INTRODUCTION

AUX

LIEUX PLANS ET SOLIDES.

Que les anciens aient longuement traité des lieux, on ne peut en douter; nous le savons par Pappus, qui, au commencement du Livre VII, témoigne qu'Apollonius avait écrit sur les lieux plans, et Aristée sur les lieux solides. Mais, si nous ne nous trompons pas, la recherche des lieux ne leur était point suffisamment aisée. Nous le conjecturons de ce fait que, pour nombre de lieux, ils n'ont point donné un énoncé assez général, ainsi qu'on le verra plus loin.

Nous soumettons donc cette théorie à une analyse qui lui est propre et particulière, et qui ouvre la voie générale pour la recherche des lieux.

Toutes les fois que dans une équation finale on trouve deux quantités inconnues, on a un lieu, l'extrémité de l'une d'elles décrivant une ligne droite ou courbe. La ligne droite est simple et unique dans son genre; les espèces des courbes sont en nombre indéfini, cercle, parabole, hyperbole, ellipse, etc.

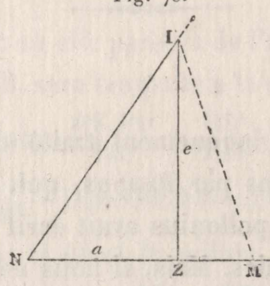
Toutes les fois que l'extrémité de la quantité inconnue qui décrit le lieu suit une ligne droite ou circulaire, le lieu est dit *plan;* si elle décrit une parabole, une hyperbole ou une ellipse, le lieu est dit *solide;* pour d'autres courbes, on l'appelle lieu *de ligne*. Nous n'ajouterons rien sur ce dernier cas, car la connaissance du lieu *de ligne* se déduit très facilement, au moyen de réductions, de l'étude des lieux *plans* et *solides*.

www.rcin.org.pl

Il est commode, pour établir les équations, de prendre les deux quantités inconnues sous un angle donné, que d'ordinaire nous supposerons droit, et de se donner la position et une extrémité de l'une d'elles; pourvu qu'aucune des deux quantités inconnues ne dépasse le carré, le lieu sera plan ou solide, ainsi qu'on le verra clairement ci-après.

Soit NZM (*fig.* 78) une droite donnée de position, dont on donne le

Fig. 78.



point N. Qu'on égale NZ à la quantité inconnue a, et la droite ZI (menée sous l'angle donné NZI) à l'autre quantité inconnue e.

Soit

$$da = be.$$

Le point I sera une droite donnée de position.

En effet, on aura $\frac{b}{d} = \frac{a}{e}\cdot$ Donc le rapport $\frac{a}{e}$ est donné, ainsi que l'angle en Z. Donc le triangle NIZ est donné d'espèce, donc l'angle INZ. Mais le point N est donné, ainsi que la position de la droite NZ. Donc NI sera donnée de position. La synthèse est facile.

On ramènera à cette équation toutes celles dont les termes sont soit donnés, soit formés par les inconnues a et e, multipliées par des droites données ou bien prises simplement.

$$z^{\text{II}} - da = be.$$

Soit posé $z^{\text{II}} = dr$. On aura $\frac{b}{d} = \frac{r-a}{e}$.

Soit pris MN $= r$; le point M sera donné et l'on aura MZ $= r - a$.

www.rcin.org.pl

Le rapport $\frac{MZ}{ZI}$ sera donc donné, ainsi que l'angle en Z. Donc le triangle IZM sera donné d'espèce, et en joignant MI, on conclura que cette droite est donnée de position. Ainsi le point I sera sur une droite donnée de position, et la même conclusion se tirera sans difficulté pour toute équation qui aura des termes en a ou e seulement.

C'est là la première et plus simple équation de lieu, qui servira à trouver tous les lieux sur une ligne droite; par exemple la proposition 7 du Livre I d'Apollonius *Des lieux plans,* qui pourra dès lors s'énoncer et se construire plus généralement.

