmes :

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Adégalons donc, d'après la méthode précédente; on aura, en retranchant les termes communs :

$$de^2 - 2dae \backsim - a^2e,$$

ou, ce qui revient au même :

$$de^2 + a^2e \backsim 2dae.$$

Divisez tous les termes par e :

$$de + a^2 \backsim 2da.$$

Supprimez de : il reste $a^2 = 2da$, donc : $a = 2d$.

Nous prouvons ainsi que CE est double de CD, ce qui est conforme à la vérité.

Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrons traiter ailleurs, si nous en avons le loisir.

Quant à la quadrature des aires limitées par des lignes courbes et droites, ainsi qu'au rapport que les solides qu'elles engendrent ont aux cônes de même base et même hauteur, nous en avons déjà longuement traité avec M. de Roberval.

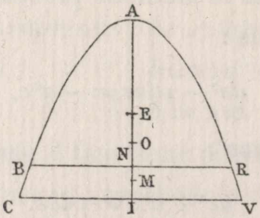
II.

CENTRE DE GRAVITÉ DU CONOIDE PARABOLIQUE,

D'APRÈS LA MÊME MÉTHODE.

Soit CBAV (*fig.* 93) un conoïde parabolique, ayant pour axe IA, et pour base un cercle de diamètre CIV. Cherchons son centre de gravité par cette méthode toujours et toujours la même, qui nous a servi pour

Fig. 93.



les maxima, les minima et les tangentes des lignes courbes, et prouvons ainsi, par de nouveaux exemples et par un nouvel et brillant emploi de cette méthode, l'erreur de ceux qui croient qu'elle peut être en défaut.

Pour pouvoir arriver à l'analyse, posons $IA = b$. Soit O le centre de gravité; appelons a la longueur AO inconnue; coupons l'axe IA par un plan quelconque BN, et posons $IN = e$, d'où $NA = b - e$.

Il est clair que, dans cette figure et les semblables (paraboles ou paraboliques), les centres de gravité, dans les segments retranchés par les parallèles à la base, divisent les axes dans un rapport constant (il est évident, en effet, que la démonstration d'Archimède pour la parabole peut s'étendre, par un raisonnement identique, à toutes les paraboles et aux conoïdes paraboliques). Donc le centre de gravité du segment, dont NA est l'axe et BN le rayon de base, divisera AN en un point comme E, en sorte que $\frac{NA}{AE} = \frac{IA}{AO}$, ou, en notes, $\frac{b}{a} = \frac{b-e}{AE}$.

La portion de l'axe sera donc $AE = \frac{ba - ae}{b}$, et l'intervalle des deux centres de gravité, $OE = \frac{ae}{b}$.

Soit M le centre de gravité de la partie restante CBRV; il doit nécessairement tomber entre les points N, I, à l'intérieur de la figure, d'après le postulatum 9 d'Archimède *De æquiponderantibus,* puisque CBRV est une figure entièrement concave par rapport à son intérieur.

Mais $\frac{\text{Partie CBRV}}{\text{Partie BAR}} = \frac{EO}{OM}$, puisque O est le centre de gravité de la figure totale CAV et que E et M sont ceux des parties.

Or dans le conoïde d'Archimède, $\frac{\text{Partie CAV}}{\text{Partie BAR}} = \frac{IA^2}{NA^2} = \frac{b^2}{b^2 + e^2 - 2be}$; donc, *dividendo :* $\frac{\text{Partie CBRV}}{\text{Partie BAR}} = \frac{2be - e^2}{b^2 + e^2 - 2be}$. Mais nous avons prouvé que $\frac{\text{Partie CBRV}}{\text{Partie BAR}} = \frac{OE}{OM}$. Donc, en notes, $\frac{2be - e^2}{b^2 + e^2 - 2be} = \frac{OE\left(= \frac{ae}{b}\right)}{OM}$; d'où $OM = \frac{b^2ae + ae^3 - 2bae^2}{2b^2a - be^2}$.

D'après ce qui a été établi, le point M est entre les points N et I; donc $OM < OI$; or, en notes, $OI = b - a$. La question est donc ramenée à notre méthode, et l'on peut poser

$$b - a \backsim \frac{b^2ae + ae^3 - 2bae^2}{2b^2e - be^2}.$$

Multipliant de part et d'autre par le dénominateur, et divisant par e :

$$2b^3 - 2b^2a - b^2e + bae \backsim b^2a + ae^2 - 2bae.$$

Puisqu'il n'y a pas de termes communs, supprimons tous ceux où entre e et égalons les autres :

$$2b^3 - 2b^2a = b^2a, \qquad \text{d'où} \qquad 3a = 2b.$$

Par conséquent $\frac{IA}{AO} = \frac{3}{2}$, et $\frac{AO}{OI} = \frac{2}{1}$. C. Q. F. T.

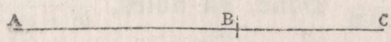
La même méthode s'applique à tous les centres de gravité de toutes les paraboles à l'infini, comme à ceux des conoïdes paraboliques. Je n'ai pas le temps d'indiquer, par exemple, comment on cherchera les centres de gravité dans *notre conoïde parabolique de révolution autour de l'ordonnée;* qu'il suffise de dire que, dans ce conoïde, le centre de gravité divise l'axe en deux segments qui sont dans le rapport $\frac{11}{5}$.

III.

SUR LA MÊME MÉTHODE.

Je veux, au moyen de ma méthode, *partager la ligne donnée* AC (*fig.* 94) *au point* B, *en sorte que* $AB^2 \times BC$ *soit le maximum* de tous les solides que l'on peut former de la même façon en partageant la ligne AC.

Fig. 94.



Posons, en notations algébriques, $AC = b$, l'inconnue $AB = a$; on aura $BC = b - a$ et le solide $a^2b - a^3$ doit satisfaire à la condition proposée.

Prenons maintenant $a + e$ au lieu de a, on aura pour le solide

$$(a+e)^2(b-e-a) = ba^2 + be^2 + 2bae - a^3 - 3ae^2 - 3a^2e - e^3.$$

Je le compare au premier solide; $a^2b - a^3$, comme s'ils étaient égaux, quoiqu'en fait ils ne le soient point. C'est cette comparaison que j'appelle *adégalité,* pour parler comme Diophante, car on peut ainsi traduire le mot grec παρισότης dont il se sert.

Je retranche ensuite de part et d'autre les termes communs, c'est-à-dire $ba^2 - a^3$. Cela fait, dans un membre il ne reste rien, dans l'autre on a $be^2 + 2bae - 3ae^2 - 3a^2e - e^3$. Il faut donc comparer les termes en plus et ceux en moins; on a ainsi une seconde *adégalité* entre $be^2 + 2bae$ d'une part, $3ae^2 + 3a^2e + e^3$ de l'autre. Divisons tous les termes par e, l'*adégalité* aura lieu entre $be + 2ba$ et $3ae + 3a^2 + e^2$. Après cette division, si tous les termes peuvent encore être divisés par e, il faut réitérer la division, jusqu'à ce qu'on ait un terme qui ne se prête plus à cette division par e, ou, pour employer le langage de Viète, qui ne soit plus affecté de e. Mais, dans l'exemple proposé, nous trouvons que la division ne peut être réitérée. Il faut donc s'arrêter là.

Maintenant je supprime tous les termes affectés de e; il me reste d'une part $2ba$, de l'autre $3a^2$, membres entre lesquels il faut établir, non plus comme auparavant, une comparaison feinte ou une *adégalité*, mais bien une véritable équation. Je divise de part et d'autre par a; j'ai donc $2b = 3a$ ou $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$.

Revenons à notre question, et divisons AC en B en sorte que $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$, je dis que le solide $AB^2 \times BC$ est le maximum de tous ceux qui peuvent être formés sur la ligne AC, par une autre division quelconque.

