

Note sur l'application du critère de Tresca au problème de la flexion circulaire d'un cylindre élastoplastique

J. MANDEL (PARIS)

IL S'AGIT de la flexion d'un cylindre élastoplastique, homogène, isotrope, écrouissable, en déformation infiniment petite, problème dont la solution exacte suivant le critère de Huber-Mises n'est pas connue. On donne ici la solution complète (i.e. avec calcul des déplacements) en adoptant le critère de Tresca et plus généralement celui de Mohr. Cette solution est basée sur le fait qu'en régime d'arête, les relations de comportement laissent aux vitesses de déformation un degré de liberté. En revanche, une indétermination des déplacements apparaît dans certaines parties de la section droite.

W pracy przedstawiono problem ugięcia walca sprężysto-plastycznego izotropowego ze wzmocnieniem przy odkształceniach nieskończenie małych, którego rozwiązanie ściśle, zgodne z kryterium Hubera-Misesa, nie jest znane. Podano pełne rozwiązanie z uwzględnieniem stanu przemieszczeń przyjmując kryterium Treski, a ogólniej kryterium Mohra. Rozwiązanie to oparte jest na fakcie, że w obszarach krawędziowych równania stanu zostawiają pewien stopień swobody prędkościom deformacji. W zamian pojawia się nieokreśloność przemieszczeń w pewnych partiach przekroju.

Представляется проблема прогиба упруго-пластического, изотропного, с упрочнением цилиндра при инфинитезимальных деформациях, которой точное решение, согласно критерию Губера—Мизеса, не известно. Приводится здесь полное решение с учетом состояния перемещений принимая критерий Треска, а в общем случае критерий Мора. Это решение опирается на факте, что в граничных областях уравнения состояния оставляют некоторую степень свободы скоростям деформации. Взамен появляется неопределенность перемещений в некоторых частях сечения.

1. Introduction

DANS les problèmes de plasticité le critère de Von Mises-Huber est d'un usage beaucoup plus répandu que le critère de Tresca. Une raison de cette préférence est sa plus grande exactitude (en général); une autre sa forme mathématique qui évite la détermination des directions principales et valeurs principales du tenseur des contraintes. Toutefois ce dernier avantage disparaît lorsque les directions principales sont imposées par les symétries du problème. Dans ce cas le critère de Tresca (plus généralement le critère de Mohr ou de la courbe intrinsèque) conduit à des calculs souvent plus simples que le critère de Mises-Huber (plus généralement les critères fondés sur les invariants), parce qu'il se traduit par des relations linéaires entre les contraintes au lieu de relations quadratiques. Divers exemples sont connus: dans le problème du tube élastoplastique soumis à une pression intérieure ou extérieure, en déformation infiniment petite et sans écrouissage, le critère de Tresca permet une intégration explicite (W. T. KOITER [1]) ce que ne permet pas le critère de Mises-Huber (en revanche dans le cas d'un tube très épais, on rencontre la complication de deux régimes d'écoulement dans l'épaisseur du tube, un régime de face et un régime d'arête). Des circonstances analogues se présentent dans tous les problèmes axisymétriques.

Mais l'exemple le plus frappant est celui de la flexion circulaire. La solution de ce problème avec le critère de Misès-Huber n'est pas connue (cf. R. HILL [2]), en dépit de l'apparente simplicité du problème. Dans tous les manuels d'ingénieurs on donne, à titre d'approximation, une solution fondée sur l'hypothèse que les fibres sont, comme en élasticité, en traction simple ou compression simple. Curieusement, le fait que cette hypothèse soit effectivement justifiée dans le cas du critère de Tresca semble être passé à peu près inaperçu. W. T. KOITER l'a signalé dans son enseignement oral de plasticité [3], et dans un ouvrage en cours d'impression [4], dans le cas d'un matériau élastique parfaitement plastique. Nous montrons ici que l'hypothèse est justifiée même si le matériau est élastoplastique écrouissable, et même pour le critère de Mohr plus général que celui de Tresca. Vu l'importance du problème de la flexion, nous pensons que ces résultats, si modestes soient-ils, méritent d'être connus.

