Archives of Mechanics • Archiwum Mechaniki Stosowanej • 24, 5–6, pp. 991–998, Warszawa 1972

La dualité des théorèmes limites pour une structure en matériau rigide-plastique standard

D. RADENKOVIC, Q. S. NGUYEN (PARIS)

We consider structures submitted to external forces which depend on p independent parameters Q^i, so that the external work is: $W = Q^i q_i$ with q_i as dual cinematical variables; σ is the distribution of generalized internal forces and v that of corresponding velocities. It is shown that the study of limit equilibrium is related to an eigenvalue problem. For standard materials the approximate values of vectors Q, if not these of the corresponding fields $\sigma - v$, can be found considering a dual min-max problem for a functional $I[Q, q, \sigma, v]$ of four independent arguments. From there all known variational and limit theorems for rigid plastic media can be deduced.

Rozpatrujemy konstrukcje poddane działaniu sił zewnętrznych zależnych od p niezależnych parametrów Q^i w ten sposób, że praca sił zewnętrznych wynosi $W = Q^i q_i$; q_i są dualnymi zmiennymi kinematycznymi. Przez σ oznaczamy rozkład uogólnionych sił wewnętrznych, a przez v — rozkład odpowiednich prędkości. Wykazano, że zagadnienie równowagi granicznej związane jest z pewnym problemem wartości własnych. Przybliżone wartości wektorów Q dla materiałów standardowych wyznaczyć można drogą rozważenia dualnego problemu minimum-maksimum dla funkcjonału $I[Q, q, \sigma, v]$ czterech niezależnych argumentów. Stąd wyprowadzić można wszelkie znane twierdzenia wariacyjne i graniczne dla ośrodków sztywno-plastycznych.

Рассматриваем конструкции подвергнутые действию внешних сил зависящих от p независимых параметров Q^i таким образом, что работа внешних сил равняется $W = Q^i q_i$; q_i — дуальные кинематические переменные. Через σ обозначаем распределение обобщенных внутренних сил, а через v — распределение соответствующих скоростей. Показано, что проблема предельного равновесия сходна с задачей на собственные значения. Приближенные значения векторов Q для стандартных материалов можно определить путем рассмотрения дуальной проблемы на минимум-максимум для функционала $I[Q, q, \sigma, v]$ четырех независимых аргументов. Оттуда можно вывести все известные вариационные и предельные теоремы для жестко-пластических сред.

1. Notations. Rappels

1.1. Champs des efforts et des vitesses

Notons par $\boldsymbol{\sigma}$ la matrice-colonne, de rang B, des *efforts* au point $\mathbf{x}$ de la structure; $\sigma(x)$, ou simplement σ désignera le champ des efforts dans le domaine (ouvert) Ω de la structure.

La structure est soumise aux forces extérieures F, T; l'équilibre entre σ et F, T est défini par:

(1.1) $$F = -L\sigma \quad \text{dans le domaine } \Omega \text{ et}$$

(1.2) $$T = N\sigma \quad \text{sur la frontière } \Sigma;$$

L et N sont des opérateurs linéaires, matrices de rang $B \times A$; L différentiel (au sens des distributions) et N algébrique; la forme des opérateurs dépend de la structure envisagée: milieu continu (simple ou orienté), coque, plaque, poutre.

Soit $\mathbf{v}$ la matrice-colonne, de rang A, des *vitesses* (de déplacement) au point $\mathbf{x}$ de Ω; $\mathbf{v}(x)$, ou bien v, sera le champ correspondant.

Désignons par V les vitesses sur Σ; la compatibilité des champs v et V requiert:

$$V = Ev \quad \text{sur } \Sigma; \tag{1.3}$$

E étant l'opérateur identité.

