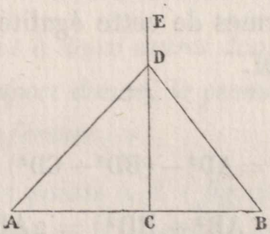
LIVRE II.

Proposition I.

« *Si des points donnés sont joints par des lignes droites à un même point, et que la différence des carrés de ces droites soit une aire donnée, le point de concours sera sur une droite donnée de position.* »

Soient A et B (*fig.* 24) les deux points donnés; soit une aire donnée quelconque plus petite que $\overline{AB}^2$. Partagez AB en C, en sorte que

Fig. 24.



$AC^2 - CB^2$ soit égal à l'aire donnée; élevez la perpendiculaire indéfinie CE. Prenez-en un point quelconque D. Joignez DA, BD. Je dis que $AD^2 - DB^2$ est égal à l'aire donnée.

C'est évident, puisque $AD^2 - DB^2 = AC^2 - CB^2$.

Si l'aire donnée était plus grande que AB^2, le point C tomberait en dehors de la droite AB.

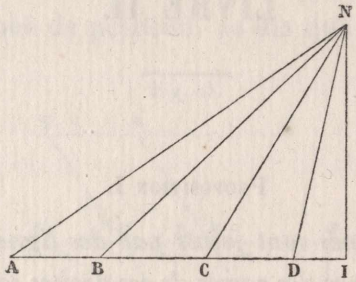
A cette proposition on peut rattacher les deux suivantes :

Soient donnés quatre points A, B, C, D (*fig.* 25) *en ligne droite, et soit* AB = CD. *Prenez un autre point quelconque* N; *menez les quatre droites* NA, NB, NC, ND. *Je dis que*

$$AN^2 + ND^2 - (BN^2 + NC^2) = 2\,AB \times BD.$$

En effet, menons la perpendiculaire NI, et supposons d'abord que le point I tombe en dehors de la droite AD. Il est clair que, en raison de

Fig. 25.



NI^2 commun à tous les termes,

$$AN^2 + ND^2 - (BN^2 + NC^2) = AI^2 + ID^2 - (BI^2 + CI^2).$$

Mais (II, 4) (¹) $AI^2 + DI^2 = 2DI^2 + AD^2 + 2AD \times DI$, et par le même théorème $BI^2 + CI^2 = 2DI^2 + BD^2 + CD^2 + 2BD \times DI + 2CD \times DI$.

Aux deux derniers termes de cette égalité, puisque $AB = CD$, on peut substituer $2AD \times DI$.

Donc

$$AI^2 + ID^2 - (BI^2 + CI)^2 = AD^2 - (BD^2 + CD^2) = AD^2 - (BD^2 + AB^2).$$

Mais (II, 4) (¹) $AD^2 - (AB^2 + BD^2) = 2AB \times BD$.

La proposition est donc établie.

Je n'ajoute pas les autres cas pour cette proposition, ni pour les suivantes, car ce serait aussi fastidieux que facile.

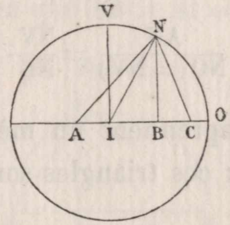
Si l'on joint un point à trois autres donnés en ligne droite, et que la somme des carrés de deux droites ainsi menées surpasse le carré de la troisième d'une aire donnée, le point sera sur une circonférence donnée de position.

Soient A, B, C (*fig.* 26) les trois points donnés en ligne droite. Soit donnée une aire supérieure à $2AB \times BC$. Prenez $AI = BC$, et soit l'aire donnée égale à $2AB \times BC + IV^2$. De I comme centre, avec IV pour

(¹) Renvoi aux *Éléments* d'Euclide.

rayon, décrivez le cercle VNO. Soit un point N quelconque sur sa circonférence; joignez-le aux points donnés, par les droites NA, NB, NC. Je dis que $AN^2 + NC^2 - NB^2$ est égal à l'aire donnée.

Fig. 26.



En effet, joignez IN; d'après la proposition précédente :

$$AN^2 + NC^2 = IN^2 + BN^2 + 2AB \times BC.$$

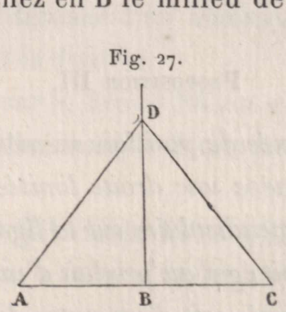
Donc $AN^2 + NC^2 - NB^2 = IN^2 + 2AB \times BC$ et la proposition est établie.

Proposition II.

« *Si l'on joint un point à deux autres donnés et que les droites ainsi menées soient dans un rapport donné, le premier point sera, soit sur une droite, soit sur une circonférence.* »

Soient donnés les deux points A, C (*fig.* 27), et supposons d'abord le rapport d'égalité. Prenez en B le milieu de AC; élevez BD perpen-

Fig. 27.



diculaire; il est clair que, si l'on en prend un point quelconque D, on aura $AD = DC$.

