F. Chatelinski

TRYGONOMETRYA

PŁASKA I KULISTA.

Chatubinski.

TRYGONOMETRYA
PŁASKA I KULISTA

PRZEZ

LEFEBURE de FOURCY,

KAWALERA ORDERU LEGII HONOROWÉJ, PROFESSORA W WYDZIALE NAUK AKADEMII PARYZKIÉJ, EXAMINATORA KANDYDATÓW DO SZKOŁY POLITECHNICZNÉJ I SZKOŁY LEŚNÉJ.

PODŁUG WYDANIA CZWARTEGO

PRZEŁOŻYŁ

AUGUST F. BERNHARDT,

M. F., PROFESSOR GIMNAZYUM REALNEGO, SZKOŁY SZTUK PIĘKNYCH, TUDZIEŻ INSTYTUTU GOSPODARSTWA WIEJSKIEGO I LEŚNICTWA W MARYMONCIE, CZŁONEK RADY PRZEMYSŁOWÉJ.

Z 57 figurami, wytłoczonemi w tekscie z drzeworytów.

F. Chełchiński

WARSZAWA.

W DRUKARNI GAZETY CODZIENNÉJ, POD N. 953.

NAKŁADEM TŁUMACZA.

1850.

Wolno drukować, z warunkiem złożenia w Komitecie Cenzury, po wydrukowaniu, prawem przepisanej liczby egzemplarzy.
W Warszawie, dnia 19 Września (1 Października) 1849.

Starszy Cenzor,
L. T. Tripplin.

PRZEDMOWA.

Dwa początkowe rozdziały dzieła P. Lefebure de Fourcy *pod tytułem* **„Leçons de Géometrie analytique"**, *obejmują skrócony i jasny wykład trygonometryi. Wykład ten jest dostateczny do nauczenia się zasad trygonometryi płaskiéj i kulistéj, i do poznania sposobów stosowania jéj do rozwiązywania łatwiejszych zagadnień z miernictwa, geodezyi, geografii matematycznéj i t. p.*

Niniejsze tłumaczenie Trygonometryi P. Lefebure de Fourcy *jest dosłowne: przydałem tylko większą liczbę przykładów i kilka zagadnień praktycznych, dla pokazania, jak się rozwiązują trójkąty płaskie i kuliste we wszystkich ważniejszych przypadkach, i jak wielki jest użytek rachunku trygonometrycznego. Nader dogodne wzory, zwane wzorami* Delambra *lub* Gaussa, *które w pewnych przypadkach służą do zręczniejszego rozwiązania trójkątów kulistych, aniżeli używając wzorów* *przez Autora podanych, znajdzie czytelnik w dodatku: gdzie i wywód tych wzorów zamieściłem, i użycie ich na przykładzie pokazałem.*

Ostrzedz mi wypada, że przystępujący do uczenia się, z téj książki, trygonometryi kulistéj, powinien już zkądinąd znać własności trójkątów kulistych: n. p. z księgi VII Geometryi Legendra.

TŁUMACZ.

Warszawa, dnia 1 Stycznia
1850 r.

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

ROZDZIAŁ DRUGI.

ROZDZIAŁ TRZECI.

DODATEK.

ROZDZIAŁ PIÉRWSZY.

TEORYA LINIJ TRYGONOMETRYCZNYCH.

PRZEDMIOT TRYGONOMETRYI. SPOSÓB WYRAŻENIA DŁUGOŚCI I KĄTÓW PRZEZ LICZBY.

1. Każdy trójkąt prostokreślny albo kulisty składa się z sześciu części: z trzech boków i z trzech kątów. Aby wszystkie te części wyznaczyć, dosyć jest w ogólności mieć trzy z nich wiadome; ale prócz tego potrzeba, jeżeli trójkąt będzie prostokątny, iżby między trzema danemi częściami znajdował się przynajmniéj bok jeden. I w istocie wiadomo, że z trzech kątów danych nieskończenie wiele trójkątów prostokreślnych złożyć można, które nie są równe między sobą, ale tylko podobne do siebie. Rozumie się, że tu summa trzech kątów danych równa być musi dwom kątom prostym.

Geometrya podaje bardzo łatwe sposoby wyznaczenia trójkąta w każdym przypadku, gdy go wykreślić można z niektórych jego części; lecz wszystkie podobne sposoby rysunkowe tę przedstawiają niedogodność, że przybliżone tylko dają wypadki i często niedostateczne z powodu niedokładności narzędzi do kreślenia używanych. Ztąd starano się wykreślania zastąpić rachunkiem liczebnym, który zawsze doprowadza do wypadku tak ścisłego, jak potrzeba. *Trygonometrya obejmuje wykład sposobów wyrachowania wszystkich części trójkąta, gdy dostateczna liczba tych części jest dana.* Wynajdywanie rachunkiem części niewiadomych trójkąta z wiadomych nazwano jego *rozwiązaniem*.

2. Aby wyrazić długość w liczbach, porównać ją należy z inną długością przyjętą za jedność, np. z sążniem, prętem, metrem i t. p.; ztąd każdy bok trójkąta równy będzie pewnéj liczbie sążni, prętów, metrów i t. p.

3. Kąty wyrażają się przez łuki, zawarte między ich ramionami, i nakreślone dowolnym promieniem z ich wierzchołków, jako środków. Aby i te wielkości wyrazić w liczbach, podzielono okrąg koła, bez względu na promień jego, na pewną liczbę części równych, zwanych *stopniami;* ztąd każdy kąt lub łuk, będący miarą tego kąta, wyraża się przez pewną liczbę stopni.

Dawniejsi Geometrowie dzielili okrąg koła na 360 stopni, stopień ma 60 minut, minutę na 60 sekund i t. d. Tym sposobem czwarta część okręgu koła czyli ćwiartka jego, będąca miarą kąta prostego, zamyka 90 stopni. Dla uniknienia liczb wielorakich, podciągnięto w nowszych czasach i miary kątów pod podział dziesiętny, dzieląc ćwiartkę koła na 100 stopni, stopień na 100 minut, minutę na 100 sekund i t. d.

Stopnie, minuty i sekundy oznaczają się znakami $^\circ$, $'$, $''$. Tak, np. 14 stopni, 9 minut, 37 sekund wyraża się przez $14^\circ 9' 37''$; zaś podług nowego podziału tenże sam łuk porównany z ćwiartką koła wziętą za jedność, wyraża się przez ułamek dziesiętny 0,140937: bo w tym podziale stopnie są setnemi, minuty dziesięciotysiącznemi, a sekundy millionowemi częściami ćwiartki koła.

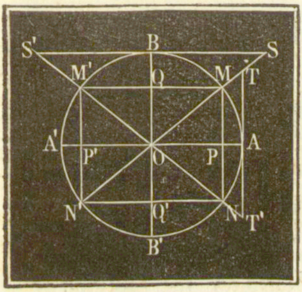
Podział dawny, choć mniéj dogodny niż nowy, dotychczas częściéj jednak bywa używany: i dlatego w niniejszém dziele dawny podział będzie zachowany. Na oznaczenie półokręgu koła czyli 180° we wzorach często użyje się głoski H.

OPISANIA LINIJ TRYGONOMETRYCZNYCH. UŻYCIE ZNAKOW + I — NA WSKAZANIE PRZECIWNYCH SOBIE POŁOŻEŃ.

4. Geometrów długo zatrzymywała trudność ustanowienia związków, zachodzących między kątami a bokami trójkątów. Bez wątpienia najpiérwéj chciano wyrazić kąty przez łuki, będące ich miarami: ale, gdy łuki wprowadzone do rachunku zamiast

kątów, rachunku wcale nie ułatwiały; widoczna okazała się potrzeba zastąpienia znowu łuków liniami prostemi, od nich zawisłemi, i to w taki sposób, iżby też linie były znane, gdy odpowiadające im łuki lub kąty są dane, i odwrotnie. Proste te, których użyteczność dziś rozciąga się do wszystkich nauk matematycznych, nazywają się w ogólności *liniami trygonometrycznemi*. Opisania tych linij są następujące:

Fig. 1.



Wstawa *łuku* AM *(fig. 1) jest prostopadła* MP, *spuszczona z jednego końca łuku na średnicę, przechodzącą przez drugi koniec tegoż łuku.*

Styczna *łuku* AM *jest długość* AT, *brana na stycznéj, przechodzącéj przez jeden koniec łuku i zawarta między tymże końcem a przedłużonym promieniem* OM, *przeprowadzonym przez drugi koniec tegoż łuku.*

Sieczna *jest częścią* OT *przedłużonego promienia, zawartego między środkiem i styczną.*

Oznaczywszy łuk AM przez x; wstawa, styczna i sieczna jego sposobem skróconym tak się piszą:

$$\text{MP} = \text{wst}\, x,\quad \text{AT} = \text{sty}\, x,\quad \text{OT} = \text{sie}\, x.$$

Przedłużywszy MP aż do spotkania się z okręgiem koła w punkcie N, będzie cięciwa MN dwa razy większa od prostéj MP, i łuk MAN także dwa razy większy od łuku AM; więc *wstawa pewnego łuku jest połową cięciwy łuku dwa razy większego.*

Wyraziwszy promień koła przez r, będzie bok kwadratu wpisanego w koło równy $r\sqrt{2}$: a że bok ten jest cięciwą łuku 90°; więc wst$45° = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$. Tak samo, ponieważ bok sześciokąta foremnego w koło wpisanego równa się promieniowi, a promień jest cięciwą łuku 60°; przeto wst $30° = \frac{1}{2}r$.

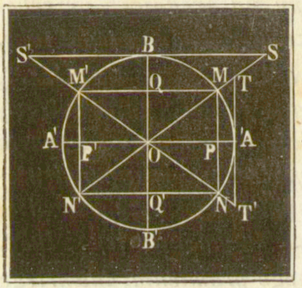
5. *Dopełnienie* łuku lub kąta nazywa się łuk lub kąt, który, dodany do tamtego, z nim razem czyni 90°. Gdy łuk większy jest od 90°, dopełnienie jego lub odpowiadającego mu kąta jest

odjemne: np. dopełnienie 127° równa się —37°. Dwa kąty ostre w trójkącie prostokątnym wzajemnie są dopełnieniami jeden drugiego.

Dostawa, **dotyczna** i **dosieczna** pewnego łuku jestto wstawa, styczna i sieczna jego dopełnienia; linie te piszą się przez skrócenie tak: *dost.*, *doty.*, *dosie.*. Ze samego opisania tych linij wypada, że

$$\text{dost}\, x = \text{wst}(90° - x),\ \text{doty}\, x = \text{sty}(90° - x),\ \text{dosie}\, x = \text{sie}(90° - x).$$

Fig. 1.



Poprowadziwszy promień OB prostopadle do OA, tudzież MQ i BS prostopadle do OB, będzie MQ wstawą łuku BM, BS jego styczną, a OS jego sieczną: ale łuk BM jest widocznie dopełnieniem łuku AM; więc, wyraziwszy łuk AM przez x, będzie

$$MQ = \text{dost}\, x,\quad BS = \text{doty}\, x,$$
$$OS = \text{dosie}\, x.$$

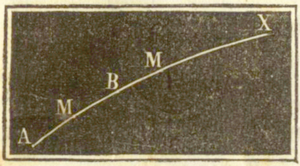
Trzeba tu pamiętać, że MQ = OP: tojest, że *dostawa równa się części promienia, zawartéj między środkiem i spodkiem wstawy.*

6. Odległość PA, zawarta między początkiem łuku i spodkiem wstawy, zwano *wstawą odwrotną;* odległość znowu BQ *dostawą odwrotną.* Obie te linie rzadko używają się.

7. Przeniosłszy punkt M kolejno na wszystkie inne punkta okręgu, pokaże się, że linie trygonometryczne przybiérać mogą położenia zupełnie przeciwne tym, jakie zajmują, kiedy łuk AM mniejszy jest od 90°. I tak np. łuk AM′, którego dopełnienie jest odjemne i równe łukowi BM′, ma za dostawę linią QM′ czyli OP′ leżącą z lewéj strony punktu O: a wprzód dostawa z prawéj jego strony przypadała. Podobna zmiana w położeniu linij trygonometrycznych spowoduje trudności przy rachunku, które następujące, choć bardzo proste, zagadnienie wyjaśni.

Niech ABX (fig. 2) będzie linią jakąkolwiek, na któréj dwa

Fig. 2.



punkta A i B są dane, odległe od siebie o długość AB$=a$. Niech nadto wiadoma będzie odległość x jakiegobądź punktu M téjże linii ABX od punktu B; znaleźć trzeba odległość punktu A od tegoż punktu M. Wyraziwszy tę nieznaną odległość przez z, oczywiście będzie

$$z=a+x, \text{ albo } z=a-x$$

podług tego, czy punkt M leży od strony BX, czyli téż od strony BA: dla wyrażenia zatém téj odległości w dwóch odmiennych położeniach punktu M, dwa rożne wzory są konieczne. Lecz, położywszy znaki różne przed odległościami, mającemi przeciwne położenie względem punktu B, niedogodność wspomniona zręcznie się uchyla, i jednego tylko wzoru użyć potrzeba. I w istocie, przyjąwszy w piérwszym wzorze $z=a+x$ kolejno $x=+$BM i $x=-$BM, wypadnie naprzód $z=a+$BM, a potém $z=a-$BM: jak to być powinno. Tym sposobem wzór piérwszy stósuje się do wszystkich położeń punktu M, a wzór drugi jest niepotrzebny. Można także przyjąć x za odległość dodatną od strony BX: wtedy wzór drugi zamiast piérwszego wziąć należy. Nie trudno byłoby przytoczyć więcéj podobnych przykładów; lecz co się dotąd powiedziało już przekonywa dostatecznie o ważności następującego prawidła *Dekarta:*

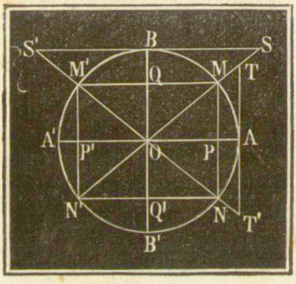
Jeżeli na linii jakiéjkolwiek, prostéj lub krzywéj, różne wymierzona odległości począwszy od pewnego spólnego początku, za stały na téjże linii przyjętego; natenczas odległości te wprowadzić należy do rachunku z przeciwnemi znakami, stósownie do odmiennego ich położenia względem początku, kładąc przed jednemi znak $+$, *przed drugiemi zaś znak* $-$.

Strona wreszcie odległości dodatnich jest zupełnie dowolna; ale gdy raz będzie przyjęta, odległości odjemne brać się zawsze powinny od strony tamtéj przeciwnéj. Linie trygonometryczne uważają się za dodatne w położeniach, jakie mają dla łuków mniejszych od 90°.

POSTĘP KOLEJNY LINIJ TRYGONOMETRYCZNYCH; SPROWADZENIE ICH DO PIÉRWSZÉJ ĆWIARTKI KOŁA.

8. Gdy promień OM (fig. 1) zchodzi się z promieniem OA, łuk

Fig. 1.



AM widocznie równy jest 0, wstawa jego jest 0, styczna także jest 0; sieczna zaś i dostawa są równe promieniowi OA. Współcześnie dotyczna i dosieczna są nieskończenie wielkie: bo oczywista jest, że w miarę jak promień OM zbliża się do promienia OA, linie BS i OS coraz bardziéj rosnąć będą, i tak wielkie stać się mogą, jak się tylko podoba. Oznaczywszy więc promień przez r, będzie

$$\text{wst } 0=0, \quad \text{sty } 0=0, \quad \text{sie } 0=r,$$
$$\text{dost } 0=r, \quad \text{doty } 0=\infty, \quad \text{dosie} 0=\infty.$$

Gdy promień OM wznosi się ku położeniu OB, wstawa, styczna i sieczna powiększają się; zaś dostawa, dotyczna i dosieczna zmniejszają się.

Gdy punkt M dojdzie do środka łuku AB, łuk AM równy będzie 45°: wówczas trójkąt OPM jest równoramienny, tojest: wstawa równa jest dostawie. Lecz z trójkąta tego wypada: $2\overline{MP}^2=r^2$, zkąd $MP=\frac{1}{2}r\sqrt{2}$; a zatém

$$\text{wst } 45°= \text{dost } 45°=\tfrac{1}{2}r\sqrt{2}.$$

Trójkąty OAT, OBS podobnież są równoramienne i równe; przeto styczna i dotyczna równe są promieniowi; więc

$$\text{sty } 45°= \text{doty } 45°=r.$$

Nakoniec sieczna i dosieczna także są sobie równe: a że w trójkącie OAT jest $OT^2=2r^2$; przeto $OT=r\sqrt{2}$, a tém samém

$$\text{sie } 45°= \text{dosie } 45°=r\sqrt{2}.$$

Gdy punkt M przypada na punkt B, wstawa równa jest BO, styczna i sieczna są nieskończenie wielkie, dostawa MQ i dotyczna BS są równe zeru, a dosieczna OS staje się równą OB.

Jest więc

wst $90° = r$, sty $90° = \infty$, sie $90° = \infty$,

dost $90° = 0$, doty $90° = 0$, dosie $90° = r$.

Wartości te wypadają także wprost z wartości linij trygonometrycznych znalezionych dla łuku równego zeru: bo łuki $0°$ i $90°$ dopełnieniami są jeden drugiego; powinno więc być wst $90° =$ dost 0, sty $90° =$ doty 0, sie $90° =$ dosie 0, i na odwrót.

9. Gdy promień OM, daléj obrócony, zajmie położenie OM′, będzie AM′ odpowiednim łukiem, a M′P′ jego wstawą. Poprowadziwszy M′M równoodlegle od A′A i nakreśliwszy wszystkie linie trygonometryczne łuku AM′, figura pokaże:

Naprzód, że wstawy MP i M′P′ są sobie równe; więc wst AM′ = wst AM.

Powtóre, że chcąc nakreślić styczną, przedłużyć trzeba promień OM′ pod średnicą AA′. Zkąd wypada, że styczna ta, równa linii AT′, ma teraz położenie przeciwne względem położenia, jakie wprzód zajmowała, czyli że jest odjemna. A że trójkąty OAT, OAT′ są sobie równe; więc AT′ = AT: a tém samém sty AM′ = — sty AM.

Potrzecie, że linia OT′, która podług opisania (4) jest sieczną łuku AM′, już nie idzie w kierunku promienia OM′ w tę samą stronę względem środka, z której leży punkt opisujący M′; ale w stronę przeciwną. Dla téj przyczyny sieczna tu jest odjemna: a że prócz tego OT′ = OT; więc sie AM′ = — sie AM.

Nakoniec, że toż samo stósuje się do dostawy, dotycznéj i dosiecznéj. Łuk AM′ jest większy od $90°$; dopełnienie więc jego jest odjemne. A ponieważ dostawa QM′ czyli OP′ leży z lewéj strony punktu O; więc ta dostawa musi być odjemna. Dotyczna BS′ w tym samym znajduje się przypadku. Co do dosiecznéj OS′, téj nie należy brać ze znakiem —: bo ona leży na promieniu OM′ z téj saméj strony, z któréj znajduje się punkt opisujący, jak to miejsce miało w piérwszéj ćwiartce koła. Z powodu równości trójkątów OBS i OBS′ jest QM′ = QM, BS′ = BS, OS′ = OS; więc dost AM′ = — dost AM, doty AM′ = — doty AM, dosie AM′ = dosie AM.

Spełnieniem łuku lub kąta zowie się łuk lub kąt, który dodany do tamtego, z nim razem czyni 180°; więc łuk A′M′ albo mu równy AM jest spełnieniem łuku AM′. Ztąd wyżéj podane własności tak wysłówić można: *dwa łuki będące spełnieniami jeden drugiego, mają równe linie trygonometryczne, ale ze znakami przeciwnemi, wyjąwszy wstawa i dosieczna, które znaku nie zmieniają.*

Chcąc własności te wyrazić przez równania, dosyć jest oznaczyć AM′ przez x: będzie zatém AM=A′M′=180°—x, a tém samém napisać można:

$$[1]\begin{cases}\text{wst}\,x = \text{wst}\,(180°-x),\\ \text{sty}\,x = -\,\text{sty}\,(180°-x),\\ \text{sie}\,x = -\,\text{sie}\,(180°-x),\end{cases}\qquad \begin{cases}\text{dost}\,x = -\,\text{dost}\,(180°-x),\\ \text{doty}\,x = -\,\text{doty}\,(180°-x),\\ \text{dosie}\,x = \text{dosie}\,(180°-x).\end{cases}$$

Oczywista także, iż od 90° do 180° wstawa, styczna i sieczna zmniejszają się; a przeciwnie dostawa, dotyczna i dosieczna powiększają się. Gdy promień OM przystanie do promienia OA′, wtedy punkt M opisze łuk równy 180°, i będzie

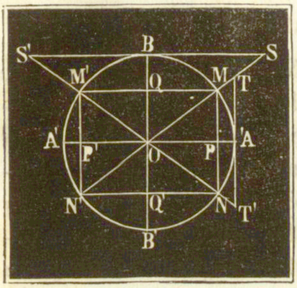
$$\text{wst}\,180° = 0,\qquad \text{sty}\,180° = 0,\qquad \text{sie}\,180° = -r,$$
$$\text{dost}\,180° = -r,\qquad \text{doty}\,180° = -\infty,\qquad \text{dosie}\,180° = \infty.$$

Te wszystkie wartości otrzymać także można z równań [1], uczyniwszy w nich x=180°. I tak np. równanie dost x= —dost (180°—x) daje w tym razie dost 180°=—dost 0: a że dost 0=r; więc dost 180°=—r, jak to być powinno.

10. Stósując Algebrę do Geometryi, często trafiają się łuki wynoszące po kilka półokręgów koła. Wypada zatém i na takie łuki podać wzory i wskazać sposób zamienienia ich na łuki zawarte w piérwszéj ćwiartce koła. Aby rzecz tę skrócić, dosyć będzie roztrząsnąć szczegółowo wartości wstawy i dostawy, jako linij trygonometrycznych najużywańszych. A ponieważ każdy łuk większy od półokręgu składa się z łuku mniejszego od 180° i z łuku jednego lub więcéj o 180°; przeto *naprzód* trzeba poznać, jaka będzie wartość wstawy i dostawy łuku 180°+x, przyjmując że x<180°.

