INTRODUCTION AUX LIEUX EN SURFACE,

A MON AMI M. DE CARCAVI.

Pour couronner l'*Introduction aux lieux plans et solides,* il reste à traiter des *lieux en surface.* Les anciens n'ont fait qu'indiquer ce sujet, mais n'ont pas enseigné de règles générales, ni même donné quelque exemple célèbre, à moins que ce ne soit enseveli depuis longtemps dans ces monuments de l'antique Géométrie où tant de précieuses découvertes ont été abandonnées sans défense aux insectes et souvent anéanties sans laisser aucune trace.

Cette théorie est cependant susceptible d'une méthode générale, comme le montrera cette courte dissertation; plus tard, si nous en avons le loisir, nous éclaircirons davantage chacune des découvertes géométriques que nous avons jusqu'ici fait brièvement connaître.

Les caractères que nous avons cherchés et montrés dans les lignes comme lieux peuvent être de même recherchés pour les surfaces planes, sphériques, coniques, cylindriques ou pour celles des conoïdes et sphéroïdes [1] quelconques, si l'on établit tout d'abord les lemmes constitutifs de chacun de ces lieux.

Posons donc le lemme suivant pour les lieux en surface plane :

1. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection de cette surface et de ces*

(1) Rappelons qu'Archimède avait appelé *conoïdes* les paraboloïdes elliptiques de révolution et les hyperboloïdes de révolution (à deux nappes); *sphéroïdes* les ellipsoïdes de révolution.

plans en nombre indéfini soit toujours une ligne droite, la surface en question sera un plan.

Pour les lieux en surface sphérique :

2. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection de cette surface et de ces plans en nombre indéfini soit toujours un cercle, la surface en question sera une sphère.*

Pour les lieux en surface de sphéroïde :

3. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection de cette surface et d'un plan sécant soit tantôt un cercle, tantôt une ellipse, mais jamais une autre ligne, la surface en question sera un sphéroïde.*

Pour les lieux en surface de conoïde parabolique ou hyperbolique :

4. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection commune soit tantôt un cercle, tantôt une ellipse, tantôt une parabole ou une hyperbole, mais jamais une autre ligne, la surface en question sera un conoïde parabolique ou hyperbolique.*

Pour les lieux en surface conique :

5. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection commune soit tantôt une ligne droite, tantôt un cercle, tantôt une ellipse, tantôt une parabole ou hyperbole, et jamais une autre ligne, la surface en question sera un cône.*

Pour les lieux en surface cylindrique :

6. *Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection commune soit tantôt une droite, tantôt un cercle, tantôt une ellipse, mais jamais une autre ligne, la surface en question sera un cylindre.*

Mais il se présente très souvent des lieux pour lesquels les sections sont des droites, des paraboles et des hyperboles et aucune autre ligne, comme le montrera bientôt l'analyse de la question. Il convient donc ou plutôt il est absolument nécessaire pour cette étude de constituer *une nouvelle espèce de cylindres ayant pour bases parallèles des paraboles ou des hyperboles et pour côtés des lignes droites, parallèles entre elles, joignant les bases ainsi supposées*, par analogie avec les cylindres ordinaires. De la sorte, aucune section plane d'un tel cylindre ne sera un cercle ou une ellipse; ces nouveaux cylindres pourront d'ailleurs, comme les ordinaires, être droits ou obliques, suivant que le demandera l'analyse du lieu de la question proposée.

Je répète que les problèmes de lieux conduisent nécessairement à de tels cylindres; leur invention et leur définition ne doivent donc pas être regardées comme inutiles.

Bien plus, avant d'aller plus loin, je dirai que la construction d'Archimède pour les sphéroïdes et les conoïdes ne suffit pas pour notre objet; les problèmes conduisent en effet à en considérer d'obliques et non pas seulement des droits.