2. Position du problème

Un cylindre homogène est soumis sur ses deux bases à des couples de flexion égaux et opposés. Par raison de symétrie, la section droite médiane reste plane et perpendiculaire aux fibres. De même les autres sections droites puisque le moment fléchissant est indépendant de la section considérée. La ligne moyenne Ox devient un arc de cercle de courbure c . Nous prenons Oz perpendiculaire au plan de ce cercle. La dilatation d'une fibre distante de y de l'axe neutre est alors, dans le cas de déformations infiniment petites: $\epsilon_{xx} = cy$, la courbure étant comptée positivement dans le sens opposé à Oy .

On fait l'hypothèse suivante que l'on devra justifier à posteriori: le tenseur des contraintes (eulériennes) σ se réduit à sa composante $\sigma_{xx} = \sigma$ (toutes les autres sont nulles). Dans ces conditions la relation entre σ et $\epsilon_{xx} = cy$ est fournie par les essais de traction

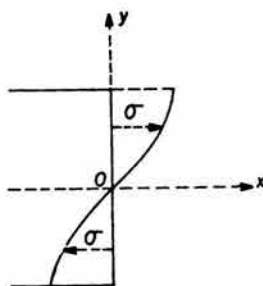


FIG. 1.

et compression simples, d'où le diagramme de σ en fonction de y (Fig. 1) pour une valeur donnée de τ .

Il reste à voir si les déformations correspondant à cette distribution de contraintes sont compatibles entre elles. Le matériau étant supposé isotrope à tout instant, on a toujours

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} = 0.$$

D'autre part ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} sont indépendants de x et toutes les dérivées secondes de $\epsilon_{xx} = cy$ sont nulles.

Il en résulte que les six conditions de compatibilité se réduisent à la suivante:

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = 0.$$

3

3.1. Critère de von Misès-Huber

J_2 désignant le deuxième invariant du déviateur des contraintes, on a ici $J_2 = \frac{1}{3} \sigma^2$ et les relations de Prandtl-Reuss s'écrivent:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{c}y &= \dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{2}{3} \sigma \frac{\dot{J}_2}{M}, \\ \dot{\varepsilon}_{yy} &= \dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\nu \dot{\sigma}}{E} - \frac{1}{3} \sigma \frac{\dot{J}_2}{M}; \end{aligned}$$

E : module d'Young, ν : rapport de Poisson, M : module d'érouissage, fonction de σ , $\dot{J}_2 = \frac{2}{3} \sigma \dot{\sigma}$.

Ces équations s'intègrent par

$$(3.2) \quad cy = \frac{\sigma}{E} + F(\sigma),$$

$$(3.3) \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma - \frac{1}{2} F(\sigma),$$

qui sont les relations de Hencky.

(3.2) est la relation fournie par l'essai de traction simple. De cet essai, on déduit donc $F(\sigma)$ que l'on peut remplacer par $\phi(cy)$ puisque σ est fonction de cy (Fig. 2). Remplaçant dans (3.3) $F(\sigma)$ par $\phi(cy)$ et $\frac{\sigma}{E}$ par $cy - \phi(cy)$, on obtient

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu cy - \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \phi(cy)$$

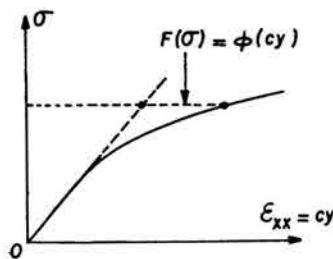


FIG. 2.

La condition de compatibilité (2.1) se réduit à

$$(3.4) \quad \left(\frac{1}{2} - \nu\right) \phi''(cy) = 0$$

qui est bien vérifiée pour $\nu = 1/2$, mais non lorsque $\nu \neq 1/2$, et ceci même dans le cas d'un écrouissage linéaire⁽¹⁾, même dans le cas, plus particulier encore, d'absence d'écrouissage.

3.2. Critère de Tresca — règles d'écoulement

Avant de passer à l'étude de la solution lorsqu'on utilise le critère de Tresca, il convient de rappeler les règles d'écoulement associées à ce critère dans le cas d'un régime dit d'arête, pour lequel deux mécanismes d'écoulement simultanés interviennent.

Soit n_1, n_2, n_3 les trois contraintes principales et D_1, D_2, D_3 , les trois vitesses de déformation plastiques principales, dont la somme est nulle (invariance de volume) et par l'hypothèse deux sont variables *indépendantes* (deux mécanismes d'écoulement). On suppose qu'à l'instant t le matériau est isotrope et vérifie le critère de Tresca en régime d'arête d'où $n_2 = n_3$. On peut poser, compte-tenu de l'isotropie:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \dot{n}_1 - \dot{n}_2 &= -MD_2 - ND_3, \\ \dot{n}_1 - \dot{n}_3 &= -ND_2 - MD_3. \end{aligned}$$

Si N était différent de M , l'égalité entre n_2 et n_3 ne serait pas maintenue et le critère ne conserverait pas la forme de Tresca (l'écrouissage détruirait l'isotropie).