Oznaczywszy łuk AM, zawarty gdziekolwiek pomiędzy 0° i 180° przez x, i dodawszy do łuku AM półokrąg MA′N′, będzie nowy łuk AMA′N′ równy 180°$+x$. Oba te łuki mają równe wstawy MP i N′P′, równe liniom OQ i OQ′. A ponieważ linie te leżą przeciwnie względem siebie; przeto, zgodnie z powyższą umową (7), pisać się powinny ze znakami przeciwnemi. Dostawy tychże łuków są także sobie równe, i także przeciwnemi znakami odróżniać się powinny; więc

Fig. 1.



[2] wst $(180°+x) = -$ wst x, dost $(180°+x) = -$ dost x.

Powtóre, dodawszy 360° do łuku AM, punkt M widocznie wróci na początkowe swoje miejsce, a tém samém i wszystkie linie trygonometryczne zachowają dawne wartości. A tak będzie

[3] wst $(360°+x) =$ wst x, dost $(360°+x) =$ dost x.

W ogólności, dodawszy do łuku x, jakąkolwiek wielkość mającego, stopni 180 lub nieparzystą liczbę półokręgów, koniec tego łuku przeniesie się zawsze z jednego na drugi wierzchołek średnicy koła: a ztąd oczywista jest, że wstawy i dostawy, co do wielkości, też same zostaną i tylko znakami między sobą różnić się będą. Lecz, dodawszy do łuku x stopni 360, albo parzystą liczbę półokręgów, żadna z linij trygonometrycznych zmieniać się nie może: bo koniec łuku znowu na tenże sam punkt przypada.

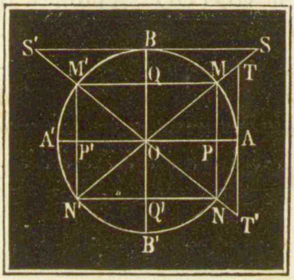
11. Wypada teraz mówić o łukach odjemnych, tojest o opisanych przez promień OA, gdy ten obracać się będzie w stronę AB′A′ przeciwną téj, po któréj wprzód postępował.

Niech będą AM i AN dwa łuki równe, przeciwnie leżące i oznaczone przez x i $-x$. Wstawy MP i NP tych łuków widocznie są sobie równe i z położenia przeciwne. Aby mieć dostawy tychże łuków, dosyć jest uważać, że dopełnienia ich $90°-x$ i $90°+x$ równe są łukom BM i BMN, i że wstawy MQ i NQ' tych ostatnich łuków są równe sobie tak z wielkości, jak z położenia; więc będzie

[4] $\quad$ wst $(-x) = -$ wst x, $\quad$ dost $(-x) =$ dos x.

Chociaż na figurze, łuki AM i AN są mniéjsze od 90°; te wzory jednak i w ogólności sprawdzają się. I w rzeczy samej, gdy oba wspomnione łuki dowolnie rosną i przytém równe zostają, wstawy ich MP i NP ciągle też będą sobie równe i z położenia przeciwne; będzie więc zawsze wst $(-x) = -$ wst x. Gdy znowu w drugim z powyższych wzorów założymy, że łuki dane większe są od 90°, jakiemi np. są łuki ABM' i AB'N', i że $x = ABM'$, a $-x = -AB'N'$: natenczas dopełnienie $90° - x$ piérwszego z nich będzie odjemne i na figurze równe łukowi BM', leżącemu z lewéj strony punktu B; dopełnienie zaś $90° + x$ drugiego łuku, które równe jest łukowi BAN', leżéć będzie ciągle z prawéj strony punktu B. A że wstawy M'Q i N'Q' tych łuków dopełnienia są sobie równe i jednakowo są położone względem średnicy BB'; więc być powinna dost $(-x) =$ dost x. Wzory więc te [4] w ogólności są prawdziwe.

Fig. 1.



Dobrze jest pamiętać, że dostawa jakiegobądź łuku, dodatnego lub odjemnego, z wielkości i z położenia równa jest zawsze odległości środka koła od spodka wstawy.

12. Zanim daléj postąpimy, dobrze także jest pamiętać, że wzory [1], [2], [3] i [4], podane wyżéj, odnoszą się zarówno do wszystkich łuków tak dodatnich, jak odjemnych. Dla krótkości roztrząśniemy tu tylko wstawę i dostawę.

1ód. Wziąwszy na uwagę powyższe dwa wzory (9) wst $x =$ wst $(180° - x)$, dost $x = -$ dost $(180° - x)$, dowiedzione li dla łuków zawartych między 0° i 180° i położywszy w nich $180° + x$ za x, będzie

wst $(180° + x) =$ wst $(-x)$, $\quad$ dost $(180° + x) = -$ dost $(-x)$:

co też oczywiście wypada z równań [2] i [4]. Widoczna jest, że łuk dany jeszcze o 180° powiększyć można, i tak daléj aż do nieskończoności. Położywszy potém $-x$ za x, wniesiemy tak samo, że dwa uważane wzory również są prawdziwe: a więc je do wszystkich możliwych łuków przystosować można.

2re. Wzory [2], dowiedzione dla wszystkich łuków dodatnich, ściągają się i do łuków odjemnych. Jakoż zamieniwszy w nich x na $-x$, będzie

$$\text{wst}\,(180°-x) = -\,\text{wst}\,(-x) = \text{wst}\,x,$$
$$\text{dost}\,(180°-x) = -\,\text{dost}\,(-x) = -\text{dost}\,x:$$

co się zgadza ze wzorami [1].

3cie. Ponieważ łuki $+x$ i $-x$ powiększone o 180° mają wstawy i dostawy równe, ale co do znaku przeciwne; wypada zatém, że, po dodaniu 360° do tych łuków wstawy i dostawy ich w niczém zmienić się nie mogą: a więc wzory te [3] stosują się także do łuków odjemnych.

4te. Co się tyczy wzorów [4], żadnego tu dowodzenia nie potrzeba: bo w nich oczywiście położyć można $-x$ za x.

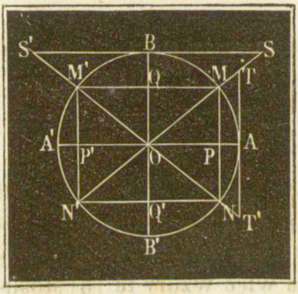
13. To poznawszy, nic łatwiejszego jak wyrazić wartości linij trygonometrycznych jakichkolwiek łuków za pomocą wartości tych samych linij, lecz odnoszących się do piérwszéj ćwiartki koła. I tak, niech np. będzie łuk $x=1029°$, którego wstawę znaleźć trzeba. Odjąwszy od łuku tego tyle razy 360° ile można, pozostanie na resztę 309°; więc podług wzorów [3] będzie wst $x=$ wst 309°. Odjąwszy jeszcze 180° od 309°, na mocy wzorów [2], także będzie wst $x=-$ wst 129°. Nakoniec, wziąwszy spełnienie 129°, które równe jest 51°, wypadnie wst $x=-$ wst 51° (**9**). Uproszczenie takowe jeszcze daléj rozciągnąć można: albowiem wst 51° = dost (90°—51°) = dost 39°; więc wst $x=-$ dost 39°.

Gdyby dany był łuk $x=-1029°$, wstawa jego miałaby znak przeciwny (**11**) temu, jaki miała wstawa w przykładzie poprzedzającym, tojest byłaby wst $x=$ dost 39°.

ŁUKI ODPOWIADAJĄCE DANÉJ WSTAWIE, DOSTAWIE, i t. d.

14. Powyższe roztrząśnienie dowodzi, że nieograniczona liczba łuków być może, których linie trygonometryczne są sobie równe. Teraz przyjmuje się odwrotnie, że którakolwiek z tych linij jest dana, i że znaleźć trzeba różne odpowiadające jéj łuki.

Fig. 1.



Niech dana będzie wst $x=a$. Gdy na promieniu OB (fig. 1) prostopadłym do OA, odetniemy $OQ=a$ i przez punkt Q poprowadzimy MM' równoodległą od OA; widoczna jest, że każdy łuk, mający swój początek w A i kończący się w punkcie M, albo M', wziąć należy za wartość nieznanego łuku x. Oznaczywszy więc łuk AM przez a, zaś łuk o 180° przez H, będzie $AM'=H-a$; a zatém wszystkie łuki dodatne kończące się na punkcie M, albo M', mieścić się będą w dwóch następujących szeregach:

$$a,\ 2H+a,\ 4H+a,\ 6H+a,\ \text{i t. d.}$$
$$H-a,\ 3H-a,\ 5H-a,\ 7H-a,\ \text{i t. d.}$$

Łuk $AB'A'M=2H-a$, łuk $AB'A'M'=H+a$. Dodawszy do tych łuków jakąkolwiek liczbę okręgów, a potém wziąwszy wypadki ze znakiem odjemnym, wypadną wszystkie łuki odjemne odpowiadające wstawie danéj, tojest:

$$-2H+a,\ -4H+a,\ -6H+a,\ \text{i t. d.}$$
$$-H-a,\ -3H-a,\ -5H-a,\ \text{i t. d.}$$

Łuki tych cztérech szeregów przez dwa dosyć proste wzory wyrazić można. Widoczna jest, że w dwóch z nich łuk a dodany jest do wszystkich parzystych wielokrotnych z H tak dodatnich, jak odjemnych; że w dwóch pozostałych szeregach tenże łuk a odjęty jest od wszystkich nieparzystych wielokrotnych z H. Gdy więc K znaczy wszelką liczbę całkowitą dodatną lub odjemną, która nawet stać się może równą zeru: natenczas wszystkie łuki szukane zawarte będą we wzorach

[1] $x=2k\mathrm{H}+a\,,\quad x=(2k+1)\mathrm{H}-a.$

Dotąd a uważano za ilość dodatną: gdy się przyjmie wst $x=-a$, wypadnie odciąć długość OQ′ równą a od strony OB′. Wtedy wartościami dla x będą łuki, kończące się na punkcie N, albo N′. Uczyniwszy ABN′$=a$, będzie widocznie ABN$=3\mathrm{H}-a$, AB′N′$=-2\mathrm{H}+a$ i AN$=\mathrm{H}-a$. A zatém wszystkie wartości na x bądź dodatne, bądź odjemne, odpowiadające wstawie OQ′, zawarte są w szeregach

$$a,\ 2\mathrm{H}+a,\ 4\mathrm{H}+a, \text{ i t. d}, 3\mathrm{H}-a,\ 5\mathrm{H}-a,\ 7\mathrm{H}-a, \text{ i t. d.}$$
$$-2\mathrm{H}+a, -4\mathrm{H}+a, -6\mathrm{H}-a, \text{ i t. d. }\ \mathrm{H}-a, -\mathrm{H}-a, -5\mathrm{H}-a, \text{ i t. d.}$$

i oczywista jest, że one podobnież przez wzory [1] są wyrażone.

Gdy linia a większa jest od promienia koła r, łuk x zawsze będzie urojony: gdyż największa dodatna wstawa równa jest $+r$, a największa odjemna $-r$.

15. Niech dana będzie dost $x=a$. Gdy a jest linią dodatną, odcina się OP$=a$ od strony OA, z punktu P wyprowadza się prostopadła MN; a wartościami na x będą wszystkie łuki dodatne i odjemne, kończące się w punkcie M, albo N. Uczyniwszy AM$=a$, łatwo poznać, że pomienione łuki mieścić się będą w cztérech następujących szeregach:

$$a,\ 2\mathrm{H}+a,\ 4\mathrm{H}+a, \text{ i t. d. }\ 2\mathrm{H}-a,\ 4\mathrm{H}-a,\ 6\mathrm{H}-a, \text{ i t. d.}$$
$$-a, -2\mathrm{H}-a, -4\mathrm{H}-a, \text{ i t. d.} -2\mathrm{H}+a, -4\mathrm{H}+a, -6\mathrm{H}+a, \text{ i t. d.}$$

a przyjąwszy, że k znaczy jakąbądź liczbę całkowitą dodatną albo odjemną, wyrazić można te wszystkie łuki przez dwa wzory

[2] $x=2k\mathrm{H}+a,\quad x=2k\mathrm{H}-a,$

Gdy dost $x=-a$, odciąć trzeba a od strony OA′. Oznaczywszy wtedy łuk AMM′ przez a, wypadną na x wartości takież same, jak wyżéj. Gdy $a>r$, łuk x jest urojony.

16. Niech jeszcze będzie sty $x=a$. Gdy a jest dodatną, odciąć należy AT$=a$ nad linią OA i poprowadzić prostą TMN′ przez środek O, przecinającą okrąg koła w M i N'. Wartości za x są tu łukami dodatnemi i odjemnemi, których końce przypadają na punkt M, albo N'. Uczyniwszy łuk AM$=a$, będzie AMN'$=\mathrm{H}+a$, AN'M$=-2\mathrm{H}+a$, AN'$=-\mathrm{H}+a$; łuki szukane są zatém wyrazami szeregów

$$a,\ 2\mathrm{H}+a,\ 4\mathrm{H}+a, \text{ i t. d. } \mathrm{H}+a,\ 3\mathrm{H}+a,\ 5\mathrm{H}+a, \text{ i t. d.}$$
$$-2\mathrm{H}+a, -4\mathrm{H}+a, -6\mathrm{H}+a, \text{ i t. d. } -\mathrm{H}+a, -3\mathrm{H}+a, -5\mathrm{H}+a, \text{ i t. d.}$$

W tych cztérech szeregach łuk a dodany jest do wszystkich wielokrotnych z H tak dodatnych, jak odjemnych; więc ogólném wyrażeniem dla łuków szukanych jest

$$x=k\mathrm{H}+a.$$

Gdy styczna dana a jest odjemna, odciąć należy AT' pod linią OA: wtedy a znaczy łuk zawarty między 90° i 180°, np. łuk ABM'. Zresztą oczywista jest, że styczna może być jakąkolwiek wielkością.

17. Opuszczają się tu przypadki, gdy łuk dany jest przez inną jaką linią trygonometryczną. Rzecz łatwa przewidzieć, że łuki mające równe wstawy, albo równe dostawy, albo równe styczne, powinny téż mieć równe dosieczne, albo równe sieczne, albo równe dotyczne: co niżéj (**20**) będzie wyjaśnionóm, poznawszy wprzód związki zachodzące między liniami trygonometrycznemi. Ztąd więc wypada, że wzory [1], [2] i [3] są i wtenczas prawdziwe, gdy dane są dosie x, sie x i sty x.

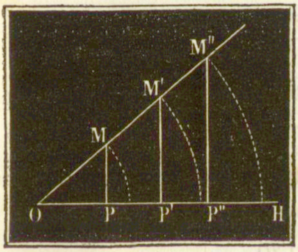
Przepomnieć nie należy: że a we wzorach powyższych zawsze oznacza łuk najmniejszy zawarty między 0° i 360°, który danéj linii odpowiada; że H znaczy w tychże wzorach półokrąg koła; i nakoniec, że k bierze się za wszelką liczbę całkowitą dodatną, albo odjemną, która i równą zeru być może.

PRZYWIEDZENIE WSTAW, DOSTAW, i t. d. DO PROSTYCH STOSUNKOW.

18. Ponieważ łuk w Trygonometryi bierze się tylko za miarę kąta; przeto niema potrzeby zważać na jego wielkość bezwzględną, ale tylko na stosunek jego długości do okręgu koła, do którego należy. Stosunek ten wyraża się właśnie przez liczbę stopni w łuku zawartych; ztąd, aby wyznaczyć kąt, dosyć jest mieć daną tę liczbę: gdyż wszystkie łuki, zawarte między ramionami jakiegokolwiek kąta i nakreślone dowolnym promieniem z jego wierzchołka, jako ze środka, zawsze jednakową liczbę stopni zamykają.

Stosunki zachodzące między liniami trygonometrycznemi łuków a promieniem kół, do których też łuki należą, podobnież zawisły tylko od liczby ich stopni. Tak np. fig. 3 pokazuje, że linie MP, M′P′, M″P″,... są wstawami łuków podobnych, i że $\frac{MP}{OM}=\frac{M'P'}{OM'}=\frac{M''P''}{OM''}...$; te więc sto-

Fig. 3.



sunki są wiadome, a nie wstawy, gdy kąt jaki jest dany. Toż samo powiedzieć można o dostawach, stycznych i t. d. Ztąd wypada, że nie długości bezwzględne linij trygonometrycznych, ale raczéj ich stosunki do promienia wprowadzać się powinny do rachunku; i z téj téż przyczyny stosownem byłoby postępowaniem, rachować tylko temi stosunkami. Sposób na to jest bardzo prosty: dosyć bowiem przyjąć za jedność promień koła, do którego linie trygonometryczne się odnoszą, gdyż wtenczas wartości liczebne tych linij właśnie owémi będą stosunkami. Stosunki te znane są także pod nazwiskami *wstawy naturalnéj*, *dostawy naturalnéj*, i t. d.

Byłoby więc rzeczą najwłaściwszą uważać linie trygonometryczne za proste stosunki i wprowadzać je z początku zaraz w tym tylko zrozumieniu do Trygonometryi. Lecz, aby nie odstępować od zwykle przyjętego wykładu téj nauki, wywodząc wzory zasadnicze w niniéjszém dziele, przyjmiemy zawsze że promień r jest nieoznaczony.

19. Zresztą, jeżeli rachunek jaki wykonany został, przypuszczając promień równy jedności, wypadki łatwo zamienić można na takie, któreby się stosowały do jakiegobądź innego przyjętego promienia. Jakoż z powyższego jasno pokazuje się, że stosunki linij trygonometrycznych do promienia w piérwszém przypuszczeniu równe są liniom trygonometrycznym w drugiém przypuszczeniu, tojest, że wielkości wyrażone przez wst a, sty b i t. d. zamienić tylko należy na równe im wyrażenia $\frac{\text{wst } a}{r}$, $\frac{\text{sty } b}{r}$, i t. d. Gdy np. z rachunku wypada, iż między łukami a i b zachodzi związek sty $b = \frac{1-\text{dost } a}{1+\text{wst } a}$: natenczas, zamieniwszy w tym wzorze linie trygonometryczne odnoszące się do promienia koła równego jedności, na takie, które się stosują do promienia r, będzie

$$\frac{\text{sty } b}{r} = \frac{1 - \frac{\text{dost } a}{r}}{1 + \frac{\text{wst } a}{r}};$$

a po skróceniu tego wzoru, nie robiąc żadnego przypuszczenia co do wielkości promienia r, wypadnie

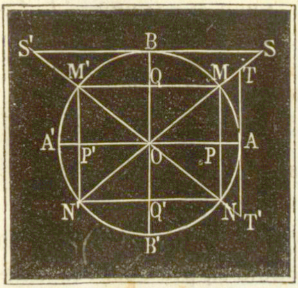
$$\text{sty } b = \frac{r\,(r-\text{dost } a)}{r+\text{wst } a}.$$

Ostrzedz tu wypada, że nie ma wcale takiéj długości bezwzględnéj, którаby równą była promieniowi wziętemu za jedność, ani takiéj, którąby za równą promieniowi r przyjąć można, a to w takiém znaczeniu, w jakiém np. bierze się długość równa 1 metrowi, 2 metrom i t. p.: przeciwnie promień w tym razie rzeczywiście jest niewyznaczony. Każda linia trygonometryczna, odpowiadająca danemu kątowi, wyraża się wprawdzie przez odmienną liczbę podług wielkości przyjętego promienia; ale liczby te są zawsze w tymże samym stosunku do liczby oznaczającéj długość promienia. i ztąd też owe stosunki tylko wchodzą do rachunku.

ZWIĄZKI MIĘDZY LINIAMI TRYGONOMETRYCZNEMI.

20. Związki między sześciorakiemi liniami trygonometrycznemi, wyprowadzimy z trójkątów wykreślonych na fig. 1.

Fig. 1.



Naprzód, z trójkąta prostokątnego OMP jest

$$\overline{MP}^2+\overline{OP}^2=\overline{OM}^2;$$

powtóre, trójkąty podobne OMP, OTA dają

$$AT:MP=OA:OP,$$
$$OT:OM=OA:OP;$$

potrzecie, z trójkątów podobnych OMQ, OSB wypada

$$BS:MQ=OB:OQ\,,\quad OS:OM=OB:OQ.$$

Uczyniwszy łuk $AM=a$, promień $OM=r$, i wziąwszy za linie ich wyrażenia trygonometryczne, tojest: wst a za MP, dost a za OP, i t. d., z pięciu dopiéro przytoczonych związków wypadną następujące równania:

[1] $$\text{wst}^2 a+\text{dost}^2 a=r,$$

[2] $$\text{sty}\ a=\frac{r\ \text{wst}\ a}{\text{dost}\ a},\qquad [3]\quad \text{sie}\ a=\frac{r^2}{\text{dost}\ a},$$

[4] $$\text{doty}\ a=\frac{r\ \text{dost}\ a}{\text{wst}\ a},\qquad [5]\quad \text{dosie}\ a=\frac{r^2}{\text{wst}\ a}.$$

Równanie [1] służy do znalezienia wstawy za pomocą dostawy; i odwrotnie. Gdy dana jest wst$a$, będzie dost$a=\pm\sqrt{r^2-\text{wst}^2 a}$. Tu dlatego otrzymują się dwie równe sobie wartości i znakami przeciwne, że jednéj wstawie, np. OQ, odpowiadają dwie dostawy OP i OP′ równe sobie, lecz przeciwnie położone.

Wzory [2], [3], [4], [5] dają wartości na styczną, sieczną, i t. d., gdy wiadome będą wielkości wstawy i dostawy.

21. Dla pokazania użycia tych wzorów, niech będzie dana wartość wst $30°=\frac{1}{2}r$, którą wyżéj (4) otrzymano. Za pomocą téj wartości naprzód łatwo wyrachować dostawę 30°, potém styczną 30°, sieczną 30° i t. d. A pamiętając, że dopełnienie 30° jest łuk o 60°, następujące otrzymamy wypadki:

$$\text{wst}\,30^\circ = \text{dost}\,60^\circ = \frac{r}{2}, \qquad \text{dost}\,30^\circ = \text{wst}\,60^\circ = \frac{r\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{sty}\,30^\circ = \text{doty}\,60^\circ = \frac{r\sqrt{3}}{3}, \qquad \text{doty}\,30^\circ = \text{sty}\,60^\circ = r\sqrt{3},$$

$$\text{sie}\,30^\circ = \text{dosie}\,60^\circ = \frac{2r\sqrt{3}}{3}, \qquad \text{dosie}\,30^\circ = \text{sie}\,60^\circ = 2r.$$

22. Lubo wzory powyższe (**20**) wyprowadzono z figury, na któréj łuk $a < 90^\circ$, one jednakże i w ogóle są prawdziwe. Gdyby tylko szło o bezwzględną wielkość linij trygonometrycznych, to byłoby rzeczą oczywistą: bo linie te dla jakiegokolwiek łuku a tworzą zawsze trójkąty prostokątne i podobne, dające też same wypadki, jakie pod n. **20** otrzymano. Ale linie trygonometryczne mogą się jeszcze różnić znakami; wypada więc okazać, że pomienione wzory i pod tym względem są rzetelne. A naprzód widoczna jest, że wzór [1] co do znaku w każdym razie się sprawdza: gdyż same tylko kwadraty zamyka. Pozostaje więc tylko przekonać się, czy, na mocy cztérech pozostałych wzorów, styczna, sieczna i t. d. przybiérają znaki zgodne z ich położeniami.