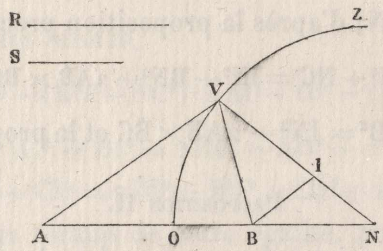
Supposons maintenant un rapport d'inégalité; soient A, B (*fig.* 28) les deux points donnés, $\frac{R}{S}$ le rapport donné. Soit $\frac{R^2}{S^2} = \frac{AN}{NB}$. Entre AN et NB prenez la moyenne proportionnelle NO, et avec ce rayon décrivez le cercle OVZ. Soit un point quelconque V sur la circonférence ; joignez VA, BV. Je dis que ces droites sont dans le rapport $\frac{R}{S}$.

En effet, joignons VN, et menons BI parallèle à VA. On a

$$\frac{AN}{NO(=NV)}=\frac{NV}{NB}.$$

Ce sont les côtés qui comprennent un même angle ANV dans les deux triangles ANV, BVN; ces triangles sont donc semblables et les

Fig. 28.



angles VAB, BVI égaux. Mais AVB, VBI le sont à cause des parallèles; donc les triangles AVB, VBI sont semblables et $\frac{AV}{VB}=\frac{VB}{BI}$ avec $\frac{VB}{BI}=\frac{NV}{NB}=\frac{AN}{NV}$. Donc $\frac{VB^2}{BI^2}\left(=\frac{AN}{NB}=\frac{R^2}{S^2}\right)=\frac{AV^2}{VB^2}$. Donc $\frac{AV}{VB}=\frac{R}{S}$, et la proposition est établie.

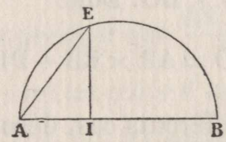
Proposition III.

« *Si une droite est donnée de position en même temps qu'un point sur elle, si de ce point l'on mène une droite limitée, que de l'extrémité de celle-ci on abaisse une perpendiculaire sur la ligne donnée de position, et que le carré de la menée soit égal au produit d'une donnée et de l'abscisse à partir soit du point donné, soit d'un autre donné sur la ligne donnée de position, l'extrémité de la menée sera sur une circonférence donnée de position.* »

Soit AB (*fig.* 29) la droite donnée de position, A le point donné sur elle. Il faut trouver une circonférence de cercle telle que, si l'on prend sur elle un point quelconque E, et qu'on abaisse la perpendiculaire EI, AE^2 soit égal au produit d'une donnée et de AI (c'est ainsi qu'on doit ici entendre *l'abscisse à partir du point donné*).

Soit AB la longueur donnée; sur AB je décris un demi-cercle; il est clair d'après la construction que $AB \times AI = AE^2$.

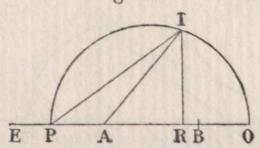
Fig. 29.



Il y a plus de difficulté pour le second cas, à savoir quand l'abscisse part d'un autre point que A, comme dans l'exemple suivant :

Soient donnés les deux points A, B (*fig.* 30), et en outre un point E sur la même ligne droite. Soit AB la longueur donnée. Il faut trouver

Fig. 30.



une circonférence de cercle, soit PIO, telle que si d'un point quelconque I de cette circonférence l'on abaisse la perpendiculaire IR, $AI^2 = AB \times ER$, AB étant la donnée.

Appliquons $BA \times AE$ sur la droite BA en excès d'un carré : soit la largeur $AP = BO$ (¹). Le demi-cercle décrit sur PO satisfera à la question.

En effet, $AI^2 = AR^2 + RI^2$. Mais $RI^2 = PR \times RO$ et, comme on le prouvera tout à l'heure,

$$PR \times RO = AR \times RB + OA \times AP \; (= BP \times PA = BA \times AE).$$

Donc $AI^2 = AR^2 + AR \times RB + BA \times AE$, ou puisque

$$AR^2 + AR \times RB = BA \times AR, \qquad AI^2 = BA \times AR + AB \times AE,$$

(¹) C'est-à-dire construisons AP d'après la condition : $AB \times AP + AP^2 = BA \times AE$.

soit, réduisant encore ces deux rectangles en un seul, $AI^2 = BA \times ER$.

Il reste à prouver que $PR \times RO = AR \times RB + PB \times BO$.

En effet, en multipliant entre elles les parties :

$$PR \times RO = PA \times RB + PA \times BO (= BO^2) + AR \times RB + AR \times BO (= PA \times AR).$$

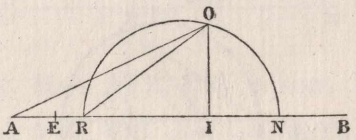
Mais $PA \times AR + PA \times RB = PA \times AB = AB \times BO$. Ajoutant BO^2, on a $AO \times OB$, c'est-à-dire $PB \times BO$. Donc

$$PR \times RO = AR \times RB + PB \times BO. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Je ne poursuis pas les différents cas, désormais rendus très faciles. Cependant je ne crois pas devoir omettre celui où le point E ne se trouve pas au delà de A, comme ci-dessus.

Soient donnés les deux points A et E (*fig.* 31), et la droite AB ; il faut trouver une circonférence de cercle comme NOR, telle qu'en prenant sur elle un point quelconque O, et abaissant la perpendiculaire OI, $AO^2 = BA \times EI$.

Fig. 31.



Appliquons $BA \times AE$ sur la droite BA, en défaut d'une figure carrée (¹). Nous aurons le point R; soit $BN = AR$. Le demi-cercle décrit sur RN satisfera à la question. La démonstration sera semblable à celle que nous avons donnée pour le premier cas.

Proposition IV.