Pour établir la certitude de cette méthode, je prendrai un exemple du Livre d'Apollonius, *De la section déterminée,* lequel au rapport de Pappus (Livre VII, commencement) renfermait des limitations difficiles et notamment celle qui suit et que je considère comme la plus difficile. Pappus (Livre VII) la suppose trouvée et, sans la démontrer vraie, la regarde comme telle et en tire d'autres conséquences. En cet endroit, Pappus appelle un rapport minimum μοναχὸν καὶ ἐλάχιστον (singulier et minimum), parce que, si l'on propose une question sur des grandeurs données, et qu'elle soit en général satisfaite par deux points, pour les valeurs maxima ou minima, il n'y aura qu'un point qui satisfasse. C'est pour cela que Pappus appelle *minimum* et *singulier* (c'est-à-dire unique) le plus petit rapport de tous ceux qui peuvent être proposés dans la question. Commandin doute en cet endroit de la signification du terme μοναχός qu'emploie Pappus, parce qu'il ignore la vérité que je viens d'expliquer.

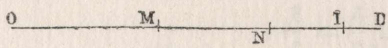
Voici la proposition. — *Soit une droite donnée* OMID (*fig.* 95) *et sur cette droite quatre points donnés* O, M, I, D. *Il faut diviser le segment* MI *en un point* N, *en sorte que* $\frac{ON \times ND}{MN \times MI}$ *soit un rapport plus petit que celui de deux autres rectangles semblables quelconques* $\frac{ON \times ND}{MN \times NI}$.

Posons les données $OM = b$, $DM = z$, $MI = g$, et soit maintenant l'inconnue $MN = a$. On aura donc en notations

$$ON \times ND = bz - ba + za - a^2, \qquad MN \times NI = ga - a^2.$$

Il faut donc que le rapport $\dfrac{bz - ba + za - a^2}{ga - a^2}$ soit le plus petit de tous ceux qui peuvent être obtenus par une division quelconque de la droite MI.

Fig. 95.



Substituons maintenant $a + e$ à a, nous aurons le rapport

$$\frac{bz - ba - be + za + ze - a^2 - e^2 - 2ae}{ga + ge - a^2 - e^2 - 2ae},$$

qu'il faut comparer par *adégalité* au premier, c'est-à-dire qu'on multipliera d'un côté le premier terme par le quatrième, de l'autre, le second par le troisième, et que l'on comparera les deux produits :

$$\begin{aligned}&\underset{\text{premier terme}}{(bz - ba + za - a^2)}\underset{\text{dernier terme}}{(ga + ge - a^2 - e^2 - 2ae)}\\ &= bzga - gba^2 + gza^2 - ga^3 + bzge - bage\\ &\qquad + zage - a^2ge - bza^2 + ba^3 - za^2 + a^4\\ &\qquad + bze^2 + bae^2 - zae^2 + a^2e^2 - 2bzae\\ &\qquad + 2ba^2e - 2za^2e + 2a^3e.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}&\underset{\text{second terme}}{(ga - a^2)}\underset{\text{troisième terme}}{(bz - ba - be + za + ze - a^2 - e^2 - 2ae)}\\ &= bzga - gba^2 - gbae + gza^2 + gzae\\ &\qquad - ga^3 - gae^2 - 2ga^2e - bza^2 + ba^3\\ &\qquad + ba^2e - za^3 - za^2e + a^4 + a^2e^2 + 2a^3e.\end{aligned}$$

Je compare ces deux produits par *adégalité*; retranchant les termes communs et divisant par e,

$$\begin{aligned}&bzg - a^2g - bze + bae - zae - 2bza - 2za^2 + 2ba^2\\ &\backsim - gae - 2ga^2 + ba^2 - za^2.\end{aligned}$$

Supprimant tous les termes où se trouve encore e, il reste

$$bzg - a^2g - 2bza - 2za^2 + 2ba^2 = -2ga^2 + ba^2 - za^2,$$

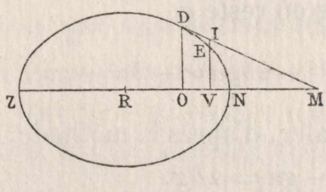
et, en transposant,

$$-ba^2 + za^2 - ga^2 + 2bza = bzg.$$

En résolvant cette équation, nous trouverons la valeur de a ou de MN, par suite le point N, et nous vérifierons la proposition de Pappus, qui enseigne que, pour trouver le point N, il faut faire $\frac{\mathrm{OM.MD}}{\mathrm{OI.ID}} = \frac{\mathrm{MN}^2}{\mathrm{NI}^2}$; car la résolution de l'équation nous conduira à la même construction.

Pour appliquer aussi cette même méthode aux *tangentes*, je puis procéder comme suit. Soit, par exemple, l'ellipse ZDN (*fig.* 96),

Fig. 96.



d'axe ZN et de centre R. Prenons sur sa circonférence un point comme D, menons par ce point la tangente DM à l'ellipse et l'ordonnée DO. Posons, en notations algébriques, la donnée $\mathrm{OZ} = b$ et la donnée $\mathrm{ON} = g$; soit l'inconnue $\mathrm{OM} = a$, en comprenant par OM la portion de l'axe comprise entre le point O et le point de rencontre avec la tangente.

Puisque DM est tangente à l'ellipse, si, par un point V pris *aa libitum* entre O et N, je mène IEV parallèle à DO, il est évident que la ligne IEV coupe la tangente DM et l'ellipse, soit aux points E et I. Mais, puisque DM est tangente à l'ellipse, tous ses points, sauf D, sont en dehors de l'ellipse, donc $\mathrm{IV} > \mathrm{EV}$ et $\frac{\mathrm{DO}^2}{\mathrm{EV}^2} > \frac{\mathrm{DO}^2}{\mathrm{IV}^2}$. Mais, d'après la propriété de l'ellipse, $\frac{\mathrm{DO}^2}{\mathrm{EV}^2} = \frac{\mathrm{ZO.ON}}{\mathrm{ZV.VN}}$, et d'autre part $\frac{\mathrm{DO}^2}{\mathrm{IV}^2} = \frac{\mathrm{OM}^2}{\mathrm{VM}^2}$. Donc $\frac{\mathrm{ZO.ON}}{\mathrm{ZV.VN}} > \frac{\mathrm{OM}^2}{\mathrm{VM}^2}$.

Soit l'arbitraire $OV = e$, nous aurons

$$ZO.ON = bg, \quad ZV.VN = bg - be + ge - e^2,$$
$$OM^2 = a^2, \quad VM^2 = a^2 + e^2 - 2ae.$$

Donc $\dfrac{bg}{bg - be + ge - e^2} > \dfrac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}$. Si donc on multiplie le premier terme par le dernier et le second par le troisième, on aura

$$\underbrace{bga^2 + bge^2 - 2bgae}_{\text{produit du premier terme par le dernier}} > bga^2 - bea^2 + gea^2 - a^2e^2.$$

Il faut donc, suivant ma méthode, comparer par adégalité ces deux produits, retrancher ce qui leur est commun et diviser ce qui reste par e; on aura donc

$$bge - 2bga \backsim - ba^2 + ga^2 - a^2e.$$

Supprimant les termes où reste e,

$$-2bga \backsim - ba^2 + ga^2,$$

membres qu'il faut égaler, d'après la méthode. Transposant comme il convient, on aura $ba - ga = 2bg$.

On voit que cette solution est la même que celle d'Apollonius, car, d'après ma construction, pour trouver la tangente, il faut faire $\dfrac{b-g}{g} = \dfrac{2b}{a}$ ou $\dfrac{ZO - ON}{ON} = \dfrac{2ZO}{OM}$, tandis que, d'après celle d'Apollonius, il faut faire $\dfrac{ZO}{ON} = \dfrac{ZM}{MN}$. Il est clair que ces deux constructions reviennent au même.

Je pourrais ajouter nombre d'autres exemples, tant du premier que du second cas de ma méthode, mais ceux-ci suffisent, et prouvent assez qu'elle est générale et ne tombe jamais en défaut.

Je n'ajoute pas la démonstration de la règle, ni les nombreuses autres applications qui pourraient en confirmer la haute valeur, comme l'invention des centres de gravité et des asymptotes, dont j'ai envoyé un exemple au savant M. de Roberval.

IV.

MÉTHODE DU MAXIMUM ET MINIMUM.

En étudiant la méthode de la *syncrise* et de l'*anastrophe* de Viète, et en poursuivant soigneusement son application à la recherche de la constitution des équations corrélatives, il m'est venu à l'esprit d'en dériver un procédé pour trouver le maximum ou le minimum et pour résoudre ainsi aisément toutes les difficultés relatives aux conditions limites, qui ont causé tant d'embarras aux géomètres anciens et modernes.