Le champ des *vitesses des déformations* τ est défini au moyen d'un opérateur $\tilde{L}$, matrice de rang $A \times B$, par:

$$\tau = \tilde{L}v. \tag{1.4}$$

Les opérateurs L et $\tilde{L}$ sont adjoints au sens que pour tout σ et v on a:

$$\int (\sigma\tilde{L}v + vL\sigma)\, d\Omega = \int EvN\sigma\, d\Sigma. \tag{1.5}$$

Au cas où le champ des efforts est en équilibre avec les forces extérieures (1.1) (1.2), et où les vitesses sont compatibles (1.3) (1.4), l'équation (1.5) exprime le principe des travaux virtuels:

$$\int \sigma\tau\, d\Omega = \int Fv\, d\Omega + \int TV\, d\Sigma. \tag{1.6}$$

1.2. Comportement rigide-plastique standard

En tout point $\boldsymbol{\sigma}$ vérifie l'inégalité

$$f(\boldsymbol{\sigma}) \leqslant 0, \tag{1.7}$$

$f(\boldsymbol{\sigma})$ étant une fonction convexe de ses arguments, bornée (sauf éventuellement dans une direction) qui est nommée *critère d'écoulement*.

Tout $\boldsymbol{\sigma}$ appartenant au convexe H de R^B:

$$H = \{\boldsymbol{\sigma} | f(\boldsymbol{\sigma}) \leqslant 0\} \tag{1.8}$$

est dit *plastiquement admissible*. Nous écrirons $\boldsymbol{\sigma}^p \equiv \boldsymbol{\sigma} \in H$.

Pour un matériau *standard* on *a*, introduisant la matrice $\partial\mathbf{f} = \{\partial f/\partial\sigma_\beta\}$

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda\partial\mathbf{f}\begin{cases}\lambda = 0 & \text{si} \quad f < 0,\\ \lambda \geqslant 0 & \text{si} \quad f = 0.\end{cases} \tag{1.9}$$

On suppose que le temps n'intervient pas d'une manière explicite dans (1.9); autrement dit $\boldsymbol{\tau}$ n'est défini qu'à une homothétie positive près.

L'ensemble des $\boldsymbol{\tau}$ *plastiquement admissibles* appartient au cône:

$$K = \{\boldsymbol{\tau} | \boldsymbol{\tau} = \lambda\partial\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}), \lambda \geqslant 0, f(\boldsymbol{\sigma}) = 0\}. \tag{1.10}$$

Soit $\boldsymbol{\tau}^+ \equiv \boldsymbol{\tau} \in K$ et $\boldsymbol{\sigma}^+$ une matrice des efforts correspondante par la relation (1.9). On sait que:

$$\pi(\boldsymbol{\tau}^+) \equiv \boldsymbol{\sigma}^+\boldsymbol{\tau}^+ = \sup_{\boldsymbol{\sigma}^p} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\tau}^+, \tag{1.11}$$

$\pi(\boldsymbol{\tau}^+)$ est nommée *puissance dissipée* pour un élément.

2. Paramètres de charge

2.1. Conditions aux limites, forces données

Certaines composantes $F^{\alpha d}$ sont données dans tout le domaine Ω ou dans une partie $\Omega_{\alpha d}$ de la structure; en particulier elles peuvent être nulles.

Dans les parties $\Omega_{\alpha i}$ la distribution de F^{α} n'est déterminée qu'à m paramètres scalaires $Q_{(i)}$ près, soit:

$$F^{\alpha}|_{\Omega_{\alpha i}} = Q_{(i)} F^{\alpha(i)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m \tag{2.1}$$

les parenthèses indiquant qu'il n'y a pas de sommation sur i.

Evidemment $\Omega_{\alpha d} \cup \Omega_{\alpha i} = \Omega$ pour $1 \leqslant \alpha \leqslant A$.

D'une manière semblable, certaines composantes $T^{\alpha d}$ sont données sur la partie $\Sigma_{T\alpha d}$ de la frontière; on peut avoir en particulier $T^{\alpha d} = 0$.

Sur les parties $\Sigma_{T\alpha i}$ la distribution T^{α} n'est déterminée qu'aux paramètres $Q_{(i)}$ près, soit:

$$T^{\alpha}|_{\Sigma_{T\alpha i}} = Q_{(i)} T^{\alpha(i)}, \quad m+1 \leqslant i \leqslant p. \tag{2.2}$$

Enfin certaines composantes V_{α} sont nulles sur la partie $\Sigma_{V\alpha d}$ de la frontière, alors que sur la partie $\Sigma_{V\alpha i}$ la vitesse est une fonction linéaire de x, soit:

$$V_{\alpha}|_{\Sigma_{V\alpha i}} = q^{i} + \sum_{\gamma=1}^{A-1} q^{i+\gamma} s_{\gamma}, \quad i = p+1,\ p+A, \ldots, t-A+1, \tag{2.3}$$

$s_{\gamma} = x_{\gamma} - r_{\gamma}$, s_{γ} étant la coordonnée du point x par rapport à un point de référence $\mathbf{r}$ donné; q^{i} sont des paramètres de valeur arbitraire.