« *Si de deux points donnés on mène des droites à un point, et que le carré de l'une soit d'une aire donnée plus grand que dans un rapport donné avec le carré de l'autre, le point d'intersection sera sur une circonférence donnée.* »

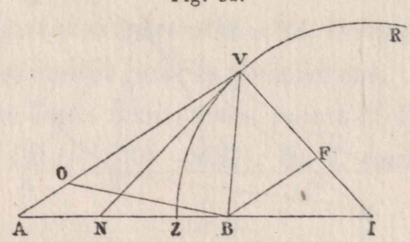
(¹) C'est-à-dire construisons AR par la condition : $AB \times AR - \overline{AR}^2 = BA \times AE$.

Soient A, B (*fig.* 32) les deux points, $\frac{AI}{IB}$ le rapport donné, $BA \times AN$ l'aire donnée. Soit IZ moyenne proportionnelle entre NI et IB; avec ce rayon décrivez le cercle ZVR, prenez-en un point quelconque V, joignez VA, VB. Je dis que $AV^2 - \frac{IA}{BI} \times VB^2 = BA \times AN$ (rapport et aire donnés).

Soit en effet $VA \times AO = BA \times AN$; joignez OB, NV, VI et menez BF parallèle à AN. Il faut prouver que $\frac{AV \times VO}{VB^2} = \frac{AI}{IB}$.

Or $\frac{NI}{IZ(=VI)} = \frac{VI}{IB}$; ce sont les côtés d'un même angle dans les triangles NIV, VBI, qui sont donc semblables; donc les angles VNB, BVF

Fig. 32.



sont égaux. Mais les angles VNB, VOB le sont comme inscrits dans le même segment (car puisque $BA \times AN = VA \times AO$, les quatre points N, B, V, O sont sur un cercle); donc les angles VOB, BVF sont égaux. Mais les angles OVB, VBF le sont aussi à cause des parallèles. Donc les triangles OBV, VBF sont semblables. Donc $\frac{OV}{VB} = \frac{VB}{BF}$: multipliant de part et d'autre par le rapport $\frac{AV}{VB}$, on a

$$\frac{AV}{VB} \times \frac{VB}{BF} \quad \text{ou} \quad \frac{AV}{BF} \quad \text{ou} \quad \frac{AI}{IB} = \frac{AV}{VB} \times \frac{OV}{VB} = \frac{AV \times VO}{VB^2} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Pappus paraît avoir omis ici la proposition suivante qui est analogue :

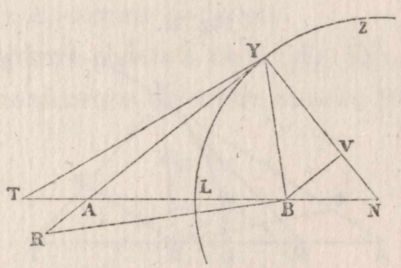
Si de deux points donnés on mène des droites à un point, et que le carré de l'une soit d'une aire donnée plus petit que dans un rapport donné avec *le carré de l'autre, le point d'intersection sera sur une circonférence donnée.*

Soient donnés les deux points A et B (*fig.* 33), le rapport $\frac{AN}{BN}$, l'aire $BA \times AT$. Soit, entre TN, NB, la moyenne proportionnelle NL; avec ce rayon, décrivez la circonférence de cercle LYZ; prenez sur elle un point quelconque Y, joignez YA, YB. Je dis que

$$\frac{YA^2 + BA \times AT \text{(donné)}}{YB^2} = \frac{AN}{NB}.$$

Soit en effet $YA \times AR = BA \times AT$; joignez TY, RB, YN; menez BV

Fig. 33.



parallèle à AY; comme suite de l'égalité $YA \times AR = BA \times AT$, on prouvera que les angles YTB, YRB sont égaux et on achèvera comme ci-dessus.

Proposition V.

« *Si de points donnés en nombre quelconque on mène des droites à un même point et que la somme des carrés de toutes ces droites soit égale à une aire donnée, le point sera sur une circonférence donnée de position.* »

Soient d'abord deux points A, B (*fig.* 34); menez la droite AB, prenez son milieu en E; de E comme centre, avec un rayon quelconque EI, décrivez le cercle ION. Je dis que, quelque point O que l'on prenne sur la circonférence : $AO^2 + OB^2 = 2(IE^2 + AE^2)$.

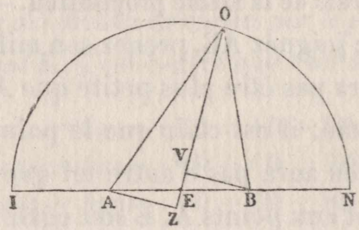
En effet, joignez EO, abaissez sur elle les perpendiculaires BV, AZ. Dans le triangle AEO, $AO^2 = AE^2 + EO^2 + 2OE \times EZ$. Dans le triangle

OEB, $OE^2 + EB^2 = OB^2 + 2OE \times EV (= 2OE \times EZ)$, car $EV = EZ$, puisque $AE = EB$.

Ajoutant membre à membre :

$$AO^2 + OB^2 + 2OE \times EZ = (AE^2 + EB^2)(= 2EA^2) + 2EO^2(= 2IE^2) + 2OE \times EZ.$$

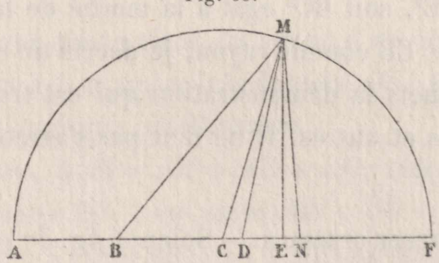
Fig. 34.