Les maxima et minima sont en effet uniques et singuliers, comme le dit Pappus et comme le savaient déjà les anciens, quoique Commandin avoue ignorer ce que signifie dans Pappus le terme μοναχός (singulier). Il suit de là que, de part et d'autre du point constitutif de la limite, on peut prendre une équation ambiguë; que les deux équations ambiguës ainsi prises sont dès lors corrélatives, égales et semblables.

Soit, par exemple, proposé de *partager la droite b en sorte que le produit de ses segments soit maximum*. Le point satisfaisant à cette question est évidemment le milieu de la droite donnée, et le produit maximum est égal à $\frac{b^2}{4}$; aucune autre division de cette droite ne donnera un produit égal à $\frac{b^2}{4}$.

Mais si l'on propose de partager la même droite b en sorte que le produit des segments soit égal à z'' $\left(\text{cette aire étant d'ailleurs à supposer plus petite que } \frac{b^2}{4}\right)$, on aura deux points satisfaisant à la question, et ils se trouveront situés de part et d'autre du point correspondant au produit maximum.

Soit en effet a un des segments de la droite b, on aura $ba - a^2 = z''$, équation ambiguë, puisque pour la droite a on peut prendre chacune des deux racines. Soit donc l'équation corrélative $be - e^2 = z''$. Comparons ces deux équations d'après la méthode de Viète :

$$ba - be = a^2 - e^2.$$

Divisant de part et d'autre par $a - e$, il viendra

$$b = a + e;$$

les longueurs a et e seront d'ailleurs inégales.

Si, au lieu de l'aire z'', on en prend une autre plus grande, quoique toujours inférieure à $\frac{b^2}{4}$, les droites a et e différeront moins entre elles que les précédentes, les points de division se rapprochant davantage du point constitutif du produit maximum. Plus le produit des segments augmentera, plus au contraire diminuera la différence entre a et e, jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse tout à fait pour la division correspondant au produit maximum; dans ce cas, il n'y a qu'une solution unique et singulière, les deux quantités a et e devenant égales.

Or la méthode de Viète, appliquée aux deux équations corrélatives ci-dessus, nous a conduit à l'égalité $b = a + e$; donc, si $e = a$ (ce qui arrivera constamment pour le point constitutif du maximum ou du minimum), on aura, dans le cas proposé, $b = 2a$, c'est-à-dire que, si l'on prend le milieu de la droite b, le produit des segments sera maximum.

Prenons un autre exemple : *Soit à partager la droite b de telle sorte que le produit du carré de l'un des segments par l'autre soit maximum.*

Soit a l'un des segments : on doit avoir $ba^2 - a^3$ maximum. L'équation corrélative égale et semblable est $be^2 - e^3$. Comparons ces deux équations d'après la méthode de Viète :

$$ba^2 - be^2 = a^3 - e^3;$$

divisant de part et d'autre par $a - e$, il vient

$$ba + be = a^2 + ae + e^2,$$

ce qui donne la constitution des équations corrélatives.

Pour trouver le maximum, faisons $e = a$; il vient

$$2ba = 3a^2 \quad \text{ou} \quad 2b = 3a;$$

le problème est résolu.

Toutefois, comme pratiquement les divisions par un binome sont généralement compliquées et trop pénibles, il est préférable, en comparant les équations corrélatives, de mettre en évidence les différences des racines, pour n'avoir à opérer qu'une simple division par cette différence.

Soit à chercher le maximum de $b^2a - a^3$. D'après les règles de la méthode précitée, on devrait prendre pour équation corrélative $b^2e - e^3$. Mais puisque e, aussi bien que a, est une inconnue, rien ne nous empêche de la désigner par $a + e$; on aura de la sorte

$$b^2a + b^2e - a^3 - e^3 - 3a^2e - 3e^2a = b^2a - a^3.$$

Il est clair que, si l'on supprime les termes semblables, tous ceux qui resteront seront affectés de l'inconnue e; ceux en a seul se trouvent en effet les mêmes de part et d'autre. On a ainsi

$$b^2e = e^3 + 3a^2e + 3e^2a,$$

et, en divisant tous les termes par e,

$$b^2 = e^2 + 3a^2 + 3ae,$$

ce qui donne la constitution des deux équations corrélatives sous cette forme.

Pour trouver le maximum, il s'agit d'égaler les racines des deux équations, afin de satisfaire aux règles de la première méthode, dont notre nouveau procédé tire sa raison et sa façon d'opérer.

Ainsi il faut égaler a à $a + e$, d'où $e = 0$. Mais, d'après la constitution que nous avons trouvée pour les équations corrélatives,

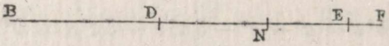
$$b^2 = e^2 + 3a^2 + 3ae;$$

nous devons donc supprimer, dans cette égalité, tous les termes affectés de e, comme se réduisant à o; il restera $b^2 = 3a^2$, équation qui donnera le maximum cherché pour le produit dont il s'agit.

Pour montrer plus complètement la généralité de cette double méthode, considérons de nouveaux genres d'équations corrélatives dont Viète n'a pas traité et que nous emprunterons au Livre de la *Section déterminée* d'Apollonius (dans Pappus, Livre VII, prop. 61), dont les conditions de limites sont expressément reconnues comme difficiles par Pappus.

Soit la droite BDEF (*fig.* 97), *sur laquelle on donne les points* B, D, E, F. *Trouver entre les points* D *et* E *un point* N *tel que le rapport des produits* BN × NF *et* DN × NE *soit minimum.*

Fig. 97.



Posons DE $= b$, DF $= z$, BD $= d$, DN $= a$; il faut que le rapport $\frac{dz - da + za - a^2}{ba - a^2}$ soit minimum.

Le rapport corrélatif semblable et égal est $\frac{dz - de + ze - e^2}{be - e^2}$, d'après notre première méthode. Égalons les produits des termes moyens et des extrêmes, nous aurons

$$dzbe - dze^2 - dabe + dae^2 + zabe - zae^2 - a^2be + a^2e^2$$
$$= dzba - dza^2 - deba + dea^2 + zeba - zea^2 - e^2ba + e^2a^2.$$

Supprimant les termes semblables et faisant les transpositions convenables :

$$dzba - dzbe + dea^2 - dae^2 - zea^2 + zae^2 + a^2be - e^2ba = dza^2 - dze^2.$$

Divisant de part et d'autre par $a - e$ (ce qui sera très facile, si l'on prend ensemble les termes corrélatifs; ainsi $\frac{dzba - dzbe}{a - e} = dzb$, et de même $\frac{dea^2 - dae^2}{a - e} = dae$, etc.; il est aisé de disposer les termes corrélatifs pour obtenir ces divisions), on aura, après la division,

$$dzb + dae - zae + bae = dza + dze,$$

égalité qui donne la constitution des deux équations corrélatives.

Pour passer de cette constitution au minimum, il faut, d'après la méthode, faire $e = a$, d'où

$$dzb + da^2 - za^2 + ba^2 = 2dza;$$

la résolution de cette équation donnera la valeur de a, pour laquelle le rapport proposé sera minimum.

L'analyste ne sera pas arrêté par ce que cette équation a deux racines, car celle qu'il faut prendre se trahira d'elle-même, quand on ne voudrait pas la reconnaître. Même avec des équations ayant plus de deux racines, un analyste tant soit peu sagace pourra toujours se servir de l'une ou de l'autre de nos méthodes.

Mais il est clair, d'après l'exemple que nous venons de traiter en dernier lieu, que la première de ces deux méthodes sera en général d'un emploi peu commode, par suite de ces divisions répétées par un binome. Il faut donc recourir à la seconde qui, quoique simplement dérivée de la première, comme je l'ai dit, procurera aux habiles analystes une facilité surprenante et d'innombrables abréviations; bien plus, elle s'appliquera, avec une aisance et une élégance bien supérieures, à la recherche des tangentes, des centres de gravité, des asymptotes et autres questions pareilles.

C'est donc avec la même confiance que jadis, que j'affirme toujours aujourd'hui que la recherche du maximum et du minimum se ramène à cette règle unique et générale, dont l'heureux succès sera toujours légitime et non pas dû au hasard, comme certains l'ont pensé.