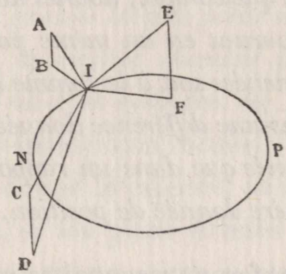
De ce que nous avons posé résultent tout d'abord de très beaux lieux en surface sphérique :

Si de points donnés en nombre quelconque et dans des plans quelconques, on mène des droites concourant en un même point, et que la somme des carrés des droites menées soit égale à une aire donnée, le point de concours sera sur une surface sphérique ou sur une sphère donnée de position. Nous pouvons, en effet, dire ici une sphère, à l'imitation d'Euclide et des anciens géomètres, qui ont appelé *cercle* la circonférence et non l'aire du cercle; en tout cas, c'est sur une surface de cette nature que se trouvera le point en question.

Prenons en effet un plan quelconque donné de position et dans ce plan, suivant les règles données ailleurs pour les lieux plans et solides, cherchons le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux points donnés soit égale à l'aire donnée.

Cette recherche est facile : supposons le problème résolu et soit dans le plan considéré, la courbe NIP comme lieu (*fig.* 89). Abaissons sur ce plan, des points A, E, C donnés par hypothèse, les normales AB, EF, CD. Le plan étant donné de position, ces normales AB, EF, CD, abaissées des points A, E, C donnés, seront elles-mêmes données, ainsi que leurs points de rencontre B, F, D avec le plan. Prenons sur le lieu NIP un point quelconque I, et joignons AI, BI, EI, IF, CI, DI.

Fig. 89.



Les droites AI, EI, CI joignant aux points donnés A, C, E un point I du lieu, la somme des carrés de ces droites est égale à l'aire donnée. Si l'on en retranche les carrés des normales AB, EF, CD, lesquelles sont données, comme nous l'avons prouvé, la différence sera $BI^2 + FI^2 + DI^2$, somme qui dès lors sera donnée. Or les points B, F, D sont donnés dans le plan supposé, ainsi que nous l'avons vu; ainsi, on a des droites BI, FI, DI menées de points B, F, D donnés dans un même plan, droites concourant en un même point d'un lieu dans le même plan, et dont la somme des carrés est égale à une aire donnée; d'après un théorème d'Apollonius que nous avons restitué depuis longtemps, on sait que le lieu NIP est un cercle donné de position.

Une analyse absolument semblable donnera les mêmes conséquences pour tout autre plan que l'on prendra; tous ces plans quelconques, en nombre indéfini, donneront donc toujours des cercles comme lieux; d'après le lemme 2, la surface cherchée sera donc une sphère.

En effet, quand nous cherchons un lieu en surface satisfaisant à une question, rien ne nous empêche d'imaginer que la surface cherchée est coupée par le plan choisi. Mais ici la section ne peut être qu'un cercle, car nous avons prouvé qu'un cercle satisfait comme lieu à la même condition que la surface cherchée; il faut donc que ce cercle soit situé sur ladite surface. Il est donc clair que, dans le cas proposé, le lieu en surface est toujours coupé par un plan suivant un cercle, et par conséquent que c'est une sphère.

On démontre de même les lieux suivants :

Si de points en nombre quelconque, donnés dans un ou plusieurs plans, on mène des droites concourant en un même point, et que la somme des carrés d'une partie des menées soit à la somme des carrés des autres dans un rapport donné ou dans une différence donnée, ou plus grande ou plus petite d'une quantité donnée que dans un rapport donné (1), *le point de concours sera sur une sphère donnée de position.*

Des artifices analogues feront reconnaître une infinité de très belles propriétés de la surface sphérique.

Soient, en nombre quelconque, des plans donnés de position; si d'un même point on mène à ces plans donnés, sous des angles donnés, des droites dont la somme des carrés soit égale à une aire donnée, ce point sera sur la surface d'un sphéroïde donné de position.

Faisons l'analyse en prenant, suivant la méthode indiquée, un plan quelconque donné de position; cherchons-y, suivant les règles pour les lieux plans et solides telles que nous les avons autrefois exposées dans le plan, le lieu des points dont la somme des carrés des menées aux plans donnés sous les angles donnés est égale à l'aire donnée.