W piérwszéj ćwiartce koła, czyli od 0° do 90°, wstawa i dostawa są dodatne, a zatém wartości wypadające ze wzorów na inne linie trygonometryczne także są dodatne, jakto być powinno. W drugiéj ćwiartce wstawa jest dodatna, dostawa zaś odjemna; a ztąd wartości na styczną, sieczną i dotyczną wypadają odjemne; ale wartość na dosieczną pozostaje dodatną: figura pokazuje, że w istocie linie te, stosownie do swego położenia, takie znaki mieć powinny. W trzeciéj ćwiartce wstawa i dostawa są odjemne; wartości więc [2] i [4] są dodatne, zaś wartości [3] i [5] odjemne: to też być powinno według położeń, jakie wtedy cztéry rzeczone linie przybiérają. W czwartéj nakoniec ćwiartce wstawa jest odjemna, dostawa zaś dodatna; przeto wartości [2], [4], [5] wypadają odjemne, wartość zaś [3] jest dodatna: co podobnież zgadza się z figurą.

Gdy łuk jest większy od 360°, np. równy $360^\circ + a$, wstawa i dostawa jego mają wartości i znaki takie, jakie mają wstawa i dostawa łuku a; przeto z cztérech powyższych wzorów takież same wartości dla innych linij wypadać będą. I w rzeczy saméj, styczna, sieczna i t. d. łuku $360°+a$ i łuku a podług figury są sobie równe z wielkości i z położenia.

Wypada jeszcze zastanowić się nad łukami odjemnemi. Ponieważ wst$(-a)=-$wst$a$, i dost$(-a)=$dost$a$ (11), zatém zmieniwszy znak dla łuku, wartości wypadające ze wzorów na styczną, dotyczną i dosieczną podobnież znaki swe zmienią, ale co do wielkości równe zostaną; zaś wartość siecznéj łuku odjemnego taż sama będzie, co łuku dodatnego: wypadki te także zgadzają się z wykreśleniem.

Nareszcie, ściśle biorąc rzeczy, możnaby jeszcze wątpić o prawdziwości wzorów powyższych w przypadkach, gdy łuki równe są 0°, 90°, 180°, i t. d., bo wtedy trójkąty nikną; lecz łatwo przekonać się, że wzory i dla takich łuków dają wartości prawdziwe. Naprzykład, uczyniwszy $a=90°$, będzie wst$90°=r$, dost$90°=0$; a zatém sty$90°=\infty$, sie $90°=\infty$, doty$90°=0$, dosie$90°=r$. Wartości te w istocie są takie, jakie być powinny. Wartość sty$90°=\infty$ brać należy ze znakiem podwójnym $\pm$: bo ona razem jest granicą stycznych dodatnich, gdy łuk rośnie od 0° do 90°, i granicą stycznych odjemnych, gdy łuk się zmniejsza od 180° do 90°. Taż sama uwaga stosuje się i do innych linij trygonometrycznych, które nieskończenie wielkiemi stać się mogą.

Z tego wszystkiego okazuje się, że powyższe pięć wzorów są ogólne i żadnemu ograniczeniu nie podlegają.

23. Można ograniczyć się na dowodzeniu, że wzory [2] i [3] są ogólne, a ztąd wywieść potém prawdziwość wzorów [4] i [5]: bo te drugie wzory wypadają z piérwszych, kładąc w nich $90°-a$ za a. W ogólności, ile razy związek jaki między liniami trygonometrycznemi dowiedziony został dla wszystkich możliwych wartości jakichkolwiek łuków, zawsze wolno będzie, we wzorze wyrażającym ten związek, zamiast łuków danych wziąć ich dopełnienia, tojest, zamienić w nim wstawę, styczną i sieczną na dostawę, dotyczną i dosieczną; i odwrotnie.

24. Z pięciu powyższych równań [1]... [5] wyprowadzić można wiele innych związków; z tych ważniejsze są:

1ód. Z rozmnożenia przez siebie równań [2] i [4] wypada

[6] $$\text{sty}\ a \times \text{doty}\ a = r^2,$$

tojest, że promień jest średnio-jeometrycznie proporcyonalny między styczną i dotyczną: co także wyprowadzić można bezpośrednio z trójkątów podobnych OTA, OSB (fig. 1).

2re Z wzoru [2] otrzymuje się

$$r^2 + \text{sty}^2 a = r^2 + \frac{r^2 \text{wst}^2 a}{\text{dost}^2 a} = \frac{r^2(\text{wst}^2 a + \text{dost}^2 a)}{\text{dost}^2 a}.$$

A że $\text{wst}^2 a + \text{dost}^2 a = r^2$, $\text{sie}^2 a = \frac{r^4}{\text{dost}^2 a}$; więc

[7] $$r^2 + \text{sty}^2 a = \text{sie}^2 a:$$

wzór ten wyprowadza się także z trójkąta prostokątnego OTA.

Podobnymże sposobem otrzymuje się równanie

[8] $$r^2 + \text{doty}^2 a = \text{dosie}^2 a,$$

które bezpośrednio też z równania [7] wypada, położywszy w niém $90° - a$ za a.

3cie Wzory [3] i [5] dają

$$\frac{1}{\text{sie}\ a} = \frac{\text{dost}\ a}{r^2}, \quad \frac{1}{\text{dosie}\ a} = \frac{\text{wst}\ a}{r^2};$$

a zatém dodawszy kwadraty tych równości do siebie i położywszy potém r^2 zamiast $\text{dost}^2 a + \text{wst}^2 a$, będzie

[9] $$\frac{1}{\text{sie}^2 a} + \frac{1}{\text{dosie}^2 a} = \frac{1}{r^2}.$$

25. W ogólności mając daną którąkolwiek z sześciu linij trygonometrycznych, wynaleźć można pięć innych za pomocą równań [1]... [5], które w tym celu tylko rozwiązać potrzeba.

I tak np., gdy znaleźć chcemy wstawę i dostawę za pomocą stycznéj, dosyć jest z równań [1] i [2], tojest z tych

$$\text{wst}^2 a + \text{dost}^2 a = r^2, \quad \text{sty}\ a = \frac{r\ \text{wst}\ a}{\text{dost}\ a},$$

wziąć wartości na wst a i dost a. Jakoż z drugiego równania jest $r^2 \text{wst}^2 a = \text{sty}^2 a \; \text{dost}^2 a$: a zatém $\text{wst}^2 a = \frac{\text{sty}^2 a \; \text{dost}^2 a}{r^2}$; $\text{dos}^2 a = \frac{r^2 \; \text{wst}^2 a}{\text{sty}^2 a}$. Wartości te na $\text{wst}^2 a$ i $\text{dos}^2 a$ wstawiwszy w równanie piérwsze, będzie

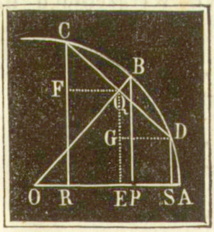
$$[10] \qquad \text{wst}\, a = \frac{\pm r \,\text{sty}\, a}{\sqrt{r^2 + \text{sty}^2 a}}, \quad \text{dost}\, a = \frac{\pm r^2}{\sqrt{r^2 + \text{sty}^2 a}}.$$

Znak podwójny $\pm$ dowodzi, że dwie być mogą wstawy i dostawy równe sobie i z położenia przeciwne, które jednéj i téj saméj stycznéj odpowiadają: co też figura pokazuje. Pamiętać należy, że znaki górne razem i dolne razem brać się powinny: bo w przeciwnym przypadku z równania [10] nie wypadłoby znowu na powrót równanie $\frac{r \,\text{wst}\, a}{\text{dost}\, a} = \text{sty}\, a$.

WZORY NA WSTAWY I DOSTAWY ŁUKOW $a+b$ I $a-b$.

26. *Znając wstawę i dostawę dwóch łuków* a *i* b, *znaleźć wstawę i dostawę ich summy* a+b *i różnicy* a—b.

Fig. 4

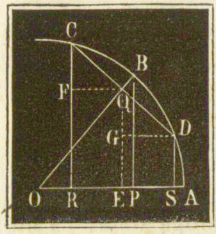


Niech (fig. 4) dane będą łuki AB$=a$ i BC $=$ BD $= b$: poprowadziwszy cięciwę CD, oraz promień OB do niéj prostopadły i przecinający ją w punkcie Q na dwie równe części; potém nakreśliwszy promień OA i linie BP, CR, DS, prostopadłe do tegoż promienia, będzie

$$\text{BP} = \text{wst}\, a, \quad \text{OP} = \text{dost}\, a, \quad \text{CQ} = \text{wst}\, b, \quad \text{OQ} = \text{dost}\, b,$$
$$\text{AC} = a+b, \quad \text{CR} = \text{wst}\,(a+b), \quad \text{OR} = \text{dost}\,(a+b),$$
$$\text{AD} = a-b, \quad \text{DS} = \text{wst}\,(a-b), \quad \text{OS} = \text{dost}\,(a-b).$$

Spuściwszy jeszcze prostopadłą QE do OA i poprowadziwszy równoodległe QF i DG od OA, utworzą się trójkąty CQF i QDG. Trójkąty te są sobie równe: bo równe mają kąty i bok QC piérwszego trójkąta równy jest bokowi QD drugiego; więc DG=QF i GQ=CF. Z tego widocznie wypada, że

Fig. 4.



$$\begin{aligned}
\text{wst}\,(a+b)&=\text{CR}=\text{FR}+\text{CF}=\text{QE}+\text{CF},\\
\text{dost}\,(a+b)&=\text{OR}=\text{OE}-\text{ER}=\text{OE}-\text{QF},\\
\text{wst}\,(a-b)&=\text{DS}=\text{QE}-\text{QG}=\text{QE}-\text{CF},\\
\text{dost}\,(a-b)&=\text{OS}=\text{OE}+\text{DG}=\text{OE}+\text{QF}.
\end{aligned}$$

Trójkąty OBP, OQE są podobne z powodu równoodległych BP, QE; trójkąty OBP, CQF także są podobne, jako mające boki odpowiedne prostopadłe do siebie. A zatém będzie

$$\begin{aligned}
&\text{QE}:\text{BP}=\text{OQ}:\text{OB} \quad \text{czyli} \quad \text{QE}:\text{wst}\,a=\text{dost}\,b:r,\\
&\text{OE}:\text{OP}=\text{OQ}:\text{OB} \quad \text{czyli} \quad \text{OE}:\text{dost}\,a=\text{dost}\,b:r,\\
&\text{CF}:\text{OP}=\text{CQ}:\text{OB} \quad \text{czyli} \quad \text{CF}:\text{dost}\,a=\text{wst}\,b:r,\\
&\text{QF}:\text{BP}=\text{CQ}:\text{OB} \quad \text{czyli} \quad \text{QF}:\text{wst}\,a=\text{wst}\,b:r.
\end{aligned}$$

Z tych proporcyi wypada

$$\text{QE}=\frac{\text{wst}\,a\ \text{dost}\,b}{r},\qquad \text{OE}=\frac{\text{dost}\,a\ \text{dost}\,b}{r},$$

$$\text{CF}=\frac{\text{dost}\,a\ \text{wst}\,b}{r},\qquad \text{QF}=\frac{\text{wst}\,a\ \text{wst}\,b}{r};$$

a po wstawieniu znowu tych wartości we wyrażeniach na wst $(a+b)$, dost $(a+b)$, i t. d., będzie

[1] $$\text{wst}\,(a+b)=\frac{\text{wst}\,a\ \text{dost}\,b+\text{dost}\,a\ \text{wst}\,b}{r},$$

[2] $$\text{dost}\,(a+b)=\frac{\text{dost}\,a\ \text{dost}\,b-\text{wst}\,a\ \text{wst}\,b}{r},$$

[3] $$\text{wst}\,(a-b)=\frac{\text{wst}\,a\ \text{dost}\,b-\text{dost}\,a\ \text{wst}\,b}{r},$$

[4] $$\text{dost}\,(a-b)=\frac{\text{dost}\,a\ \text{dost}\,b+\text{wst}\,a\ \text{wst}\,b}{r}.$$

27. Zdaje się, że wzory [1], [2], [3] i [4] zależą od figury 4, użytéj do ich wyprowadzenia: gdyż kreśląc ją, przyjęliśmy że łuki a i b są dodatne, że summa $a+b$ jest $<90°$, i nadto że a większe jest od b we wzorach tyczących się łuku $a—b$. Wykreślenie figury wprawdzie łatwo zmienić można na inne przypadki; lecz przypadków tych bardzo jest wiele, a ztąd nie wygodnie jest okazać tą drogą, że wzory powyższe są ogólne. Zręczniéj dowodzi się to sposobem następującym.

1ód. Wzory [3] i [4] niezależą od warunku, że $a>b$: co tak się dowodzi. Przyjąwszy, że a jest mniejsze od b, będzie z powyższego (11).

$$\text{wst}\,(a-b)=-\,\text{wst}\,(b-a) \text{ i } \text{dost}\,(a-b)=\text{dost}\,(b-a).$$

Lecz jeżeli b większe jest od a; otrzymać można wartości na wst $(b-a)$ i dost $(b-a)$ ze wzorów [3] i [4], zamieniając w nich a na b i b na a: a że wtedy piérwsza tylko z tych wartości znak swój zmienia, druga zaś go zachowuje; więc i wyrażenia na wst $(a-b)$ i dost $(a-b)$ takie same pozostać muszą, czy się przypuszcza $a>b$ czyli téż $a<b$. Ztąd wypada, że cztéry powyższe wzory prawdziwe są na wszystkie przypadki, w których łuki a i b są dodatne i razem czynią summę $a+b<90°$; a tém samém każdy z tych łukow przybiérać może wszelkie wartości zawarte między 0° i 45°.

2re. Ponieważ wzory tyczące się różnicy $a—b$ wywieść się dają z wzorów na wst $(a+b)$ i dost $(a+b)$, zamieniając w nich b na $-b$; przeto oczywista jest, że wzory [1] i [2] są prawdziwe dla wszystkich wartości na a zawartych między 0° i 45°, i dla wszystkich wartości na b zawartych między —45° i +45°.

Te wzory [1] i [2] także są prawdziwe dla wartości odjemnych na a, zawartych między 0° i —45°. Jakoż, przyjąwszy że a jest $<45°$, i że $a=-a$, będzie

$$\text{wst}\,(a+b)=\text{wst}\,(-a+b)=-\text{wst}\,(a-b),$$
$$\text{dost}\,(a+b)=\text{dost}\,(-a+b)=\text{dost}\,(a-b).$$

Łuki a i $-b$ mieszczą się w granicach, wewnątrz których wzory [1] i [2] podług dowodzenia są prawdziwe; więc

$$\text{wst}\,(a+b)=-\text{wst}\,(a-b)=\frac{-\text{wst}\,a\ \text{dost}\,b+\text{dost}\,a\ \text{wst}\,b}{r},$$

$$\text{dost}\,(a+b)=\text{dost}\,(a-b)=\frac{\text{dost}\,a\ \text{dost}\,b+\text{wst}\,a\ \text{wst}\,b}{r}.$$

A ponieważ $a=-\alpha$, przeto (11) wst $a=-$ wst α, dost $a=$ dost α; a tém samém wzory dopiéro otrzymane przechodzą na wzory [1] i [2].

3cie. Pozostaje jeszcze dowieść, że we wzorach [1] i [2] podług upodobania oddalać można granice dodatne i odjemne łuków a i b. Uczyniwszy $a=90°+\alpha$, gdzie α jest łukiem jakimkolwiek zawartym między $-45°$ i $+45°$, będzie po wzięciu dopełnień

$$\text{wst}(a+b) = \text{wst}(90°+\alpha+b) = \text{dost}(-\alpha-b) = \text{dost}(\alpha+b)$$
$$= \frac{\text{dost}\,\alpha\ \text{dost}\,b - \text{wst}\,\alpha\ \text{wst}\,b}{r},$$
$$\text{dost}(a+b) = \text{dost}(90°+\alpha+b) = \text{wst}(-\alpha-b) = -\text{wst}(\alpha+b)$$
$$= \frac{-\text{wst}\,\alpha\ \text{dost}\,b - \text{dost}\,\alpha\ \text{wst}\,b}{r}.$$

Lecz na mocy znanych uprostszczeń, jest

$$\text{wst}\,a = \text{wst}(90°+\alpha) = \text{dost}(-\alpha) = \text{dost}\,\alpha,$$
$$\text{dost}\,a = \text{dost}(90°+\alpha) = \text{wst}(-\alpha) = -\text{wst}\,\alpha;$$

więc położyć można wst a zamiast dost α i dost a za wst α : co zrobiwszy, znowu wypadną wzory [1] i [2]. A że przyjęliśmy, iż wartości na α są zawarte między $-45°$ i $+45°$; zatém łuk $90°+\alpha$ czyli łuk a przybiérać może wszelkie wartości począwszy od $45°$ aż do $135°$: tym więc sposobem granica dodatna wartości na a posuniętą została aż do $135°$. Powtórzywszy toż samo rozumowanie, widoczna jest, że tę granicę jeszcze o $90°$ pomknąć można; i tak daléj aż do nieskończoności.

Dowodzenie powyższe (2re) na okazanie, że gdy wzory [1] i [2] są prawdziwe dla wartości dodatnych na a mniejszych od $45°$, prawdziwemi być muszą także dla takichże samych wartości odjemnych, stosuje się téż widocznie do przypadku, w którym granica dodatna na a inną będzie, a nie $45°$. Okazawszy więc, że wzory [1] i [2] są prawdziwe dla wszystkich wartości dodatnych na a, tém samém się dowiodło, że i prawdziwemi są dla wszystkich wartości odjemnych.

Takie samo rozumowanie stosuje się i do łuku b: a zatém obie granice tego łuku podobnie oddalać można aż do nieskończoności; więc nakoniec dowiedliśmy, że wzory [1] i [2], a tém samém i wzory [3] i [4] prawdziwe są dla łuków a i b mających jakiekolwiek wartości.

WZORY NA MNOŻENIE I DZIELENIE ŁUKÓW.

28. Odtąd zawsze przyjmiemy promień $r=1$: a zatém wstawy, dostawy i t. d. uważać będziemy za proste tylko stosunki, jak to pod n. **18** wyjaśniono. Na mocy tego przypuszczenia wzory n. **20** i **26** przechodzą w następujące:

$$\mathrm{wst}^2 a+\mathrm{dost}^2 a=1;$$

$$\mathrm{sty}\, a=\frac{\mathrm{wst}\, a}{\mathrm{dost}\, a},\quad \mathrm{doty}\, a=\frac{\mathrm{dost}\, a}{\mathrm{wst}\, a};$$

$$\mathrm{sie}\, a=\frac{1}{\mathrm{dost}\, a},\quad \mathrm{dosie}\, a=\frac{1}{\mathrm{wst}\, a};$$

$$\mathrm{wst}(a\pm b)=\mathrm{wst}\ a\ \mathrm{dost}\, b\pm \mathrm{dost}\, a\ \mathrm{wst}\, b,$$

$$\mathrm{dost}(a\pm b)=\mathrm{dost}\, a\ \mathrm{dost}\, b\mp \mathrm{wst}\ a\ \mathrm{wst}\, b.$$

29. Uczyniwszy w powyższych wzorach na wst $(a+b)$ i dost $(a+b)$ łuk $b=a$, wypadnie

[1] $$\mathrm{wst}\, 2a=2\ \mathrm{wst}\ a\ \mathrm{dost}\ a,$$

[2] $$\mathrm{dost}\, 2a=\mathrm{dost}^2 a-\mathrm{wst}^2 a.$$

Wzory te służą do wyrachowania wstawy i dostawy łuku dwa razy większego od łuku danego, którego wstawa i dostawa są wiadome.

30. Uczyniwszy w tych samych wzorach $b=2a$, otrzymamy

$$\mathrm{wst}\, 3a=\mathrm{wst}\, a\ \mathrm{dost}\, 2a+\mathrm{dost}\, a\ \mathrm{wst}\, 2a,$$

$$\mathrm{dost}\, 3a=\mathrm{dost}\, a\ \mathrm{dost}\, 2a-\mathrm{wst}\, a\ \mathrm{wst}\, 2a;$$

a wstawiwszy tu wartości za wst $2a$ i dost $2a$, i skróciwszy potém wypadek za pomocą wzoru $\mathrm{wst}^2 a+\mathrm{dos}^2 a=1$, będzie

[3] $$\mathrm{wst}\, 3a=3\ \mathrm{wst}\, a-4\ \mathrm{wst}^3 a,$$

[4] $$\mathrm{dost}\, 3a=4\,\mathrm{dost}^3 a-3\ \mathrm{dost}\ a.$$

Tak dalej postępując, otrzymać można wzory na wstawy i dostawy łuków cztéry, pięć, i t. d. razy większych od łuku danego. Wzory te zowią się wzorami do *mnożenia łuków*.

31. Przechodząc teraz do wywodu wzorów na *dzielenie łuków*, wypada naprzód znaleźć wstawę i dostawę połowy łuku danego. Położywszy we wzorach [1] i [2] $\frac{1}{2}a$ za a, wypadnie

$$[5]\qquad 2 \,\mathrm{wst}\, \tfrac{1}{2}a \,\mathrm{dost}\, \tfrac{1}{2}a = \mathrm{wst}\, a,$$

$$[6]\qquad \mathrm{dost}^2 \tfrac{1}{2}a - \mathrm{wst}^2 \tfrac{1}{2}a = \mathrm{dost}\, a;$$

i prócz tego jeszcze mamy

$$[7]\qquad \mathrm{dost}^2 \tfrac{1}{2}a + \mathrm{wst}^2 \tfrac{1}{2}a = 1.$$

Chcąc znaleźć wartości na wst $\frac{1}{2}a$ i dost $\frac{1}{2}a$, mając daną dost a, dosyć jest rozwiązać równania [6] i [7]. Otóż, odjąwszy naprzód piérwsze z tych równań od drugiego, a potém dodawszy obadwa równania do siebie, łatwo otrzymuje się

$$[8]\qquad \mathrm{wst}\, \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-\mathrm{dost}\, a}{2}},\qquad \mathrm{dost}\, \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1+\mathrm{dost}\, a}{2}}.$$

Te wzory więc służą do wyrachowania wst $\frac{1}{2}a$ i dost $\frac{1}{2}a$, gdy wiadoma jest dost a: używając ich, wszakże pamiętać trzeba, że ilość piérwiastkowa wziąć się powinna ze znakiem $\pm$.