On sait que $\Sigma_{T\alpha} \cup \Sigma_{V\alpha} = \Sigma$ et $\Sigma_{T\alpha} \cap \Sigma_{V\alpha} = 0$ pour $1 \leqslant \alpha \leqslant A$.

R e m a r q u e: on pourrait, en principe, envisager $V_{\alpha d}$ non nulles ainsi que $V_{\alpha i}$ de distribution non-linéaire; nous laissons de côté ce type de données qui présentent peu d'intérêt pour notre problème. On ne tiendra pas compte non plus d'un mouvement d'ensemble de la structure.

2.2. Travail des forces extérieures. Paramètres de charge

Soit:

$$W = \int F v\, d\Omega + \int T V\, d\Sigma \tag{2.4}$$

le travail des forces extérieures en vitesses de déplacement. Avec les données précédentes on peut poser, en allégeant l'écriture:

$$W = \int F^{d} v\, d\Omega + \int T^{d} V\, d\Sigma + Q_{i} \int F^{i} v\, d\Omega + Q_{j} \int T^{j} V\, d\Sigma + q^{l} \int T V_{l}\, d\Sigma \tag{2.5}$$

la convention de sommation sur l'indice muet étant admise.

Remarquons que les forces extérieures, y compris les réactions d'appuis (sur $\Sigma_{V\alpha d}$), doivent être en équilibre; il est parfois nécessaire d'en tenir compte dans le choix des données.

Introduisant les paramètres conjugués

$$\bar{q}^{(i)} = \int F^{(i)} v \, d\Omega, \quad \text{ov bien} \quad \bar{q}^{(j)} = \int T^{(j)} V d\Sigma \tag{2.6}$$

et

$$\bar{Q}_{(1)} = \int T v_{(1)} d\Sigma$$

et désignant par W^d le travail des forces données on a en réarrangeant les sommes:

$$W = W^d + Q_i \bar{q}^i + \bar{Q}_l q^l. \tag{2.7}$$

La différence entre les paramètres "imposés" Q_i, q^l et les moyennes "pondérées" $\bar{Q}_{(l)}$ et $\bar{q}^{(i)}$ joue un rôle important dans le choix des champs admissibles (données à la frontière à satisfaire), mais dans les deux cas les variables conjuguées apparaissent au même titre dans le problème variationnel; on peut donc, comme il est usuel, ne pas les distinguer dans l'écriture.

D'autre part, il est toujours possible, pour certaines considérations, il est même utile, de laisser toutes les composantes non nulles des forces extérieures indéterminées au paramètre respectif près.

Avec ces remarques on peut poser:

$$W = Q_i q^i, \quad 1 \leqslant i \leqslant t. \tag{2.8}$$

Les composantes $Q_{(i)}$ du vecteur Q_i, ou simplement Q, sont nommées les *paramètres de charge*.

3. Champs admissibles. Espace des paramètres de charge

3.1. Champs admissibles

L'ensemble des répartitions de σ (fonction-matrice de rang B) dans Ω appartient à un espace $\mathscr{H}$ que l'on peut définir convenablement selon le problème à traiter; ici nous n'avons pas besoin de précision à ce sujet.

Une répartition de σ qui vérifie (1.1) et (1.2) avec F^d et T^d (éventuellement nulles) et avec F^i et T^i (à un multiplicateur près) est dite *statiquement admissible*.

Notations

$$\sigma^s \equiv \sigma \in \mathscr{H}^s, \quad \mathscr{H}^s = \{\sigma | L\sigma + F = 0 \text{ dans } \Omega, N\sigma - T = 0 \text{ sur } \Sigma\}. \tag{3.1}$$

Une répartition de σ qui satisfait au critère (1.7) dans Ω est *plastiquement admissible*.