Retranchant de part et d'autre $2OE \times EZ$, il reste l'égalité annoncée, et la proposition est établie pour le premier cas.

Soient donnés en ligne droite trois points B, D, E (*fig.* 35) et soit $BD > DE$. Prenez $CD = \frac{1}{3}(BD - DE)$. De C comme centre avec un

Fig. 35.

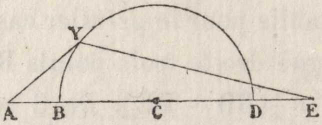


rayon quelconque CA, décrivez le demi-cercle AMF, je dis que, quelque point M que l'on prenne sur sa circonférence, $MB^2 + MD^2 + ME^2$ sera une somme constante.

En effet, joignez MB, MC, MD, ME; prenez $EN = CD$ et joignez MN. Puisque $BD - DE = 3CD = 3EN$, on a $DN + 2CD = BD$ ou $CN + CD = BD$. Retranchez CD de part et d'autre : $CN = BC$. Puisque, d'autre part, $CD = EN$, d'après la seconde proposition de ce livre, $CM^2 + MN^2 - (DM^2 + ME^2)$ est constant. Mais CM^2 est constant. Donc $DM^2 + ME^2$ fera une somme égale à MN^2 ou plus grande ou plus petite d'une quantité constante. Ajoutez de part et d'autre MB^2; d'une part, $MB^2 + MD^2 + ME^2$, de l'autre $BM^2 + MN^2$ feront des sommes égales ou différentes d'une quantité constante soit dans un sens soit dans l'autre. Mais, d'après la proposition précédente, $BM^2 + MN^2$ est constant, puisque $BC = CN$, donc $BM^2 + DM^2 + EM^2$ est constant. C. Q. F. D.

Démonstration générale de la même proposition. — Soient d'abord deux points A, E (*fig.* 36); joignez AE, prenez son milieu en C. Soit donnée une aire Z qui ne devra pas être plus petite que $AC^2 + CE^2$; car si elle est égale à cette somme, il est clair que le point C seul satisfait à la question, et qu'il n'y en aura pas d'autre tel que la somme des carrés des droites le joignant aux points A, E soit égale à Z.

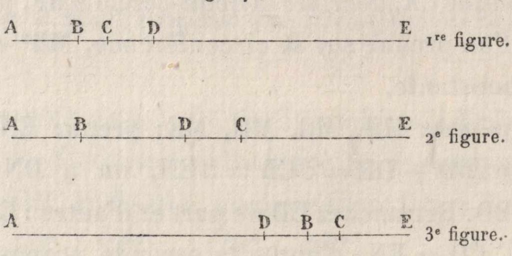
Fig. 36.



Si $Z > AC^2 + CE^2$, soit BC^2 égal à la moitié de la différence; de C comme centre, avec CB comme rayon, je décris un cercle qui satisfait à la question. J'omets la démonstration qui est trop simple et a été donnée par Pappus et autres. Il ne faut pas s'arrêter trop longtemps aux choses faciles.

Lemme pour la méthode générale. — Soient (*fig.* 37) des points donnés

Fig. 37.



A, B, C, E en nombre quelconque. Prenons une fraction AD de la somme des droites terminées d'une part au point A, de l'autre aux autres points donnés, fraction conditionnée par le nombre des points, à savoir le quart dans l'exemple choisi. Soit donc

$$AD = \tfrac{1}{4}(AB + AC + AE).$$

La position du point D varie suivant les cas. *Je dis que la somme des droites terminées par le point* D *et par les points donnés du côté du point* A *sera égale à la somme des droites terminées par le point* D *et par les points donnés du côté du point* E. C'est-à-dire que l'on aura

Dans la 1re figure : $ED = AD + BD + CD$.
Dans la 2e figure : $ED + CD = BD + AD$.
Dans la 3e figure : $ED + CD + BD = AD$.

D'abord dans la 3e figure, par hypothèse, $4AD = AB + AC + AE$; retranchez de part et d'autre $3AD$, il restera d'un côté AD; de l'autre, retrancher $3AD$ de $AB + AC + AE$ est la même chose que de retrancher AD de chacune des droites AB, AC, AE : il restera donc

$$BD + CD + ED = AD. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si l'on avait donné cinq points, on aurait d'un côté $5AD$, de l'autre 4 droites terminées à A et aux points donnés, etc.; la méthode est toujours la même et s'applique indéfiniment.

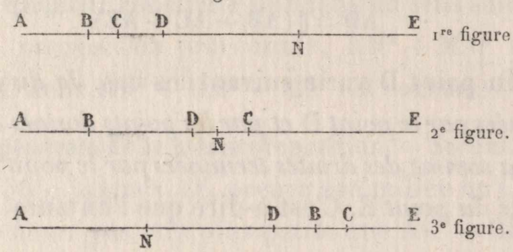
Dans la 2e figure, $4AD = AB + AC + AE$; retranchez de part et d'autre $3AD$ et ajoutez BD, vous aurez $AD + BD = ED + CD$.

Dans la 1re figure, $4AD = AB + AC + AE$; ajoutez de part et d'autre $BD + CD$ et retranchez $3AD$; vous aurez $AD + BD + CD = DE$.