Cette équation renferme aussi la très belle proposition suivante, que nous avons découverte par son moyen :

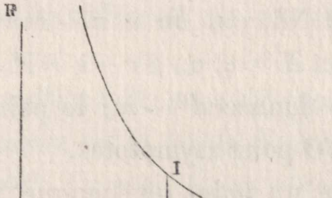
« *Soient, en nombre quelconque, des droites données de position, auxquelles on mène d'un même point des droites sous des angles donnés; si la somme des produits des droites ainsi menées par des données est égale à une aire donnée, le point d'où on les mène sera sur une droite donnée de position.* »

Nous omettons une infinité d'autres propositions, qui pourraient, à bon droit, être opposées à celles d'Apollonius.

Le second degré des équations de cette sorte se présente si $ae = z^{II}$, auquel cas le point I est sur une hyperbole.

Menez NR (*fig.* 79) parallèle à ZI; prenez sur NZ un point quel-

Fig. 79.



conque, soit M, par lequel vous mènerez MO parallèle à ZI. Con-

www.rcin.org.pl

struisez le rectangle NMO égal à l'aire z^{II}. Par le point O, entre les asymptotes NR, NM, décrivez une hyperbole; elle sera donnée de position et passera par le point I, puisqu'on suppose ae, c'est-à-dire le rectangle NZI, équivalent au rectangle NMO.

On ramènera à cette équation toutes celles dont les termes sont, soit donnés, soit en a, en e ou en ae.

Ainsi soit $d^{\text{II}} + ae = ra + se$.

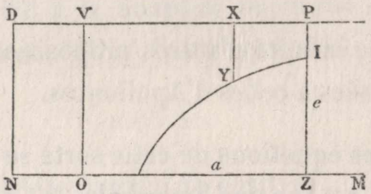
D'après les règles de l'art, on aura $ra + se - ae = d^{\text{II}}$. Formez un rectangle de deux côtés, qui donnent les termes : $ra + se - ae$. Ces deux côtés seront $a - s$ et $r - e$, et leur rectangle $ra + se - ae - rs$.

Si maintenant de d^{II} vous retranchez rs, le rectangle

$$(a - s)(r - e) = d^{\text{II}} - rs.$$

Prenez NO (*fig.* 80) égal à s, et ND, parallèle à ZI, égale à r. Par le

Fig. 80.



point D, menez DP parallèle à NM; par le point O, OV parallèle à ND; prolongez ZI jusqu'en P.

Puisque $\text{NO} = s$ et $\text{NZ} = a$, on a $a - s = \text{OZ} = \text{VP}$. De même, puisque $\text{ND} = \text{ZP} = r$ et $\text{ZI} = e$, on a $r - e = \text{PI}$. Le rectangle $\text{PV} \times \text{PI}$ est donc égal à l'aire donnée $d^{\text{II}} - rs$; le point I est donc sur une hyperbole ayant PV, VO pour asymptotes.

Si, en effet, prenant un point quelconque X et menant la parallèle XY, on construit le rectangle $\text{VXY} = d^{\text{II}} - rs$, et que par le point Y, entre les asymptotes PV, VO, on décrive une hyperbole, elle passera par le point I. L'analyse et la construction seront faciles dans tous les cas.

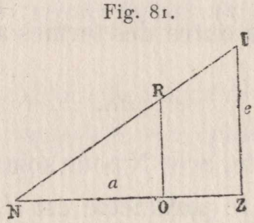
www.rcin.org.pl

Le degré suivant des équations de lieu se présente si l'on a $a^2 = e^2$ ou si a^2 est à e^2 dans un rapport donné, ou encore si $a^2 + ae$ est à e^2 dans un rapport donné. Enfin ce cas comprend toutes les équations dont les termes vont jusqu'au carré, et sont en a^2, e^2 ou ae.

Dans tous ces cas, le point I est sur une ligne droite, ce qui est très facile à démontrer.

Si le rapport $\frac{\mathrm{NZ}^2 + \mathrm{NZ}.\mathrm{ZI}}{\mathrm{ZI}^2}$ est donné (*fig.* 81), qu'on mène une

Fig. 81.



parallèle quelconque OR, le rapport $\frac{\mathrm{NO}^2 + \mathrm{NO}.\mathrm{OR}}{\mathrm{OR}^2}$ sera le même, comme il est très facile de le prouver. Le point I sera donc sur une droite donnée de position.