Puisque nous supposons que le critère conserve à tout instant la forme de Tresca, nous avons nécessairement $N = M$ (écrouissage isotrope). Dans ce cas, en régime d'arête, on a à tout instant $n_2 = n_3$, mais, en compensation de cette relation supplémentaire entre les contraintes, il y a un degré de liberté sur les vitesses de déformation, puisque seule la somme $D_2 + D_3 = -D_1$ est alors déterminée quand on se donne \dot{n}_1 et $\dot{n}_2 = \dot{n}_3$.

Toutefois les signes de D_2 et D_3 ne sont pas arbitraires. D'après le principe du travail maximal, le vecteur représentant la vitesse de déformation plastique doit être à l'intérieur de l'angle formé par les normales extérieures à l'hexagone de Tresca. Finalement si $n_1 > n_2 = n_3 = n$ et $\dot{n}_1 > \dot{n}$ on a les relations suivantes:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} D_1 &= \lambda + \mu = \frac{\dot{n}_1 - \dot{n}}{M} & M: \text{ module d'écrouissage,} \\ D_2 &= -\mu & \lambda, \mu \geq 0, \\ D_3 &= -\lambda & \lambda/\mu \text{ arbitraire.} \end{aligned}$$

⁽¹⁾ En effet, dans ce cas, ϕ'' est nul dans la zone élastique et dans la zone plastique, mais infini le long de la ligne $y = a$ qui sépare les 2 zones. Cela signifie qu'il y a compatibilité des déformations dans les deux zones mais non au passage de l'une à l'autre. On peut le vérifier de la manière suivante: ξ, η, ζ , désignant le déplacement $\partial^2 \eta / \partial z^2$ n'a pas la même valeur de part et d'autre de la ligne $y = a$.

En effet:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} = \nu c + \left(\frac{1}{2} - \nu\right) c \phi'(cy).$$

4. Application au problème de la flexion⁽²⁾

Dans la solution proposée, $n_2 = n_3 = 0$. L'hypothèse du critère de Tresca fait disparaître la nécessité d'égalité entre $\dot{\varepsilon}_{yy}$ et $\dot{\varepsilon}_{zz}$. De là découle la possibilité de satisfaire à la condition de compatibilité (2.1).

Les équations pour les vitesses de déformation sont ici

$$\dot{c}y = \dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \lambda + \mu, \quad \lambda + \mu = \frac{\dot{\sigma}}{M},$$

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = -\frac{\nu}{E}\dot{\sigma} - \mu,$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = -\frac{\nu}{E}\dot{\sigma} - \lambda,$$

$\lambda, \mu \geq 0$ si $\sigma > 0$, $\lambda, \mu \leq 0$ si $\sigma < 0$, donc λ, μ du signe de σ .

En intégrant nous obtenons

$$(4.1) \quad cy = \frac{\sigma}{E} + F(\sigma),$$

$$(4.2) \quad \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E}\sigma - G, \quad G + H = F(\sigma),$$

$$(4.3) \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\sigma - H, \quad G, H \text{ du signe de } \sigma.$$

$$(4.1) \text{ donne } \frac{\sigma}{E} = cy - \phi(cy) \quad \phi(cy) \text{ a le signe de } cy$$

et en transportant cette valeur dans (4.2), (4.3) on obtient

$$(4.4) \quad \varepsilon_{yy} = -\nu cy + \nu \phi(cy) - G,$$

$$(4.5) \quad \varepsilon_{zz} = -\nu cy + \nu \phi(cy) - H;$$

G, H sont des fonctions de y, z à déterminer en tenant compte de la condition (2.1) qui s'écrit:

$$(4.6) \quad -\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \nu c^2 \phi''(cy) = 0.$$

En posant

$$H(y, z) = L(y, z) + \nu \phi(cy),$$

$$G(y, z) = -L(y, z) + (1 - \nu)\phi(cy)$$

il vient

$$(4.7) \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$$

d'où

$$(4.8) \quad L = h(y - z) + k(y + z).$$

⁽²⁾ En plus du couple de flexion on peut supposer qu'il existe une force longitudinal.