Soit a une inconnue (*voir* page 121, ligne 6 à ligne dernière)... *sa première expression.*

S'il reste encore quelqu'un qui considère cette méthode comme due à un heureux hasard, il peut bien essayer d'en rencontrer un pareil.

Quant à celui qui ne l'approuverait pas, je lui proposerai ce problème :

Étant donnés trois points, en trouver un quatrième tel que la somme de ses distances aux trois points donnés soit minima.

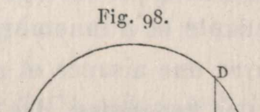
V.

APPENDICE A LA MÉTHODE DU MAXIMUM ET MINIMUM.

Dans le cours des questions, il se présente souvent des radicaux; l'analyste ne doit pas alors hésiter à employer une troisième inconnue, ou, s'il le faut, à en poser un plus grand nombre encore; on pourra en effet de la sorte éviter les élévations aux puissances qui, en se répétant, compliquent d'ordinaire les calculs. L'artifice de cette méthode va être expliqué par les exemples qui suivent :

Soit un demi-cercle de diamètre AB (*fig.* 98), *avec la perpendiculaire* DC *au diamètre. On demande le maximum de la somme* AC + CD.

Fig. 98.



Soit b le diamètre, posons $AC = a$; on aura donc $CD = \sqrt{ba - a^2}$. La question est ramenée à rendre maxima la quantité $a + \sqrt{ba - a^2}$.

En appliquant les règles de la méthode, on arriverait à *adégaler* des expressions dont le degré serait trop élevé; désignons donc par $\overline{o}$ la quantité maxima; car pourquoi abandonnerions-nous l'usage adopté par Viète de représenter par des voyelles les quantités inconnues (¹)?

(¹) Pour conserver la notation de Fermat, tout en évitant la confusion avec le zéro, nous surmontons d'un trait la voyelle o.

Nous aurons donc $a + \sqrt{ba - a^2} = \bar{o}$; donc $\bar{o} - a = \sqrt{ba - a^2}$, et en élevant au carré :

$$\bar{o}^2 + a^2 - 2\bar{o}a = ba - a^2.$$

Cela fait, il faut effectuer une transposition de façon qu'un membre de l'équation soit formé par le seul terme où $\bar{o}$ figure à la plus haute puissance; on pourra dès lors déterminer le maximum, ce qui est le but de l'artifice. Cette transposition nous donne

$$ba - 2a^2 + 2\bar{o}a = \bar{o}^2.$$

Mais par hypothèse $\bar{o}$ est la quantité maxima; donc $\bar{o}^2$, carré d'une quantité maxima, sera lui-même un maximum; par conséquent, $ba - 2a^2 - 2\bar{o}a$ (expression égale à $\bar{o}^2$) sera un maximum. Il n'y figure d'ailleurs aucun radical; traitons-la, d'après la méthode, comme si $\bar{o}$ était une quantité connue. Nous aurons l'*adégalité*

$$ba - 2a^2 + 2\bar{o}a \backsim ba + be - 2a^2 - 2e^2 - 4ae + 2\bar{o}a + 2\bar{o}e.$$

Supprimons les termes communs, et divisons les autres par e,

$$b + 2\bar{o} \backsim 2e + 4a.$$

Supprimons $2e$ d'après la règle; nous aurons

$$b + 2\bar{o} = 4a, \qquad \text{d'où} \qquad 4a - b = 2\bar{o} \qquad \text{ou} \qquad 2a - \tfrac{1}{2}b = \bar{o}.$$

Cette égalité étant établie par la méthode, il faut revenir à la première, dans laquelle nous avons posé $a + \sqrt{ba - a^2} = \bar{o}$.

Mais nous venons de trouver $\bar{o} = 2a - \frac{1}{2}b$; donc

$$2a - \tfrac{1}{2}b = a + \sqrt{ba - a^2}, \qquad \text{d'où} \qquad a - \tfrac{1}{2}b = \sqrt{ba - a^2}.$$

Élevons au carré :

$$a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - ba = ba - a^2,$$

d'où enfin

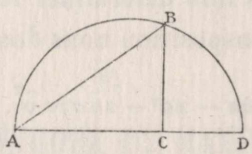
$$ba - a^2 = \tfrac{1}{8}b^2;$$

de cette dernière équation on tirera la valeur de a correspondant au maximum cherché.

Nous pouvons employer le même artifice pour trouver *le cône de surface maxima qui peut être inscrit dans une sphère donnée.*

Soient AD (*fig.* 99) le diamètre de cette sphère, AC la hauteur du cône cherché, AB son côté, BC son rayon de base. Il faudra, d'après Archimède, que la somme $AB \times BC + BC^2$ soit maxima.

Fig. 99.



Soit b le diamètre; posons $AC = a$. Nous aurons $AB = \sqrt{ba}$, $BC = \sqrt{ba - a^2}$,

$$AB \times BC + BC^2 = \sqrt{b^2a^2 - ba^3} + ba - a^2.$$

Égalons cette somme à l'aire maxima, soit $\overset{-\text{pl.}}{o}$:

$$\overset{-\text{pl.}}{o} + a^2 - ba = \sqrt{b^2a^2 - ba^3}.$$

Élevons au carré, etc.; la méthode que nous avons indiquée conduira à une équation donnant $\overset{-\text{pl.}}{o}$, et permettant ainsi de résoudre celle que nous venons de poser.

Cependant, dans l'exemple choisi, on peut obtenir la solution sans prendre une troisième inconnue; car on peut ramener le problème à chercher, en se donnant la droite AB dans le triangle CBA, quel est le maximum du rapport $\frac{CB \times BA + CB^2}{AD^2}$, et, dans ce cas, la méthode ordinaire est suffisante.

Soit b la droite donnée AB; posons $CB = a$, nous aurons $AC^2 = b^2 - a^2$. Mais $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AD^2}$; donc $AD^2 = \frac{b^4}{b^2 - a^2}$. Or nous voulons que le rapport de $ba + a^2$ à cette dernière expression soit maximum.

Multiplions haut et bas par $b^2 - a^2$; le rapport $\frac{b^4}{b^3a + b^2a^2 - ba^3 - a^4}$ doit être minimum. Mais b^4 est donné, comme puissance de la donnée b; donc la quantité $b^3a + b^2a^2 - ba^3 - a^4$ doit être maxima.

La méthode conduira à l'équation

$$b^3 + 2b^2a = 3ba^2 + 4a^3,$$

dont le degré s'abaisse immédiatement [1] :

$$4a^2 - ba = b^2;$$

la solution est dès lors évidente.

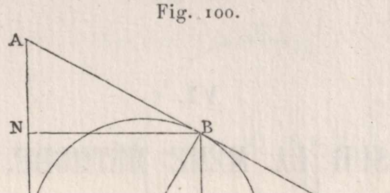
Nous ne nous arrêtons pas davantage sur un sujet désormais éclairci ; on voit comment, en recourant à une troisième ou à une quatrième inconnue, et, s'il le faut, en multipliant encore le nombre des positions auxiliaires, on peut se débarrasser des radicaux et de tous les autres obstacles qui peuvent arrêter l'analyste.

Cependant, et quoique l'invention des tangentes découle elle-même de la méthode générale, on peut remarquer que, dans certains cas, les questions de maximum ou minimum peuvent se résoudre plus élégamment et peut-être plus géométriquement, au moyen de la construction d'une tangente.

Donnons-en un seul exemple, qui peut valoir pour plusieurs :

Dans un demi-cercle FBD (*fig.* 100), *on mène la perpendiculaire* BE; *on demande le maximum du produit* FE $\times$ EB.

Fig. 100.



Si, d'après notre méthode, on cherche à construire le rectangle FE $\times$ EB en s'en donnant la valeur, la question se ramène à décrire une hyperbole ayant pour asymptotes AF, FC, et pour laquelle les produits des abscisses FE par les ordonnées EB aient la valeur donnée;

(1) En tenant compte de la racine $a = -b$.

les points d'intersection de l'hyperbole et du demi-cercle satisferont à la question. Mais, comme le produit $FE \times EB$ doit être maximum, il s'agit en fait de construire une hyperbole qui ait pour asymptotes AF, FC et qui, au lieu de couper le demi-cercle, lui soit tangente, soit en B; car les points de contact déterminent les quantités maxima ou minima.

