

TRADUCTION  
DES  
ÉCRITS LATINS DE FERMAT.



---

RESTITUTION  
DES  
DEUX LIVRES DES LIEUX PLANS  
D'APOLLONIUS DE PERGE.

---

LIVRE I.

---

Ce que sont les lieux plans est chose bien connue; ce sujet fut traité en deux livres par Apollonius, au témoignage de Pappus qui, au début de son Livre VII, en donne les diverses propositions, mais dans un langage passablement obscur ou du moins mal compris du traducteur (il ne m'a pas été possible d'examiner le manuscrit grec). C'est cette théorie, la plus belle, semble-t-il, de toute la Géométrie, que nous arrachons à l'oubli, pour opposer fièrement Apollonius traitant des Lieux plans, aux Apollonius français, bataves et illyriens; car nous avons la confiance assurée qu'il n'y a pas d'ouvrage où resplendissent plus vivement les merveilles de la Géométrie; pour le faire avouer aussitôt, je commence immédiatement.

Les propositions du Livre I sont les suivantes :

PROPOSITION I.

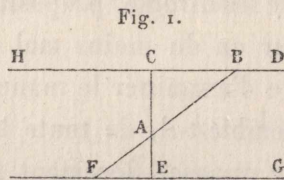
« Si on mène deux lignes, soit d'un point donné, soit de deux, et soit en ligne droite, soit parallèles, soit sous un angle donné, enfin ayant

*entre elles un rapport donné, ou comprenant un rectangle donné; si l'extrémité de l'une est sur un lieu plan donné de position, l'extrémité de l'autre sera également sur un lieu plan donné de position, tantôt du même genre, tantôt d'un genre différent, tantôt situé de même par rapport à la ligne droite, tantôt de façon contraire. »*

On peut facilement diviser cette proposition en huit autres et chacune de celles-ci en cas nombreux. Le défaut de ponctuation semble au reste avoir embarrassé le traducteur, et Pappus lui-même paraît être tombé dans l'obscurité par trop de concision. Voici comment nous éclaircissons le tout, par notre division en huit parties.

1. PROPOSITION. — *Si d'un point donné on mène en ligne droite deux lignes dans un rapport donné, et que l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position (c'est-à-dire une droite ou une circonférence de cercle donnée de position), l'extrémité de l'autre sera sur une droite ou une circonférence de cercle donnée de position.*

Soit A le point donné (*fig. 1*), par lequel on mène en ligne droite AB et AF dans un rapport donné. Soit par exemple le point B sur la



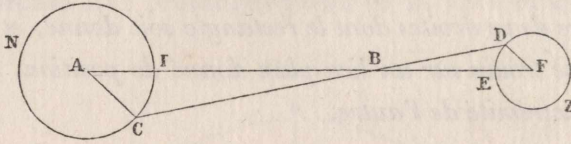
ligne droite HCB D donnée de position, je dis que le point F est aussi sur une droite donnée de position.

Du point A, j'abaisse sur la droite HD la perpendiculaire AC, le point C sera donné; je prolonge CA jusqu'en E, en prenant  $\frac{CA}{AE}$  dans le rapport donné; AE sera donné, donc le point E. Par le point E je mène GEF parallèle à la droite HD; elle sera donnée de position et passera par le point F, car toutes les droites, passant par un point donné et coupant deux parallèles, sont divisées dans le même rapport.

Il est donc clair que toute droite passant par le point A et terminée aux parallèles données de position sera partagée dans le rapport donné.

Soient maintenant donnés le point B (*fig. 2*) et le cercle ICN dont

Fig. 2.



le centre est A. Menez BA qui coupe la circonférence en I, et prolongez IB suivant BE, en sorte que le rapport  $\frac{IB}{BE}$  soit égal au donné. Continuez le prolongement jusqu'en F en sorte que  $\frac{AI}{EF} = \frac{IB}{BE}$ , et de F comme centre, avec FE comme rayon, décrivez la circonférence de cercle EDZ qui, d'après la construction, sera évidemment donnée de position. Je dis que toutes les droites passant par le point B et terminées de part et d'autre aux circonférences des cercles donnés de position seront partagées dans le rapport donné.

Soit menée par exemple CBD; joignez CA, DF. On a

$$\frac{IB}{BE} = \frac{AI}{EF}; \quad \text{donc, par somme,} \quad \frac{BA}{BF} = \frac{AI(=AC)}{EF(=FD)}.$$

D'ailleurs les angles ABC, FBD opposés par le sommet sont égaux. Les triangles sont donc semblables et par conséquent

$$\frac{CD}{BD} = \frac{BA}{BF}, \quad \text{c'est-à-dire le rapport donné.}$$

Si donc du point donné B on mène deux droites, par exemple BC, BD, en ligne droite et dans le rapport donné, et que BC se termine à une circonférence donnée de position, BD se terminera aussi à une autre circonférence donnée de position.

Si les droites sont prolongées jusqu'aux arcs concaves des cercles, la proposition reste vraie.

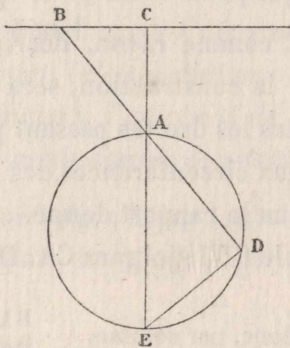
Nous avertissons que dans nos démonstrations nous n'insistons pas

sur les détails évidents d'eux-mêmes, et que nous n'examinons pas les différents cas qui peuvent se déduire sans difficulté de ce que nous avons dit.