La condition (4.7) doit être vérifiée dans toute la section. Or dans la région élastique $L \equiv 0$, donc $h(y-z) = \alpha$, $k(y+z) = -\alpha$, α constante que l'on peut prendre nulle sans restreindre la généralité, donc:

$h(y-z) = 0$ tout le long des caractéristiques $y-z = Cte$ qui rencontrent la ligne de séparation $y = a$ entre zone élastique et zone plastique,

$k(y+z) = 0$ tout le long des caractéristiques $y+z = Cte$ qui rencontrent cette ligne⁽³⁾.

Dans le domaine "de dépendance" $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 3), h et k sont tous deux nuls, donc $L = 0$, d'où:

$$H = \nu\phi(cy), \quad G = (1-\nu)\phi(cy).$$

$\phi(cy)$ ayant le signe de cy , H et G ont aussi le signe de cy (si $\nu > 0$). Toutes les conditions sont donc vérifiées.

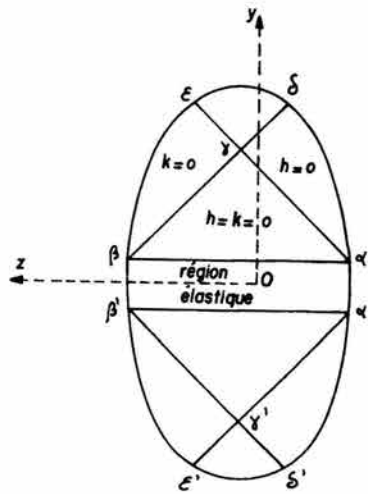


FIG. 3.

Dans les domaines "d'influence" $\beta\gamma\epsilon$ et $\alpha\gamma\delta$, une des deux fonctions h , k est nulle, l'autre restant arbitraire sous la seule réserve que G , H soient du signe de cy , d'où:

$$-\nu\phi(cy) \leq h(y-z) + k(y+z) \leq (1-\nu)\phi(cy) \quad \text{si } cy > 0.$$

Enfin, dans le domaine $\delta\gamma\epsilon$, les deux fonctions h et k sont arbitraires sous la réserve précédente.

Le calcul des déplacements ξ , η , ζ s'obtient aisément (par le procédé classique qui consiste à introduire le vecteur-rotation comme inconnue auxiliaire).

En posant

$$P(v) = \int_0^v h(u) du, \quad Q(v) = \int_0^v k(u) du,$$

⁽³⁾ Il ne suffit pas d'écrire que $L = 0$ le long de la ligne $y = a$. La compatibilité des déformations entre zone élastique et zone plastique ne serait pas assurée (cf. note 1, n° 2, $\partial^2\eta/\partial z^2 = h' + k'$ doit être continu, d'où: $h' + k' = 0 \forall z$ pour $y = a$).

on obtient

$$\begin{aligned}\xi &= cxy, \\ \eta &= -\frac{c}{2}[x^2 + \nu(y^2 - z^2)] - (1-2\nu) \int_0^y \phi(cu) du + P(y-z) + Q(y+z), \\ \zeta &= -\nu cyz + P(y-z) - Q(y+z).\end{aligned}$$

La continuité des déplacements pour $y = a$, $\alpha \leq z \leq \beta$ exige que:

$$P(a-z) = 0, \quad Q(a+z) = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \leq z \leq \beta$$

donc

$$\begin{aligned}P(u) &= 0 \quad \text{pour} \quad \alpha - \beta \leq u \leq a - \alpha, \\ Q(v) &= 0 \quad \text{pour} \quad a + \alpha \leq v \leq a + \beta,\end{aligned}$$

d'où l'on retrouve les résultats concernant les domaines où les déplacements sont déterminés ou indéterminés, simplement ou doublement.