Supposons le problème résolu : si l'hyperbole touche le demi-cercle en B, la tangente en B au demi-cercle sera également tangente à l'hyperbole. Soit ABC cette droite. Elle est tangente à l'hyperbole en B et rencontre les asymptotes en A et C; donc, d'après Apollonius, $AB = BC$; par suite, $FE = EC$ et $AF = 2BE = 2AN$. Mais, comme tangente au cercle, $BA = AF$; donc $BA = 2AN$, et à cause de la similitude des triangles, si M est le centre, $MB = 2ME$. Mais le rayon MB est donné; donc le point E le sera.

On peut de même ramener en général toute recherche de maximum ou de minimum à la construction géométrique d'une tangente; mais cela ne diminue en rien l'importance de la méthode générale, puisque la construction des tangentes en dépend, aussi bien que la détermination des maxima et des minima.

VI.

SUR LA MÊME MÉTHODE.

La théorie des tangentes est une suite de la méthode, dès longtemps publiée pour l'invention du maximum et du minimum, qui permet de résoudre très aisément toutes les questions de limitation, et notamment ces fameux problèmes dont les conditions-limites sont indiquées comme difficiles par Pappus (Livre VII, préf.).

Les lignes courbes dont nous cherchons les tangentes ont leurs propriétés spécifiques exprimables, soit par des lignes droites seulement, soit encore par des courbes compliquées comme on voudra avec des droites ou d'autres courbes.

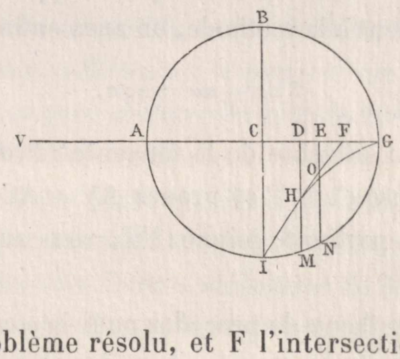
Nous avons déjà satisfait au premier cas par notre règle, qui, trop concise, a pu paraître difficile, mais cependant a été reconnue légitime.

Nous considérons en fait dans le plan d'une courbe quelconque deux droites données de position, dont on peut appeler l'une *diamètre*, l'autre *ordonnée*. Nous supposons la tangente déjà trouvée en un point donné sur la courbe, et nous considérons par *adégalité* la propriété spécifique de la courbe, non plus sur la courbe même, mais sur la tangente à trouver. En éliminant, suivant notre théorie des maxima et minima, les termes qui doivent l'être, nous arrivons à une égalité qui détermine le point de rencontre de la tangente avec le diamètre, par suite la tangente elle-même.

Aux nombreux exemples que j'ai déjà donnés, j'ajouterai celui de la tangente à la *cissoïde*, inventée, dit-on, par Dioclès.

Soient un cercle dont les deux diamètres AG, BI (*fig.* 101) se coupent normalement, et la cissoïde IHG, à laquelle, par un quelconque de ses points, soit H, il faut mener la tangente.

Fig. 101.



Supposons le problème résolu, et F l'intersection de CG et de la tangente HF. Posons $DF = a$, et, en prenant un point E quelconque entre D et F, $DE = e$.

D'après la propriété spécifique de la cissoïde : $\frac{MD}{DG} = \frac{DG}{DH}$, on aura donc à exprimer analytiquement l'*adégalité* $\frac{\mathrm{NE}}{\mathrm{EG}} \backsim \frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{EO}}$, EO étant la portion de la droite EN interceptée entre E et la tangente.

Soient la donnée $\mathrm{AD} = z$, la donnée $\mathrm{DG} = n$, la donnée $\mathrm{DH} = r$, et, comme nous l'avons dit, l'inconnue $\mathrm{DF} = a$, l'arbitraire $\mathrm{DE} = e$.

On aura

$$\mathrm{EG} = n - e, \qquad \mathrm{EO} = \frac{ra - re}{a}, \qquad \mathrm{EN} = \sqrt{zn - ze + ne - e^2}.$$

D'après la règle, il faut considérer la propriété spécifique, non pas sur la courbe, mais sur la tangente, et poser donc $\frac{\mathrm{NE}}{\mathrm{EG}} = \frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{EO}}$, EO étant l'ordonnée de la tangente, ou, en notations analytiques,

$$\frac{\sqrt{zn - ze + ne - e^2}}{n - e} \backsim \frac{n - e}{\frac{ra - re}{a}};$$

carrant, pour se débarrasser du radical :

$$\frac{zn - ze + ne - e^2}{n^2 + e^2 - 2ne} \backsim \frac{n^2 + e^2 - 2ne}{\frac{r^2a^2 + r^2e^2 - 2r^2ae}{a^2}}.$$

Multipliant tous les termes par a^2, *et adégalant*, d'après la règle, le produit des extrêmes au carré du moyen, supprimant les termes superflus, conformément à la méthode, on aura enfin

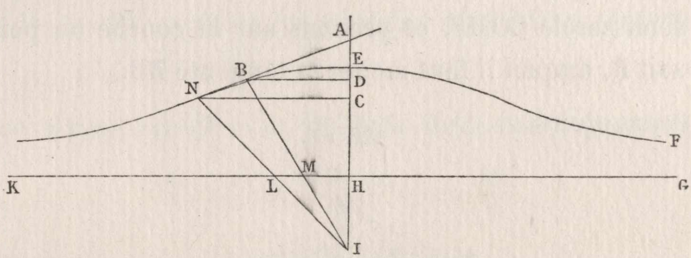
$$3za + na = 2zn.$$

D'où la construction suivante de la tangente : Prolongez le rayon CA du cercle donné jusqu'en V et prenez $\mathrm{AV} = \mathrm{AC}$. Divisez $\mathrm{AD} \times \mathrm{DG}$ par VD, soit DF le quotient; joignez FH; vous aurez la tangente à la cissoïde.

Indiquons aussi la façon de procéder pour la *conchoïde de Nicomède*, mais indiquons-la seulement pour ne pas être trop long.

Soit la conchoïde de Nicomède construite sur la figure ci-contre (*fig.* 102), comme elle l'est dans Pappus et dans Eutocius : I est le pôle, KG l'asymptote à la courbe, IHE la perpendiculaire à l'asymptote, N un point donné sur la courbe, par lequel il faut mener une tangente NBA rencontrant IE en A.

Fig. 102.



Supposons le problème résolu, comme ci-dessus. Menons NC parallèle à KG. D'après la propriété spécifique de la courbe, LN = HE. Prenons un point quelconque, soit D, entre C et E, et menons par ce point, parallèlement à CN, DB qui rencontre la tangente en B. Comme la propriété spécifique de la courbe doit être considérée sur la tangente, joignons BI qui rencontre KG en M; on doit adégaler, d'après les règles de l'art, MB et HE; on arrivera ainsi à l'équation cherchée. Pour cela, on posera, comme ci-dessus, CA $= a$, CD $= e$, EH $= z$, et on désignera de même les autres données par leurs noms. On trouvera facilement l'expression analytique de la droite MB, on l'*adégalera*, comme il a été dit, à la droite HE, et on résoudra la question.

Ce que j'ai dit paraît suffire pour le premier cas. Il est vrai qu'il y a une infinité d'artifices pour abréger les calculs dans la pratique; mais on peut facilement les déduire de ce qui précède.

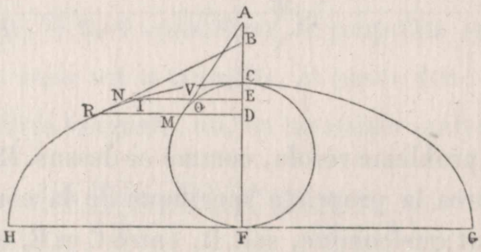
Pour le second cas, que jugeait difficile M. Descartes, à qui rien ne l'est, on y satisfait par une méthode très élégante et assez subtile.

Tant que les termes sont formés seulement de lignes droites, on les cherche et on les désigne d'après la règle précédente. D'ailleurs, pour éviter les radicaux, il est permis de substituer aux ordonnées des courbes, celles des tangentes trouvées d'après la méthode précédente. Enfin, ce qui est le point important, aux arcs de courbes on peut substituer les longueurs correspondantes des tangentes déjà trouvées, et arriver à l'*adégalité*, comme nous l'avons indiqué : on satisfera ainsi facilement à la question.