Nie trudno wyrozumować, dlaczego wartości na niewiadomą wst $\frac{1}{2}a$ i dost $\frac{1}{2}a$ są podwójne, wprawdzie równe sobie, lecz znakami przeciwne. Z uwagi bowiem, że nie sam łuk a wchodzi do powyższych wzorów, ale tylko dostawa jego, wypada, iż wzory te wyrażają współcześnie wstawy i dostawy połowy każdego z łuków, równą dostawę mających. Podług n. 15 wzorem na takie łuki jest

$$x = 2k\mathrm{H} \pm a,$$

gdzie a wyraża łuk najmniejszy dodatny, odpowiadający danéj dostawie, gdzie H równa się połowie okręgu, a k znaczy wszelką liczbę całkowitą. Więc wszystkie wartości na wst $\frac{1}{2}a$ i dost $\frac{1}{2}a$ zawarte będą w wyrażeniach

$$\mathrm{wst}\,(k\mathrm{H} \pm \tfrac{1}{2}a) \text{ i } \mathrm{dost}\,(k\mathrm{H} \pm \tfrac{1}{2}a).$$

Gdy k jest liczbą parzystą, kH będzie wielokrotną względem 360°; wtedy więc opuścić można kH, nie zmieniając przez to ani wstawy, ani dostawy (10): a zatém będzie

$$\text{wst}(\pm\tfrac{1}{2}a)=\pm\text{wst}\tfrac{1}{2}a \quad \text{i} \quad \text{dost}(\pm\tfrac{1}{2}a)=\text{dost}\tfrac{1}{2}a.$$

Gdy k jest liczbą niepatrzystą, podobnie opuścić można kH; ale znak dla wstawy i dostawy przemienić potrzeba (10): zkąd znowu będzie

$$-\text{wst}(\pm\tfrac{1}{2}a)=\mp\text{wst}\tfrac{1}{2}a \quad \text{i} \quad -\text{dost}(\pm\tfrac{1}{2}a)=-\text{dost}\tfrac{1}{2}a.$$

Rzecz więc widoczna, że tak dla wst$\frac{1}{2}a$, jak dla dost$\frac{1}{2}a$, istnieć muszą dwie wartości równe i znakami sobie przeciwne.

32. Gdy dana będzie wstawa, dosyć jest położyć we wzorach [8] wartość na dost a czyli $\sqrt{1-\text{wst}^2 a}$. A ponieważ nowy ten piérwiastek także brać się powinien ze znakiem podwójnym $\pm$; przeto czworakie mieć można wartości tak na wst$\frac{1}{2}a$, jak na dost$\frac{1}{2}a$.

Ale wartości te otrzymać jeszcze można pod inną postacią, wyciągając je z równań [5] i [7], tojest z tych:

$$2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}a\ \text{dost}\tfrac{1}{2}a=\text{wst}\,a,$$
$$\text{dost}^2\tfrac{1}{2}a+\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a=1.$$

Dodawszy naprzód równanie piérwsze do drugiego, potém odjąwszy drugie od piérwszego, i nakoniec wyciągnąwszy z wypadków piérwiastki kwadratowe, wypadnie

$$\text{dost}\tfrac{1}{2}a+\text{wst}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{1+\text{wst}\,a},$$
$$\text{dost}\tfrac{1}{2}a-\text{wst}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{1-\text{wst}\,a}:$$

a z tych równań łatwo otrzymują się wartości szukane

[9] $$\text{wst}\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{wst}\,a}-\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{wst}\,a},$$

[10] $$\text{dost}\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{wst}\,a}+\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{wst}\,a}.$$

Z powodu dwóch znaków piérwiastkowych, każde z wyrażeń poprzedzających ma cztéry wartości. Aby dowieść *à priori*, że tak być powinno, trzeba sobie przypomnieć, że wzory te dają wartości na wstawy i dostawy połowy każdego z łuków równe wstawy mających: a że łuki takowe (14) zawarte są we wzorach

$$x=2k\mathrm{H}+a,\quad x=(2k+1)\mathrm{H}-a;$$

więc wartości na wst$\frac{1}{2}a$ i dost$\frac{1}{2}a$ powinny dać wstawy i dostawy łuków, wyrażonych przez wzory

$$k\mathrm{H}+\tfrac{1}{2}a \quad \text{i} \quad (k+\tfrac{1}{2})\mathrm{H}-\tfrac{1}{2}a.$$

Lecz kH w tych wzorach opuścić można, jeżeli tylko znaki wstawy i dostawy już to zatrzymamy, już też zmienimy, podług tego czy k będzie liczbą parzystą, lub nieparzystą. Tak więc na wst$\frac{1}{2}a$ i na dost$\frac{1}{2}a$ po cztéry wartości wypadają, tojest:

$$\text{wst}\tfrac{1}{2}a=\pm\,\text{wst}\tfrac{1}{2}a \quad \text{i} \quad \text{wst}\tfrac{1}{2}a=\pm\,\text{wst}(\tfrac{1}{2}\mathrm{H}-\tfrac{1}{2}a);$$
$$\text{dost}\tfrac{1}{2}a=\pm\,\text{dost}\tfrac{1}{2}a \quad \text{i} \quad \text{dost}\tfrac{1}{2}a=\pm\,\text{dost}(\tfrac{1}{2}\mathrm{H}-\tfrac{1}{2}a).$$

I widoczna jest, że te wartości, brane po dwie, są równe sobie i znakami przeciwne. Jeżeli $a=90°$, będzie $\frac{1}{2}a=45°$, $\frac{1}{2}\mathrm{H}-\frac{1}{2}a=45°$; a cztéry powyższe wartości przywodzą się do dwóch.

Tu inna jeszcze nastręcza się uwaga. Ponieważ H znaczy 180°; przeto łuki $\frac{1}{2}a$ i $\frac{1}{2}\mathrm{H}-\frac{1}{2}a$ wzajemnie się dopełniają. Więc wyrażenia poprzedzające i tak napisać się mogą:

$$\text{wst}\tfrac{1}{2}a=\pm\,\text{wst}\tfrac{1}{2}a,\qquad \text{wst}\tfrac{1}{2}a=\pm\,\text{dost}\tfrac{1}{2}a;$$
$$\text{dost}\tfrac{1}{2}a=\pm\,\text{dost}\tfrac{1}{2}a,\qquad \text{dost}\tfrac{1}{2}a=\pm\,\text{wst}\tfrac{1}{2}a,$$

tojest, że wartości na wst$\frac{1}{2}a$ równe są wartościom na dost$\frac{1}{2}a$: wzory [9] i [10] także to samo pokazują.

Teraz potrzeba tę trudność wyjaśnić: znając łuk a i jego wstawę, jak przekonać się, które z cztérech powyższych wyrażeń będzie wartością na wst$\frac{1}{2}a$ i na dost$\frac{1}{2}a$? gdyż oczywista jest, że jedna tylko istotna wartość być może. Dla krótkości dosyć będzie wziąć na uwagę wst$\frac{1}{2}a$. Biorąc ilości piérwiastkowe z różnemi znakami, témi cztérema wartościami na wst$\frac{1}{2}a$ są:

$$\text{wst}\tfrac{1}{2}a=\pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{1+\text{wst}\,a}-\sqrt{1-\text{wst}\,a}),$$
$$\text{wst}\tfrac{1}{2}a=\pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{1+\text{wst}\,a}+\sqrt{1-\text{wst}\,a}).$$

Rzecz jasna naprzód, że dwie piérwsze z tych wartości są sobie równe i znakami przeciwne; to samo i o dwóch pozostałych powiedzieć można. Powtóre, podniosłszy dwie piérwsze wartości do kwadratu, wypadnie ten kwadrat $<\frac{1}{2}$; podniósłszy zaś dwie drugie wartości do kwadratu, będzie przeciwnie wypadek $>\frac{1}{2}$. A że wiadomo (**8**), że $\text{wst}^2\, 45^\circ = \text{dost}^2\, 45^\circ = \frac{1}{2}$; więc, nie dając baczenia na znaki, dwie piérwsze wartości na $\text{wst}\, \frac{1}{2}a$ mniejsze być muszą od wst 45°, a dwie drugie większe od wst 45°.

Lecz z drugiéj strony, mając dany łuk, łatwo się zawsze przekonać *à priori*, czy wstawa jego połowy jest dodatna lub odjemna, i czy będzie mniejsza lub większa od wst 45°. Wszelka więc wątpliwość tu ustaje. Rozumowanie takie samo stosuje się i do dostawy.

Na przykład, niech $a<90^\circ$; wtedy $\text{wst}\, \frac{1}{2}a$ powinna być dodatna i mniejsza od wst 45°; zaś $\text{dost}\, \frac{1}{2}a$ także dodatna, ale większa od dost 45: więc znaki z jakiemi brać się powinny wartości [9] i [10] oczywiście są wiadome.

Wzory powyższe ściągają się widocznie do łuków mniejszych od 90°. Toż samo rozumie się o wszystkich innych wzorach trygonometrycznych bo używając ich najczęściéj potrzeba, aby one odpowiadały łukom mniejszym od 90°.

33. Wzory do dzielenia łuku danego na trzy równe części otrzymują się z równań [3] i [4] n. **30**, kładąc w nich $\frac{1}{3}a$ za a. Wzorami temi są:

$$\text{wst}\, a = 3\, \text{wst}\, \tfrac{1}{3}a - 4\, \text{wst}^3\, \tfrac{1}{3}a,$$
$$\text{dost}\, a = 4\, \text{dost}^3\, \tfrac{1}{3}a - 3\, \text{dost}\, \tfrac{1}{3}a.$$

Niech np. dana będzie $\text{dost}\, a$, aby znaleźć $\text{dost}\, \frac{1}{3}a$ trzeba założyć $a=b$, $\text{dost}\, \frac{1}{3}a = z$; wtedy z drugiego z powyższych wzorów wypada

$$[11] \qquad z^3 - \tfrac{3}{4}z - \tfrac{1}{4}b = 0.$$

Chcąc otrzymać wartość na $\text{dost}\, \frac{1}{3}a$, dosyć jest równanie [11] rozwiązać. Nie używając wiadomości z Algebry, wprost okazać można, że równanie to ma trzy piérwiastki rzeczywiste.

Tu dana jest dostawa: a łuki odpowiadające téj dostawie zawarte są w wyrażeniu $2k\mathrm{H}\pm a$ (15); wszystkie więc piérwiastki równania (11) muszą być zawarte w wyrażeniu

$$z=\operatorname{dost}\frac{2k\mathrm{H}\pm a}{3}.$$

Liczba całkowita k może tylko mieć jednę z trzech postaci $3n$, $3n+1$, $3n-1$ (gdzie n także bierze się za liczbę całkowitą): uczyniwszy więc kolejno $k=3n$, $k=3r+1$, $k=3n-1$, i opuściwszy obwody niepotrzebne, będzie

$$z=\operatorname{dost}\frac{3n.2\mathrm{H}\pm a}{3}=\operatorname{dost}\left\{2n\mathrm{H}\pm\frac{a}{3}\right\}=\operatorname{dost}\left\{\pm\frac{a}{3}\right\}=\operatorname{dost}\frac{a}{3},$$

$$z=\operatorname{dost}\frac{(3n+1).2\mathrm{H}\pm a}{3}=\operatorname{dost}\left\{2n\mathrm{H}+\frac{2\mathrm{H}}{3}\pm\frac{a}{3}\right\}=\operatorname{dost}\left\{\frac{2\mathrm{H}}{3}\pm\frac{a}{3}\right\},$$

$$z=\operatorname{dost}\frac{(3n-1).2\mathrm{H}\pm a}{3}=\operatorname{dost}\left\{-\frac{2\mathrm{H}}{3}\pm\frac{a}{3}\right\}=\operatorname{dost}\left\{\frac{2\mathrm{H}}{3}\mp\frac{a}{3}\right\}.$$

Dwie ostatnie wartości są też same, co dwie przedostatnie; a zatém trzy tylko różne zachodzą wartości, tojest:

$$z=\operatorname{dost}\frac{a}{3},\qquad z=\operatorname{dost}\left\{\frac{2\mathrm{H}}{3}+\frac{a}{3}\right\},\qquad z=\operatorname{dost}\left\{\frac{2\mathrm{H}}{3}-\frac{a}{3}\right\}.$$

Zdarzać się jednak może, że dwie z tych wartości są równe sobie: to np. ma miejsce co do piérwszéj i trzeciéj wartości, gdy $a=\mathrm{H}$.

Nie ma potrzeby więcéj rozwodzić się nad dzieleniem łuków: to, co dotąd się powiedziało, daje dostatecznie poznać, jak sobie postąpić trzeba w tego rodzaju zadaniach.

WZORY ODNOSZĄCE SIĘ DO STYCZNYCH.

34. Naprzód wypada: *znaleźć styczną summy albo różnicy dwóch łuków, mając wiadomą styczną każdego z tych łuków.*

Podług związku zachodzącego między wstawą, dostawą i styczną (28), jest

$$\operatorname{sty}(a+b)=\frac{\operatorname{wst}(a+b)}{\operatorname{dost}(a+b)},$$

czyli, wstawiając wartości na wst $(a+b)$ i dost $(a+b)$ (**28**).

$$\text{sty}\,(a+b)=\frac{\text{wst}\,a\ \text{dost}\,b+\text{dost}\,a\ \text{wst}\,b}{\text{dost}\,a\ \text{dost}\,b-\text{wst}\,a\ \text{wst}\,b}.$$

Aby wszystkie wyrazy tego równania były stycznemi, dosyć jest podzielić licznik i mianownik drugiéj jego strony przez dost a dost b: co zrobiwszy, będzie

$$\text{sty}\,(a+b)=\frac{\dfrac{\text{wst}\,a}{\text{dost}\,a}+\dfrac{\text{wst}\,b}{\text{dost}\,b}}{1-\dfrac{\text{wst}\,a}{\text{dost}\,a}\ \dfrac{\text{wst}\,b}{\text{dost}\,b}}.$$

A że $\dfrac{\text{wst}\,a}{\text{dost}\,b}=\text{sty}\,a$ i $\dfrac{\text{wst}\,b}{\text{dost}\,b}=\text{sty}\,b$; więc

[1] $$\text{sty}\,(a+b)=\frac{\text{sty}\,a+\text{sty}\,b}{1-\text{sty}\,a\ \text{sty}\,b}.$$

Tym samym sposobem otrzymuje się wartość na styczną różnicy dwóch łuków:

[2] $$\text{sty}\,(a-b)=\frac{\text{sty}\,a-\text{sty}\,b}{1+\text{sty}\,a\ \text{sty}\,b}.$$

35. Założywszy $b=a$ w równaniu [1], otrzymamy na styczną łuku dwa razy większego:

[3] $$\text{sty}\,2a=\frac{2\,\text{sty}\,a}{1-\text{sty}^2 a}.$$

A przyjąwszy potém $b=2a$, wypadnie sty $3a$; i tak daléj.

36. Chcąc znaleźć wartość na sty $\frac{1}{2}a$, wyrażoną przez sty a, potrzeba w równaniu [3] położyć $\frac{1}{2}a$ za a, i będzie

$$\text{sty}\,a=\frac{2\,\text{sty}\,\frac{1}{2}a}{1-\text{sty}^2\,\frac{1}{2}a}.$$

Wyrażenie to daje następujące równanie drugiego stopnia:

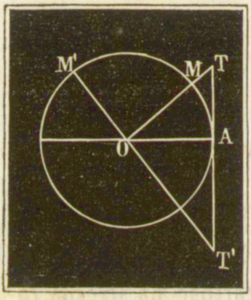
[4] $$\text{sty}^2\,\tfrac{1}{2}a+\frac{2}{\text{sty}\,a}\text{sty}\,\tfrac{1}{2}a-1=0;$$

a z tego znowu wypada

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}a=\frac{1}{\text{sty}\,a}(-1\pm\sqrt{1+\text{sty}^2 a}).$$

Ponieważ ostatni wyraz równania [4] jest — 1; przeto i bez jego rozwiązania wnieść można, że iloczyn z obudwóch wartości na sty $\frac{1}{2}a$ równy być musi — 1. Jeżeli zatém AT i AT′ (fig. 5) są temi wartościami w położeniu, które odpowiada ich znakom; natenczas być powinno $AT \times AT' = \overline{OA}^2$: więc kąt TOT′ jest prosty, czyli, co jedno znaczy, łuk MM′ równy jest 90°. Zresztą nie trudno okazać, dla czego sty $\frac{1}{2}a$ dwie ma wartości, i dwie tylko wartości mieć może: czytelnik sam to z łatwością dowiedzie, zastanowiwszy się nad pytaniem tu zachodzącem, i przypomniawszy sobie, co w podobnych przypadkach wyżéj się powiedziało.

Fig. 5.



37. Dosyć często przytrafiają się wzory następujące:

[5] $$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1-\text{dost}\,a}{1+\text{dost}\,a}},$$

[6] $$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}a=\frac{\text{wst}\,a}{1+\text{dost}\,a},$$

[7] $$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}a=\frac{1-\text{dost}\,a}{\text{wst}\,a}.$$

Te wzory wywodzą się łatwo z wzorów już znanych. Jakoż widoczna jest, że

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}a=\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}a}{\text{dost}\,\frac{1}{2}a}=\sqrt{\frac{1-\text{dost}\,a}{1+\text{dost}\,a}}\quad(31).$$

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}a=\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}a\,\text{dost}\,\frac{1}{2}a}{\text{dost}^2\,\frac{1}{2}a}=\frac{\text{wst}\,a}{1+\text{dost}\,a}\quad(29,\ 31).$$

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}a=\frac{\text{wst}^2\,\frac{1}{2}a}{\text{wst}\,\frac{1}{2}a\,\text{dost}\,\frac{1}{2}a}=\frac{1-\text{dost}\,a}{\text{wst}\,a}\quad(29,\ 31).$$

NIEKTÓRE INNE WZORY CZĘSTSZEGO UŻYWANIA.

38. Ze wzorów n. **28**, dających wartości na wstawę i dostawę summy $a+b$ i różnicy $a-b$, wyciągnąć można bardzo wiele równań, które przez astronomów prawie ustawicznie są używane. Tu wymienimy tylko najważniejsze z tych równań.

Wziąwszy summy lub różnice tamtych wartości, wypadnie

$$
\begin{aligned}
2 \text{ wst } a \text{ dost } b &= \text{wst}(a+b) + \text{wst}(a-b),\\
2 \text{ dost } a \text{ wst } b &= \text{wst}(a+b) - \text{wst}(a-b),\\
2 \text{ dost } a \text{ dost } b &= \text{dost}(a-b) + \text{dost}(a+b),\\
2 \text{ wst } a \text{ wst } b &= \text{dost}(a-b) - \text{dost}(a+b).
\end{aligned}
$$

Wzory te służyć mogą do zamiany iloczynu ze wstawy i dostawy, albo z dwóch wstaw, albo i z dwóch dostaw, na summę, albo różnicę dwóch linij trygonometrycznych.

39. Niech p i q znaczą dwa jakiekolwiek łuki: uczyniwszy $a+b=p$, $a-b=q$, będzie $a=\frac{1}{2}(p+q)$, $b=\frac{1}{2}(p-q)$. Położywszy te wartości za a i b w równania poprzedzające, i przemieniwszy strony tychże równań, wypadnie:

$$
\begin{aligned}
\text{wst } p + \text{wst } q &= 2 \text{ wst } \tfrac{1}{2}(p+q) \text{ dost } \tfrac{1}{2}(p-q),\\
\text{wst } p - \text{wst } q &= 2 \text{ dost } \tfrac{1}{2}(p+q) \text{ wst } \tfrac{1}{2}(p-q),\\
\text{dost } p + \text{dost } q &= 2 \text{ dost } \tfrac{1}{2}(p+q) \text{ dost } \tfrac{1}{2}(p-q),\\
\text{dost } q - \text{dost } p &= 2 \text{ wst } \tfrac{1}{2}(p+q) \text{ wst } \tfrac{1}{2}(p-q).
\end{aligned}
$$

Te wzory znowu częstego są używania, zwłaszcza rachując za pomocą logarytmów, kiedy summę lub różnicę łuków zamienić wypada na iloczyn tychże samych łuków.

40. Nakoniec, podzieliwszy dopiéro otrzymane wzory, jeden przez drugi, i pamiętając że w ogólności $\frac{\text{wst A}}{\text{dost A}} = \text{sty A} = \frac{1}{\text{doty A}}$, otrzymamy jeszcze następujące nader użyteczne równania:

$$
\frac{\text{wst } p + \text{wst } q}{\text{wst } p - \text{wst } q} = \frac{\text{wst } \frac{1}{2}(p+q) \text{ dost } \frac{1}{2}(p-q)}{\text{dost } \frac{1}{2}(p+q) \text{ wst } \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\text{sty } \frac{1}{2}(p+q)}{\text{sty } \frac{1}{2}(p-q)},
$$

$$
\frac{\text{wst } p + \text{wst } q}{\text{dost } p + \text{dost } q} = \frac{\text{wst } \frac{1}{2}(p+q)}{\text{dost } \frac{1}{2}(p+q)} = \text{sty } \tfrac{1}{2}(p+q),
$$

$$\frac{\text{wst}\,p+\text{wst}\,q}{\text{dost}\,q-\text{dost}\,p}=\frac{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}(p-q)}{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(p-q)}=\text{doty}\,\tfrac{1}{2}(p-q),$$

$$\frac{\text{wst}\,p-\text{wst}\,q}{\text{dost}\,p+\text{dost}\,q}=\frac{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(p-q)}{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}(p-q)}=\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(p-q),$$

$$\frac{\text{wst}\,p-\text{wst}\,q}{\text{dost}\,q-\text{dost}\,p}=\frac{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}(p+q)}{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(p+q)}=\text{doty}\,\tfrac{1}{2}(p+q),$$

$$\frac{\text{dost}\,p+\text{dost}\,q}{\text{dost}\,q-\text{dost}\,p}=\frac{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}(p+q)\,\text{dost}\,\tfrac{1}{2}(p-q)}{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(p+q)\,\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(p-q)}=\frac{\text{doty}\,\tfrac{1}{2}(p+q)}{\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(p-q)}.$$

Z pomiędzy tych wzorów, piérwszy szczególnie zasługuje na uwagę, który w ten sposób wysłowić się może: *summa wstaw dwóch łuków tak się ma do ich różnicy, jak styczna połowy summy tychże łuków do stycznéj połowy ich różnicy.*

41. Czytając dzieła matematyczne, natrafiamy niekiedy na wyrażenia, których początku nie łatwo zgadnąć. W takim przypadku najlepiéj sprawdzić też wyrażenia, w czém nie ma żadnéj trudności.