La construction se présente immédiatement; le plan que nous avons pris est en effet donné de position aussi bien que les autres plans donnés; les intersections de ce plan choisi et des plans donnés seront donc également données. Les droites menées aux plans donnés d'un point quelconque du plan supposé recevront donc facilement une expression analytique. Si l'on fait la somme de leurs carrés et qu'on

(1) C'est-à-dire, en général, soit une fonction linéaire.

l'égale à l'aire donnée, l'analyse donnera comme lieu, dans le plan supposé, un cercle ou une ellipse, et sa marche même prouvera que dans aucun autre plan donné de position, quel qu'il soit, le lieu ne peut être d'une autre nature. Il est donc clair, d'après le lemme 3, que le lieu cherché, dont les sections sont seulement des cercles ou des ellipses, est un sphéroïde.

Si la somme des carrés d'une partie déterminée des droites ainsi menées est à la somme des autres dans un rapport donné ou dans une différence donnée, ou si elle est plus grande ou plus petite d'une quantité donnée que dans un rapport donné, la surface cherchée sera celle d'un sphéroïde, d'un conoïde, d'un cône ou d'un cylindre, etc., suivant ce qui sera indiqué par l'analyse convenablement menée.

Par exemple, si l'on donne le rapport, on aura en général une surface de conoïde ; mais, si les plans donnés se coupent suivant des droites concourant en un même point, la surface deviendra conique ; si les intersections des plans donnés sont parallèles, la surface sera cylindrique. On aura d'ailleurs soit un cylindre ordinaire, soit un des nôtres.

La pratique découvrira immédiatement ce qui en est; je me borne à donner des indications générales et sommaires, pour que la trop grande multiplicité des exemples n'empêche pas de saisir clairement la méthode.

J'ai réservé pour la dernière place un exemple du plan comme lieu, qui aurait peut-être dû occuper la première :

Soient donnés de position des plans en nombre quelconque ; si à ces plans on mène d'un même point, sous des angles donnés, des droites dont la somme soit égale à une droite donnée, ce point sera sur un plan donné de position.

Coupons en effet, suivant la méthode indiquée, les plans donnés par un plan quelconque donné de position et cherchons-y le lieu satisfaisant à la question, d'après la méthode donnée pour les lieux plans. Ce sera une ligne droite, comme le montrera l'Analyse, et il en sera de même pour toutes les autres sections planes. Il est donc clair, d'après le lemme 1, que le lieu cherché est une surface plane.

Si la somme d'une partie déterminée des droites ainsi menées est à la somme des autres dans un rapport donné ou dans une différence donnée, ou si elle est plus grande ou plus petite d'une quantité donnée que dans un rapport donné, le point sera de même sur une surface plane donnée de position.

D'ailleurs, dans les questions précédentes, si les plans donnés avaient été parallèles entre eux, le lieu eût été également une surface plane, ce qu'il est à peine nécessaire de remarquer.

Comme couronnement, j'ajouterai encore une notable extension du lieu à trois ou quatre droites d'Apollonius :

Soient trois plans donnés de position; si d'un point donné on mène aux plans donnés, sous des angles donnés, des droites telles que le produit de deux d'entre elles soit au carré de la troisième dans un rapport donné, le lieu du point sera soit un plan, soit une sphère, soit un sphéroïde, soit un conoïde, soit une surface conique ou cylindrique (*des anciens ou nouvelle*), *selon la diverse situation des plans donnés.*

De même pour quatre plans, ainsi qu'il sera aisé de le voir.

Les divers cas, les conditions-limites pour les données, les problèmes ou théorèmes locaux en nombre infini que nous avons omis pour être plus bref, la démonstration des lemmes énoncés et tout ce qui aurait peut-être besoin d'une plus longue explication, sera facilement suppléé par tout géomètre soigneux et réfléchi qui aura lu cet écrit; désormais ce sujet, qui paraissait singulièrement ardu, est rendu aisé à comprendre.

Toulouse, 6 janvier 1643.