Prenons comme exemple la courbe de M. de Roberval [*cycloïde*].

Soient HBIC (*fig.* 103) la courbe, C son sommet, CF l'axe; décrivons le demi-cercle COMF, et prenons sur la courbe un point quelconque, soit R, duquel il faut mener la tangente RB.

Fig. 103.



Menons par ce point R, perpendiculairement à CDF, la droite RMD, coupant le demi-cercle en M. La propriété spécifique de la courbe est que la droite RD est égale à la somme de l'arc de cercle CM et de l'ordonnée DM. Menons, d'après la précédente méthode, la tangente MA au cercle (le même procédé serait en effet applicable si la courbe COM était d'une autre nature). Supposons la construction opérée, et soient l'inconnue $DB = a$, les droites trouvées par construction : $DA = b$, $MA = d$; les données $MD = r$, $RD = z$, l'arc de cercle donné $CM = n$, la droite arbitraire $DE = e$.

Par E menons EOVIN parallèle à la droite RMD ; on a $\frac{a}{a-e} = \frac{z}{\text{NIVOE}}$; d'où $\text{NIVOE} = \frac{za - ze}{a}$.

Il faut donc *adégaler* (à cause de la propriété spécifique de la courbe qui est à considérer sur la tangente) cette droite $\frac{za - ze}{a}$ à la somme $\text{OE} + \text{arc}\,\text{CO}$.

Mais $\text{arc}\,\text{CO} = \text{arc}\,\text{CM} - \text{arc}\,\text{MO}$. Donc $\frac{za - ze}{a} \backsim \text{OE} + \text{arc}\,\text{CM} - \text{arc}\,\text{MO}$.

Pour obtenir l'expression analytique des trois derniers termes, tout en évitant les radicaux, on peut, d'après la remarque précédente, substituer, à OE, l'ordonnée EV de la tangente, et à l'arc MO, la portion de tangente MV qui lui est adjacente.

Pour trouver l'expression analytique de EV, on a d'ailleurs $\frac{b}{b-e}=\frac{r}{\mathrm{EV}}$, d'où $\mathrm{EV}=\frac{rb-re}{b}$.

Pour celle de MV, à cause des triangles semblables, comme ci-dessus, $\frac{b}{d}=\frac{e}{\mathrm{MV}}$, d'où $\mathrm{MV}=\frac{de}{b}$.

Enfin on a posé $\operatorname{arc}\mathrm{CM}=n$. On aura donc analytiquement

$$\frac{za-ze}{a} \backsim \frac{rb-re}{b}+n-\frac{de}{b}.$$

Multipliant, de part et d'autre, par ab :

$$zba-zbe \backsim rba-rae+bna-dae.$$

Mais, d'après la propriété de la courbe, $z=r+n$, donc $zba=rba+bna$. Supprimant les termes communs,

$$zbe \backsim rae+dae.$$

Divisons par e; comme il ne reste ici aucun terme superflu, il n'y a pas d'autre suppression à faire :

$$zb=ra+da, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{r+d}{b}=\frac{z}{a}.$$

Pour la construction, on fera donc $\frac{\mathrm{MA}+\mathrm{MD}}{\mathrm{DA}}=\frac{\mathrm{RD}}{\mathrm{DB}}$; on joindra BR qui touchera la courbe CR.

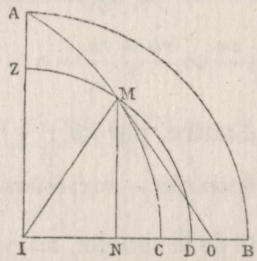
Mais comme $\frac{\mathrm{MA}+\mathrm{MD}}{\mathrm{DA}}=\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{DC}}$, ainsi qu'il est facile de le démontrer, on peut faire $\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{DC}}=\frac{\mathrm{RD}}{\mathrm{DB}}$, ou, pour que la construction soit plus élégante, joindre MC et lui mener RB parallèle.

La même méthode donnera les tangentes à toutes les courbes de cette espèce. Nous avons indiqué il y a longtemps leur construction générale.

Comme il a été proposé de trouver la *tangente de la quadrataire ou quadratrice de Dinostrate,* voici comment nous la construisons d'après la méthode précédente.

Soient AIB (*fig.* 104) un quart de cercle, AMC la quadrataire, à laquelle il faut mener la tangente en un point donné M. Je joins MI; de I comme centre, avec IM comme rayon, je décris le quart de cercle ZMD, et, menant la perpendiculaire MN, je fais $\frac{MN}{IM} = \frac{\text{arc}\,MD}{IO}$. Je joins MO qui sera tangente à la quadrataire; que cela suffise.

Fig. 104.



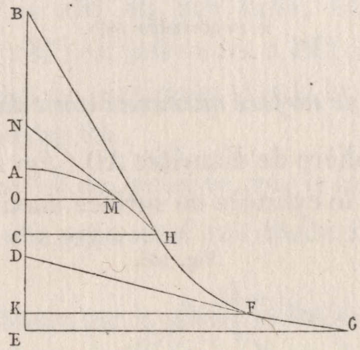
Cependant il arrive souvent que la courbure change, comme dans la conchoïde de Nicomède (1er cas) et dans toutes les espèces, sauf la première, de la courbe de M. de Roberval (2e cas); pour pouvoir bien dessiner la courbe, il convient donc de rechercher mathématiquement les points d'inflexion, où la courbure devient concave de convexe, ou inversement. Cette question se résout élégamment par la méthode *de maximis et minimis*, grâce au lemme général suivant :

Soit la courbe AHFG (*fig.* 105) *dont la courbure change par exemple au point* H. *Menez la tangente* HB, *l'ordonnée* HC; *l'angle* HBC *sera le minimum entre tous ceux que la tangente fait avec l'axe* ACD, *qu'elle soit au-dessous ou au-dessus du point* H, comme il est facile de le démontrer.

Qu'on prenne en effet, au-dessus du point H, un point M; la tangente en ce point rencontrera l'axe entre A et B, soit en N; l'angle en N sera donc plus grand que l'angle en B.

De même, si l'on prend le point F au-dessous de H, le point D, où la tangente FD rencontre l'axe, sera au-dessous de B, et la tangente DF rencontrera d'ailleurs la tangente BH du côté de FH; l'angle en D sera donc plus grand que l'angle en B.

Fig. 105.



Nous ne poursuivons pas tous les cas, nous indiquons seulement le mode de recherche, les formes des courbes variant indéfiniment.

Pour donc trouver, par exemple, le point H sur la figure, on cherchera d'abord, d'après la méthode précédente, la propriété de la tangente en un point quelconque de la courbe. Puis, par la doctrine *de maximis et minimis,* on déterminera le point H tel qu'en menant la perpendiculaire HC et la tangente HB, le rapport $\frac{HC}{CB}$ soit minimum. Car ainsi l'angle en B sera minimum. Je dis que le point H ainsi trouvé sera celui où commence le changement de courbure.

La même méthode *de maximis et minimis* donne aussi, par un artifice singulier, l'invention du centre de gravité, comme je l'ai indiqué autrefois à M. de Roberval.

Mais, comme couronnement, on peut encore *trouver les asymptotes d'une courbe donnée,* recherche qui conduit à de remarquables propriétés pour les courbes indéfinies. Nous pourrons un jour les développer et les démontrer plus au long.

VII.

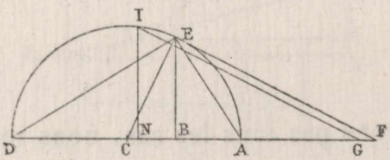
PROBLÈME ENVOYÉ AU R. P. MERSENNE

le 10 novembre 1642.

Trouver le cylindre de surface maxima inscrit dans une sphère donnée.

Soit donnée une sphère de diamètre AD (*fig.* 106), de centre C. On demande d'y inscrire le cylindre de surface maxima.

Fig. 106.



Supposons le problème résolu; soient DE le diamètre de base du cylindre, EA son côté (on peut en effet donner cette position au cylindre, l'angle inscrit dans le demi-cercle étant droit). La surface du cylindre est proportionnelle à $DE^2 + 2DE.EA$: il faut donc chercher le maximum de la somme $DE^2 + 2DE.EA$.