2. PROPOSITION. — *Si d'un point donné on mène dans le prolongement l'une de l'autre deux droites dont le rectangle soit donné, et que l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'extrémité de l'autre.*

Soit A le point donné (fig. 3), et en premier lieu une droite BC donnée de position; abaissez sur elle la perpendiculaire AC; le point C

Fig. 3.



sera donné. Prolongez cette perpendiculaire et soit  $CA \times AE$  égal au rectangle donné. Sur AE comme diamètre, décrivez le cercle ADE. Je dis que toutes les droites menées par le point A et terminées d'un côté à la droite, de l'autre à la circonférence du cercle (qui est évidemment donné de position), seront partagées au point A en sorte que le rectangle de leurs segments soit égal à l'aire donnée.

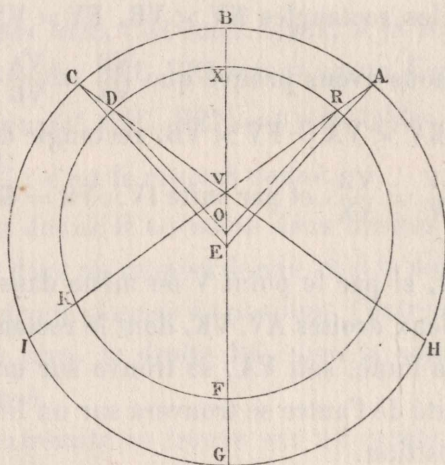
Soit en effet, par exemple, la droite DAB; joignez DE. L'angle ADE inscrit dans un demi-cercle est droit et les angles BAC, DAE, opposés par le sommet, sont égaux. Les triangles DAE, ACB seront donc semblables et par conséquent  $BA \times AD = CA \times AE$  qui est donné.

Si donc par le point A on mène, dans le prolongement l'une de l'autre, les deux droites AB, AD, et que l'extrémité de l'une, à savoir

AB, se trouve sur la droite BC donnée de position, l'extrémité de l'autre se trouvera sur un lieu plan, c'est-à-dire le cercle ADE, donné de position.

Soit maintenant donné le point V (fig. 4), avec le cercle BIGH de centre E; joignez EV; prolongez jusqu'en B, VB sera donné; pron-

Fig. 4.



gez de l'autre côté jusqu'en F en sorte que  $BV \times VF$  soit égal au rectangle donné. Soit encore  $GV \times VX$  égal à ce rectangle. Sur XF comme diamètre, décrivez le cercle XKF qui est évidemment donné de position. Je dis que les droites, passant par le point V et terminées aux deux cercles, sont partagées au point V en sorte que le rectangle de leurs segments soit égal au rectangle donné.

Soit par exemple menée AVKI, je dis que  $AV \times VK$  est égal au rectangle donné.

Soit pris le centre O du petit cercle, que nous supposerons coupé en R par la droite AVKI; joignez RO, AE. Nous avons supposé  $GV \times VX = BV \times VF$ . Par conséquent  $\frac{GV}{VB} = \frac{FV}{VX}$ . *Componendo*, prenant la moitié des antécédents, et *convertendo*,

$$\frac{EB(=EA)}{EV} = \frac{OX(=OR)}{OV}.$$

Les deux triangles OVR, VEA ont de plus l'angle EVA commun, ils seront donc semblables.

Par conséquent :  $\frac{AV}{RV} = \frac{AE}{RO}$  (ou  $\frac{EB}{OX}$ ) =  $\frac{VE}{VO}$ . Mais  $\frac{EB}{OX} = \frac{VE}{VO}$ ; donc, par différence,  $\frac{EB}{OX} = \frac{VB}{VX}$ . Donc  $\frac{AV}{RV} = \frac{BV}{XV}$ .

Nous prouverons de même que  $\frac{GV}{VF} = \frac{IV}{KV}$  ou *vicissim*  $\frac{GV}{VI} = \frac{FV}{VK}$ . Mais  $\frac{FV}{VK} = \frac{VR}{VX}$  (les rectangles KV  $\times$  VR, FV  $\times$  VX, dans le cercle, étant égaux), et nous avons prouvé que  $\frac{VR}{VX} = \frac{VA}{VB}$ . Donc, d'un côté,  $\frac{FV}{VK} = \frac{VA}{VB}$ . Donc KV  $\times$  VA = FV  $\times$  VB, rectangle donné.

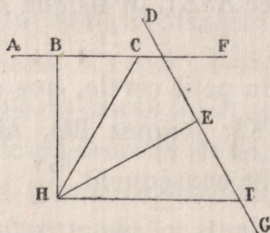
D'autre part,  $\frac{GV}{IV} = \frac{VR}{VX}$ , et par suite IV  $\times$  VR = GV  $\times$  VX, rectangle donné.

Par conséquent, si par le point V on mène dans le prolongement l'une de d'autre deux droites AV, VK, dont le rectangle soit donné, et que l'extrémité de l'une, soit VA, se trouve sur un cercle donné de position, l'extrémité de l'autre se trouvera sur un lieu plan (le cercle XKF) donné de position.

3. PROPOSITION. — Si d'un point donné on mène sous un angle donné deux lignes dans un rapport donné, et que l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'extrémité de l'autre.

Soit H le point donné (fig. 5) et, en premier lieu, une droite AF

Fig. 5.



donnée de position. La perpendiculaire HB abaissée sur elle sera donnée.



Soit l'angle BHE égal à l'angle donné, et  $\frac{BH}{HE}$  dans le rapport donné.