La méthode est la même pour un nombre quelconque de points jusqu'à l'infini, et la même conclusion sera tirée de quelque manière que l'on fasse varier les cas.

Second lemme. — Soit faite sur la 1re figure (*fig.* 38) la construction précédente; je prends sur la même droite un point N quelconque. *Je dis que la somme des carrés des droites terminées par les points donnés et par* N *dépasse la somme des carrés des droites terminées par les points donnés et par le point* D, *du carré* DN *pris autant de fois qu'il y a de* *points donnés,* soit 4 dans l'exemple choisi. Les 2e et 3e figures représentent des cas différents.

Fig. 38.



Sur la première figure, en comparant chaque carré à chaque autre, on a

$$AN^2 + BN^2 + CN^2 - (AD^2 + BD^2 + CD^2) = 3DN^2 + 2AD.DN + 2BD.DN + 2CD.DN$$

ou

$$AN^2 + BN^2 + CN^2 = AD^2 + BD^2 + CD^2 + 3DN^2 + 2AD.DN + 2BD.DN + 2CD.DN;$$

cela ressort évidemment de la formation du carré du binome avec le signe $+$.

D'autre part :

$$EN^2 = ED^2 + ND^2 - 2ED.DN,$$

ce qui ressort de la formation du carré du binome avec le signe $-$.

Par conséquent

$$AN^2 + BN^2 + CN^2 + EN^2 = AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4DN^2 + 2AD.DN + 2BD.DN + 2CD.DN - 2ED.DN.$$

Si donc nous prouvons que la somme des rectangles en plus est égale à celle des rectangles en moins, la vérité de la proposition sera établie, à savoir que :

$$AN^2 + BN^2 + CN^2 + EN^2 - (AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2) = 4DN^2.$$

Il faut donc prouver que $2ED.DN = 2AD.DN + 2BD.DN + 2CD.DN$, ou, en divisant tous les termes par $2DN$, que l'on a l'égalité

$$ED = AD + BD + CD.$$

Or c'est ce qui a été démontré par le lemme précédent.

Je ne m'arrête pas aux divers cas. — Si l'on donne cinq points, la somme des carrés des distances des points donnés au point N dépasse de $5 DN^2$ la somme des carrés des distances des points donnés au point D : la démonstration est la même.

Il ressort de là que la somme des carrés des distances au point D est minima.

Dans cet exposé, je n'ajoute pas une trop scrupuleuse observation des différents cas. La conclusion du second lemme se ramènera toujours à prouver que la somme des rectangles en plus est égale à celle des rectangles en moins, et la question sera ainsi ramenée au premier lemme.

Première proposition générale. — Soient, sur la même figure, toujours donnés quatre points A, B, C, E sur la droite AE, et

$$AD = \tfrac{1}{4}(AB + AC + AE),$$

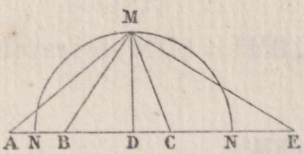
fraction conditionnée. On propose, étant donnée une aire Z, de *trouver un cercle, tel qu'en prenant sur la circonférence un point quelconque, la somme des carrés de ses distances aux points donnés soit égale à l'aire donnée.*

Pour que le problème soit possible, il faut, d'après ce qui a été démontré, que l'aire $Z > AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2$.

Soit donc $4 DN^2$ égal à l'excès de Z sur la somme des quatre carrés; le cercle décrit de D comme centre avec DN pour rayon satisfera à la question.

En effet, prenons d'abord le point N (*fig.* 39) de l'un et de l'autre

Fig. 39.



côté. Il a été prouvé par le second lemme que

$$AN^2 + NB^2 + CN^2 + EN^2 = AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4 DN^2;$$

mais $AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4DN^2 = Z$. Donc

$$AN^2 + BN^2 + CN^2 + EN^2 = Z \text{ l'aire donnée.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Élevez maintenant la perpendiculaire DM et joignez AM, BM, CM, EM. Je dis que la somme de leurs carrés est égale à l'aire donnée Z.

En effet

$$AM^2 = AD^2 + DM^2,$$
$$BM^2 = BD^2 + DM^2,$$
$$CM^2 = CD^2 + DM^2,$$
$$EM^2 = ED^2 + DM^2.$$

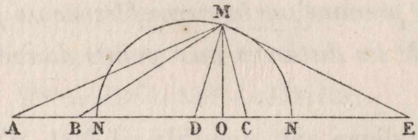
Donc

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + EM^2 = AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4DM^2 (= 4DN^2).$$

Mais $AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4DN^2 = Z$ (l'aire donnée). Donc $AM^2 + BM^2 + CM^2 + EM^2 =$ l'aire donnée. C. Q. F. D.

Menons maintenant le point M (*fig.* 40) quelconque, et abaissons

Fig. 40.



la perpendiculaire MO. On prouvera de même que

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + EM^2 = 4OM^2 + AO^2 + BO^2 + CO^2 + EO^2.$$

D'après le second lemme, la somme de ces quatre derniers carrés est égale à la somme $AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4OD^2$. Donc

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + EM^2 = AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4OD^2 + 4OM^2.$$

Mais $4OD^2 + 4OM^2 = 4DM^2 = 4DN^2$, les rayons DM et DN étant égaux. Donc

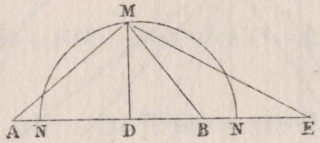
$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + EM^2$$
$$= AD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4DN^2 = Z \text{ (l'aire donnée).} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si l'on achève les cercles, la même démonstration s'appliquera pour les autres demi-cercles, et elle s'étendra à un nombre de points quelconques avec la même facilité de raisonnement; car les carrés DM^2, DN^2, DO^2 sont toujours pris autant de fois qu'il y a de points et la conclusion est toujours juste.