Naprzykład, aby dojść zkąd powstało równanie

$$\text{wst}\,(a+b)\,\text{wst}\,(a-b)=\text{wst}^2 a-\text{wst}^2 b,$$

dosyć jest w niém położyć wartości za wst $(a+b)$ i wst $(a-b)$ **(28)**, a wypadnie

$$\text{wst}\,(a+b)\,\text{wst}\,(a-b)=\text{wst}^2 a\,\text{dos}^2 b-\text{dost}^2 a\,\text{wst}^2 b;$$

następnie wstawiwszy znowu za $\text{dost}^2 a$ i $\text{dost}^2 b$, ich wartości $1-\text{wst}^2 a$ i $1-\text{wst}^2 b$; i wykonawszy redukcyę, otrzymamy równanie dane

Podobnież, mając sprawdzić równanie

$$\text{dost}\,a=\frac{1-\text{sty}^2\,\tfrac{1}{2}a}{1+\text{sty}^2\,\tfrac{1}{2}a},$$

trzeba w nie wstawić $\dfrac{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}a}{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}a}$ za sty $\tfrac{1}{2}a$, a druga strona równania danego zamieni się na

$$\frac{\text{dost}^2\,\tfrac{1}{2}a-\text{wst}^2\,\tfrac{1}{2}a}{\text{dost}^2\,\tfrac{1}{2}a+\text{wst}^2\,\tfrac{1}{2}a};$$

lecz podług powyższego (**20** i **29**) $\text{dost}^2 \frac{1}{2}a + \text{wst}^2 \frac{1}{2}a = 1$ i $\text{dost}^2 \frac{1}{2}a - \text{wst}^2 \frac{1}{2}a = \text{dost}\, a$; a zatém taż druga strona równa jest dost a: co było do okazania.

Tym samym sposobem postępując, przekonać się można dla wprawy o rzetelności następujących jeszcze wzorów:

$$\text{dost}\,(a+b)\,\text{dost}\,(a-b) = \text{dost}^2 a - \text{wst}^2 b,$$

$$\text{sty}\,(50^\circ + a) = \frac{1+\text{sty}\, a}{1-\text{sty}\, a},$$

$$\text{dost}\, a = \frac{1}{1+\text{sty}\, a\ \text{sty}\, \frac{1}{2}a},$$

$$\text{sty}\, a + \text{sty}\, b = \frac{\text{wst}\,(a+b)}{\text{dost}\, a\ \text{dost}\, b},$$

$$\text{sty}\, a + \text{sty}\, b + \text{sty}\, c = \text{sty}\, a\ \text{sty}\, b\ \text{sty}\, c.$$

Ostatnie z tych równań uczy: *że dobiérać można w nieskończenie różnym sposobie trzy takie ilości, których summa równa będzie ich iloczynowi;* ale pamiętać zarazem trzeba, że to równanie wtenczas tylko jest prawdziwe, kiedy $a+b+c=180^\circ$.

DOWODZENIA GEOMETRYCZNE WZORÓW WYŻEJ WYPROWADZONYCH.

42. Czytelnik niewątpliwie uważał, że, w powyższym wykładzie, wzory na wstawę i dostawę łuków $a+b$ i $a-b$ wyprowadzono za pomocą geometryi; inne zaś wzory otrzymano przez rachunek algebraiczny. Ztąd wypada, że jeżeli prawdziwość piérwszych wzorów była okazaną dla wszelkich możliwych łuków; i drugie uważać się powinny w tymże stopniu za ogólnie pewne: bo to właśnie jest istotném znamieniem sposobu analitycznego. Przeciwnie zaś, używając wykreśleń geometrycznych, zawsze obawiać się potrzeba, czy prawdy wywiedzione nie stosują się do tych tylko przypadków, które figury wyobrażają: ztémwszystkiém, ponieważ prawdy matematyczne przez wykreślenia stają się oczywistszemi; dobrze przeto będzie dowieść jeszcze sposobem geometrycznym główniejsze wzory, któreśmy wyżéj otrzymali drogą algebraiczną.

43. *Mając daną wstawę i dostawę pewnego łuku, znaleźć wstawę i dostawę łuku dwa razy większego.*

Fig. 6.

Niech będzie (fig. 6) łuk $AB = BC = a$. Zrobiwszy wykreślenie takie, jakie figura pokazuje, będzie

$$\text{wst}\, a = AP,\ \text{dost}\, a = OP,$$
$$\text{wst}\, 2a = CQ = 2PH$$
$$\text{dost}\, 2a = OQ = OH - QH = OH - AH.$$

Trójkąt prostokątny OPA daje

$$PH = \frac{AP \times OP}{OA},\quad OH = \frac{\overline{OP}^2}{OA},\quad AH = \frac{\overline{AP}^2}{OA};$$

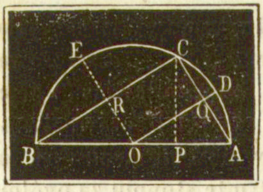
wstawiwszy więc za te linie wartości ich trygonometryczne, i przyjąwszy promień $OA = 1$, będzie

$$\text{wst}\, 2a = 2PH = 2\ \text{wst}\, a\ \text{dost}\, a,$$
$$\text{dost}\, 2a = OH - AH = \text{dost}^2 a - \text{wst}^2 a.$$

To są wzory [1] i [2] n. **28.**

44. *Mając daną dost* a, *znaleźć wst* $\frac{1}{2}$a *i dost* $\frac{1}{2}$a.

Fig. 7.



Niech będzie (fig. 7): łuk $AC = a$; CP prostopadła do średnicy AB; OD i OE promienie prostopadłe do cięciw AC i BC, i przez ich środki przechodzące. Przyjąwszy, jak wyżéj, $OA = 1$, będzie $OP = \text{dost}\, a$, $AP = 1 - \text{dost}\, a$, $BP = 1 + \text{dost}\, a$, $AC = 2\ \text{wst}\ \frac{1}{2} a$, $BC = 2\ \text{dost}\ \frac{1}{2} a$. Lecz każda z tych cięciw jest średnio-geometrycznie proporcyonalną do średnicy i odcinka jéj przyległego; więc

$$\overline{AC}^2 = AB \times AP \quad \text{czyli} \quad 4\ \text{wst}^2\ \tfrac{1}{2} a = 2(1 - \text{dost}\, a),$$
$$\overline{BC}^2 = AB \times BP \quad \text{czyli} \quad 4\ \text{dost}^2\ \tfrac{1}{2} a = 2(1 + \text{dost}\, a).$$

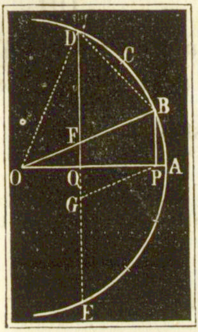
A ztąd wypadają wzory znane (**31**)

$$\text{wst}\ \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \text{dost}\, a}{2}},\qquad \text{dost}\ \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 + \text{dost}\, a}{2}}.$$

45. *Mając daną wstawę i dostawę łuku, znaleźć wstawę i dostawę łuku trzy razy większego.*

Niech będzie (fig. 8) $OB=1$ i łuk $AB=BC=CD=a$. Trójkąt równoramienny BOD podobny jest do trójkąta BDF: gdyż kąt

Fig. 8.



OBD jest spólny tym obudwom trójkątom, i kąt BDE, mający za miarę $\frac{1}{2}$ BE czyli BD, równy jest kątowi BOD. Więc jest

$$BF:BD=BD:BO \text{ zkąd } BF=4\,\mathrm{wst}^2 a.$$

Poprowadziwszy równoodległą PG od BF, będzie $PG=BF=4\,\mathrm{wst}^2 a$, a trójkąty podobne QGP, OBP dają

$$QG:BP=PG:OB \text{ zkąd } QG=4\,\mathrm{wst}^3 a;$$
$$PQ:OP=PG:OB \text{ zkąd } PQ=4\,\mathrm{wst}^2 a\,\mathrm{dost}\,a.$$

Że zaś

$$\mathrm{wst}\,3a=DQ=DF+FG-QG$$
$$=BD+BP-QG=3\,\mathrm{wst}\,a-QG,$$
$$\mathrm{dost}\,3a=OQ=OP-PQ=\mathrm{dost}\,a-PQ\,;$$

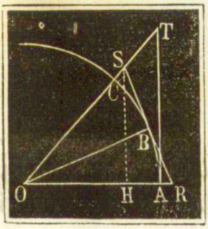
więc, wstawiwszy w te wyrażenia wartości wyżéj znalezione na QG i PQ, będzie

$$\mathrm{wst}\,3a=3\,\mathrm{wst}\,a-4\,\mathrm{wst}^3 a,$$
$$\mathrm{dost}\,3a=\mathrm{dost}\,a-4\,\mathrm{wst}^2 a\,\mathrm{dost}\,a.$$

Piérwsze z tych równań jestto wzór [3] n. **30**; z drugiego zaś, po wstawieniu w niém $1-\mathrm{dost}^2 a$ za $\mathrm{wst}^2 a$, wypadnie wzór [4].

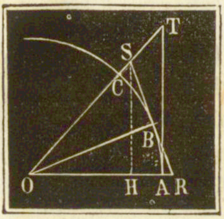
46. *Mając dane styczne dwóch łuków, znaleźć styczną ich summy i ich różnicy.*

Fig. 9.



Niech będzie (fig. 9) $OA=1$, $AB=a$, $BC=b$: z końców promieni OA i OB, niech będą wyprowadzone styczne AT i BS aż do przecięcia się z przedłużonemi promieniami OC i OA w punktach T, S i R; a z punktu S, niech będzie spuszczona prostopadła SH na OA. Podług wysłowienia tego zagadnie-

Fig. 9.



nia dane są BR = sty a, BS = sty b; a znaleźć trzeba AT = sty $(a+b)$.

Trójkąty podobne OAT i OHS dają

$$\frac{AT}{OA}=\frac{SH}{OH}\ \text{zkąd}\ \text{sty}\,(a+b)=\frac{SH}{OH}.$$

Wartość na SH otrzymuje się z trójkątów podobnych SHR i OBR: gdyż z nich wypada

$$\frac{SH}{SR}=\frac{CB}{OR};\ \text{zkąd}\ SH=\frac{\text{sty}\,a+\text{sty}\,b}{OR}.$$

Wartość na OH wynajdziemy następującym sposobem. Wiadomo z Geometryi elementarnéj, że

$$\overline{SR}^2=\overline{OR}^2+\overline{OS}^2-2OR\times OH.$$

Lecz

$$\overline{SR}^2=(BR+BS)^2=\overline{BR}^2+\overline{BS}^2+2BR\times BS;$$

więc

$$\overline{BR}^2+\overline{BS}^2+2BR\times BS=\overline{OR}^2+\overline{OS}^2-2OR\times OH.$$

Ztąd wypada

$$2OR\times OH=\overline{OR}^2-\overline{BR}^2+\overline{OS}^2-\overline{BS}^2-2BR\times BS$$
$$=2\overline{OB}^2-2BR\times BS=2-2\ \text{sty}\,a\ \text{sty}\,b;$$

a zatém

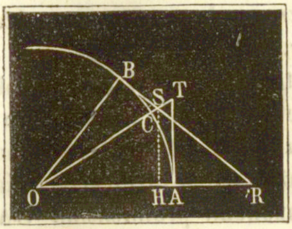
$$OH=\frac{1-\text{sty}\,a\ \text{sty}\,b}{OR}.$$

Wstawiwszy w równanie sty $(a+b)=\frac{SH}{OH}$ wartości za SH i OH, wypadnie wzór znany (**34**)

$$\text{sty}\,(a+b)=\frac{\text{sty}\,a+\text{sty}\,b}{1-\text{sty}\,a\ \text{sty}\,b}.$$

Równie łatwo znaleźć można wartość na sty $(a-b)$. W tym razie dosyć jest uważać fig. 10, gdzie AC $=a-b$, aby natychmiast przekonać się, iż tu taki sam zachodzić będzie rachunek, jaki

Fig. 10.



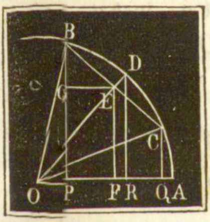
wyżéj miał miejsce dla sty $(a+b)$, z tą tylko różnicą, że drugie wyrazy w licznikach wartości na SH i OH zmienią znaki na przeciwne: gdyż w tym przypadku RS=sty a—sty b; będzie więc

$$\text{sty}\,(a-b)=\frac{\text{sty}\,a-\text{sty}\,b}{1+\text{sty}\,a\ \text{sty}\,b}.$$

47. *Dowieść geometrycznie wzory:*

$$\text{wst}\,p+\text{wst}\,q=2\ \text{wst}\ \tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,(p-q),$$
$$\text{wst}\,p-\text{wst}\,q=2\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \text{wst}\ \tfrac{1}{2}\,(p-q).$$

Fig. 11.



Niech będzie (fig. 11) AB=p i AC=q. Poprowadziwszy cięciwę BC, oraz promień OD, prostopadły do téj cięciwy, i przechodzący przez jéj środek E; spuściwszy prostopadłe BP, CQ, DR, EF na OA; i nakreśliwszy równoodległą EG od OA, będzie podług figury

$$\text{BP}=\text{wst}\,p,\ \text{CQ}=\text{wst}\,q,\ \text{EF}=\frac{\text{wst}\,p+\text{wst}\,q}{2},\ \text{BG}=\frac{\text{wst}\,p-\text{wst}\,q}{2},$$
$$\text{AD}=\tfrac{1}{2}\,(p+q),\ \text{DR}=\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,(p+q),\ \text{OR}=\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,(p+q),$$
$$\text{BD}=\tfrac{1}{2}\,(p-q),\ \text{BE}=\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,(p-q),\ \text{OE}=\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,(p-q).$$

Lecz trójkąty podobne OEF, ODR dają

$$\text{EF}:\text{DR}=\text{OE}:\text{OD}\quad\text{i}\quad\text{BG}:\text{OR}=\text{BE}:\text{OD},$$

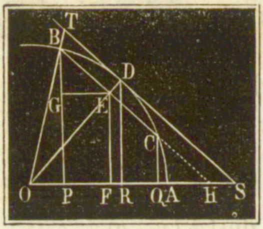
zkąd
$$\text{EF}=\frac{\text{DR}\times\text{OE}}{\text{OD}}\quad\text{i}\quad\text{BG}=\frac{\text{OR}\times\text{BE}}{\text{OD}}.$$

Włożywszy w te ostatnie wyrażenia za wszystkie linie wartości ich trygonometryczne; podwoiwszy też wyrażenia, i uczyniwszy w nich promień OD=1, wypadną wzory dane.

Z tych samych trójkątów otrzymać można ważności na dost p+dost q i dost q—dost p.

48. *Dowieść geometrycznie, że summa wstaw dwóch łuków tak się ma do ich różnicy, jak styczna połowy summy tychże łuków do stycznéj połowy ich różnicy.*

Fig. 12.



Zrobiwszy takie samo wykreślenie, jak pod n. poprzedzającym; a nadto poprowadziwszy przez punkt D (fig. 12) styczną ST, i przedłużywszy ją aż do przecięcia się z przedłużonemi promieniami OA i OB w punktach S i T; i nareszcie przeciągnąwszy cięciwę BC aż do punktu H, na mocy linij równoodległych, będzie

$$\frac{EF}{BG}=\frac{EH}{EB}=\frac{DS}{DT}.$$

Lecz $\quad 2EF=\text{wst}\,p+\text{wst}\,q,\quad 2BG=\text{wst}\,p-\text{wst}\,q,$

$DS=\text{sty}\,AD=\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(p+q),\quad DT=\text{sty}\,DB=\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(p-q)$;

a zatém

$$\frac{\text{wst}\,p+\text{wst}\,q}{\text{wst}\,p-\text{wst}\,q}=\frac{\text{sty}\,\frac{1}{2}(p+q)}{\text{sty}\,\frac{1}{2}(p-q)}:$$

co było do okazania.

ROZDZIAŁ DRUGI.

TABLICE TRYGONOMETRYCZNE I ROZWIĄZYWANIE TRÓJKĄTÓW PROSTOKREŚLNYCH.

WYRACHOWANIE TABLIC TRYGONOMETRYCZNYCH.

49. Zamiana kątów i łuków na wstawy, dostawy, i t. d., wtenczas dopiéro istotną korzyść przynosi, kiedy wiadome są wartości liczebne tych stosunków dla jakiegokolwiek łuku danego; i odwrotnie. Potrzebie téj najdogodniéj zaradzają tablice, w których liczby, wyrażające długości linij trygonononometrycznych, położone są obok odpowiadających im łuków. Przedewszystkiém więc poznać trzeba, jak się obliczają wartości na wstawy, dostawy, i t. d. wszystkich łuków, oznaczonych w częściach podziału okręgu koła na 360° i rosnących ciągle o 10″, tojest, następujących po sobie tak, jak w tablicach *Calleta*. Sposób dochodzenia wartości liczebnych linij trygonometrycznych, który tu będzie podany, użyty być może i do łuków danych w częściach nowego podziału koła na 400°.

Obliczmy naprzód wstawę łuku 10″. Wiadomo, że stosunek okręgu koła do jego średnicy jest

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89795\ldots$$

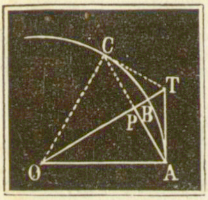
Jeżeli zatém promień koła przyjmiemy równy jedności, tedy długość połowy obwodu koła będzie π. A ponieważ 180° czynią 648000 sekund; przeto w częściach tego promienia

$$[1] \qquad \text{łuk } 10'' = \frac{\pi}{64800} = 0{,}00004\ 84813\ 68110\ldots$$

Lecz łuk bardzo mały prawie równy jest swojéj wstawie; a zatém liczba powyższa uważać się także może za wartość bardzo przybliżoną dla wstawy 10″. Wniosek ten jednak należy jeszcze bliżéj roztrząsnąć i usprawiedliwić.

50. W tym celu okażmy naprzód: *że w piérwszéj ćwiartce koła łuk większy jest od swojéj wstawy, a mniejszy od swojéj stycznéj.*

Fig. 13.



Niech AP (fig. 13) będzie wstawą łuku AB, a AT jego styczną. Obróciwszy tę figurę na około prostéj OT i złożywszy ją we dwoje, niechaj punkt A przypadnie na punkt C. Będzie tu łuk AC $>$ od cięciwy AC; a tém samém łuk AB $>$ AP: więc łuk większy jest od swojéj wstawy. Podobnie łuk AC $<$ AT $+$ CT; a zatém AB $<$ AT: więc łuk mniéjszy jest od swojéj stycznéj.

Ztąd wypada: że, jeżeli $\frac{\text{sty}\, a}{\text{wst}\, a}$ bardzo mało różni się od jedności, stosunek $\frac{a}{\text{wst}\, a}$ mniéj jeszcze od jedności różnić się będzie.

51. Powtóre należy dowieść: *że, jeżeli łuk pewien zmniejsza się aż do zera; stosunek tego łuku do jego wstawy przybliżać się może do jedności, tojest, że granica tego stosunku jest jedność.*

Wzór $\text{sty}\, a = \frac{\text{wst}\, a}{\text{dost}\, a}$ (28) daje $\frac{\text{sty}\, a}{\text{wst}\, a} = \frac{1}{\text{dost}\, a}$. A że w miarę zmniéjszania się łuku a (który przyjmuje się $< 90°$), dostawa jego powiększa się i coraz bardziéj do jedności się przybliża; więc i stosunek $\frac{1}{\text{dost}\, a}$, czyli mu równy $\frac{\text{sty}\, a}{\text{wst}\, a}$, zmniéjsza się i ma za granicę jedność.

Lecz łuk większy jest od wstawy a mniéjszy od stycznéj; przeto stosunek $\frac{a}{\text{wst}\, a}$ nigdy nie może się stać $<$ od 1, ani téż $>$ od

$\frac{\text{sty}\,a}{\text{wst}\,a}$. A ponieważ ten ostatni stosunek dowolnie przybliżony być może do jedności; zatém to samo i o stosunku $\frac{a}{\text{wst}\,a}$ twierdzić można: co było do okazania; i dla téj przyczyny wolno wziąć wartość łuku 10″ za wstawę 10″.

52. Wypada teraz ocenić błąd, jaki się popełnia, biorąc łuk za wstawę tego łuku: bo znalazłszy ten błąd, tém samém wiedzieć będziemy, ile cyfer dziesiętnych opuścić można w liczebnéj wartości na wstawę. Wiadomo, że $\text{wst}\,a = 2\,\text{wst}\,\frac{1}{2}a\ \text{dost}\,\frac{1}{2}a$. Prócz tego z nierówności $\text{sty}\,\frac{1}{2}a > \frac{1}{2}a$ czyli $\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}a}{\text{dost}\,\frac{1}{2}a} > \frac{1}{2}a$ wypada $2\,\text{wst}\,\frac{1}{2}a > a\ \text{dost}\,\frac{1}{2}a$; więc będzie

$$\text{wst}\,a > a\,\text{dost}^2\,\tfrac{1}{2}a.$$

Lecz $\text{dost}^2\,\frac{1}{2}a = 1 - \text{wst}^2\,\frac{1}{2}a$, a zatém będzie także $\text{dost}^2\,\frac{1}{2}a$ większa od $1 - (\frac{1}{2}a)^2$; więc

$$\text{wst}\,a > a - \frac{a^3}{4}$$

Otóż, stosując ten wypadek do łuku 10″, niechaj wartość [1] w 5éj cyfrze dziesiętnéj powiększoną zostaje o jedność, będzie łuk $10'' < 0{,}00005$; więc $\frac{1}{4}$ (łuk $10''$)$^3 < 0{,}00000\ 00000\ 00032$; a tém samém wypadnie

$$\text{wst}\,10'' > \begin{cases} 0{,}00004\ 84813\ 68110\ldots \\ -0{,}00000\ 00000\ 00032; \end{cases}$$

więc $\quad \text{wst}\,10'' > 0{,}00004\ 84813\ 68078\ldots$

Z tego pokazuje się, że wstawa ta zaczyna się różnić od łuku 10″ dopiéro w 13éj cyfrze dziesiętnéj, i że ten łuk większym jest o jedność téjże 13éj cyfry dziesiętnéj. Uczyniwszy więc

$$\text{wst}\,10'' = 0{,}00004\ 84813\ 681,$$

pewnym być można, że błąd mniéjszym będzie od jedności porządku 13go. Jakoż widoczna jest, że wartość powyższa wypadłaby za małą, gdyby od ostatniéj jéj cyfry jedność odjęto; a przeciwnie za wielką, gdyby do téjże ostatniéj cyfry jedność dodano: bo przez to wstawa stałaby się większą od łuku.