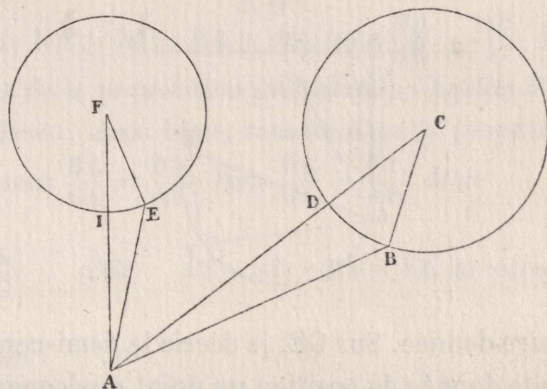
La droite HE sera donnée de position, ainsi que le point E. De ce point E j'éleve sur la droite HE la perpendiculaire indéfinie DEG; elle sera donnée de position. Prenant sur AF un point C quelconque, et joignant HC, je fais l'angle CHI égal au donné : je dis que  $\frac{HC}{HI}$  est dans le rapport donné.

En effet, les angles BHE, CHI étant égaux, si je retranche la partie commune CHE, les angles BHC, EHI seront égaux. Ceux en B et E sont droits; donc les triangles HBC, HEI sont semblables. Donc  $\frac{HB}{HC} = \frac{HE}{HI}$ , et *vicissim*  $\frac{HB}{HE} = \frac{HC}{HI}$  : c'est le rapport donné.

Si donc du point donné H on mène deux droites HC, HI sous un angle donné CHI et dans un rapport donné, et si le point C de l'une HC se trouve sur une droite donnée de position, l'extrémité de l'autre se trouve sur un lieu plan, la droite DG, dont la position est donnée, comme il a été prouvé.

Si la première extrémité se trouve sur un cercle, soit A le point

Fig. 6.



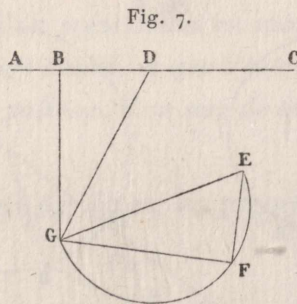
donné (*fig. 6*), IE le cercle donné de position, F son centre. Joignez FA qui coupe le cercle en I; soit un angle IAD égal au donné, et  $\frac{IA}{AD}$  dans le rapport donné. AD sera donnée de position ainsi que le point D. Prolongez et soit  $\frac{IA}{AD} = \frac{IF}{DC}$ . De C comme centre, décrivez le cercle DB,

qui est évidemment donné de position. Soit pris sur le premier cercle un point E quelconque; joignez EA; soit l'angle EAB égal au donné, et le point B sur le second cercle, je dis que  $\frac{AE}{BA}$  est le rapport donné.

Joignant FE, BC, on prouvera, comme ci-dessus, que les angles FAE, CAB sont égaux et, en raisonnant comme dans la proposition 1 (2<sup>e</sup> figure), que les triangles FAE, CAB sont semblables. Donc  $\frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB}$ , et *vicissim*  $\frac{AF}{AC}$ , c'est-à-dire  $\frac{AI}{AD} = \frac{AE}{AB}$ . Donc le rapport  $\frac{AE}{AB}$  est le donné et le sens de la proposition est évident, aussi bien que la conséquence.

4. PROPOSITION. — *Que d'un point donné on mène deux lignes sous un angle donné et telles que leur rectangle soit donné; si l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'autre.*

Soit G le point donné (fig. 7) avec la droite AC donnée de position, sur laquelle j'abaisse la perpendiculaire GB; soit BGE l'angle donné



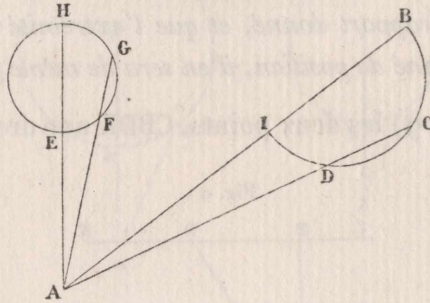
et  $BG \times GE$  l'aire donnée. Sur GE, je décris le demi-cercle GEF. Prenant sur la droite donnée de position un point quelconque D, je joins DG, et fais l'angle DGF égal au donné; je dis que  $DG \times GF$  est égal à l'aire donnée.

Joignant FE, je prouverai, comme dans la proposition précédente, l'égalité des angles BGD, EGF; mais ceux en B, F sont égaux comme droits; on conclura la similitude des triangles BGD, EGF, l'égalité

des rectangles  $BG \times GE$ ,  $GD \times GF$ , et la vérité de la proposition. Si donc, etc.

Soit maintenant A (*fig. 8*) le point donné, avec le cercle HGE donné de position. Je mène par son centre la droite AEH qui coupe la

Fig. 8.



circonférence aux points E, H. Soit  $HAB$  l'angle donné, et  $HA \times AI$ , aussi bien que  $EA \times AB$ , égal à l'aire donnée. Le demi-cercle décrit sur IB (lequel est évidemment donné de position) satisfera à la question. En effet, menons par exemple GFA, et faisons l'angle GADC égal au donné. Je dis que les rectangles  $GA \times AD$  et  $FA \times AC$  sont égaux à l'aire donnée.