Il en sera de même pour toutes les équations dont tous les termes seront affectés des carrés des inconnues ou de leur rectangle; il est inutile de détailler plus exactement les cas particuliers.

Si aux carrés des inconnues avec ou sans leur rectangle s'ajoutent des termes soit donnés absolument, soit produits d'une droite donnée par l'une des inconnues, la construction est plus difficile. Nous la ferons brièvement dans les différents cas, avec la démonstration.

Si $a^2 = de$, le point I est sur une parabole.

Soit (*fig.* 82) NP parallèle à ZI; avec NP pour diamètre, décrivez la parabole dont le paramètre est la droite donnée d et dont les ordonnées sont parallèles à NZ. Le point I sera sur cette parabole, qui est donnée de position.

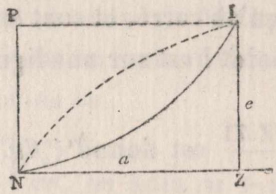
En effet, d'après la construction, le rectangle $d \times \mathrm{NP} = \mathrm{PI}^2$, ou autrement $d \times \mathrm{IZ} = \mathrm{NZ}^2$, et par suite $de = a^2$.

On ramènera facilement à cette équation toutes celles où a^2 se ren-

www.rcin.org.pl

contre avec des termes produits de e par des données, ou bien e^2 avec des termes produits de a par des données; il en sera de même, quand

Fig. 82.



l'équation comprendrait en outre des termes absolument donnés.

Soit

$$e^2 = da.$$

Dans la figure précédente, avec N pour sommet, NZ pour diamètre, décrivez la parabole dont le paramètre est d, et dont les ordonnées sont parallèles à la droite NP. Elle satisfera à la question, comme cela est évident.

Soit

$$b^2 - a^2 = de \qquad \text{ou, par conséquent,} \qquad b^2 - de = a^2.$$

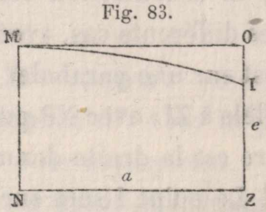
Divisez b^2 par d; soit $b^2 = dr$. On aura donc

$$dr - de = a^2 \qquad \text{ou} \qquad d(r - e) = a^2.$$

On aura ainsi ramené cette équation à la précédente en substituant $r - e$ à e.

Soit en effet menée MN (*fig.* 83) parallèle à ZI et égale à r, et par

Fig. 83.



le point M, MO parallèle à NZ. Le point M est donné, ainsi que la position de la droite MO. D'après cette construction, $OI = r - e$. Donc $d \times OI = NZ^2 = MO^2$.

La parabole décrite à partir du sommet M, sur le diamètre MN, avec

www.rcin.org.pl

d comme paramètre et des ordonnées parallèles à NZ, satisfera à la question, comme il est clair d'après la construction.

Si $b^2 + a^2 = de$, on aura $de - b^2 = a^2$, etc., comme ci-dessus. On construira de même toutes les équations semblablement composées en a^2 et e.

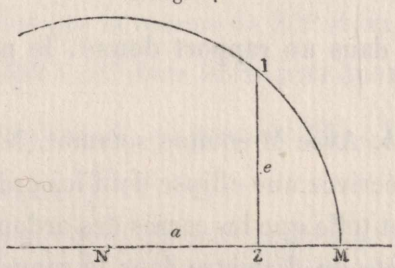
Mais a^2 se trouve souvent avec e^2 et des termes absolument donnés.

Soit $b^2 - a^2 = e^2$.

Le point I sera sur un cercle donné de position, si l'angle NZI est droit.

Soit pris NM (*fig.* 84) égal à b. Le cercle décrit de N comme centre, avec NM comme rayon, satisfera à la question, c'est-à-dire que quel

Fig. 84.



que soit le point I pris sur sa circonférence, ZI^2 (ou e^2) sera égal à NM^2 (ou b^2) $-$ NZ^2 (ou a^2), comme il est clair.

On ramènera à cette équation toutes celles qui ont des termes en a^2, e^2, et en a ou e multipliés par des données, pourvu que l'angle NZI soit droit, et en outre que le coefficient de a^2 soit égal à celui de e^2.