Wstawiwszy wartość znalezioną na wst 10″ w wyrażeniu $\sqrt{1-\text{wst}^2\,10''}$, wypadnie wartość na dost 10″, tojest:

$$\text{dost}\,10''=0{,}99999\ 99988\ 248.$$

Następnie, za pomocą wzorów znanych

$$\text{wst}\,(a+b)=\text{wst}\,a\ \text{dost}\,b+\text{dost}\,a\ \text{wst}\,b,$$
$$\text{dost}\,(a+b)=\text{dost}\,a\ \text{dost}\,b-\text{wst}\,a\ \text{wst}\,b,$$

wyrachować można kolejno wstawy i dostawy łuków 20″, 30″, 40″,... aż do 45°.

53. Wyrachowania te daleko prędzéj dokonywają się sposobem następującym, podanym przez Tomasza Simpson, geometry angielskiego.

Wzory n. **38** dają

$$\text{wst}\,(a+b)=2\,\text{dost}\,b\ \text{wst}\,a-\text{wst}\,(a-b),$$
$$\text{dost}\,(a+b)=2\,\text{dost}\,b\ \text{dost}\,a-\text{dost}\,(a-b).$$

Tu łuki $a-b$, a i $a+b$ uważać można za trzy po sobie idące wyrazy postępu arytmetycznego, którego różnica jest b: nazwawszy trzy te wyrazy przez t, t', t'', będzie

$$\text{wst}\,t''=2\,\text{dost}\,b\ \text{wst}\,t'-\text{wst}\,t,$$
$$\text{dost}\,t''=2\,\text{dost}\,b\ \text{dost}\,t'-\text{dost}\,t.$$

Piérwszy z tych wzorów pokazuje: że, gdy dwie po sobie idące wstawy już są obliczone, wstawa następna otrzymuje się mnożąc drugą wiadomą wstawę przez 2 dost b, piérwszą zaś przez -1, i dodając potém te dwa iloczyny do siebie. Takie samo prawidło służy do wyrachowania dostaw.

Chcąc więc znaleźć wartości liczebne na wstawy i dostawy od 10 do 10 sekund, dosyć jest uczynić $b=10''$, i nazwać wartości znane na wst 10″ i dost 10″ przez α i β, a będzie

$\text{wst}\ 0=0,$	$\text{dost}\ 0=1,$
$\text{wst}\,10''=\alpha,$	$\text{dost}\,10''=\beta,$
$\text{wst}\,20''=2\beta\ \text{wst}\,10''$	$\text{dost}\,20''=2\beta\ \text{dost}\,10''-1,$

$\text{wst}\,30''=2\beta\ \text{wst}\,20''-\text{wst}\,10''$,	$\text{dost}\,30''=2\beta\,\text{dost}\,20''-\text{dost}\,10''$,
$\text{wst}\,40''=2\beta\ \text{wst}\,30''-\text{wst}\,20''$,	$\text{dost}\,30''=2\beta\,\text{dost}\,29''-\text{dost}\,10''$,
i t. d.	i t. d.

Ponieważ 2β bez mała równa się 2 jednościom; przeto rachunek jeszcze uproszcić można. Niech k znaczy różnicę $2-2\beta$, będzie $k=0{,}00000\ 00023\ 504$, i $2\beta=2-k$. A tém samém wypada

$$\text{wst}\,t''=2\ \text{wst}\,t'-k\ \text{wst}\,t'-\text{wst}\,t\,,$$

zkąd $$\text{wst}\,t''-\text{wst}\,t'=(\text{wst}\,t'-\text{wst}\,t)-k\ \text{wst}\,t'.$$

Jeżeli różnica $\text{wst}\,t''-\text{wst}\,t'$ będzie wyrachowana, dosyć jest dodać ją do $\text{wst}\,t'$, aby otrzymać wartość na $\text{wst}\,t''$. A że, podług dopiéro otrzymanego równania, taż różnica równa jest wprzód obliczonéj różnicy $\text{wst}\,t'-\text{wst}\,t$ mniéj iloczynem $k\,\text{wst}\,t'$; zatém jedyném mozolném działaniem, które się przy wyrachowaniu każdéj z kolei wstawy powtórzy, będzie mnożenie wartości wstawy ją poprzedzającéj przez liczbę stałą $k=0{,}00000\ 00023\ 504$. Ale i to działanie można sobie ułatwić, obliczając wprzód iloczyny liczby 23504 przez liczby porządkowe 1, 2, 3,... aż do 9: tym sposobem cząstkowe iloczyny, z których się składają wyrażenia takie, jakim jest iloczyn $k\,\text{wst}\,t'$, już będą wiadome; i pozostanie tylko te iloczyny dododać do siebie. Tym samym prawie sposobem dochodzą się także wartości na dostawy.

W ciągu tak rozwlekłych wyrachowań, błędy znacznie mnożyć się mogą; i łatwo przewidzieć, iż ustrzeżenie się ich w trzynastu cyfrach dziesiętnych aż do końca roboty prawie jest niepodobna. Aby więc sprawdzić wypadki, i przekonać się o stopniu ich dokładności; obliczymy inną jeszcze drogą, tu poniżéj (56) wskazaną, przybliżone i razem niemylne wartości pewnéj liczby wstaw i dostaw. Porównawszy następnie cyfry dziesiętne tych niemylnych wypadków z cyframi dziesiętnemi wartości przybliżonych, dochodzonych sposobem powyższym, z liczby cyfer jednakowych w obudwóch wypadkach dosyć pewno wniesiemy, które cyfry dziesiętne uważać będzie można za ścisłe w wypadkach pośrednich.

Jeżeli się pokaże, że te wypadki nie dosyć są przybliżone; aby dojść do dokładniejszych, rozpocząć potrzeba rachunek od łuku mniejszego niż 10″, n. p. od łuku 1″, i daléj sobie postąpić, jak się wyżéj powiedziało.

54. Stosując linie trygonometryczne do rozwiązywania zagadnień, liczby wyrażające te linie, nie tyle są użyteczne, ile ich logarytmy: dla téj przyczyny logarytmy te położone są w tablicach obok łuków. Lecz gdyby tu promień pozostał równy jedności: natenczas wstawy i dostawy byłyby ułamkami, a zatém logarytmy ich ilościami odjemnemi. Aby zamienić logarytmy odjemne na dodatne, przyjmuje się $r=10^{10}$, co znaczy, że promień podzielony został na 10 milionow równych części; ztąd logarytm jakiejbądź wstawy albo dostawy nie wypadnie już odjemny, chyba dla łuku tak mało różniącego się od 0, albo od 90°, iż różnica ta całkowicie może być pominięta.

Zresztą, wypadki z piérwszego przypuszczenia łatwo zamienić na takie, które drugiemu przypuszczeniu odpowiadają, mnożąc tamte przez 10^{10}, albo dodając 10 do ich logarytmów. Jakoż, znając stosunki wstaw i dostaw w przypuszczeniu piérwszém, kiedy $r=1$, oczywista jest: że, jeżeli promień podzielony będzie na m równych części; wszystkie pomienione stosunki rozmnożyć trzeba przez m, aby otrzymać liczby wyrażające ile takowych części zawiérają w sobie wstawa i dostawa.

55. Logarytmy stycznych wynajdują się za pomocą wzoru $\text{sty}\ a=\frac{r\ \text{wst}\ a}{\text{dost}\ a}$, który daje

$$\log.\ \text{sty}\ a=\log.\ \text{wst}\ a+(10-\log.\ \text{dost}\ a):$$

t. j. że logarytm stycznéj równy jest logarytmowi wstawy więcéj dopełnieniem arytmetyczném logarytmu dostawy.

Logarytmy znowu dotycznych otrzymują się z równania $\text{sty}\ a\ \text{doty}\ a=r^2$, z którego wypada

$$\log.\ \text{doty}\ a=10+(10-\log.\ \text{sty}\ a).$$

W niektórych tablicach dotyczne nie są zamieszczone; ale je łatwo znaleźć można: bo dosyć jest dodać 10 do dopełnienia arytmetycznego logarytmu stycznéj, aby mieć logarytm dotycznéj.

Sieczne i dosieczne wcale nie znajdują się w tablicach: gdyż logarytmy ich łatwo się otrzymują za pomocą logarytmów wstaw i dostaw. Te dwie linie zresztą bardzo rzadko są używane.

Tablice trygonometryczne zawsze rozciągają się tylko do 45°. Wstawy i dostawy łuków większych od 45° otrzymują się z dostaw i dotycznych; i *odwrotnie:* n. p. gdy $a > 45°$, będzie wst$=a$ dost $(90° - a)$. Tablice trygonometryczne tak są ułożone, że nie ma potrzeby wcale rachowania tego dopełnienia.

RACHUNEK WSTAW I DOSTAW OD 9° DO 9°, SŁUŻĄCYCH DO SPRAWDZENIA TABLIC.

56. Aby zrobić sprawdzenie, o którém wyżéj przy końcu n. **53** wspomnieliśmy, potrzeba wyrachować wstawy i dostawy łuków od 9° do 9°.

Niech będzie wst $18° = x$; tedy $2x$ będzie cięciwą łuku 36° czyli bokiem dziesięciokąta foremnego, w koło wpisanego. Otóż, bok ten równy jest większemu odcinkowi promienia, podzielonego w stosunku średnim i skrajnym; przyjąwszy więc promień $=1$, będzie $1 : 2x = 2x : 1 - 2x$. Ztąd wypada

$$x^2 + \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{4};$$

potém, rozwiązując to równanie i opuszczajac wartość odjemną na x, która tu jest niepotrzebna, będzie

$$x = \text{wst}\,18° = \text{dost}\,72° = \tfrac{1}{4}\,(-1 + \sqrt{5}).$$

Za pomocą téj wartości łatwo znajdziemy

$$\sqrt{1 - x^2} = \text{dost}\,18° = \text{wst}\,72° = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Te wartości wst 18° i dost 18° wstawiwszy za wst a i dost a we wzory na wst $2a$ i dost $2a$ (**29**), wypadnie

$$\text{wst}\,36° = \text{dost}\,54° = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$
$$\text{dost}\,36° = \text{wst}\,54° = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5}).$$

Tę samą wartość wst 18° położywszy znowu we wzory na wst $\frac{1}{2}a$ i dost $\frac{1}{2}a$, wyrażone przez wst a (**32**), będzie

$$\text{wst } 9° = \text{dost } 81° = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\text{dost } 9° = \text{wst } 81° = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

Nakoniec, włożywszy w też same wzory za wst a wartość wst $54° = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$, wypadnie

$$\text{wst } 27° = \text{dost } 63° = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\text{dost } 27° = \text{wst } 63° = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

Z drugiéj strony, wiedząc że (**8**) wst $45° = \text{dost } 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, łatwo ułożymy następującą tablicę:

$$\begin{aligned}
\text{wst } 0° &= \text{dost } 90° = 0,\\
\text{wst } 9° &= \text{dost } 81° = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},\\
\text{wst } 18° &= \text{dost } 72° = \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}),\\
\text{wst } 27° &= \text{dost } 63° = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},\\
\text{wst } 36° &= \text{dost } 54° = \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},\\
\text{wst } 45° &= \text{dost } 45° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\\
\text{wst } 54° &= \text{dost } 36° = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5}),\\
\text{wst } 63° &= \text{dost } 27° = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},\\
\text{wst } 72° &= \text{dost } 18° = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},\\
\text{wst } 81° &= \text{dost } \ 9° = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.\\
\text{wst } 90° &= \text{dost } \ 0° = 1.
\end{aligned}$$

Ponieważ wszystkie wyrażenia téj tablicy bardzo są proste i zawierają tylko piérwiastki kwadratowe; przeto nie trudno będzie otrzymać ich wartości ścisłe w tylu cyfrach dziesiętnych, ile się podoba. Teto wartości służyć właśnie powinny do sprawdzenia rachunku, opisanego pod n. **53**. Przez dalsze dzielenie łuków na dwie równe części, można nawet dojść do 4°30′ i 2°15′, a potém, biorąc kolejno wielokrotne z $2^\circ 15'$, znowu przyjść do łuków coraz większych: co do nowych użyćby się dało sprawdzeń. Takowych sprawdzeń wiele innych jeszcze być może; ale szczegóły podobne tu nie są na swojém miejscu.

UKŁAD I UŻYCIE TABLIC CALLETA.

57. Tablice *Calleta* są najlepsze dla dawnego podziału koła; tablice zaś *Bordy* dla nowego. Piérwsze zawiérają trzy różne rodzaje tablic, tojest: naprzód logarytmy liczb aż do 108000, których układ. i użycie zkądinąd powinno być wiadome; powtóre, logarytmy wstaw, stycznych i dostaw dla wszystkich łuków kolejno rosnących o jednę minutę nowego podziału okręgu koła; nareszcie, logarytmy wstaw, dostaw, stycznych i dotycznych od $10''$ do $10''$ podług dawnego podziału. W tém miejscu mowa tylko będzie o ostatnich tablicach: bo narzędzia do mierzenia kątów służące zwykle opatrzone są podziałem na 360°, a ztąd i wszystkie wyrachowania trygonometryczne do tego podziału odnosić się muszą.

58. W ostatnim dziale tablic *Calleta*, naprzód idą logarytmy wstaw (LOG—SIN) i stycznych (LOG—TANG) od sekundy do sekundy aż do 5°, a tém samém także logarytmy dostaw i stycznych większych od 85°. Z téj części działu tego brać należy logarytmy, gdy łuki dane zawarte są między wspomnionemi granicami. Potém następują logarytmy wstaw, dostaw, stycznych i dotycznych od $10''$ do $10''$, które zamieszczone są w kolumnach pod napisami SINUS, COSIN., i t. d. Styczne albo dotyczne większe od promienia, mają za logarytmy liczby większe od 10: te dziesiątki w tablicach opuszczono; ale one zawsze dodać się powinny do logarytmów wypisanych z tablic.

Zwracając jedynie uwagę na stopnie położone u góry każdéj stronnicy, mniemaćby można, że tablice te rozciągają się tylko do 45°; lecz spostrzegłszy że kolumny, oznaczone u góry wyrazami: wstawa (SINUS), dostawa (COSINUS),... mają u dołu napisy: dostawa, wstawa,... nie trudno pojąć, iż po odczytaniu dolnego napisu stronnicy i stopni tam położonych, tudzież minut i sekund, umieszczonych w kolumnie wstępującéj po prawéj stronie tablicy, znaleźć się także powinny logarytmy wstaw, dostaw, i t. d. łuków od 45° do 90°.

Tak więc odrazu znajdziemy, że

$$L.\ \text{wst}\ 6^\circ\ 32'\ 30'' = 9{,}0566218,$$
$$L.\ \text{doty}\ 81^\circ 46' 20'' = 9{,}1601596.$$

59. Gdy kąt dany zawiéra sekundy i ułamki sekund, wtedy używają się *różnice*, stosując je tym samym sposobem, jak to przy rachunku za pomocą logarytmów liczb mą miejsce. To postępowanie zasadza się na tém, że różnice logarytmów wstaw, dostaw i t. d. uważają się za proporcyonalne do różnic odpowiadających im łukom: i chociaż ta proporcya nie jest ścisłą, ona jednak daje logarytmy dostatecznie przybliżone. Zresztą pamiętać trzeba, że logarytmy stycznych i dotycznych mają spólne różnice. Następujące przykłady bliżéj pokazują sposób rachowania.

1ód. *Znaleźć* L. wst 6° 32′ 37″, 8.

L. wst 6° 32′ 30″ (różnica jest 1836)	9,0566218
dla . . . . 7″	1285 2
dla 0, 8	146 88
L. wst 6° 32′ 37″, 8	9,0567650

2re. *Znaleźć* L. dost 83° 27′ 22″, 2.

L. dost 83° 27′ 30″ (róż. j. 1836)	9,0566218
dla . . . . . 7″	1285 2
dla 0, 8	146 88
L. dost 83° 27′ 22″, 2	9,0567650

3cie. *Znaleźć* L. sty 8° 13′ 52″, 76.

L. sty 8° 13′ 50″ (róż. j. 1486)	9,1603083
dla . . . 2″	297 2
dla . . . 0, 7	104 02
dla . . . 0, 06	8 916
L. sty 8° 15′ 52″, 76	9,1603493

4te. *Znaleźć* L. doty $81^\circ\ 46'\ 7'',24$.

Ł. doty $81^0\ 46'\ 10''$ (różnica jest 1486)	. . . . .	9,1603083
dla . . . . . $2''$	. . . .	297 2
dla . . . 0, 7	. . . .	104 02
dla 0, 06	. . . .	8 916
L. doty $81^0\ 46''\ 7',24$		9.1603493

60. Trzeba także umieć na odwrót znaleźć kąt, kiedy dany jest logarytm jego wstawy, dostawy i t. d. Na przykład, niech będzie dany L. wst $x=9,0567650$. W tablicach, pomiędzy logarytmami wstaw mniejszych od danego, znajdujemy: że najwięcéj do niego przybliżony jest 9,0566218, i że logarytm ten odpowiada $6^\circ 32'\ 30''$. Różnica tego logarytmu i danego wynosi 1432; różnica zaś tablicowa, odpowiadająca $10''$, jest 1836. Podzieliwszy 1432 przez 3836, tedy części dziesiętne wypadłego ilorazu będą sekundami. Tym sposobem otrzymuje się $7'',8$. Łukiem więc szukanym jest $x=6^\circ 32'\ 37'',8$. Rachunek tego przykładu, i innych podobnych, tu następuje:

1od. *Znaleźć kąt, którego* L. wst $=9,0567650$?

L. wst $x=9,0567650$			
dla	9,0566218 (róż. j. 1836)	. . . .	$6^0\ 32'\ 30''$
1-a reszta	14320	. . . .	$7''$
2-a reszta	14680	. . . .	0,8
			$x=6^0\ 32'\ 37'',8$

2re. *Znaleźć kąt, którego* L. dost $=9,0567650$?

L. dost $x=9,0567650$			
dla	9,0568054 (róż. j 1836)	. . . .	$83^0\ 27'\ 20''$
1-a reszta	4040	. . . .	$2''$
2-a reszta	3680	. . . .	0, 2
			$x=83^0\ 27'\ 22'',2$

3cie. *Znaleźć kąt, którego* L. sty $=9,1603493$?

L. sty $x=9,1603493$			
dla	9,1603083 (róż. j. 1486)	. . . .	$8^0\ 13'\ 50''$
1-a reszta	4100	. . . .	$2''$
2-a reszta	11280	. . . .	0, 7
3-a reszta	8780	. . . .	0, 06
			$x=8^0\ 13'\ 52'',76$

4te *Znaleźć kąt, którego* L. doty=9,1603493?

L. doty x=9,1603493			
dla	9.1604569 (róż. j. 1486)	....	81° 46′ 0″
1-a reszta	10760	....	7″
2-a reszta	3580	....	0,2
3-a reszta	6080	....	0,04
			x=81° 46′ 7″,24

61. Wzory zawiérające wstawy, dostawy, i t. p. prawie zawsze odnoszą się do promienia równego jedności. Aby przystosować tablice do tych wzorów, dwa różne na to są sposoby.

Sposób piérwszy polega na przywróceniu promienia r we wzoracb, jak się to wyżéj pod n. **19** pokazało, a potém na użyciu logarytmów lablicowych bez żadnéj zmiany, pamiętając przytém, że L. r=10.

Postępując podług drugiego sposobu, wzoru wcale się nie zmienia, tojest zachowuje się w nim r=1; lecz natomiast od każdego logarytmu wziętego z tablic trygonometrycznych odejmuje się 10. Dobrze jest zrobić to potrącenie tylko na cesze: że jednak taż cecha w wielu razach może wypaść odjemna; lepiéj będzie używać logarytmów tak, jak je w tablicach znajdujemy, a przynależne potrącenie wspomnionych dziesiątek zrobić razem na otrzymanym wypadku. Poprawka ta żadnéj trudności przedstawiać nie może: bo w ciągu rachunku logarytmy tylko się dodają, albo odejmują; i widoczna jest, że każdy logarytm dodatny, wzięty z tablic, będzie o 10 za wielki, a każdy logarytm odjemny o 10 za mały.

Aby skrócić rachunek, trzeba zawsze odejmowanie logarytmu zamienić na dodawanie jego *dopełnienia arytmetycznego*. W tym razie nie potrzeba odjąć 10 od logarytmu dla przywiedzenia go do promienia r=1, bo dziesiątek ten znosi się razem z drugim dziesiątkiem, dodanym do tegoż logarytmu z powodu wziętego dopełnienia. Zresztą, pomyłka o jeden dziesiątek na cesze w logarytmie tak jest znaczna, iż natychmiast dostrzeżoną być może. Dla lepszego wyjaśnienia tego, dołączają się jeszcze dwa następujące przykłady.

Przykład 1. Niech będzie $x=419\times \text{wst}^2\ 40^\circ$; a zatém L. x = L. 419 + 2 L. wst 40°. Wziąwszy L. wst 40 z tablic, będzie L. x o dwa razy 10 za wielki: co od wypadku odjąć potrzeba

L. 419	2,6222140
2 L. wst 40°	19,6161350
L x	2,2383490

Aby otrzymać wartość na x dokładnie aż do $\frac{1}{100}$, trzeba tylko dodać 2 do cechy; a wypadnie x=173,12.