Car, comme  $HA \times AI = EA \times AB$ , on a  $\frac{HA}{AE} = \frac{AB}{AI}$ . Mais, d'après le raisonnement de la proposition précédente, l'égalité des angles HAG, BAC est évidente; aussi bien, comme dans la proposition 2, on déduira facilement  $\frac{HA}{GA} = \frac{BA}{AC}$ . Mais  $\frac{HA}{GA} = \frac{FA}{AE}$ , donc

$$\frac{FA}{AE} = \frac{BA}{AC}, \quad \text{d'où} \quad FA \times AC = BA \times AE, \quad \text{le rectangle donné,}$$

D'autre part :

$$\frac{BA}{AC} = \frac{AD}{AI}, \quad \text{d'où} \quad GA \times AD = HA \times AI, \quad \text{le rectangle donné.}$$

La proposition est ainsi entièrement établie; si donc, etc.

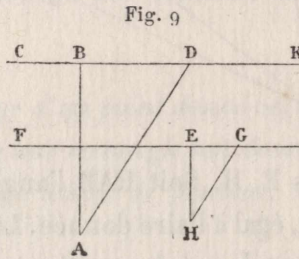
Dans ce cas, j'ai pris le point A en dehors du cercle donné de posi-

tion; mais on peut le prendre au dedans, comme dans le second cas de la proposition 2.

Les quatre propositions précédentes supposent un seul point donné, les suivantes deux.

5. PROPOSITION. — *Si par deux points donnés on mène deux lignes parallèles dans un rapport donné, et que l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'autre.*

Soient A, H (*fig. 9*) les deux points, CBDK une droite donnée de po-



sition, sur laquelle on abaissera la perpendiculaire AB. Soit HE parallèle à cette dernière, et  $\frac{AB}{HE}$  le rapport donné; le point E sera donné. Menez par ce point FEG perpendiculaire à HE et parallèle à la droite donnée de position. Je dis que toutes les parallèles, menées par les points A, H et terminées aux droites CD, FG données de position, seront dans le rapport donné  $\frac{AB}{HE}$ .

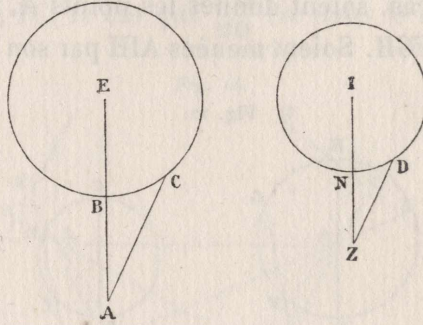
En effet, les angles BAD, EHG seront égaux, comme les droits en B, E; donc les triangles BAD, EHG seront semblables. Le reste est facile.

Si donc des deux points A, H, on mène les parallèles AD, HG dans le rapport donné, et que AD se termine à une droite donnée de position, HG se terminera aussi à une droite donnée de position, par conséquent à un lieu plan.

Dans la figure ci-contre (*fig. 10*), soient donnés les points A, Z et, de position, le cercle BC de centre E. Joignez AE coupant le cercle en B; menez à AE la parallèle ZN et soit  $\frac{AB}{ZN}$  dans le rapport donné. Pro-

longez ZN jusqu'en I,  $\frac{BE}{NI}$  étant aussi dans le rapport donné. Le cercle décrit de I comme centre, avec IN comme rayon, sera donné de position et satisfera à la question.

Fig. 10.

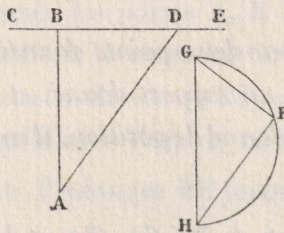


En effet, si l'on mène les parallèles AC, ZD, rencontrant les cercles aux points C, D,  $\frac{AC}{DZ}$  sera dans le rapport donné; car l'égalité des angles BAC, NZD ressort du premier cas de cette proposition; le reste résulte du second cas de la proposition 3.

6. PROPOSITION. — *Si par deux points donnés on mène deux parallèles dont le rectangle soit donné, et que l'extrémité de l'une soit sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'autre.*

Soient donnés les deux points A, H (fig. 11), et de position la droite CE, sur laquelle on abaissera la perpendiculaire AB. Menez à

Fig. 11.

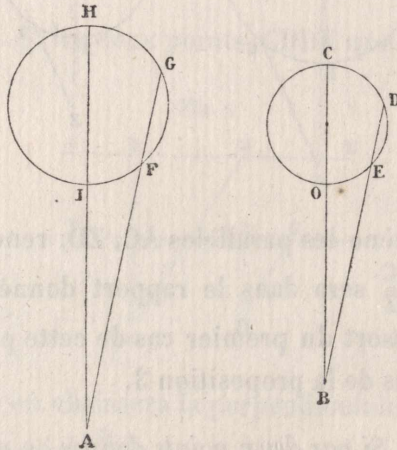


cette dernière la parallèle HG, et soit  $AB \times HG$  égal au rectangle donné. La droite HG sera donnée et le demi-cercle HGF décrit sur elle satisfera à la question.

En effet, qu'on mène les parallèles quelconques AD, HF, et qu'on joigne GF, en reprenant les démonstrations précédentes, on conclura la similitude des triangles BAD, GHF et l'égalité de  $AD \times HF$  au rectangle donné  $BA \times HG$ . Si donc par deux points, etc.

Dans le second cas, soient donnés les points A, B (*fig. 12*), et de position le cercle IFGH. Soient menées AIH par son centre et la paral-

Fig. 12.



lèle BC; soient  $AI \times BC$  et  $AH \times BO$  égaux au rectangle donné; le demi-cercle décrit sur la droite OC satisfait à la question.