Soit

$$b^2 - 2da - a^2 = e^2 + 2re.$$

Ajoutez de part et d'autre r^2 pour substituer $e + r$ à e, vous aurez

$$r^2 + b^2 - 2da - a^2 = e^2 + r^2 + 2re.$$

A $r^2 + b^2$ ajoutez d^2, pour substituer $d + a$ à a, et soit

$$r^2 + b^2 + d^2 = p^2.$$

On aura

$$p^2 - d^2 - 2da - a^2 = r^2 + b^2 - 2da - a^2,$$

www.rcin.org.pl

car par construction

$$p^2 - d^2 = r^2 + b^2.$$

Si maintenant, au lieu de $a + d$, on prend a, et si, au lieu de $e + r$, on prend e, on aura

$$p^2 - a^2 = e^2.$$

L'équation sera ramenée à la précédente.

On y ramènera par un raisonnement semblable toutes les équations pareilles. Grâce à ce procédé, nous avons construit toutes les propositions du second Livre d'Apollonius *Sur les lieux plans,* et nous avons démontré que les six premières ont lieu pour des points quelconques, ce qui est assez remarquable et était peut-être ignoré d'Apollonius.

Mais soit $\frac{b^2 - a^2}{e^2}$ dans un rapport donné, le point I sera sur une ellipse.

Soit pris $\mathrm{MN} = b$. Avec M comme sommet, NM comme diamètre, N comme centre, décrivez une ellipse dont les ordonnées soient parallèles à la droite ZI et telle que les carrés des ordonnées soient aux rectangles des segments du diamètre dans le rapport donné; le point I sera sur cette ellipse. Car $\mathrm{NM}^2 - \mathrm{NZ}^2$ est égal au rectangle des segments du diamètre.

On ramènera à cette équation toutes celles où a^2 se trouve dans un membre, opposé à e^2 dans l'autre, sous un signe contraire, et avec un coefficient différent. Car, si les coefficients sont identiques et l'angle droit, le lieu sera un cercle, comme nous l'avons dit. D'ailleurs, quoique les coefficients soient les mêmes, le lieu sera une ellipse, si l'angle n'est pas droit.

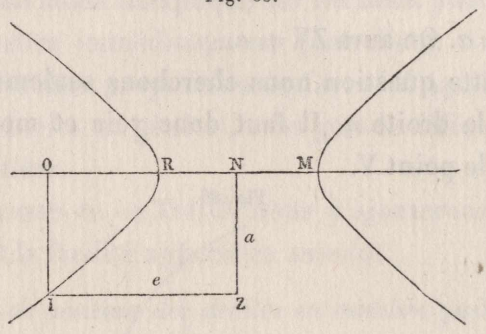
Si les équations comprennent en outre des termes produits de a ou e par des données, la réduction se fera néanmoins par l'artifice que nous avons déjà employé.

Soit $\frac{a^2 + b^2}{e^2}$ dans un rapport donné, le point I est sur une hyperbole.

www.rcin.org.pl

Menez NO (*fig.* 85) parallèle à ZI; soit $\frac{b^2}{NR^2}$ dans le rapport donné. Le point R sera donné. Avec R comme sommet, RO comme diamètre,

Fig. 85.



N comme centre, décrivez une hyperbole dont les ordonnées soient parallèles à NZ, et telles que la somme de RO^2 et du produit par RO du diamètre total [MR] soit à OI^2 dans le rapport donné $\frac{NR^2}{b^2}$.

Par conséquent, *componendo,* en prenant $MN = NR$, $\frac{MO \times OR + NR^2}{OI^2 + b^2}$ est dans le rapport donné $\frac{NR^2}{b^2}$.

Mais $MO \times OR + NR^2 = NO^2 = ZI^2 = e^2$ et $OI^2 + b^2 = NZ^2 (\text{ou } a^2) + b^2$.

Donc $\frac{e^2}{b^2 + a^2} = \frac{NR^2}{b^2}$, et, *convertendo,* $\frac{b^2 + a^2}{e^2}$ est le rapport donné.

Donc le point I est sur une hyperbole donnée de position.