Notations

$$\sigma^p \equiv \sigma \in \mathscr{H}^p, \quad \mathscr{H}^p = \{\sigma | \boldsymbol{\sigma} \in H \text{ dans } \Omega\}. \tag{3.2}$$

On appelle *statiquement et plastiquement admissible*:

$$\sigma^* \equiv \sigma \in \mathscr{H}^*; \quad \mathscr{H}^* = \mathscr{H}^s \cap \mathscr{H}^p. \tag{3.3}$$

On peut montrer que $\mathscr{H}^s$ et $\mathscr{H}^p$, et donc aussi $\mathscr{H}^*$, sont des convexes.

L'ensemble des répartitions de vitesses v (fonction matrice de rang A) dans Ω appartient à un espace $\mathscr{K}$, défini convenablement.

Une répartition de v qui satisfait à (1.3) avec V soit nul, soit donné par (2.3) est cinématiquement admissible:

$$v^c \equiv v \in \mathcal{K}^c, \quad \mathcal{K}^c = \{v | v = V \text{ sur } \Sigma\}. \tag{3.4}$$

Une répartition de v telle qu'en tout point x $\boldsymbol{\tau} = \tilde{L}v|_x$ peut être associée à $\boldsymbol{\sigma}^p$ par (1.9) est *plastiquement admissible*:

$$v^p \equiv v \in \mathcal{K}^p, \quad \mathcal{K}^p = \{v | \tilde{L}v|_x = \boldsymbol{\tau} \in K \text{ dans } \Omega\}. \tag{3.5}$$

On appelle *cinématiquement et plastiquement admissible*:

$$v^+ \equiv v \in \mathcal{K}^+, \quad \mathcal{K}^+ = \mathcal{K}^p \cap \mathcal{K}^c. \tag{3.6}$$

On peut montrer que (vu l'absence de $V_{\alpha d}$ non nulles) $\mathcal{K}^c$ est un espace vectoriel et que $\mathcal{K}^p$ est un cône convexe; $\mathcal{K}^+$ est donc un cône convexe.

3.2. Espace des paramètres de charge

L'ensemble des vecteurs Q_i forme un espace R^t que nous nommerons G. Le dual de G, noté par C est formé par l'ensemble des vecteurs q^i.

En admettant $\overline{Q}_{(i)} = Q_{(i)}(\sigma^*)$ pour les indices correspondants, le convexe $\mathcal{H}^*$ engendre dans G le convexe:

$$G^* = \{Q | Q = Q(\sigma^*)\}. \tag{3.7}$$

Notation $Q^* \equiv Q \in G^*$.

Avec $f(\sigma) = 0$ borné (sauf peut-être dans une direction), G^* aura la même propriété. Donc tout point Q^* possible se trouve à l'intérieur d'une surface dans G; choisissant les signes pour que l'origine se trouve à l'intérieur, on peut poser $F_1(Q^*) \leqslant 0$. L'interprétation précise de cette inégalité ne peut être donnée qu'à partir des théorèmes variationnels (p. 5).

Désignons par c^+ le cône dans C correspondant à $\mathcal{K}^+$, en considérant $\overline{q}^{(i)} = q^{(i)}(v^+)$ pour (i) correspondant.

Notation

$$q^+ \equiv q \in C^+, \quad C^+ = \{q | q = q(v^+)\}. \tag{3.8}$$

Introduisons, enfin, G^+ associé à $\mathcal{K}^+$ tel que:

$$G^+ = \{Q | Q_i q^i(v^+) \geqslant \int \pi(v^+) d\Omega \forall v^+\}. \tag{3.9}$$

Tout point $Q^+ \equiv Q \in G^+$ se trouve à l'extérieur de l'enveloppe $F_2(Q^+) = 0$ des plans $Q_i q^i(v^+) = \int \pi(v^+) d\Omega$; remarquons en passant, que l'on peut avoir $q(v_1^+) = q(v_2^+)$ alors que le membre droit est différent dans les deux cas (plans parallèles). La relation entre les surfaces $F_1(Q^*) = 0$ et $F_2(Q^+) = 0$ peut être interprétée, elle aussi, seulement à partir des théorèmes variationnels (§ 5).