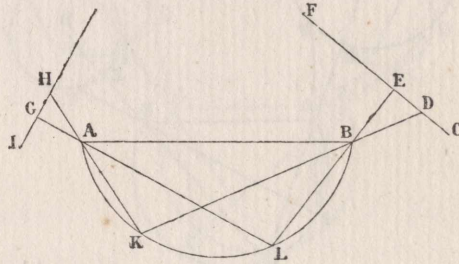
En effet, si l'on mène les parallèles AFG, BED, les angles HAG, CBD seront égaux et l'on démontrera l'égalité au rectangle donné de  $AG \times BE$  et de  $AF \times BD$ , comme dans le second cas de la proposition 4.

7. PROPOSITION. — *Si par deux points donnés on mène sous un angle donné deux droites dans un rapport donné, et que l'extrémité de l'une se trouve sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'extrémité de l'autre.*

Soient donnés les points A, B (*fig. 13*), et de position la droite IGH. Sur BA décrivez le segment de cercle ALB capable de l'angle donné. Du point A abaissez sur la droite IH la perpendiculaire AG, que vous prolongerez jusqu'à sa rencontre avec la circonférence en L. Menez

LBE, et soit  $\frac{AG}{BE}$  dans le rapport donné. Menez FEDC perpendiculaire à BE, et prenez sur l'arc de cercle un point quelconque K, duquel vous mènerez, par A et B, les droites KAH, KBD rencontrant en H et D les droites IH, FC. Je dis que  $\frac{AH}{BD}$  est dans le rapport donné  $\frac{AG}{BE}$ .

Fig. 13.



Car, s'il en est ainsi, les triangles AGH, BED seront semblables : donc les angles GAH, EBD seront égaux, ainsi que leurs opposés par le sommet KAL, KBL. Mais cette dernière égalité a lieu, puisque ces angles sont inscrits dans le même segment, et il est facile de remonter de l'analyse à la synthèse.

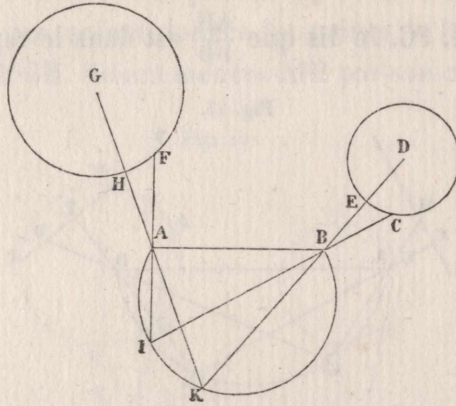
Si donc, par deux points A, B, on mène deux droites AH, BD, sous l'angle donné HKD  $<$  et ayant entre elles un rapport donné  $>$ , si l'extrémité de AH est sur la droite IH donnée de position, l'extrémité de BD sera sur la droite FC, donnée aussi de position, d'après la construction.

Soient maintenant donnés les points A, B (*fig. 14*), et de position le cercle HF; sur AB décrivez le segment de cercle AKB capable de l'angle donné. Soit G le centre du cercle HF; joignez AHG, prolongez-la jusqu'à sa rencontre en K avec l'arc de cercle, menez KBE, et soit  $\frac{AH}{BE}$  dans le rapport donné. Prolongez BE jusqu'en D, en sorte que  $\frac{HG}{DE}$  soit aussi dans le rapport donné. Le cercle décrit de D comme centre sera donné de position et donnera la solution de la question.

Si en effet on mène IAF, IBC, les angles en A et B seront égaux, et le reste de la démonstration est facile; on voit aussitôt que  $\frac{AF}{BC}$  est dans

le rapport donné, et qu'il en est de même si l'on prolonge les droites jusqu'aux arcs concaves. Si donc, etc.

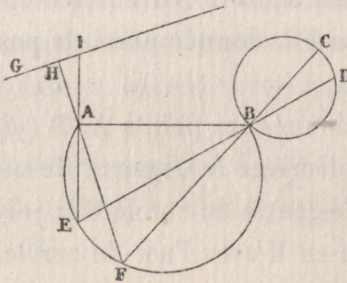
Fig. 14.



8. PROPOSITION. — *Si par deux points donnés on mène deux lignes sous un angle donné et dont le rectangle soit donné, que l'extrémité de l'une soit sur un lieu plan donné de position, il en sera de même pour l'extrémité de l'autre.*

Soient donnés les deux points A, B (fig. 15), et de position la droite GI. Sur AB décrivez le segment de cercle capable de l'angle

Fig. 15.



donné; menez AH perpendiculaire sur GI et prolongez-la jusqu'en F. Joignez FB, à prolonger jusqu'en C en sorte que  $AH \times BC$  soit égal à l'aire donnée. Le cercle décrit sur la droite BC satisfera à la question.

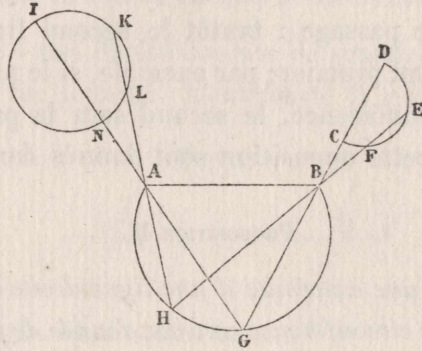
En effet, si l'on prend sur l'arc un point quelconque E, et qu'on joigne EAI, EBD,  $AI \times BD$  sera égal au rectangle donné.



La démonstration est la même que dans les cas qui précèdent.