Le même artifice que nous avons déjà employé ramènera à cette équation toutes celles où figurent a^2 et e^2 avec des termes donnés, soit simplement, soit en outre avec des termes produits de a ou e par des données, et où a^2 se trouve dans l'autre membre que e^2, mais sous le même signe. Car, si les signes étaient contraires, on conclurait à un cercle ou à une ellipse.

L'ÉQUATION la plus difficile est celle où a^2 et e^2 figurent avec des termes en ae, et en outre des termes donnés, etc.

Soit $b^2 - 2a^2 = 2ae + e^2$.

Ajoutez de part et d'autre a^2 pour avoir $a + e$ comme racine de l'un des membres :

$$b^2 - a^2 = a^2 + 2ae + e^2.$$

www.rcin.org.pl

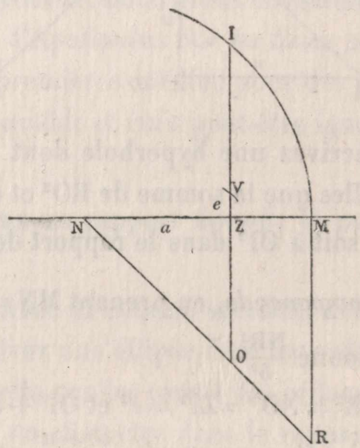
A $a+e$ substituons e, par exemple, et, d'après ce qui précède, soit le cercle MI (*fig.* 86) satisfaisant à la question : c'est-à-dire que

$$MN^2(=b^2) - NZ^2(=a^2) = ZI^2(=[a+e]^2).$$

Soit $VI = NZ = a$. On aura $ZV = e$.

Mais dans cette question nous cherchons seulement le point V ou l'extrémité de la droite e. Il faut donc voir et montrer sur quelle ligne se trouve le point V.

Fig. 86.



Soit MR parallèle à ZI et égale à MN. Joignez NR que IZ prolongée rencontre en O. Puisque $MN = MR$, $NZ = ZO$. Mais $NZ = VI$; donc, par addition, $VO = ZI$. Donc $MN^2 - NZ^2 = VO^2$. Mais le triangle NMR est donné d'espèce; donc le rapport $\dfrac{NM^2}{NR^2}$ est donné, donc le rapport $\dfrac{NZ^2}{NO^2}$, donc le rapport $\dfrac{MN^2 - NZ^2}{NR^2 - NO^2}$. Mais nous avons prouvé que $OV^2 = MN^2 - NZ^2$; donc le rapport $\dfrac{NR^2 - NO^2}{OV^2}$ est donné. Mais les points N et R sont donnés, ainsi que l'angle NOZ. Donc le point V, d'après ce qui a été démontré précédemment, est sur une ellipse.

Par un procédé analogue, on ramènera aux cas précédents tous les autres dans lesquels des termes en ae se rencontrent avec des termes les uns donnés, les autres en a^2 et e^2, ou encore produits de a et de e par des données; la discussion de ces différents cas est très facile, et

www.rcin.org.pl

la question se résoudra toujours par le moyen d'un triangle connu d'espèce.

Nous avons donc embrassé dans un exposé bref et lucide tout ce que les anciens ont laissé inexpliqué sur les lieux plans et solides; par suite on reconnaîtra immédiatement quels lieux donnent tous les divers cas de la dernière proposition du Livre I d'Apollonius *Des lieux plans*, et on découvrira en général, sans grande difficulté, tout ce qui regarde cette matière.

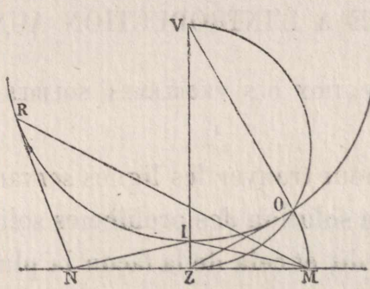
Comme couronnement de ce Traité, nous y ajouterons une très belle proposition, dont la facilité apparaîtra aussitôt.

Étant données de position des droites en nombre quelconque, si d'un même point on mène à chacune d'elles une droite sous un angle donné, et que la somme des carrés des droites menées soit égale à une aire donnée, le point est sur un lieu solide donné de position.

Un seul exemple suffit à indiquer le procédé général de construction.