D'où suit un corollaire qui servira pour la proposition suivante :

Soient des points donnés en nombre quelconque, par exemple trois, A, B, E (*fig.* 41); trouver un cercle NM, tel qu'en prenant un point

Fig. 41.

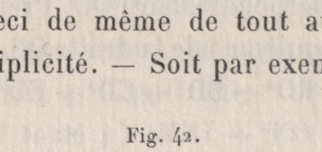


quelconque M sur ce cercle, et joignant AM, BM, EM, on ait par exemple $2AM^2 + BM^2 + EM^2$ égal à une aire donnée.

Dans ce cas, on construira $AD = \frac{1}{4}(AB + AE)$, car le point A joue ici le rôle de deux points et c'est comme si l'on disait : étant donnés quatre points A, A, B, E, trouver un cercle NM, tel qu'en prenant sur ce cercle un point quelconque M on ait $AM^2 + AM^2 + BM^2 + EM^2$ égal à une aire donnée.

Il faut entendre ceci de même de tout autre point et de tout autre rapport de multiplicité. — Soit par exemple proposé (*fig.* 42)

Fig. 42.



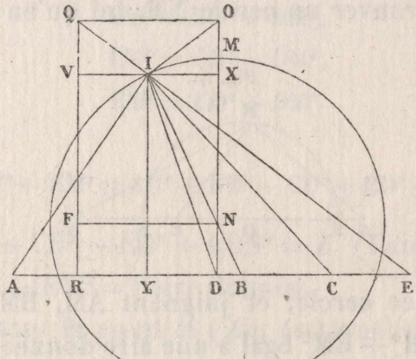
$AM^2 + 2BM^2 + EM^2$ égal à une aire donnée; on prendra

$$AD = \frac{1}{4}(2AB + AE).$$

Il fallait faire cette remarque, mais elle n'a pas besoin d'une plus longue explication.

Seconde proposition. — Soient sur la droite AE (*fig.* 43) des points donnés en nombre quelconque, quatre par exemple, A, B, C, E, et un point Q en dehors de la droite AE; on cherche un cercle, comme MI, tel qu'en prenant sur ce cercle un point quelconque I, on ait $AI^2 + BI^2 + CI^2 + EI^2 + QI^2$ égal à une aire donnée.

Fig. 43.



Abaissez sur la droite AE la perpendiculaire QR et prenez AD, fraction conditionnée de la somme $AR + AB + AC + AE$ (le cinquième dans ce cas où l'on donne cinq points). Élevez la perpendiculaire DO et abaissez sur elle la perpendiculaire QO. Prenez $RF = DN$, fraction conditionnée (ici le cinquième) de la droite QR, et soit l'espace donné égal à la somme $AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + Z$.

Faisons $Z = 4DN^2 + ON^2 + 5NM^2$ (4 étant le nombre des points donnés sur la droite AE, et 5 le nombre total des points donnés). Je dis que le cercle décrit de N comme centre, avec NM comme rayon, satisfait à la question.

En effet, prenez sur ce cercle un point quelconque I, joignez AI, BI, CI, EI, QI. Menez VIX parallèle à AE et IY parallèle à OD; il est clair, d'après le corollaire de la proposition précédente, que $4DI^2 + OI^2 = Z$, car le point D joue le rôle de quatre points; et puisque $DN = \frac{1}{5}OD$, il est évident que $4DI^2 + OI^2 = 4DN^2 + ON^2 + 5NM^2$. Mais $4DN^2 + ON^2 + 5NM^2 = Z$ par construction. Donc $4DI^2 + OI^2 = Z$.

Mais $4DI^2 = 4DX^2 + 4XI^2$ et $OI^2 = OX^2 + XI^2$. Donc

$$Z = 4DX^2 (= 4IY^2) + XO^2 (= VQ^2) + 5XI^2.$$

Ajoutez de part et d'autre $AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2$, vous aurez, dans le premier membre, l'espace donné, car, par hypothèse, il est égal à la somme de ces cinq carrés et de Z; dans le second membre : $AI^2 + BI^2 + CI^2 + EI^2 + QI^2$, somme qui sera donc égale à l'espace donné.

En effet, d'après le second lemme :

$$AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 5DY^2 = AY^2 + RY^2 + BY^2 + CY^2 + EY^2;$$

donc

$$\begin{aligned} &AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4IY^2 + VQ^2 + 5DY^2 \\ &= AY^2 + RY^2 + BY^2 + CY^2 + EY^2 + 4IY^2 + VQ^2. \end{aligned}$$

Si, à chacun des carrés AY^2, BY^2, CY^2, EY^2, on ajoute IY^2, on aura

$$AI^2 + BI^2 + CI^2 + EI^2 = AY^2 + BY^2 + CY^2 + EY^2 + 4IY^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} &AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4IY^2 + VQ^2 + 5DY^2 \\ &= AI^2 + BI^2 + CI^2 + IE^2 + RY^2 + VQ^2. \end{aligned}$$

Mais $RY^2 (= VI^2) + QV^2 = QI^2$. Donc

$$\begin{aligned} &AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4IY^2 + VQ^2 + 5DY^2 \\ &= AI^2 + BI^2 + CI^2 + EI^2 + QI^2. \end{aligned}$$

Mais on a prouvé que le premier membre est égal à l'aire donnée; donc

$$AI^2 + BI^2 + CI^2 + EI^2 + QI^2 = \text{l'aire donnée.}$$ C. Q. F. D.