Soient maintenant donnés les points A, B (*fig. 16*), et de position le cercle IKL. Sur AB décrivez le segment de cercle capable de l'angle

Fig. 16.



donné. Menez par le centre la droite ANI, à prolonger jusqu'en G; joignez GB, et prolongez en sorte que  $AI \times BC$  et  $AN \times BD$  soient égaux à l'aire donnée. Le demi-cercle décrit sur CD satisfera à la question; c'est-à-dire que si l'on prend un point quelconque comme H et qu'on achève la construction de la figure, comme ci-dessus,  $AK \times BF$  et  $AL \times BE$  seront égaux au rectangle donné. La démonstration est la même que dans les cas précédents.

Ainsi la proposition est établie, et le premier théorème d'Apollonius ou de Pappus est éclairci.

Il faut remarquer que les cas pour lesquels nous avons indiqué seulement des demi-cercles donnent en fait les cercles entiers; d'ailleurs les diverses situations des données engendrent des cas multiples qu'on pourra, à loisir, déduire facilement des précédents par des raisonnements immédiats.

Pappus ajoute que le lieu plan, sur lequel se trouve l'extrémité de la seconde droite, est *tantôt du même genre, tantôt d'un genre différent*. Ce qui est clair: par exemple, dans la proposition 1, il est du même genre; car, si la première droite se termine à une droite, la seconde se termine aussi à une droite; et de même un cercle conduit

à un cercle. Dans la première partie de la proposition 2, au contraire, et dans plusieurs autres cas, le lieu est d'un genre différent.

Pappus ajoute aussi que le lieu est *tantôt situé de même par rapport à la ligne droite, et tantôt de façon contraire*. Ces mots *par rapport à la ligne droite* n'offrent aucun sens et je pense qu'il faut les supprimer. J'explique ainsi ce passage : tantôt le second lieu est placé d'une manière contraire au premier ; par exemple, si le premier est la partie convexe de la circonférence, le second sera la partie concave, etc. Des exemples de cette opposition sont donnés dans les propositions ci-dessus.

PROPOSITION II.

« *Si l'on donne une extrémité d'une ligne droite donnée de position, l'autre sera sur une circonférence concave donnée de position.* »

Avec une pareille leçon, la proposition est fautive ; il faut, par exemple, aux mots *donnée de position*, substituer ceux-ci : *donnée de grandeur*, et le sens sera : *si l'on donne le diamètre et le centre d'un cercle, l'extrémité du diamètre sera sur un cercle donné de position*. Ce qui est évident de soi et ne mérite pas qu'on s'y arrête davantage.

PROPOSITION III.

« *Si, de deux points donnés, on mène deux droites qui se coupent sous un angle donné, leur point commun sera sur une circonférence concave donnée de position.* »

Cette proposition est évidente de soi, car le segment capable de l'angle donné et décrit sur la droite joignant les deux points est donné, comme l'a enseigné Euclide dans les *Éléments*.

PROPOSITION IV.

« *Si, d'un triangle d'aire donnée, on donne la base de grandeur et de position, le sommet sera sur une droite donnée de position.* »

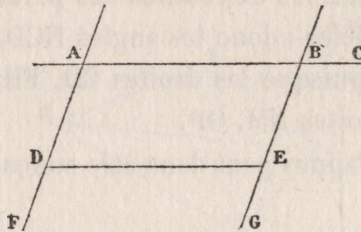
Cette droite sera une parallèle à la base ; sa construction et tout le reste se tirent immédiatement du Livre I des *Éléments*.

## PROPOSITION V.

« Si une droite est donnée de grandeur et parallèle à une droite donnée de position, et qu'une de ses extrémités soit sur une droite donnée de position, l'autre extrémité sera aussi sur une droite donnée de position. »

Soit DE (fig. 17) une droite donnée de grandeur et parallèle à la droite AC donnée de position. L'extrémité D est supposée sur une

Fig. 17.



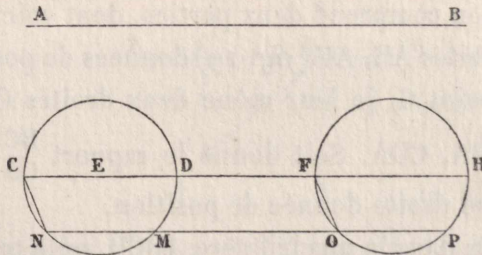
droite AF donnée de position. Si par E vous menez BEG parallèle à AF, elle résout la question.

En effet, toutes les droites, comprises entre ces deux parallèles et parallèles elles-mêmes à la droite AC donnée de position, sont égales entre elles; ce qui est clair d'après la construction même.

Si donc une extrémité de l'une d'elles est sur AF, l'autre sera sur BG, comme le veut la proposition. Il est facile de l'étendre à des cercles.

Soit en effet AB (fig. 18) une droite donnée de position, à laquelle

Fig. 18.



est parallèle NO donnée de grandeur. Soit le point N sur la circonfé-

rence du cercle CNM donné de position. Je dis que le point O est sur un cercle donné de position.

Soit E le centre du cercle CNM; je mène le diamètre parallèle à AB et je le prolonge jusqu'en F, en sorte que  $CF = NO$ , la droite donnée. La droite CF sera donnée de position et de grandeur; je la prolonge en faisant  $FH = CD$ . Le cercle décrit sur FH résout la question, car le point O sera sur sa circonférence.

En effet; soit le point O sur la circonférence du cercle FOP : les droites CN, FO, joignant les extrémités des parallèles égales CF, NO, seront égales et parallèles : donc les angles NCD, OFH seront égaux; mais il en est ainsi, puisque les droites CD, FH, égales entre elles, sont parallèles aux droites NM, OP.