Si l'on abaisse la perpendiculaire EB, on a, d'une part, $DE^2 = AD.DB$; de l'autre, $DE.EA = AD.BE$. Nous avons donc à chercher le maximum de la somme $AD.DB + 2AD.BE$, ou, en divisant les deux termes par la droite donnée AD, le maximum de la somme $DB + 2BE$.

Cette question est facile : qu'on fasse $CB = \frac{1}{2}BE$, ou, ce qui revient au même, $BC = \frac{CE}{\sqrt{5}}$, le point E satisfera au problème. Menons en effet la tangente EF qui rencontre en F le prolongement du diamètre; je dis que la somme $DB + 2BE$ est maxima.

En effet, puisque $CB = \frac{1}{2}BE$, $BE = \frac{1}{2}BF$; donc $BF = 2BE$; donc $DF = DB + 2BE$; il est clair ainsi que la somme $DB + 2BE$ est maxima.

Prenons en effet un point quelconque, soit I, sur le demi-cercle, et abaissons la perpendiculaire IN; par le même point I, menons IG parallèle à la tangente et rencontrant le diamètre en G. Ce point G tombera entre les points F et D, autrement la parallèle GI ne rencontrerait pas le demi-cercle. En raison du parallélisme, on a $\frac{FB}{BE} = \frac{GN}{NI}$; mais $FB = 2BE$; donc $GN = 2NI$ et, par suite, $GD = DN + 2NI$. Mais comme $GD (= DN + 2NI)$ est inférieure à $DF (= DB + 2BE)$, il s'ensuit que $DB + 2BE$ est un maximum et que le cylindre cherché aura pour base DE et pour côté EA.

On prouvera, d'après ce qui précède, que le rapport $\frac{DE}{EA}$ est celui du plus grand au plus petit segment d'une droite divisée en moyenne et extrême raison.

Nous pouvons d'ailleurs par le même procédé *trouver et construire un cylindre de surface donnée.*

On ramènera en effet la question à l'égalité entre la somme $DN + 2NI$ et une droite donnée, soit DG, qui, d'après la valeur trouvée pour le maximum, devra être au plus égale à DF. Menez GI parallèle à FE; le point I satisfera à la question et l'on pourra ainsi avoir tantôt deux cylindres, tantôt un seul répondant à la condition posée.

Si, en effet, le point G tombe entre F et A, deux cylindres différents satisferont au problème; mais si G tombe en A ou plus près de D, la solution sera unique.

VIII.

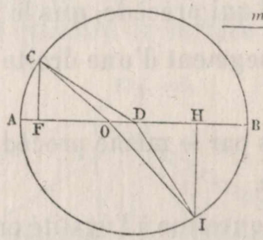
ANALYSE POUR LES RÉFRACTIONS.

Soit ACBI (*fig.* 108) un cercle dont le diamètre AFDB sépare deux milieux de nature différente, le moins dense étant du côté ACB, le plus dense du côté AIB.

Soient D le centre du cercle et CD le rayon incident tombant sur ce centre du point C donné; on demande le rayon réfracté DI, ou autrement le point I par où passera le rayon après la réfraction.

Abaissez sur le diamètre les perpendiculaires CF, IH. Le point C étant donné ainsi que le diamètre AB et le centre D, le point F et la droite FD seront également donnés. Supposons que le rapport de la résistance du milieu plus dense à celle du milieu moins dense soit celui de la droite donnée DF à une autre droite m donnée en dehors de la figure. On devra avoir $m < \mathrm{DF}$, la résistance du milieu moins dense devant être inférieure à celle du milieu plus dense, par un axiome plus que naturel.

Fig. 108.



Nous avons maintenant à mesurer, au moyen des droites m et DF, les mouvements suivant les droites CD et DI; nous pourrons ainsi représenter comparativement l'ensemble du mouvement sur ces deux droites par la somme de deux produits : $\mathrm{CD}.m + \mathrm{DI}.\mathrm{DF}$.

Ainsi la question est ramenée à partager le diamètre AB en un point H de telle sorte que si en ce point on élève la perpendiculaire HI, puis qu'on joigne DI, l'aire $\mathrm{CD}.m + \mathrm{DI}.\mathrm{DF}$ soit minima.

Nous emploierons à cet effet notre méthode, déjà répandue parmi les géomètres et exposée depuis environ vingt ans par Hérigone dans son *Cursus mathematicus*. Appelons n le rayon CD ou son égal DI, b la droite DF, et posons $\mathrm{DH} = a$. Il faut que la quantité $nm + nb$ soit minima.

Soit, pour l'inconnue e, une droite arbitraire DO; joignons CO, OI. En notations analytiques : $\mathrm{CO}^2 = n^2 + e^2 - 2be$, et $\mathrm{OI}^2 = n^2 + e^2 + 2ae$; donc

$$\mathrm{CO}.m = \sqrt{m^2n^2 + m^2e^2 - 2m^2be}, \qquad \mathrm{IO}.b = \sqrt{b^2n^2 + b^2e^2 + 2b^2ae}.$$

La somme de ces deux radicaux doit être *adégalée,* d'après les règles de l'art, à la somme $mn + bn$.

Pour faire disparaître les radicaux, on élèvera au carré, on supprimera les termes communs et l'on transposera de façon à ne laisser dans un des membres que le radical qui subsistera; puis on élèvera de nouveau au carré; après nouveau retranchement des termes communs de part et d'autre, division de tous les termes par e et suppression de ceux où e entrera encore, selon les règles de notre méthode généralement connue depuis longtemps, on arrivera, en ôtant les facteurs communs, à l'équation la plus simple possible entre a et m, c'est-à-dire qu'après avoir fait disparaître les obstacles opposés par les radicaux, on trouvera que la droite DH de la figure est égale à la droite m.

Par conséquent, pour trouver le point de réfraction, il faut, ayant mené les droites CD et CF, prendre les droites DF et DH dans le rapport de la résistance du milieu plus dense à celle du milieu moins dense, soit dans le rapport de b à m. On élèvera ensuite en H la perpendiculaire HI au diamètre; elle rencontrera le cercle en I, point où passera le rayon réfracté; et ainsi d'ailleurs le rayon, passant d'un milieu moins dense dans un plus dense, s'infléchira du côté de la perpendiculaire : ce qui concorde absolument et sans exception avec le théorème découvert par Descartes; l'analyse ci-dessus, dérivée de notre principe, donne donc de ce théorème une démonstration rigoureusement exacte.

IX.

SYNTHÈSE POUR LES RÉFRACTIONS.

Le savant Descartes a proposé pour les réfractions une loi qui est, comme on dit, conforme à l'expérience; mais, pour la démontrer, il a dû s'appuyer sur un postulat absolument indispensable à ses raisonnements, à savoir que le mouvement de la lumière se ferait plus facilement et plus vite dans les milieux denses que dans les rares; or ce postulat semble contraire à la lumière naturelle.

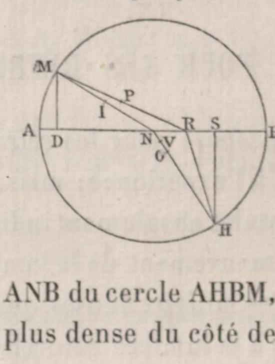
En cherchant, pour établir la véritable loi des réfractions, à partir du principe contraire, — à savoir que le mouvement de la lumière se fait plus facilement et plus vite dans les milieux rares que dans les denses, — nous sommes retombés précisément sur la loi que Descartes a énoncée. Est-il possible d'arriver sans paralogisme à une même vérité par deux voies absolument opposées, c'est une question que nous laissons à examiner aux géomètres assez subtils pour la résoudre rigoureusement; car, sans entrer dans de vaines discussions, la possession assurée de la vérité nous suffit et nous l'estimons préférable à une plus longue continuation de querelles inutiles et illusoires.

Notre démonstration s'appuie sur ce seul postulat que la nature opère par les moyens et les voies les plus faciles et les plus aisées. Car c'est ainsi que nous croyons qu'il doit être énoncé et non pas comme on le fait d'ordinaire en disant que la nature opère toujours par les lignes les plus courtes.

En effet, de même qu'en spéculant sur les mouvements naturels des graves, Galilée en mesure les rapports aussi bien par le temps que par l'espace, de même nous ne considérerons pas les espaces ou les lignes les plus courtes, mais celles qui peuvent être parcourues le plus facilement, le plus commodément et dans le temps le plus court.