Soient donnés deux points N et M (*fig.* 87), et soit à trouver le lieu des points tels que si l'on mène les droites IN, IM, la somme de leurs carrés soit au triangle INM dans un rapport donné.

Fig. 87.



Soit posé NM $= b$. Appelons e la droite ZI menée perpendiculairement, et a la distance NZ.

D'après les règles de l'art, $\dfrac{2a^2+b^2-2ba+2e^2}{be}$ est un rapport donné.

www.rcin.org.pl

En résolvant les positions d'après les règles exposées, la construction se fera comme suit.

Prenez en Z le milieu de NM; élevez en Z la perpendiculaire ZV; soit dans le rapport donné $\frac{4ZV}{NM}$; sur VZ décrivez le demi-cercle VOZ, inscrivez $ZO = ZM$ et joignez VO. De V comme centre avec VO pour rayon, décrivez le cercle OIR. Si d'un point quelconque R pris sur ce cercle, on mène RN, RM, je dis que $RN^2 + RM^2$ est au triangle RNM dans le rapport donné.

Si cette découverte eût précédé notre restitution déjà ancienne des deux Livres *Des lieux plans,* les constructions des théorèmes de lieux en eussent été rendues beaucoup plus élégantes; cependant nous ne regrettons pas cette production, quoique précoce et insuffisamment mûrie. Il y a en effet pour la Science un certain intérêt à ne pas dérober à la postérité les travaux encore informes de l'esprit; l'œuvre d'abord simple et grossière se fortifie et grandit par les nouvelles inventions. Il est même important pour l'étude de pouvoir contempler pleinement les progrès cachés de l'esprit et le développement spontané de l'art.

APPENDICE A L'INTRODUCTION AUX LIEUX

RENFERMANT LA SOLUTION DES PROBLÈMES SOLIDES PAR LES LIEUX.

Après la méthode pour trouver les lignes servant de lieux, il reste à chercher comment la solution des problèmes solides peut se déduire de ce que nous avons dit et cela de la façon la plus élégante. Dans ce but, il faut restreindre cette faculté des quantités inconnues de varier en dehors de leurs limites; car dans les lieux il y a une infinité de points qui satisfont à la question proposée.

Le plus commode est de déterminer la question au moyen de deux équations de lieux; car deux lignes-lieux données de position se

www.rcin.org.pl

coupent mutuellement, et le point d'intersection, qui est donné de position, ramène la question de l'indéfini aux termes proposés.

Des exemples peuvent expliquer la chose brièvement et clairement. Soit proposé $a^3 + ba^2 = z'' b$.

Il est commode d'égaler chacun des deux membres de l'équation au solide bae, en sorte qu'en divisant ce solide, d'un côté par a, de l'autre par b, la question soit ramenée à des lieux.

Puisque ainsi $a^3 + ba^2 = bae$, on aura $a^2 + ba = be$. Comme il est clair d'après notre méthode, l'extrémité de e sera sur une parabole donnée de position.

D'autre part $z'' b = bae$; donc $z'' = ae$, et, d'après notre méthode, l'extrémité de e sera sur une hyperbole donnée de position. Mais nous avons déjà prouvé qu'elle est sur une parabole donnée de position. Elle est donc donnée de position, et il est facile de remonter de l'analyse à la synthèse.

La méthode sera la même pour toutes les équations cubiques; car, en ramenant d'un côté tous les termes solides où figure a, de l'autre le solide entièrement donné ou encore en laissant avec ce dernier des termes solides en a ou en a^2, on pourra former une équation semblable à celle du cas précédent.

Soit maintenant un exemple d'équations biquadratiques :

Soit $a^4 + b''' a + z^2 a^2 = d^{\text{IV}}$, d'où $a^4 = d^{\text{IV}} - b''' a - z^2 a^2$.

Égalons ces deux membres à $z^2 e^2$. Puisque $a^4 = z^2 e^2$, en extrayant la racine carrée, $a^2 = ze$; l'extrémité de e sera sur une parabole donnée de position.