Przykład 2. Niech będzie $x=\frac{314\times \text{wst}\ 30^\circ}{411\times \text{dost}^2\ 15^\circ}$, a zatém

L. wst x = L. 314 — L. 411 + L. wst 30° — 2 L. dost 14°.

Działając za pomocą dopełnień, widoczna jest, że 2 dziesiątki, mające się odjąć od 2 L. dost 15°, zastąpione są przez 2 dziesiątki, pochodzące z dopełnienia tegoż logarytmu; że L. wst 30° i dopełnienie L. 411 znowu wprowadzają do rachunku 2 dziesiątki za nadto. Lecz ponieważ łuk x znaleźć się ma za pomocą tablic; przeto od wypadku jeden tylko dziesiątek odjąć potrzeba: jakto wzór rachunku niżéj pokazuje. Dopełnienie arytmetyczne wyrażać będziemy przez L′.

L. 313	2,4969296 5
L′. 411	7,3861581 8
L. wst 30°	9,6989700
2 L′. dost 15°	0,0301124
L wst x	9,6121702

Na logarytmie tym poprawka już jest zrobiona; a zatém poszukawszy go w tablicach, znajdziemy x=24° 10′ 7″.

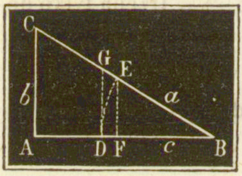
ZWIĄZKI MIĘDZY BOKAMI I KĄTAMI TRÓJKĄTA PROSTOKREŚLNEGO.

62. Dla skrócenia kąty trójkątów oznaczymy odtąd przez głoski A, B, C, położone u ich wierzchołków; a boki im przeciwne, wzięte odpowiednio, przez głoski a, b, c. Oraz, jeżeli trójkąt jest prostokątny, A będzie kątem prostym, zaś a przeciwprostokątną.

63. Twierdzenie I. *W trójkącie prostokątnym, każdy z boków przyległych kątowi prostemu jest równy przeciwprostokątnéj, pomnożonéj przez wstawę kąta temuż bokowi przeciwległego.*

Niech będzie ABC (fig. 14) trójkąt prostokątny przy A: z punktu B, jako środka, pomieniem jakimkolwiek nakreślmy łuk DE i spuśćmy prostopadłą EF na AB. Wstawa kąta B jest stosunkiem prostéj EF do promienia BE (18): a że trójkąty podobne BCA, BEF dają $\frac{AC}{BC}=\frac{EF}{BE}$: więc $\frac{b}{a}=$ wst B, czyli

Fig. 14.



[1] $$b=a \text{ wst B}.$$

Kąt B jest dopełnieniem kąta C; więc wst B = dost C. Można zatém powiedzieć: *że każdy z boków przyległych kątowi prostemu jest równy przeciwprostokątnéj, pomnożonéj przez dostawę kąta temuż bokowi przyległego.*

64. Twierdzenie II. *W trójkącie prostokątnym, każdy z boków przyległych kątowi prostemu jest równy drugiemu bokowi przyległemu, pomnożonemu przez styczną kąta piérwszemu bokowi przyległego.*

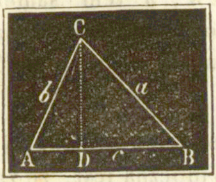
Niech tym trójkątem będzie ABC (fig. 14): nakreślmy łuk DE i wyprowadźmy prostopadłą DG do AB. Stosunek DG do BD jest styczną kąta B (18): a że $\frac{AC}{AB}=\frac{DG}{BD}$; więc $\frac{b}{c}=$ sty B, czyli

[2] $$b=c \text{ sty B}.$$

Wypadek ten można także wyprowadzić z Twierdzenia I: stosując je bowiem do obudwóch boków b i c, i pamiętając że wst C = dost B, będzie $b=a$ wst B, $c=a$ dost B; więc $\frac{b}{c}=\frac{\text{wst B}}{\text{dost B}}=$ sty B, czyli $b=c$ sty B.

65. Twierdzenie III. *W każdym trójkącie prostokreślnym, wstawy kątów mają się do siebie, jak boki im przeciwne.*

Fig. 15.

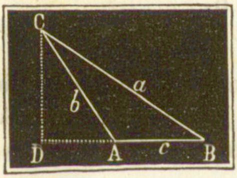


Niech A i B będą dwa jakiekolwiek kąty trójkąta ABC (fig. 15): z punktu C spuśćmy prostopadłą CD na bok AB. Gdy prostopadła ta pada wewnątrz trójkąta ABC, dwa trójkąty prostokątne ACD, BCD, dają CD$=b$ wst A i CD$=a$ wst B; więc b wst A$=a$ wst B, czyli

wst A : wst B$=a:b$.

Gdy zaś spodek prostopadłéj CD (fig. 16) pada na przedłużeniu boku BA zewnątrz trójkąta ABC, tedy trójkąt ACD daje CD$=b$ wst CAD. Lecz kąt CAD jest spełnieniem kąta CAB, zatém będzie (9) wst CAD$=$wst CAB$=$ wst A: a tém samém będzie także

Fig. 16.



[3] wst A : wst B$=a:b$.

66. Twierdzenie IV. *W każdym trójkącie prostokreślnym, kwadrat z jednego boku jest równy summie kwadratów z dwóch innych boków, mniéj podwójnym iloczynem z tychże boków przez dostawę kąta między niemi zawartego*, tojest

[4] $$a^2=b^2+c^2-2bc \text{ dost A}.$$

Niech będzie trójkąt ~~prostokątny~~ ostrokątny ABC (fig. 15): z wierzchołka jego C spuśćmy prostopadłą CD na AB. Gdy kąt A jest ostry, na mocy znanego twierdzenia, będzie

$$\text{CB}^2=\overline{\text{AC}}^2+\overline{\text{AB}}^2-2\,\text{AB}\times\text{AD}, \text{ czyli}$$

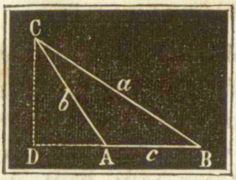
$$a^2=b^2\times c^2-2c\times\text{AD}.$$

A że trójkąt prostokątny ACD daje AD$=b$ dos A (63); więc wziąwszy tę wartość za AD, wypadnie równanie [4].

Gdy kąt A jest roztwarty (fig. 16), będzie

$$a^2=b^2+c^2+2c\times\text{AD}.$$

Fig. 16.



Trójkąt ACD daje AD=b dost CAD. Lecz kąt CAD jest spełnieniem kąta CAB czyli A; zatém dost CAD=—dost A (**9**): więc AD=—b dost A; a tém samém wstawiwszy tę wartość za AD w równanie poprzedzające, wypadnie znowu równanie [4].

67. Wszystkie sposoby rozwiązywania trójkątów prostokreślnych wywieść można z Twierdzenia IV. Widoczna jest, że zastosowawszy je kolejno do każdego z boków trojkąta, wypadną trzy następujące równania:

$$a^2=b^2+c^2-2bc \text{ dost A},$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac \text{ dost B},$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab \text{ dost C},$$

które służyć mogą do wyznaczenia trzech jakichkolwiek z sześciu części trójkąta, kiedy trzy inne są znane (wyjąwszy przypadek, gdy trójkąt jest niepodobny do wykreślenia, albo gdy dane są tylko trzy kąty).

68. Twierdzenie III, jako wyrażające związek między dwoma bokami i dwoma kątami im przeciwnemi, musi być wypadkiem z tych równań. Wywód jego jest następujący:

Piérwsze równanie daje dost A$=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; więc

$$\text{wst}^2\,\text{A}=1-\text{dost}^2\,\text{A}=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$
$$=\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2c^2},$$

a tém samém

$$\frac{\text{wst A}}{a}=\frac{\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}}{2abc}.$$

Z dwóch innych równań tak samo wyprowadzają się wartości stosunków $\dfrac{\text{wst B}}{b}$ i $\dfrac{\text{wst C}}{c}$. Lecz daleko łatwiéj otrzymują się te wartości, zamieniając w drugiéj stronie poprzedzającego równania: naprzód a na b i b na a, potém a na c i c na a. A że taż druga strona jest funkcyą symmetryczną ze zgłosek a, b, c, która przez jakąbądź zamianę tych głosek sama zmieniać się nie może; więc, zgodnie z Twierdzeniem III, będzie

$$\frac{\text{wst A}}{a}=\frac{\text{wst B}}{b}=\frac{\text{wst C}}{c}.$$

ROZWIĄZANIE TRÓJKĄTÓW PROSTOKREŚLNO-PROSTOKĄTNYCH.

69. Przypadek piérwszy. *Mając daną przeciwprostokątną* a *i jeden kąt ostry* B, *znaleźć drugi kąt ostry* C *i boki* b *i* c.

Naprzód mamy C=90°—B. Potém wyznacza się b i c za pomocą Twierdzenia I, które daje

$$b=a \text{ wst B}, \quad c=a \text{ dost B}.$$

Samo z siebie rozumie się, że do rachunku użyć potrzeba logarytmów.

70. Przypadek drugi. *Mając dany bok* b *przyległy kątowi prostemu i kąt osty* B, *znaleźć* C, a *i* c.

I tu jest C=90°—B. Podług Twierdzenia Iego mamy

$$b=a \text{ wst B}; \text{ zkąd } a=\frac{b}{\text{wst B}}:$$

a na mocy Twierdzenia II znajdziemy c z równania

$$c=b \text{ sty C}, \text{ albo } c=b \text{ doty B}.$$

71. Przypadek trzeci. *Mając daną przeciwprostokątną* a *i bok* b, *znaleźć bok* c *i kąty* B *i* C.

Podług własności trójkąta prostokątnego jest $c^2=a^2-b^2$, ztąd $c=\sqrt{(a+b)(a-b)}$: to wyrażenie łatwo oblicza się za pomocą logarytmów.

Kąt B wynajduje się wprost ze związku $b=a$ wst B (63), zkąd wst $B=\frac{b}{a}$ (*); i nareszcie $C=90°—B$.

Jeżeli rachunek rozpocznie się od znalezienia kątów, można także wyznaczyć pośrednio bok c z równania $c=a$ wst C.

72. Przypadek czwarty. *Mając dane dwa boki* b *i* c *przyległe kątowi prostemu, znaleźć przeciwprostokątną* a *i kąty* B *i* C.

Kąt B dochodzi się z równania $b=c$ sty B (Twierd. II). Kąt $C=90°—B$. Przeciwprostokątna a wynajduje się z równania $b=a$ wst B (Twierd. I).

Można także otrzymać a bezpośrednio ze wzoru $a=\sqrt{b^2+c^2}$. Lecz w tym razie logarytmów użyć nie można, bo b^2+c^2 nie daje się rozłożyć na czynniki; lepiéj więc jest naprzód wyrachować kąt B, a potém dopiéro znaleźć pośrednio wartość na a.

ROZWIĄZANIE TRÓJKĄTÓW PROSTOKREŚLNYCH JAKICHKOLWIEK.

73. Przypadek piérwszy. *Mając dany bok* a *i dwa kąty trójkąta, znaleźć inne jego części.*

Odejmując summę dwóch kątów danych od 180° wypada kąt trzeci. Potém, stosując Twierd. III, obliczają się dwa boki b i c z proporcyj

$$\text{wst A} : \text{wst B} = a : b, \quad \text{wst A} : \text{wst C} = a : c.$$

(*) Gdy b mało się różni od a; kąt B nie dosyć ściśle wypada, rachując podług wzoru wst $B=\frac{b}{a}$. W takim razie, chcąc dokładniejszą mieć wartość na kąt B, potrzeba obliczyć kąt C z równania wst $\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{a-b}{2a}}$, albo z równania sty $\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$. Te wartości na wst $\frac{1}{2}$C i sty $\frac{1}{2}$B łatwo otrzymują się ze wzorów: wst $\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1-\text{dost}\,a}{2}}$ n. 31 [8], sty $\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1-\text{dost}\,a}{1+\text{dost}\,a}}$ n. 37 [5], kładąc w nich dost C = wst $B=\frac{b}{a}$ za dost a, wst $\frac{1}{2}$C za wst $\frac{1}{2}a$ i sty $\frac{1}{2}$C za sty $\frac{1}{2}a$. (Przyp. Tłum.)

74. Przypadek drugi. *Mając dane dwa boki* a *i* b, *i kąt* A *przeciwny jednemu z nich, znaleźć bok trzeci* c *i dwa inne kąty* B *i* C.

Najprościéj jest naprzód znaleźć kąt B, przeciwny bokowi b z proporcyi

$$a : b = \text{wst A} : \text{wst B}.$$

A znając A i B, będzie $C = 180° - (A + B)$. Nakoniec c oblicza się z proporcyi

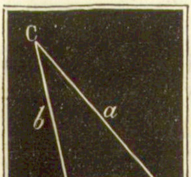
$$\text{wst A} : \text{wst C} = a : c.$$

75. Rozwiązanie to wymaga objaśnienia, co do wyrachowanéj wartości jednego z kątów niewiadomych. Z piérwszéj proporcyi naprzód wyznacza się B, tojest:

$$\text{wst B} = \frac{b \text{ wst A}}{a};$$

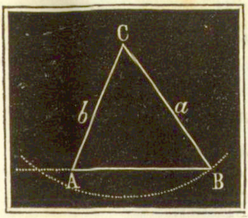
a następnie bierze się z tablic kąt ostry za wartość kąta B. Lecz taż sama wstawa odpowiada i kątowi, będącemu spełnieniem kąta ostrego B, a który jest kątem roztwartym; więc, nazwawszy kąt wzięty z tablic M, będziemy mieli dwie wartości na kąt szukany, tojest: $B = M$ i $B = 180° - M$: zkąd zdawać się może, że dwa są trójkąty. Następujący rozbiór to bliżéj wyjaśni:

Fig. 17.



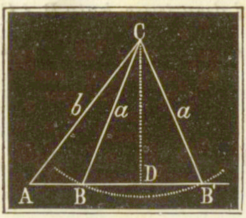
1ód. Gdy kąt dany A jest roztwarty, albo prosty (fig. 17), dwa inne kąty muszą być ostre; a zatém w tym razie wziąć tylko wypada $B = M$. Ale prócz tego powinno być $a > b$, i to téż wystarcza, iżby trójkąt mógł być nakreślony.

Fig. 18.



2re. Gdy kąt A jest ostry i $a > b$ (fig. 18), będzie téż $A > B$: i wtedy także wartość $B = 180° - M$ brać się nie powinna. W tym przypadku trójkąt zawsze może być wykreślony.

Fig. 19.



3cie. Lecz, gdy kąt A jest ostry i $a < b$, zarówno wziąć trzeba $B = M$ i $B = 180° - M$. W rzeczy saméj, niech będzie (fig. 19) kąt ostry $BAC = A$ i $AC = b$: natenczas koło, nakreślone promieniem a ze środka C, w pewnych przypadkach przetnie prostą AB w dwóch punktach B i B'; a zatém z części danych dwa takie trójkąty ACB i ACB' narysować można, w których kąty ABC i AB'C wzajemnie będą swemi spełnieniami. Warunkiem otrzymania dwóch rozwiązań jest to: że bok a, przyjęty $< b$, większy być powinien od prostopadłéj CD, spuszczonéj z wierzchołka C na bok AB. Gdy bok a równy jest prostopadłéj CD; koło, wyżéj wspomnione, będzie styczne do AB; a dwa powyższe rozwiązania przywodzą się do jednego trójkąta prostokątnego ACD. Nakoniec, gdy bok a mniejszy jest od CD; żadnego już rozwiązania nie będzie: to niepodobieństwo, jak zaraz okażemy, pokazuje téż sama wartość na wst B.

Trójkąt ACD daje $CD = b$ wst A. Ale podług założenia a mniejsze jest od CD; więc będzie

$$a < b \text{ wst A}; \quad \text{zkąd} \quad \frac{b \text{ wst A}}{a} > 1.$$

Więc wartość na wst B jest większa od jedności: a że nie ma wstawy, którąby mogła być większą od jedności; przeto i takiego nie ma trójkąta, któryby temu warunkowi zadosyć czynił.

76. Wyżéj wyprowadziliśmy wartość na bok c przechodząc przez kąt B. Ale wartość na c także otrzymać można bezpośrednio z danych a, b, A. Na mocy Twierd. IV jest

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ dost A}, \text{ czyli}$$
$$c^2 - 2b \text{ dost A}. \ c = a^2 - b^2.$$

Rozwiązując to równanie drugiego stopnia, wypada

$$c = b \text{ dost A} \pm \sqrt{a^2 - b^2 + b^2 \text{ dost}^2 \text{ A}}$$
$$= b \text{ dost A} \pm \sqrt{a^2 - b^2 \text{ wst}^2 \text{ A}}.$$

Ponieważ bok trójkąta zawsze musi być ilością rzeczywistą i dodatną; przeto wypadałoby roztrząsnąć, jakie wartości a, b i A mieć powinny, iżby jedna lub dwie takie wartości na c być mogły: lecz ten nader prosty rozbiór tu pominiemy.

Wartość poprzedzająca na c do rachunku logarytmami jest niedogodna, i dlatego téż w trygonometryi się nie używa. Z tém wszystkiém, ponieważ wyrażenia podobne często się trafiają; przeto pokażemy jeszcze sposób, używany przez astronomów, przerobienia ich na dogodniejsze do rachunku.

Naprzód nadać trzeba wartości na c tę postać:

$$c=b\,\mathrm{dost}\,A\pm a\sqrt{1-\frac{b^2\,\mathrm{wst}^2\,A}{a^2}}.$$

A ponieważ przypuszczono, że ta wartość jest rzeczywista; przeto ilość $\frac{b\,\mathrm{wst}\,A}{a}$ mniejsza być musi od 1, i uważać ją można za wyrażenie wstawy pewnego kąta φ, który się wyznacza, kładąc

$$\mathrm{wst}\,\varphi=\frac{b\,\mathrm{wst}\,A}{a}.$$

Naówczas będzie $b=\frac{a\,\mathrm{wst}\,\varphi}{\mathrm{wst}\,A}$, $\sqrt{1-\frac{b^2\,\mathrm{wst}^2\,A}{a^2}}=\mathrm{dost}\,\varphi$, a tém samém

$$c=\frac{a\,(\mathrm{wst}\,\varphi\,\mathrm{dost}\,A\pm\mathrm{wst}\,A\,\mathrm{dost}\,\varphi)}{\mathrm{wst}\,A}=\frac{a\,\mathrm{wst}\,(\varphi\pm A)}{\mathrm{wst}\,A}.$$

Wyrażenia te łatwo obliczają się za pomocą logarytmów.

Rozwiązanie to zgadza się zresztą zupełnie z wyżéj podaném, bo kąt posiłkowy φ jestto właśnie kąt B.

77. Przypadek trzeci. *Mając w trójkącie dane dwa boki* a, b *i kąt* C *między niemi zawarty, znaleźć bok* c *i kąty* A, B.

Podług Twierdzenia III mamy proporcyą

$$a:b=\mathrm{wst}\,A:\mathrm{wst}\,B,$$

w któréj A i B są nieznane. Lecz z niéj wypada

$$a+b:a-b=\mathrm{wst}\,A+\mathrm{wst}\,B:\mathrm{wst}\,A-\mathrm{wst}\,B.$$

Z drugiéj strony wiadomo (**40**), że

$$\text{wst A}+\text{wst B}:\text{wst A}-\text{wst B}=\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,(A+B):\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,(A-B):$$

więc będzie

[1] $$a+b:a-b=\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,(A+B):\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,(A-C).$$

A że $\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}(180^\circ-C)=90^\circ-\frac{1}{2}C$; zatém trzy piérwsze wyrazy téj proporcyi są znane: z niéj więc otrzymać można wartość na $\frac{1}{2}(A-B)$. Znając połowę summy i połowę różnicy kątów A i B, każdy z tych kątów wiadomy będzie: gdyż

$$A=\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2},\ \text{i}\ B=\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}.$$

Wyrachowawszy kąty A i B, łatwo potém wyznaczyć wartość na bok c z proporcyi

[2] $$\text{wst A}:\text{wst C}=a:c.$$

78. Proporcya ta wymaga szukania trzech nowych logarytmów z tablic, tojest: log. a, log. wst A i log. wst C. W następującym sposobie szuka się jeden logarytm mniéj.

Ponieważ jest wst A : wst B : wst C $=a:b:c$; zatém téż będzie

$$\text{wst A}+\text{wst B}:\text{wst C}=a+b:c,\ \text{ztąd}\ c=\frac{(a+b)\ \text{wst C}}{\text{wst A}+\text{wst B}}.$$

Podług wyżéj (**39** i **29**) podanych wzorów mamy wst A + wst B $=$ 2 wst $\frac{1}{2}$ (A + B) dost $\frac{1}{2}$ (A — B), wst C $=$ 2 wst $\frac{1}{2}$ C dost $\frac{1}{2}$ C; i z drugiéj strony wst $\frac{1}{2}$ (A + B) $=$ wst $(90^\circ-\frac{1}{2}C)=$ dost $\frac{1}{2}$ C. Wartości te wstawiwszy w wyrażenie na c, i skróciwszy wypadek, będzie

[3] $$c=\frac{(a+b)\ \text{wst}\,\frac{1}{2}\,C}{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,(A-B)}.$$

Logarytm ilości $a+b$, wchodzącéj w wyrażenie na c, już jest znany: więc, rachując podług wzoru [3], o jeden logarytm mniéj szukać trzeba, niż przy użyciu proporcyi [2].

79. Bok c wyznaczono wyżéj dopiéro po obliczeniu kątów

A i B. Chcąc otrzymać wartość na c bezpośrednio, wypada użyć Twierdzenia IV, które daje

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab \text{ dost C}}.$$

Lecz, że do tego wyrażenia logarytmów przystósować nie można; przeto użyć nadto potrzeba kąta posiłkowego. Z różnych wzorów na jakie to wyrażenie może być przerobione, wyprowadzimy zaraz ten tylko, który najwięcéj na uwagę zasługuje.