On en déduira facilement que l'aire donnée est égale à

$$AN^2 + BN^2 + CN^2 + EN^2 + QN^2 + 5NM^2,$$

ce que nous avons omis comme évident.

Bien plus le même artifice peut s'appliquer à un nombre quelconque de points.

Si par exemple on donne deux points Q, L (*fig.* 44) en dehors de la ligne, la construction s'achèvera comme on le voit, en prenant

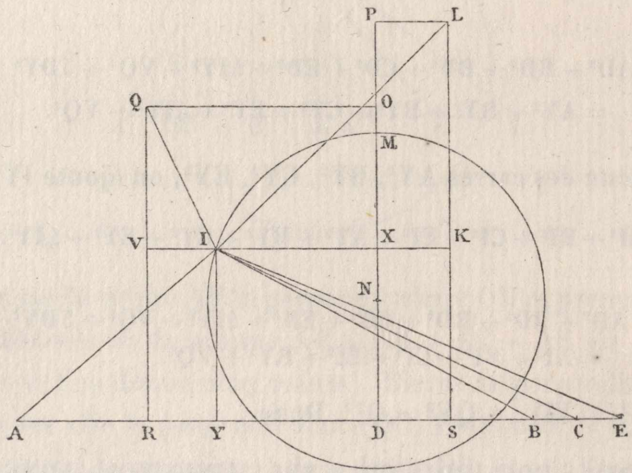
$$AD = \tfrac{1}{6}(AR + AS + AB + AC + AE), \qquad \text{puis} \qquad DN = \tfrac{1}{6}(QR + LS),$$

et en faisant

$$\text{l'aire donnée} = AD^2 + RD^2 + SD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + 4DN^2 + NO^2 + NP^2 + 6NM^2.$$

On terminera de la même manière, le point D jouant toujours le rôle

Fig. 44.



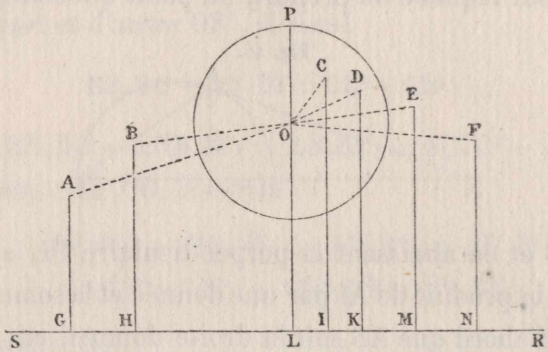
de tous les points donnés sur la droite AE, et les points P, O jouant le rôle des points Q, L.

La méthode de construction et de démonstration est indéfiniment la même.

Mais, comme des cas multiples découlent de la différente position de la droite prise et passant par deux ou plusieurs points, mais pouvant laisser les autres dans diverses positions de chacun de ses côtés, quoique pour chaque cas il y ait des abréviations spéciales, je préfère, comme spécimen du procédé, montrer plus généralement la construction.

Soient des points donnés en nombre quelconque A, B, C, D, E, F (*fig.* 45) sur la même droite ou sur des droites différentes. Prenez dans le même plan une droite quelconque SR, qui laisse tous les points

Fig. 45.



donnés du même côté; abaissez les perpendiculaires AG, BH, CI, DK, EM, FN, prenez GL fraction conditionnée (dans ce cas, $\frac{1}{6}$) de

$$GH + GI + GK + GM + GN;$$

élevez la perpendiculaire LO, et prenez LO fraction conditionnée (ici $\frac{1}{6}$) de $AG + BH + CI + KD + EM + FN$.

Soit l'aire donnée égale à

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 + EO^2 + FO^2 + 6OP^2;$$

le carré décrit de O comme centre, avec OP pour rayon, satisfera à la question; la démonstration est facile pour qui a étudié ce qui précède.

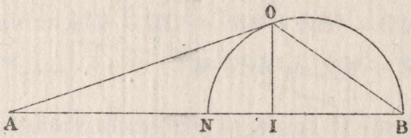
Proposition VI.

« *Si, de deux points donnés, on mène deux droites qui se coupent, et de leur rencontre une droite interceptant une abscisse à partir d'un point donné sur une droite donnée de position, si la somme des carrés des premières menées est égale au produit d'une donnée et de l'abscisse, le point de rencontre sera sur une circonférence donnée de position.* »

Je donne la proposition comme on la trouve dans Pappus d'après la version de Fédéric Commandin, mais je ne doute pas qu'il n'y ait une faute, soit dans le texte grec, soit dans la traduction. Voici le sens de la proposition :

Soient deux points A, B (*fig.* 46) ; il faut trouver une circonférence comme NOB, sur laquelle on prendra un point quelconque O ; en joi-

Fig. 46.



gnant OA, OB et en abaissant la perpendiculaire OI, on devra avoir l'égalité entre le produit de AI par une donnée et la somme $AO^2 + OB^2$.

Supposons d'abord que AB soit la droite donnée, cas assez simple.