D'autre part, puisque $d^{\text{IV}} - b''' a - z^2 a^2 = z^2 e^2$, en divisant tous les termes par z^2, on a $\dfrac{d^{\text{IV}} - b''' a}{z^2} - a^2 = e^2$. D'après notre méthode, l'extrémité de e sera sur un cercle donné de position. Mais elle est aussi sur une parabole donnée de position. Elle est donc donnée.

Le même procédé peut servir à résoudre toutes les équations biquadratiques; car, par la méthode de Viète (Cap. I : *De emend.*), on peut faire disparaître le terme affecté du cube, et en disposant d'un côté le

www.rcin.org.pl

bicarré inconnu, de l'autre le reste des termes, on résoudra la question par une parabole et un cercle ou une hyperbole.

Soit proposé comme exemple de trouver deux moyennes proportionnelles.

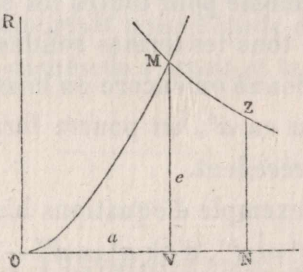
Soient deux droites, b la plus grande, d la plus petite, entre lesquelles il faut trouver deux moyennes proportionnelles.

Soit a la plus grande de ces moyennes, on aura $a^3 = b^2 d$. Égalez les deux termes à bae. On aura d'un côté $a^2 = be$, de l'autre $ae = bd$.

Par suite la question se résoudra par l'intersection d'une hyperbole et d'une parabole.

Soit une droite quelconque OVN (*fig.* 88) donnée de position, et le point O donné sur cette droite. Soient données les droites b et d, entre lesquelles il faut trouver deux moyennes proportionnelles. Supposons $OV = a$, et soit e la droite VM perpendiculaire à OV.

Fig. 88.



D'après la première équation ($a^2 = be$), il est clair qu'il faut décrire, avec le point O comme sommet, b comme paramètre et un diamètre parallèle à VM, une parabole dont les ordonnées soient parallèles à OV : cette parabole passera par le point M.

D'après la seconde équation ($bd = ae$), soit pris sur la droite OV un point quelconque N; élevez-y la perpendiculaire NZ, et soit $ON \times NZ = bd$. Élevez aussi la perpendiculaire OR. D'après notre méthode des lieux, il faut décrire une hyperbole passant par le point Z et ayant pour asymptotes RO, OV; elle sera donnée de position et passera par le point M.

www.rcin.org.pl

Mais la parabole déjà décrite est aussi donnée de position et passe par le même point M; donc le point M est donné de position. Si on en abaisse la perpendiculaire MV, le point V est donné, donc la droite OV qui est la plus grande des deux moyennes proportionnelles que nous cherchons.

Ces deux moyennes peuvent donc être trouvées par l'intersection d'une parabole et d'une hyperbole.

Si l'on veut élever la question à une équation biquadratique, qu'on multiplie tous les termes par a :

$$a^4 = b^2 da.$$

En égalant, d'après la méthode précédente, chacun des deux membres à $b^2 e^2$, on aura deux équations, à savoir $a^2 = be$, et $da = e^2$, qui donneront chacune une parabole donnée de position. La construction des moyennes proportionnelles se fera donc ainsi par l'intersection de deux paraboles.

Ces deux constructions se trouvent dans Eutocius sur Archimède; elles s'expliquent immédiatement par cette méthode.

Il est donc inutile d'employer les *plarapléroses climactiques* de Viète, pour ramener à des équations quadratiques les biquadratiques au moyen de cubiques à racine de deux dimensions. Car il est clair que les biquadratiques se résolvent avec la même élégance, la même facilité et la même rapidité que les cubiques, et il n'est pas possible, je crois, d'imaginer une solution plus élégante.

Pour faire ressortir l'élégance de cette méthode, voici la *construction de tous les problèmes cubiques et biquadratiques au moyen d'une parabole et d'un cercle*.

Soit $a^4 - z''' a = d^{\text{IV}}$, d'où $a^4 = z''' a + d^{\text{IV}}$.

Formez le carré de la différence de a^2 et de b^2 (ou d'un autre carré quelconque) : ce carré sera $a^4 + b^4 - 2b^2 a^2$.