4. Le problème de l'équilibre limite (matériau standard)

En utilisant les définitions qui précèdent, on peut formuler:

l e p r o b l è m e d e l'é q u i l i b r e l i m i t e (A)

Etant donné F^d, F^i dans Ω; T^d, T^i, V_i et $V_d = 0$ sur Σ, de sorte que (2.7):

$$W = W^d + Q_i \overline{q}^i + \overline{Q}_i q^i \tag{A1}$$

trouver l'ensemble des σ^* (3.3) et v^+ (3.6) associés, c. à d. tels que (1.11):

(A2) $$\boldsymbol{\sigma}^* \boldsymbol{\tau}^+ = \pi(\boldsymbol{\tau}^+) \forall x$$

et que (3.7) et (3.8):

(A3) $$W = W^d(v^+) + Q_i^* q^{i+} > 0.$$

Il faut noter que (A) *n'est pas* un problème aux limites. En fait, la solution en σ et v dépend de la valeur des paramètres $Q_{(i)}$ qui n'est pas donnée d'avance. En ce sens on peut plutôt assimiler le problème posé à un *problème des valeurs propres*: ce n'est que pour des valeurs de Q bien précises (valeurs propres) que des solutions en σ et v (solutions propres) peuvent exister; il est d'ailleurs bien connu, que pour un tel Q elles ne sont pas uniques.

Or, dans les problèmes de ce type, il est rare que l'intérêt porte sur les solutions propres elles-mêmes; ce sont les valeurs propres que l'on cherche à connaître (valeur de la charge limite ou frontière d'écoulement, dans notre cas).

Donc, le problème qui se pose réellement est légérement différent de (A). En supposant, pour simplifier, $W^d = 0$ on peut l'énoncer comme:

le problème de la frontière d'écoulement de la structure **(B)**

Etant donné $F^d = 0$ et F^i dans Ω; $T^d = 0$, T^i, V_i et $V_d = 0$ sur Σ, de sorte que (2.8):

(B1) $$W = Q_i q^i$$

trouver l'ensemble S des Q tels que pour chaque $Q \in S$ existe au moins un couple σ^* et v^+ associés par (1.11):

(B2) $$\boldsymbol{\sigma}^* \boldsymbol{\tau}^+ = \pi(\boldsymbol{\tau}^+) \quad \forall x$$

de sorte que (3.7) (3.8):

(B3) $$W = Q_i^* q^{i+} > 0.$$

Les conditions de l'existence et de l'unicité de la solution du problème (B) ne sont pas encore claires (même dans le cas du matériau standard envisagé ici).

Dans ce qui suit nous supposons que les conditions aux limites sont telles que le problème (B) a une solution; c.à d. qu'il existe un ensemble S unique, non vide et borné (sauf peut-être dans une direction).

Dans ce cas, les théorèmes variationnels qui suivent permettront de montrer que S est représenté par une surface $F(Q) = 0$ dans G qui est à la fois la frontière $F_1(Q^*) = 0$ de G^* et la frontière $F_2(Q^+) = 0$ de G^+.

Pour les solutions propres on retrouve alors une variante de *l'alternative* connue: soit Q quelconque donné; ou bien il n'existe que la solution triviale $[F(Q) < 0 : \sigma^*$ non unique, $v^+ \equiv 0]$, ou bien il existe des solutions non triviales $[F(Q) = 0 : Q^* q^+ > 0]$ ou bien il n'existe aucune solution $[F(Q) > 0]$.

Remarque: $\mathcal{K}^+$ étant un cône, si (σ^*, v^+) est une solution propre, pour tout scalaire $\varkappa > 0$; $(\sigma^*, \varkappa v^+)$ est aussi une solution. Ceci correspond bien à la notion intuitive de la "ruine" de structure rigide-plastique comme formation d'un *mécanisme* libre.

En général, si les forces extérieures croissent indépendamment, plusieurs *modes* de ruine sont possibles: à chaque mode $q \in C$ donné peut correspondre une ou plusieurs solutions (σ^*, v^+) c. à d. plusieurs mécanismes. Cette liberté de choix de q sera utilisée dans la formulation du problème variationnel.