La proposition de Pappus peut donc être conçue plus généralement comme suit :

*Si une droite est donnée de grandeur et parallèle à une droite donnée de position, et qu'une de ses extrémités soit sur un lieu plan donné de position, l'autre extrémité sera aussi sur un lieu plan donné de position.*

#### PROPOSITION VI.

« Si d'un point on mène, à deux droites parallèles ou concourantes données de position, deux droites sous des angles donnés, et dans un rapport donné ou bien dont l'une, plus une droite dans un rapport donné avec l'autre, fait une somme donnée, le point sera sur une droite donnée de position. »

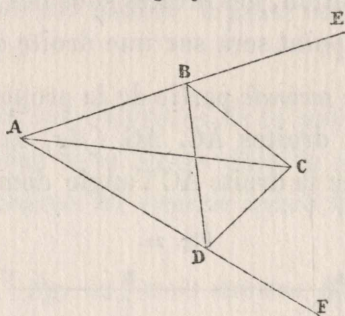
Cette proposition comprend deux parties, dont voici la première :

Soient deux droites AE, AF (*fig. 19*) données de position et se coupant en A. Du point C, je leur mène deux droites CB, CD sous les angles donnés CBA, CDA. Soit donné le rapport  $\frac{BC}{CD}$ . Je dis que le point C est sur une droite donnée de position.

Joignez AC, BD; dans le quadrilatère ABCD, on a trois angles donnés : ABC, ADC, BAD; l'angle BCD est donc donné. Le rapport  $\frac{BC}{CD}$  est

aussi donné par hypothèse, donc le triangle BDC est donné d'espèce, donc les angles CBD, CDB, donc par différence les angles ABD, ADB. Donc le triangle ABD est donné d'espèce, donc le rapport  $\frac{AB}{BD}$ ; mais  $\frac{BD}{BC}$  l'est aussi (puisqu'il est prouvé que le triangle BDC est donné d'espèce), donc  $\frac{AB}{BC}$  le sera. Mais BA est donnée de position, ainsi que le point A; donc AC est donnée de position, et si sur cette droite on

Fig. 19.

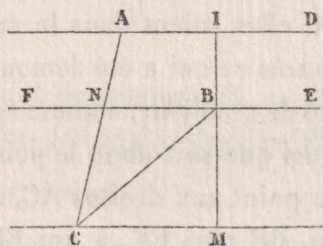


prend un point quelconque, et qu'on mène de ce point aux droites données des droites sous les angles donnés, on prouvera que les menées sont toujours dans le rapport donné.

Second cas, lorsque les droites données sont parallèles :

Soient les droites CA, CB (*fig. 20*), sous les angles donnés CAD, CBF, et dans le rapport donné. L'angle CNB est donné, comme égal,

Fig. 20.



à cause des parallèles, au donné CAD; donc le triangle CNB est donné d'espèce, donc le rapport  $\frac{CN}{CB}$ ; mais, par hypothèse,  $\frac{CB}{CA}$  est donné; donc

$\frac{CN}{CA}$  le sera, et il est dès lors facile de prouver que C est sur une droite donnée de position.

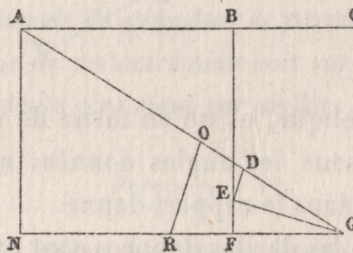
*Construction* : Par le point B quelconque, je mène la perpendiculaire IBM; IB est donné. Soit  $\frac{AN}{NC} = \frac{IB}{BM}$ . Par le point M je mène aux deux données une parallèle qui satisfera à la question, comme il est facile de le démontrer.

Si donc d'un point l'on mène, à deux droites parallèles ou concourantes données de position, des droites sous des angles donnés et dans un rapport donné, le point sera sur une droite donnée de position.

Voici maintenant la *seconde* partie de la proposition :

Soient données les droites AC, AG (*fig. 21*), concourant en A. Menez AN faisant avec la droite AC l'angle donné CAN, et égale à la

Fig. 21.



droite donnée. Menez NG parallèle à AC, et soit ROG l'autre angle donné. D'après la première partie de cette proposition, menez GE telle que si, d'un point quelconque E pris sur cette droite, on mène ED, EF parallèles à RO, AN, elles soient dans le rapport donné; GE sera donnée de position, d'après ce qui a été démontré. Prolongez FE jusqu'en B, FB sera donnée de grandeur, comme égale à la donnée AN, à cause des parallèles. Quel que soit donc le point E pris sur la droite GE, si l'on mène de ce point aux droites AC, AG les droites ED, EB sous les angles donnés, BE plus EF, à qui ED est dans le rapport donné, fait la somme donnée, comme le veut la proposition.

Si donc d'un point on mène, à deux droites concourantes données de position, deux droites sous des angles donnés et telles que l'une,



de ce point des droites sur AB, BC, les menées soient dans le rapport donné. Cette droite est donnée de position, donc le point où elle rencontre AC, soit E. Si l'on mène de ce point EV, ED, parallèles à MO et MR, d'après la construction,  $\frac{VE}{ED}$  sera dans le rapport donné. Prenant ensuite les droites AC et AB, par le même procédé, on trouvera un point K, tel que les droites KL, KZ, issues de ce point et sous les angles donnés, c'est-à-dire parallèles à MR, MI, soient dans le rapport donné. On aura donc aussi  $\frac{KZ}{KL}$  dans le rapport donné. Si l'on joint EK, un point quelconque pris sur cette droite satisfera à la question.

Soit pris M par exemple, pour profiter de la construction déjà faite; menez MF parallèle à BA, et MH parallèle à BC. Il faut prouver que  $\frac{OM + MI}{MR} = \frac{VE}{ED}$ , c'est-à-dire le rapport donné.