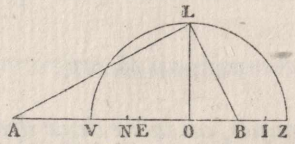
Prenez $BN = \frac{1}{2} AB$, et décrivez sur BN un demi-cercle ; il résoudra le problème, c'est-à-dire que si on y prend, par exemple, le point O, on aura $BA \times AI = AO^2 + OB^2$.

En effet, $AO^2 = AI^2 + IO^2$. Si donc de $BA \times AI$ on retranche $AI^2 + IO^2 (= BI.IN)$, il reste $BI \times AN$ ou $BI \times NB$ à prouver égal à OB^2, ce qui est évident d'après la construction.

Second cas : la droite donnée est plus grande que AB, mais plus petite que 2AB. Nous allons donner la construction :

Soient donnés les deux points A et B (*fig.* 47) et la droite $AI < 2AB$, par hypothèse ; il faut résoudre le problème proposé.

Fig. 47.



Prenez en N le milieu de AB : soit $NE = \frac{BI}{2}$ (E restera compris entre A et B). Appliquez sur la droite BE le rectangle IB.BN en excédent d'une figure carrée (1) ; soit trouvée la largeur EV, prenez $BZ = EV$, et sur VZ décrivez le demi-cercle VLZ, je dis qu'il résout le problème.

(1) C'est-à-dire : construisez EV d'après la condition $IB.BN = BE.EV + EV^2$.

En effet, joignez LA, LB et abaissez la perpendiculaire LO que nous supposerons, comme premier cas, tomber entre E et B. Il est clair, d'après la démonstration de la proposition III d'Apollonius [dans ce même Livre], que $EO.OB + VE.EZ (= NB.BI) = OL^2$.

Ajoutez de part et d'autre OB^2, il vient

$$EB.BO + NB.BI = OL^2 + OB^2.$$

Doublez : $2EB.BO + 2NB.BI (= AB.BI) = 2(LO^2 + OB^2)$. Ajoutez de part et d'autre $2NE.OB$, il vient

$$\begin{aligned}(2EB.BO + 2NE.OB)(= AB.BO) + AB.BI \\ = 2(LO^2 + OB^2) + 2NE.OB\,(= IB.BO),\end{aligned}$$

d'après la construction.

Retranchant de part et d'autre OB^2, il reste

$$AO.OB + AB.BI = 2LO^2 + OB^2 + IB.BO.$$

Retranchant de part et d'autre IB.BO, c'est-à-dire dans le premier membre de AB.BI, il reste $AO.OB + AO.BI$ ou en tout

$$IO.OA = 2LO^2 + OB^2.$$

Ajoutez AO^2 de part et d'autre :

$$IA.AO = AO^2 + OB^2 + 2LO^2 = AL^2 + LB^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Je passe les autres cas.

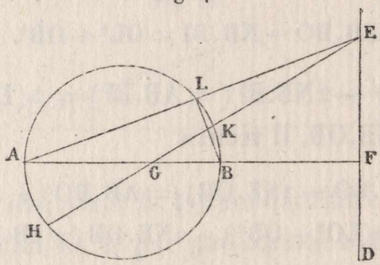
Proposition VII.

« *Si, à l'intérieur d'un cercle donné de position, on a un point donné, par lequel on mène une droite ; si l'on prend sur cette droite un point extérieur, et que le carré de la menée jusqu'au point donné à l'intérieur soit égal au produit de la droite totale et de sa partie extérieure, seul ou augmenté du produit des deux segments intérieurs au cercle, le point pris à l'extérieur sera sur une droite donnée de position.* »

Cette proposition comprend deux parties : la première est dans Pappus (Livre VII, prop. 159) ; la seconde se déduit facilement de la première en ajoutant des termes égaux. Je donnerai seulement la démonstration de Pappus.

Soit un cercle de diamètre AB (*fig.* 48); prolongez AB jusqu'à une droite quelconque DE qui lui soit perpendiculaire.

Fig. 48.



Soit $AF.FB = FG^2$. Je dis que, quel que soit le point E, si on le joint à G par une droite prolongée jusqu'en H, on aura $HE.EK = EG^2$.

Joignez AE, BL, l'angle en L est droit comme celui en F. Donc $AE.EL = AF.FB + FE^2$.

En effet $\widehat{ALB}$, comme droit, est égal au droit $\widehat{AFE}$; donc les quatre points L, B, F, E sont sur une circonférence; donc $FA.AB = EA.AL$. Mais $AE^2 = AF^2 + FE^2$, et aussi $AE^2 = AE.EL + EA.AL$; de même $AF^2 = AF.FB + FA.AB$. Donc $AE.EL + EA.AL = AF.FB + FA.AB + FE^2$. Mais comme $EA.AL = FA.AB$, il reste $AE.EL = AF.FB + FE^2$. Mais $AE.EL = HE.EK$ et $AF.FB = FG^2$. Donc $HE.EK = EF^2 + FG^2 = EG^2$.

Proposition VIII et dernière.

« *Et si le même point est sur une droite donnée de position, et que le cercle ne soit pas dans les positions, les points des deux côtés du point donné seront sur une circonférence donnée de position.* »

Cette proposition est réciproque de la précédente, et la démonstration peut en être facilement déduite en suivant une marche inverse.

Je n'ajoute pas la distinction des différents cas ni les conditions de limites pour les données; tout cela ressort assez clairement de la construction et de la démonstration.