5. Formulation variationnelle du problème (*B*)

Considérons maintenant la fonctionnelle:

$$I = Q_i q^i + \int \sigma \tilde{L} v \, d\Omega - Q_i q^i(v) \tag{5.1}$$

qui dépend de quatre arguments indépendants:

$$Q \in G, \quad q \in C, \quad \sigma \in \mathscr{H}^p \equiv \sigma^p, \quad v \in \mathscr{K}^c \equiv v^c.$$

Utilisant (2.8), (2.4) et ensuite (1.5) on peut présenter I sous formes équivalentes:

$$\begin{aligned} I_1 &= Q_i q^i + \int \sigma \tilde{L} v \, d\Omega - Q_i q^i(v) = Q_i q^i + \int \sigma \tilde{L} v \, d\Omega - \int F v \, d\Omega - \int T E v \, d\Sigma \\ &\equiv I_2 = Q_i q^i - \int (L\sigma + F) v \, d\Omega + \int (N\sigma - T) E v \, d\Sigma. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Recherchons:

$$I^+ = \inf_{v^c} \sup_{\sigma^p, Q} I \quad \text{et} \quad I^- = \sup_{\sigma^p, Q} \inf_{v^c} I \tag{5.3}$$

pour tout mode de ruine q donné.

Si nous supposons, comme on le fait habituellement dans la discussion des théorèmes limites, qu'une solution du problème (*B*) existe, nous n'aurons pour un mécanisme (σ^*, v^+) quelconque qui correspond au mode q

$$I^- = I^+ = I^0 = Q_i(\sigma^*) q^i(v^+) = Q_i^0 q_0^i. \tag{5.4}$$

Borne I^+ (*théorème cinématique*).

Nous avons d'abord:

$$\sup_{\sigma^p, Q} I_1 = \sup_{Q} Q_i [q^i - q^i(v)] + \sup_{\sigma^p} \int \sigma \tilde{L} v \, d\Omega$$

donc

$$\sup_{\sigma^p Q} I_1 = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad q^i(v) \neq q^i \quad \text{ou} \quad v \neq v^p, \\ \int \pi(v^+) d\Omega & \text{si} \quad q^i(v) = q^i \quad \text{et} \quad v = v^p \end{cases}$$

où (1.11) a été utilisé.

Compte-tenu que $v = v^c$, par l'hypothèse, nous avons alors:

$$I^+ = \inf_{v^+} \int \pi(v^+) d\Omega \text{ pour tout } q(v^+) \text{ donné}. \tag{5.5}$$

En se référant à (5.4) on peut déduire, si la solution de (*B*) existe, la relation connue:

$$Q_i^0 q_0^i(v^+) \leqslant \int \pi(v^+) d\Omega. \tag{5.6}$$

Borne I^- (*théorème statique*).

Nous avons ici de manière évidente:

$$\inf_{v^c} I_2 = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad \sigma \neq \sigma^s \quad \text{ou} \quad Q \neq Q^*, \\ Q_i^* q^i & \text{si} \quad \sigma = \sigma^s \quad \text{et} \quad Q = Q^*, \end{cases}$$

étant donné que par l'hypothèse $\sigma = \sigma^p$.

Donc:

$$I^- = \sup_{Q^*} Q_i^* q^i. \tag{5.7}$$

En supposant qu'une solution du problème existe, on en déduit

$$(Q_i^0 - Q_i^*) q_0^i \geqslant 0. \tag{5.8}$$

Pour le problème de l'équilibre limite des structures en matériau rigide-plastique standard, la formulation présente contient, comme cas particuliers, toutes les formulations variationnelles connues.

Note

Ce travail fait partie d'un ensemble de recherches menées par M. SALENÇON et les deux auteurs du présent article. Voir aussi: J. SALENÇON, *Ecoulement plastique libre et analyse limite pour les matériaux standards et non-standards*, Annales de l'ITBTP, juin 1972.

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE DES SOLIDES
ÉCOLE POLYTECHNIQUE, PARIS

Reçu Juin 8, 1972