Menons encore KG parallèle à BA et supposons vrai ce que nous voulons prouver. Nous aurons *vicissim*  $\frac{MR}{ED} = \frac{MI + MO}{EV}$ ; *dividendo* :  $\frac{MR - DE}{DE} = \frac{MI + MO - EV}{EV}$ . Mais MF étant parallèle à BA, on a EF = MR - DE; MH étant parallèle à BC, EH = EV - MO. Donc IM - EH = MO + MI - VE.

Par conséquent,  $\frac{EF}{DE} = \frac{IM - EH}{EV}$ , *vicissim* :  $\frac{EF}{IM - EH} = \frac{ED}{EV}$ , *conver-*  
*tendo* :  $\frac{IM - EH}{EF} = \frac{EV}{ED}$ , le rapport donné.

Mais par construction, si nous prenons les trois droites EH, EF, IM, on a  $\frac{VE}{EH} = \frac{KE}{EM}$ , et l'on a aussi dans le même rapport  $\frac{KZ}{MI} = \frac{KE}{EM}$ , et encore, puisque KG est parallèle à BA,  $\frac{GE}{EF} = \frac{KE}{EM}$ .

Par conséquent, les trois droites VE, KZ, EG sont proportionnelles aux trois HE, MI, EF; donc  $\frac{KZ - EV}{EG} = \frac{MI - EH}{EF}$ . Mais nous avons prouvé que  $\frac{MI - EH}{EF} = \frac{EV}{ED}$ , le rapport donné. Donc  $\frac{KZ - EV}{EG} = \frac{EV}{ED}$ , le rapport donné, et *vicissim* :  $\frac{KZ - EV}{EV} = \frac{EG}{ED}$ ; *componendo* :  $\frac{KZ}{EV} = \frac{GD}{ED}$ .



Mais, à cause des parallèles KG, BA, on a  $KL = DG$ . Donc *vicissim* :  $\frac{KZ}{KL} = \frac{EV}{ED}$ , ce qui avait déjà été donné par la construction.

Ainsi est établie la vérité d'une très belle proposition. Il est facile, en procédant de même, d'étendre la construction et la démonstration aux cas suivants, pour un nombre quelconque de lignes. Car, de même que la construction pour deux lignes donne la solution du problème pour trois, la construction pour trois lignes donne la solution pour quatre, la construction pour quatre donne la solution pour cinq, et l'application de la méthode se poursuit toujours de même indéfiniment.

PROPOSITION VIII ET DERNIÈRE.

« Si d'un point on mène sous des angles donnés, à des parallèles données de position, des droites qui interceptent, à partir de points donnés sur les premières, des longueurs dans un rapport donné, ou produisant une aire donnée, ou dont la somme des carrés ou bien la différence des carrés soit égale à une aire donnée, le point sera sur des droites données de position.

Si cette proposition était vraie, elle aurait quatre parties, mais nous n'avons trouvé qu'elle fût exacte que pour le *rapport donné*. Écartons donc le reste, pour l'aire produite par les deux droites, pour la somme ou la différence de leurs carrés, et rejetons-le comme faussement inventé ou transporté d'ailleurs.

Je propose donc comme suit le théorème corrigé :

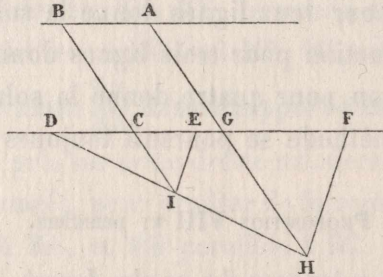
*Si d'un point on mène sous des angles donnés, à des parallèles données de position, des droites qui interceptent, à partir de points donnés sur les premières, des longueurs dans un rapport donné, le point sera sur une ligne droite donnée de position.*

Voici la construction :

Soient AB, GC (*fig. 23*) les parallèles données, A, F les points donnés sur ces droites, BAH l'un des angles donnés, GFH l'autre. Les points A et F étant donnés, avec les angles à ces sommets, les droites

AH, FH seront données de position, par suite leur point de rencontre H : donc le point G où AH coupe la parallèle GC. Partagez GF en D en sorte que  $\frac{GD}{DF}$  soit dans le rapport donné ; D sera donné. Joignez DH, cette droite est donnée de position. Je dis que la droite DH satisfait

Fig. 23.



à la question, c'est-à-dire que si on prend sur elle un point quelconque I, qu'on mène de ce point IB, IE, sous les angles donnés, le rapport des abscisses à partir des points A et F, c'est-à-dire  $\frac{AB}{EF}$ , est égal au rapport donné,  $\frac{GD}{DF}$ .

Soit C le point de rencontre de BI et de la parallèle GF. Par construction, IB est parallèle à AH, comme menée sous l'angle donné égal à HAB. De même IE est parallèle à HF ; de plus, à cause des parallèles,  $GC = AB$  ; il reste à prouver que  $\frac{GC}{EF} = \frac{GD}{DF}$  ou *vicissim*  $\frac{GC}{GD} = \frac{EF}{DF}$ . Mais cela est évident, car d'une part  $\frac{HI}{HD} = \frac{GC}{GD}$  ; de l'autre  $\frac{HI}{HD} = \frac{EF}{FD}$ . Donc  $\frac{GC}{EF}$  est égal au rapport donné.

Il y a, tant pour cette proposition que pour les précédentes, de nombreux cas, qu'il est facile de trouver et d'ajouter ; pourquoi nous y arrêter plus longtemps ?