Ajoutez, comme supplément, à chaque membre de l'équation : $b^4 - 2b^2 a^2$, on aura

$$a^4 + b^4 - 2b^2 a^2 = b^4 - 2b^2 a^2 + z''' a + d^{\text{IV}}.$$

www.rcin.org.pl

Soit $2b^2 = n^2$, et égalons chaque membre de l'équation à $n^2 e^2$.

On aura d'un côté, en prenant la racine carrée, $a^2 - b^2 = ne$ et par suite l'extrémité de e sera sur une parabole, d'après notre méthode.

De l'autre côté, on aura $\frac{b^4}{n^2} - a^2 + \frac{z''' a}{n^2} + \frac{d^{\text{IV}}}{n^2} = e^2$, et, d'après notre méthode, l'extrémité de e sera sur un cercle.

Ainsi la question est résolue par le tracé d'une parabole et d'un cercle.

Cette méthode s'étend facilement à tous les cas, tant cubiques que biquadratiques. Il faut seulement prendre soin d'avoir dans un membre a^4, dans l'autre le reste des termes quelconques, à condition qu'il n'y en ait pas en a^3. Mais par l'*expurgation* de Viète on peut toujours, dans une équation biquadratique, faire disparaître le terme affecté du cube; la méthode reste donc la même dans tous les cas.

Quant aux équations cubiques, la méthode de Viète en fait disparaître le terme affecté du carré; en sorte qu'en multipliant tous les termes par a, on aura une équation biquadratique, où aucun terme ne sera affecté du cube; elle se résoudra donc par la méthode qui précède.

Il faut seulement prendre soin que, dans la seconde équation, on ait dans un membre a^2, dans l'autre e^2, sous des signes contraires, ce qui est toujours très facile.

Pour parcourir tous les cas, soit encore

$$a^4 = z^{\text{II}} a^2 - z^{\text{III}} d.$$

Formez le carré de a^2 moins un carré quelconque donné, soit b^2, vous aurez $a^4 + b^4 - 2a^2b^2$. Ajoutez, comme supplément aux deux membres de l'équation, $b^4 - 2a^2b^2$, on aura

$$a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = b^4 - 2a^2b^2 + z^{\text{II}} a^2 - z^{\text{III}} d.$$

Pour faciliter la division, il faut, dans le second membre, prendre la différence entre $2b^2$ et z^{II}, soit par exemple n^2, et égaler chacun des deux membres à n^2e^2, en sorte que l'on ait : d'un côté, $a^2 - b^2 = ne$; de l'autre, $\frac{b^4}{n^2} - a^2 - \frac{z^{\text{III}} d}{n^2} = e^2$.

www.rcin.org.pl

Il faut remarquer ici qu'il faut avoir $2b^2 > z^{\text{II}}$, autrement a^2 n'aurait pas le signe $-$, et, au lieu d'un cercle, nous trouverions une hyperbole. Mais le remède est facile. En effet, nous prenons b^2 arbitrairement, par suite rien n'est plus simple que de prendre son double supérieur à z^{II}. D'ailleurs notre méthode des lieux établit qu'on a toujours un cercle lorsque dans un des membres de l'équation se trouve un des carrés inconnus avec le signe $+$, et dans l'autre membre, l'autre carré inconnu avec le signe $-$.

Prenons, pour exemple de cette construction, l'invention des deux moyennes. On a $a^3 = b^2 d$, d'où $a^4 = b^2 da$. Ajoutez de part et d'autre $b^4 - 2b^2 a^2$, il vient

$$a^4 + b^4 - 2b^2 a^2 = b^4 + b^2 da - 2a^2 b^2.$$

Soit $2b^2 = n^2$, et égalez chacun des deux membres à $n^2 e^2$.

On aura d'un côté : $a^2 - b^2 = ne$; l'extrémité de e est sur une parabole. De l'autre : $\frac{b^2}{2} + \frac{d}{2} a - a^2 = e^2$; l'extrémité de e sera sur un cercle.

Celui qui aura étudié ce qui précède n'essayera pas de ramener aux problèmes plans, c'est-à-dire de résoudre par les droites et le cercle les questions des moyennes proportionnelles, de la trisection de l'angle et autres semblables.

www.rcin.org.pl