Cela supposé, soient deux milieux de nature différente (*fig.* 109)

Fig. 109.



séparés par le diamètre ANB du cercle AHBM, le milieu le moins dense étant du côté de M, le plus dense du côté de H; menons de M vers H les lignes quelconques MNH, MRH, brisées sur le diamètre aux points N et H.

La vitesse du mobile sur MN dans le milieu rare étant plus grande, d'après l'axiome ou le postulat, que la vitesse du même mobile sur NH, et les mouvements étant supposés uniformes dans chacun des deux milieux, le rapport du temps du mouvement sur MN au temps du mouvement sur NH sera, comme on sait, le produit du rapport de MN à NH et du rapport inverse des vitesses sur NH et sur MN. Soit donc posé $\frac{\text{vitesse sur MN}}{\text{vitesse sur NH}} = \frac{\text{MN}}{\text{NI}}$, on aura $\frac{\text{temps sur MN}}{\text{temps sur NH}} = \frac{\text{IN}}{\text{NH}}$.

On prouvera de même que si le rapport de la vitesse dans le milieu rare à la vitesse dans le milieu dense est $\frac{\text{MR}}{\text{RP}}$, on aura $\frac{\text{temps sur MR}}{\text{temps sur RH}} = \frac{\text{PR}}{\text{RH}}$. D'où il suit que $\frac{\text{temps sur MNH}}{\text{temps sur MRH}} = \frac{\text{IN} + \text{NH}}{\text{PR} + \text{RH}}$.

Or, puisque c'est la nature qui dirige la lumière du point M vers le point H, nous devons chercher un point, soit N, par lequel la lumière, en s'infléchissant ou se réfractant, parviendra dans le temps le plus court du point M au point H; car on doit admettre que la nature, qui mène le plus vite possible ses opérations, visera d'elle-même ce point-là. Si donc la somme IN + NH, qui mesure le temps du mouvement sur la ligne brisée MNH, est une quantité minima, nous aurons atteint notre but.

L'énoncé du théorème de Descartes donne ce minimum, comme nous allons aussitôt le prouver par un véritable raisonnement géométrique et sans aucune ambiguïté. Voici en effet cet énoncé :

Si du point M on mène le rayon MN, que du même point M on abaisse la perpendiculaire MD, puis que l'on prenne $\frac{\text{DN}}{\text{NS}}$ dans le rapport de la plus grande vitesse à la moindre, qu'enfin on élève en S la perpendiculaire SH et que l'on mène le rayon NH, la lumière incidente au point N dans le milieu rare se réfractera dans le milieu dense du côté de la perpendiculaire vers le point H.

C'est ce théorème qui est en accord avec notre Géométrie, comme il résulte de la proposition suivante purement géométrique.

Soit le cercle AHBM, dont ANB est un diamètre et N le centre; sur la circonférence de ce cercle je prends un point M quelconque, je mène le rayon MN et j'abaisse sur le diamètre la perpendiculaire MD. Soit donné d'autre part le rapport $\frac{DN}{NS}$, en supposant $DN > NS$; en S j'élève au diamètre la perpendiculaire SH qui rencontre la circonférence au point H; je joins ce point au centre par le rayon HN. Posons $\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{NI}$; je dis que la somme $IN + NH$ est minima; c'est-à-dire que si l'on prend un autre point quelconque, R par exemple, sur le rayon NB, que l'on joigne MR, RH et que l'on fasse $\frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP}$, on aura $PR + RH > IN + NH$.

Pour le démontrer, faisons $\frac{MN}{DN} = \frac{RN}{NO}$ et $\frac{DN}{NS} = \frac{NO}{NV}$. Il est clair que, par construction, puisque DN est plus petit que le rayon MN, on aura $NO < NR$; de même, puisque $NS < ND$, on aura $NV < NO$.

Cela posé, on a, d'après Euclide : $MR^2 = MN^2 + NR^2 + 2DN.NR$; mais puisque, par construction, $\frac{MN}{DN} = \frac{NR}{NO}$, on a $MN.NO = DN.NR$; donc $2MN.NO = 2DN.NR$; donc $MR^2 = MN^2 + NR^2 + 2MN.NO$.

Mais, puisque $NR > NO$, $NR^2 > NO^2$; donc

$$MR^2 > MN^2 + NO^2 + 2MN.NO.$$

Mais la somme $MN^2 + NO^2 + 2MN.NO = (MN + NO)^2$. Donc

$$MR > MN + NO.$$

D'autre part, par construction, $\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{NI} = \frac{NO}{NV}$; donc

$$\frac{DN}{NS} = \frac{MN + NO}{IN + NV}.$$

Mais on a aussi $\frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP}$; donc $\frac{MN + NO}{IN + NV} = \frac{MR}{RP}$. Or $MR > MN + NO$; donc aussi $RP > IN + NV$.

Il reste à prouver que $RH > HV$; car, s'il en est ainsi, il est clair que $PR + RH > IN + NH$.

Or dans le triangle NHR, d'après Euclide,

$$RH^2 = HN^2 + NR^2 - 2SN.NR.$$

Mais par construction $\frac{MN(=NH)}{DN} = \frac{NR}{NO}$, et $\frac{DN}{NS} = \frac{NO}{NV}$; donc, *ex æquo*, $\frac{HN}{NS} = \frac{NR}{NV}$. Donc $HN.NV = NS.NR$ et $2HN.NV = 2SN.NR$; donc

$$RH^2 = HN^2 + NR^2 - 2HN.NV.$$

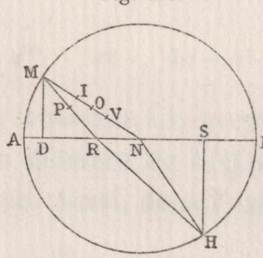
Mais on a prouvé que $NR^2 > NV^2$; donc

$$HR^2 > HN^2 + NV^2 - 2HN.NV.$$

Or $HN^2 + NV^2 - 2HN.NV = HV^2$, d'après Euclide; donc $HR^2 > HV^2$ et $HR > HV$. Ce qu'il restait à prouver.

Si l'on prend le point R sur le rayon AN, quand même les droites MR, RH se trouveraient dans le prolongement l'une de l'autre, comme dans la figure suivante (*fig.* 110), — la démonstration étant d'ailleurs indé-

Fig. 110.



pendante de ce cas particulier, — le résultat sera le même, c'est-à-dire que l'on aura toujours $PR + RH > IN + NH$.

Faisons, comme ci-dessus, $\frac{MN}{DN} = \frac{RN}{NO}$ et $\frac{DN}{NS} = \frac{NO}{NV}$; il est clair que $RN > NO$ et $NO > NV$.

$MR^2 = MN^2 + NR^2 - 2DN.NR$. A $2DN.NR$ on peut, d'après le même raisonnement que ci-dessus, substituer $2MN.NO$; d'ailleurs $NR^2 > NO^2$; donc $MR^2 > MN^2 + NO^2 - 2MN.NO$. Mais

$$MN^2 + NO^2 - 2MN.NO = MO^2.$$

Donc $MR^2 > MO^2$ et $MR > MO$.

D'autre part, on a, par construction, $\frac{DN}{NS} = \frac{MN}{IN} = \frac{NO}{NV}$; donc, *vicissim :* $\frac{MN}{NO} = \frac{NI}{NV}$, et *dividendo :* $\frac{MO}{ON} = \frac{IV}{VN}$, et *vicissim :*

$$\frac{MO}{IV} = \frac{ON}{NV} = \frac{DN}{NS} = \frac{MR}{RP}.$$

Mais on a prouvé que $MR > MO$; donc $PR > IV$. Il reste à prouver, pour établir la proposition, que $RH > HN + NV$; ce qui est très facile d'après ce qui précède.

En effet $RH^2 = HN^2 + NR^2 + 2SN.NR$; à $2SN.NR$ on peut substituer, comme on l'a vu, $2HN.NV$; d'ailleurs $NR^2 > NV^2$. Donc

$$HR^2 > HN^2 + NV^2 + 2HN.NV;$$

donc, comme ci-dessus, $HR > HN + NV$.

Il est donc certain que la somme des deux droites PR, RH, quand même elles ne formeraient qu'une droite unique PRH, est toujours supérieure à la somme $IN + NH$. C. Q. F. D.