Pour lever l'indétermination il faudrait introduire la viscosité des déformations. Mais dans ce cas l'hypothèse $\sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ entraînerait nécessairement $\dot{\epsilon}_{yy} = \dot{\epsilon}_{zz}$ (en supposant la viscosité isotrope); on retomberait sur la difficulté provenant de la condition (2.1), qui ne pourrait être satisfaite que pour $\nu = 1/2$. On peut toutefois tirer de là les conclusions suivantes, en faisant tendre la viscosité vers zéro:

1°) pour $\nu = 1/2$ l'égalité $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz}$ est vérifiée à la limite, d'où, d'après (4.4) et (4.5):

$$G = H = \frac{1}{2} \phi(cy)$$

d'où $L(y, z) = 0$ dans toute la section droite, soit $P(y-z) = Q(y-z) = 0$;

2°) pour $\nu \neq 1/2$ l'égalité $\sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ n'est vérifiée qu'à la limite. Ceci explique pourquoi nous avons trouvé $\epsilon_{yy} \neq \epsilon_{zz}$ dans le domaine de dépendance $\alpha\beta\gamma$.

5. Généralisations

1. On retrouverait la même solution avec un critère représenté dans l'espace des contraintes principales par un prisme hexagonal dont les faces ne sont pas planes (mais convexes), mais dans ce cas on pourra voir que les conditions " G, H du signe de σ ", ne sont vérifiées que si:

$$\nu \geq \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 + 2 \frac{1 - 2 \cos V}{1 + \cos V}} \right]$$

si V est l'angle des normales aux deux faces. Ceci donne $\nu \geq 0$ dans le cas du critère de Tresca, $\nu \geq 1/2$ (donc $\nu = 1/2$) lorsque l'angle V tend vers $\pi/2$ (cas du critère de Misès-Huber).

2. Plus importante est la généralisation au cas où le critère dépend de la somme des contraintes principales extrêmes (critère de Mohr ou de la courbe intrinsèque). Les équations (4.1) à (4.5) restent valables. (4.6) également si l'on suppose l'invariance du volume dans la déformation plastique. Plus généralement, nous poserons:

$$G + H = \psi(cy) = \alpha(cy)\phi(cy)$$

la variation de volume plastique étant alors $(1 - \alpha)\phi(cy)$. En posant:

$$H = L + \nu\phi(cy),$$

$$G = -L + \psi(cy) - \nu\phi(cy),$$

on obtient à nouveau (4.7) et (4.8). Dans le domaine de dépendance: $L = 0$, d'où:

$$H = \nu\phi(cy), \quad \text{qui est bien du signe de } cy \text{ (si } \nu > 0),$$

$$G = \psi - \nu\phi = (\alpha - \nu)\phi(cy).$$

G doit être du signe de cy , d'où la condition de validité $\alpha > \nu$. Cette condition est vérifiée lorsqu'on suppose le volume invariant dans la déformation plastique ($\alpha = 1$). Tel ne serait pas toujours le cas si l'on acceptait l'hypothèse du potentiel plastique et la condition pourrait alors ne pas être vérifiée. Par exemple pour le critère de Coulomb (courbe intrinsèque formée de 2 demies droites qui se coupent sous l'angle 2φ) la condition serait vérifiée pour les fibres en compression pour lesquelles $\alpha = (1 + \sin \varphi)/(1 - \sin \varphi)$, mais ne le serait pour les fibres en traction que si:

$$\alpha = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \geq \nu.$$

6. Conclusion

On a donné une solution complète (i.e. avec calcul des déplacements) du problème de la flexion d'un cylindre élastoplastique, homogène, isotrope, écrouissable, obéissant au critère de Tresca (et plus généralement au critère de Mohr), en déformation infiniment petite.

La possibilité de résoudre avec le critère de Tresca un problème dont on ne connaît pas la solution avec le critère de Misès-Huber provient du fait que les relations de comportement laissent aux vitesses de déformation plastique un degré de liberté. En revanche, une indétermination des déplacements apparaît dans certaines parties de la section droite.

References

1. W. T. KOTTER, *On partially plastic thick-walled tubes*, Anniversary volume dedicated to B. BIEZENO, p. 233 — N. V. Technische Uitgeverij, H. Stain, Haarlem 1953.
2. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, Oxford 1950.
3. W. T. KOTTER, Communication personnelle.

4. W. T. KOITER, *Mechanics*, Vol. 4, *Stiffness and strength*. Part. I. *Fundamentals Scheltema of Holkema* [sous presse].
5. J. MANDEL, *Mécanique des milieux continus*, Gauthier-Villars, Paris 1966.
6. T. T. MOREAU, *Raflé par un convex variable*, Séminaire d'analyse convex, Montpellier, 1971.

ECOLE POLYTECHNIQUE
LABORATOIRE DE MECANIQUE DES SOLIDES, PARIS

Reçu 19 Mai 1972