Wiadomo, że $\text{dost}^2 \tfrac{1}{2}\text{C}+\text{wst}^2 \tfrac{1}{2}\text{C}=1$ i $\text{dost}^2 \tfrac{1}{2}\text{C}-\text{wst}^2 \tfrac{1}{2}\text{C}=$ dost C (31); a zatém

$$c=\sqrt{(a^2+b^2)(\text{dost}^2 \tfrac{1}{2}\text{C}+\text{wst}^2 \tfrac{1}{2}\text{C})-2ab(\text{dost}^2 \tfrac{1}{2}\text{C}-\text{wst}^2 \tfrac{1}{2}\text{C})}$$

$$=\sqrt{(a+b)^2 \text{ wst}^2 \tfrac{1}{2}\text{C}+(a-b)^2 \text{ dost}^2 \tfrac{1}{2}\text{C}}$$

$$=(a+b)\text{wst}\tfrac{1}{2}\text{C}\sqrt{1+\frac{(a-b)^2 \text{ doty}^2 \tfrac{1}{2}\text{C}}{(a+b)^2}}.$$

Styczna wyrażać może wszelkiego rodzaju wielkości; wolno więc będzie położyć

$$\text{sty } \varphi=\frac{(a-b) \text{ doty} \tfrac{1}{2}\text{C}}{a+b}.$$

Natenczas ilość piérwiastkową w ostatniém z powyższych równań wyrazimy pod postacią

$$\sqrt{1+\text{sty}^2\varphi}=\sqrt{1+\frac{\text{wst}^2\varphi}{\text{dost}^2\varphi}}=\frac{1}{\text{dost } \varphi};$$

a tém samém mieć będziemy

$$c=\frac{(a+b) \text{ wst} \tfrac{1}{2}\text{C}}{\text{dost } \varphi}.$$

Tak więc, za pomocą dwóch tych wyrażeń na sty φ i c, łatwo obliczyć logarytmami naprzód kąt posiłkowy φ, a potém bok c.

Rozwiązanie to na pozór tylko inném jest od rozwiązania poprzedzającego: gdyż, ponieważ sty $\tfrac{1}{2}$ (A+B) jest równa doty $\tfrac{1}{2}$ C, i sty φ musi być równa sty $\tfrac{1}{2}$ (A—B), wyprowadzonéj z proporcyi [1]; a ztąd ostatnia także wartość na c zgołą taką samą jest, jaką wzór [3] daje.

80. W przystosowaniach często wydarza się, że boki dane są przez ich logarytmy. I tak, niech dane będą logarytmy boków a i b, oraz niech wiadomy będzie kąt C; i dajmy że potrzeba tylko wyrachować kąty A i B. Natenczas, aby obliczyć $\frac{1}{2}$ (A—B) z proporcyi [1], wprzód wyrachować wypada a i b za pomocą tablic; lecz można uniknąć tego rachunku przez wprowadzenie kąta posiłkowego. Jakoż, przyjąwszy że ψ znaczy kąt, otrzymany z równania sty $\psi=\frac{b}{a}$: tedy, na mocy wzoru [2] n. **34**, będzie

$$\text{sty}\,(45^\circ-\psi)=\frac{\text{sty}\,45^\circ-\text{sty}\,\psi}{1+\text{sty}\,45^\circ\,\text{sty}\,\psi}=\frac{1-\text{sty}\,\psi}{1+\text{sty}\,\psi};$$

a tém samém wstawiwszy $\frac{b}{a}$ za sty ψ, wypadnie

$$\text{sty}\,(45^\circ-\psi)=\frac{a-b}{a+b}.$$

Z drugiéj strony, proporcya [1], już przytoczona, daje

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{A}-\text{B})=\frac{a-b}{a+b}\,\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{A}+\text{B});$$

więc $\quad \text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{A}-\text{B})=\text{sty}\,(45^\circ-\psi)\,\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{A}+\text{B})$:

a ponieważ kąt ψ jest wiadomy; i $\frac{1}{2}$(A—B) łatwo się wynajdzie. Tak postępując, potrzeba będzie rachować dwa logarytmy mniéj, jak obliczając wprzód boki a i b.

81. Przypadek czwarty. *Mając dane trzy boki* a, b, c, *znaleźć kąty* A, B, C..

Na zasadzie Twierdzenia IV jest $a^2=b^2+c^2-2bc$ dost A;

więc $\quad \text{dost}\,\text{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$

Podobnym sposobem wyznaczają się kąty B i C. Lecz tu znowu zachodzi potrzeba użycia wzoru wygodniejszego do rachunku.

Z powyższego (**31**) wiadomo, że

$$2\,\text{wst}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{A}=1-\text{dost}\,\text{A}:$$

wstawiwszy w to wyrażenie wartość za dost A, będzie

$$2\,\mathrm{wst}^2\,\tfrac{1}{2}A = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{2bc}.$$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{2bc};$$

więc $$\mathrm{wst}\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{4bc}}.$$

Aby wzór ten krócéj wyrazić, niech będzie obwód $a+b+c$ trójkąta równy $2s$; a zatém $a+b-c=2s-2c=2(s-c)$, tudzież $a-b+c=2s-2b=2(s-b)$: więc

$$\mathrm{wst}\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}.$$

Ztąd wypada następujące prawidło: *Od połowy obwodu trójkąta, odejmuj kolejno każdy z dwóch jego boków zawiérających kąt szukany, podziel potém iloczyn z tych dwóch różnic przez iloczyn z tamtych boków, i nareszcie wyciąg piérwiastek kwadratowy z ilorazu wypadłego; a otrzymasz wartość na wstawę połowy kąta szukanego.*

Chociaż kąt $\tfrac{1}{2}A$ wyznacza się tu przez swoją wstawę; ztąd jednak żadnéj dwuznaczności nie będzie: bo A jest jednym z kątów trójkąta; zatém $A<180^\circ$, a tém samém $\tfrac{1}{2}A<90^\circ$.

82. Z równą łatwością wyprowadzają się wzory na dost $\tfrac{1}{2}$ A i sty $\tfrac{1}{2}$ A. Przypominając sobie, że (31) $2\,\mathrm{dost}^2\,\tfrac{1}{2}A = 1+\mathrm{dost}\,A$, i wykonywając podobne przerobienie, jak wyżéj, wypada

$$\mathrm{dost}\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}.$$

Nakoniec, podzieliwszy wst $\tfrac{1}{2}$ A przez dost $\tfrac{1}{2}$ A, będzie

$$\mathrm{sty}\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}.$$

Gdy jeden tylko kąt trójkąta trzeba wyrachować; którybądź z trzech powyższych wzorów służyć może zarówno: bo każdy z nich wymaga szukania cztérech logarytmów z tablic. Lecz, gdy dwa kąty mają się wynaleźć, wzór trzeci jest najdogodniejszy do rachunku: gdyż, używając go, należy wyszukać logarytmów cztérech ilości $s, s-a, s-b, s-c$; rachując zaś podług dwóch piérwszych wzorów, sześć logarytmów wziąć koniecznie potrzeba z tablic.

83. Wiadomo, że z trzech boków dowolnie wziętych, nie zawsze trójkąt daje się wykreślić. O niepodobieństwie tém i rachunkiem przekonać się można. I tak, obrawszy n. p. wzór

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

widoczna jest, że gdy trójkąt będzie możliwy; wst $\frac{1}{2}$ A powinna mieć wartość rzeczywistą mniejszą od jedności: a znowu, gdy trójkąta nie będzie można wykreślić; wartość na wst $\frac{1}{2}$ A wypaść powinna albo urojona, albo większa od 1. Aby trójkąta nie było, potrzeba, iżby jeden z boków jego był większy od summy dwóch innych: pozostaje więc roztrząsnąć, co wtenczas z powyższego wzoru wypada.

1ód. Niech $b>a+c$: będzie $2b>a+b+c$, a zatém $2b>2s$; więc $s-b<0$. Lecz, że w tym razie $a+b>c$; więc $a+b+c>2c$ czyli $2s>2c$, a tém samém $s-c>0$; wartość więc na wst $\frac{1}{2}$ A jest urojona.

2re. Niech $c>a+b$: będzie $s-c<0$ i $s-b>0$, tojest, że wst $\frac{1}{2}$ A podobnież wypada urojona.

3cie. Niech $a>b+c$: będzie $a+b+c$ czyli $2s>2b+2c$; więc $s>b+c$; a zatém $s-b>c$, $s-c>b$ i $(s-b)(s-c)>bc$; a ztąd wartość na wst $\frac{1}{2}$ A będzie większa od 1, co dla żadnego kąta nie może mieć miejsca.

PRZYSTOSOWANIA DO PRZYKŁADÓW.

84. Uskutecznienie wielkich pomiarów trygonometrycznych wymaga użycia różnego rodzaju narzędzi mierniczych, których szczegółowy opis nie może być przedmiotem téj książki. Wzmianka niniejsza o tych narzędziach będzie dostateczną do zrozumienia przykładów, jakie tu podane zostaną.

Do wytknięcia linii prostéj na ziemi, używają się tyczki albo kołki, wbijając je w ziemię w pewnych od siebie odległościach, tak, aby za przyłożeniem oka po nad piérwszą tyczką, wszystkie następne przez nią były zakryte.

Kąt na papiérze nakreśla się za pomocą *przenośnika*, tojest półkola podzielonego na stopnie.

Narzędzi służących do mierzenia kątów bądź na ziemi, bądź téż w przestrzeni, bardzo jest wiele, jakoto: *grafometr*, *bussola*, *koło powtarzające* i t. p. Wszystkie te narzędzia składają się w ogólności: naprzód, z koła lub wycinka koła, na którym oznaczone jest położenie jednego stałego promienia, będącego początkiem podziałki; powtóre, z drugiego promienia ruchomego, obracającego się około środka wspomnionego koła, i któremu dowolne położenie może być nadawane. Płaszczyzna rzeczonego koła sama jeszcze obraca się około własnego swego środka. Chcąc którymbądź z tych narzędzi zmierzyć kąt, zawarty między dwoma liniami prostemi, wychodzącemi z jednego punktu i idącemi do dwóch innych punktów, dosyć jest, ustawić je środkiem swoim na piérwszym z tych punktów i wykierować promienie wspomnione ku dwom pozostałym punktom; odczytawszy potém na podziałce kołowéj liczbę stopni, zawartych między temiż promieniami, dowiedzieć się można, jaka jest wielkość kąta uważanego.

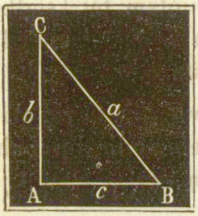
Ostrzega się czytelnika, iż wszystkie wyrachowania, zachodzące przy rozwiązaniu niniejszych przykładów. uskuteczniono podług postępowania opisanego pod n. **61**.

PRZYKŁADY ROZWIĄZANIA TRÓJKĄTÓW PROSTOKĄTNYCH.

Przypadek I.

85. Przykład 1. *W trójkącie* ABC (*fig.* 20) *prostokątnym przy* A *wiadome są: bok* a$=1785^m,395$, *kąt* B$=59°37'42''$; *znaleźć trzeba* C, b *i* c (**69**).

Fig. 20.



Odjąwszy kąt B od 90°, wypadnie kąt C$=90°-59°37'42''=30°22'18''$. Pozostaje jeszcze wyrachować boki b i c.

Rachunek na bok b
podług wzoru: $b=a$ wst B.

L. wst 50°37′42″	9,9358919
L. 1785,395	3,2517343
L. b	=3,1876262
$b=1540^m,374$ . .	

Rachunek na bok c
podług wzoru: $c=a$ dost B.

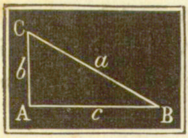
L. dost 59°37′42″	9.7038132
L. 1785,395	3,2517343
L. c	=2,9555475
$c=902^m,708$ . .	

Wartości znalezione na b i c są dokładne do dwóch włącznie cyfr dziesiętnych: te obadwa wypadki sprawdzić można albo razem za pomocą wzoru $a=\sqrt{b^2+c^2}$, nie używając logarytmów, albo każdy wypadek z osobna, rachując, jak wyżej, podług wzorów $b=a$ dost C, $c=a$ wst C.

Przypadek II.

86. Przykład 2. *Niech będzie* (*fig.* 21) b$=275^m048$. B$=34°55'12''$; *znaleźć trzeba* C, a *i* c.

Fig. 21.



Kąt C$=90°-34°55'12''=55°4'48''$. Przeciwprostokąta a i bok c wyrachujemy z równań: $a=\dfrac{b}{\text{wst B}}$, $c=b$ doty B (**70**).

Rachunek na bok a

L. $275^m,048$	2,4394083
L′. wst 34°55′12″.	0,2422760
L. a	=2,6816843
$a=480^m,489$ . .	

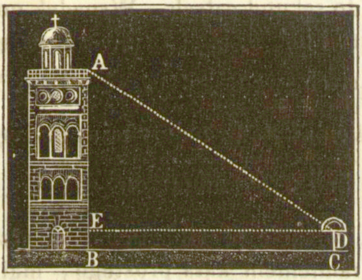
Rachunek na bok c

L. $275^m,048$	2,4394083
L. doty 34°55′12″	10,1560645
L. c	2,5954728
$c=393^m,978$ . .	

Błąd, zachodzący w tym wypadku, co do długości przeciwprostokątnéj a, mniejszy jest od $\frac{1}{100}$; zaś co do boku c, mniejszy o $\frac{1}{1000}$ metra. Boki a i c wyrachować także można podług wzorów: $a=\frac{b}{\text{dost C}}$, $c=b$ sty C.

87. Przykład 3. *Znaleźć wysokość* AB (*fig.* 22) *budowli, albo innego przedmiotu, którego spodek jest przystępny.*

Fig. 22.



Na gruncie poziomym wymierza się podstawa BC, poczynając od spodka budowli. Aby uniknąć kątów bardzo małych, wziąć trzeba za tę podstawę linią ani zbyt krótką, ani za długą w porównaniu z wysokością AB. Potém ustawia się kątomiar na punkt C i wymierza się kąt EDA, zawarty między prostą DA i poziomą DE, równoodległą od CB. W trójkącie AED, znając tedy bok DE i kąt D, wyrachować można bok AE (70). Dodawszy nakoniec CD do AE, wypadnie żądana wysokość AB.

Niech będzie CD$=1^m10$; DE$=61^m,28$; D$=41°31'25''$; a zatém AE$=61,28\times$sty $41°31'25''$

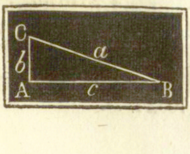
L. sty 41°31'25	9,9471690
L. 61,28	1,7873188
L. AE	=1,7344878

AE$=54^m,261$; a więc AB$=55^m,361$.

Przypadek III.

88. Przykład 4. *Niech będzie* (*fig.* 23) a$=508^m,137$ c$=483^m,081$; *znaleźć trzeba* b, B *i* C (71).

Fig. 23.



Summa boków $a+c=991^m,218$, ich różnica $a-c=25^m,056$.

Rachunek na bok b

podług wzoru: $b=\sqrt{(a+c)(a-c)}$

L. 991,218	2,9961692
L. 25,056 . . . , ...	1,3989117
L. $(a+c)(a-c)$	$=4,3950809$
L. b	$=2,1975404$
$b=157^{m},594$ . .	

Rachunek na kąt C

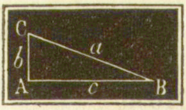
podług wzoru: wst $C=\frac{c}{a}$

L. 483,081	2,6840200
L'. 508,137	7,2940192
L. wst C	$=9,9780392$
$C=71^{\circ}55'56'',18$ . .	
$B=90^{\circ}-71^{\circ}55'56'',18=18^{\circ}4'3'',82$ . .	

Ten wypadek na bok b jest ścisły nawet do trzeciéj włącznie cyfry dziesiętnéj, zaś na kąt C aż do sekund całych. Wypadek powyższy sprawdzić można rachując i bok b, i kąt C, nie używając logarytmów podług tychże samych wzorów: $b=\sqrt{a^2-c^2}$, wst $C=\frac{c}{a}$; ale wtedy dla znalezienia kąta C, należy mieć pod ręką tablicę długości naturalnych linij trygonometrycznych.

89. P r z y k ł a d 5. Gdy w trójkącie prostokątnym, między przeciwprostokątną a jednéni ramieniem kąta prostego, mała zachodzi różnica; wzoru na kąt C użytego w przykładzie 4, stosować nie można: bo rachując podług niego, otrzymuje się wypadek mniéj dokładny. W takim razie, mając n. p. rozwiązać

Fig. 23.



trójkąt ABC (fig. 23), w którym $a=8571^{m},31$, $c=8571^{m},23$, trzeba wyrachować kąt B podług wzoru wst $\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{a-c}{2a}}$, albo kąt C podług wzoru sty $\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$ (n. **71**. Przypisek). W tym przykładzie więc jest $a-c=0,08$, $a+c=17142,54$ i $2a=17142,62$. Dla porównania wypadków z sobą, zamieszczamy tu rozwiązanie trójkąta danego jednym i drugim sposobem.

Rachunek na kąt C

podług wzoru: wst $C=\frac{c}{a}$

L. 8571,23	3,9330431
L'. 8571,31	6,0669528
L. wst C	$=9,9999959$
$C=89^{\circ}45'$.	

Rachunek na bok b *w obu razach*

podług wzoru: $b=$ wst $\sqrt{(a+b)(a-b)}$

L. 17142,54	4,2340752
L. 0,08	0,9030900—2
L. $(a+c)(a-c)$	$=3,1371652$
L. b	$=1,5685826$
$b=3^{m},70324$ . .	

Rachunek na kąt C podług wzoru: $\text{wst}\,\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{a-c}{2a}}$

L. 0,08	0,9030900—2
L'. 17142,62	5,7659228
L. $\frac{0,08}{17142,62}$	=0,6690128—6
L. $\sqrt{\frac{0,08}{17142,62}}$	=0.3345064—3
L. wst $\frac{1}{2}$ B	=7,3345064

$\frac{1}{2}B=0°7'25'',58$ . .

$B=14°51'',16.$

a zatém $C=90°-14'51'',16.$

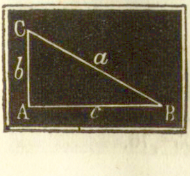
$=89°45'8'',84$ . .

Między wartościami na kąt C, otrzymanemi temi dwoma sposobami, zachodzi różnica bez mała równa 9″: co ztąd pochodzi, że rachując podług wzoru $\text{wst}\,C=\frac{c}{a}$, na logarytm wst C wypada liczba, różniąca się jednością tylko w ostatniéj cyfrze dziesiętnéj od logarytmów wstaw kątów tak większych, jak mniejszych, o 10″ od kąta C: a zatém, że błąd w łuku, wziętego z tablic i odpowiadającego logarytmowi wypadłemu z rachunku, mniejszy będzie od 10″. Przeciwnie zaś, rachując podług wzoru $\text{wst}\,\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{a-c}{2a}}$, błąd co do wielkości kąta B, dla podobnéj przyczyny, mniejszy jest od łuku 1″; i takiż sam błąd zachodzić tylko może w wypadku na kąt $C=90°-B$.

Przypadek IV.

90. Przykład 6. *Niech będzie* (*fig.* 21) $b=1149^m$, $c=2905^m,7$; *wyrachować trzeba kąty* C, B *i przeciwprostokątną* a (**72**).

Fig. 21.



$C+B=90°$; więc $\frac{1}{2}(C+B)=45°$.

Rachunek na kąt C

podług wzoru: $\text{sty } C = \frac{c}{b}$

L. 2905^m,7	3,4632508
L′. 1149	6,9396800
L. sty C	=10,4029308

C=68°25′28″,87° . .

B=90°—C=21°34′31″,13.

Rachunek na bok a

podług wzoru: $a = \frac{c}{\text{wst } c}$

L. c.	3,4632508
L′. wst C	0,0315474
L. *a*	=3,4947982

a=3124^m,62 . .

Ta wartość na *a* we wszystkich swoich cyfrach jest ścisłą; a wartość na kąt C aż do sekund całych.

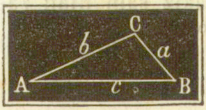
Aby sprawdzić wypadek powyższy na przeciwprostokątną *a*, należy rachować, nie używając logarytmów, podług wzoru $a=\sqrt{b^2+c^2}$; co do kąta zaś C, ten wynajduje się także ze wzoru $\text{sty } \frac{1}{2}(C-B)=\frac{c+b}{c-b}$, zkąd wypada $\frac{1}{2}(C-B)=23°24'28'',88$. A że $\frac{1}{2}(C+B)=45°$; więc $C=68°25'28'',88$.

PRZYKŁADY ROZWIĄZANIA TRÓJKĄTÓW PROSTOKREŚLNYCH JAKICHKOLWIEK.

Przypadek I.

91. Przykład 7. *W trójkącie* ABC (*fig.* 24) *dane są:* $a=1758^m,043$, $B=35°41'3''$, $C=121°8'25''$ *znaleźć trzeba* A, b *i* c (**73**).

Fig. 24.



Kąt $A=180°-(B+C)=23°10'32''$.

Rachunek na bok c

podług wzoru: $c=\frac{a \text{ wst } C}{\text{wst } A}$

L. 1758,043	3.2450295
L. wst 58°51′35″	9,9324249
L′. wst 23°10′32″	0,4050004
L. c	=3,5824548

c=3823^m,44.

Rachunek na bok b

podług wzoru: $b=\frac{a \text{ wst } B}{\text{wst } A}$

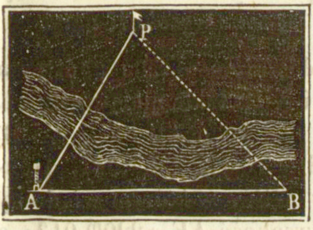
L. 1758,043	3,2450295
L. wst 35°41′3″	9,7659045
L′. wst 23°10′32″	0,4050004
L. *b*	=3.4159344

b=2605^m,76.

Wypadki te na boki c i b są dokładne aż do dwóch włącznie cyfr dziesiętnych. Chcąc rachunek powyższy sprawdzić, można obliczyć bok a podług jednego ze wzorów: $a = \frac{b \text{ wst A}}{\text{wst B}}$, $a = \frac{c \text{ wst A}}{\text{wst C}}$.

92. **Przykład 8.** *Znaleźć odległość punktu* A (*fig.* 25), *obranego za stanowisko, od innego punktu* P *nieprzystępnego, ale widzialnego.*

Fig. 25.



Naprzód wymierza się podstawa AB dowolnie wytknięta, oraz kąty PAB i PBA, przy téj podstawie leżące; a potém w trójkącie APB wyrachować trzeba (73) bok AP.

Niech będzie $AB = 247^m,49$, $A = 62°41'$, $B = 59°42'$; a zatém kąt $P = 57°37'$

Rachunek na bok AP *podług wzoru:* $AP = \frac{AB. \text{ wst B}}{\text{wst P}}$

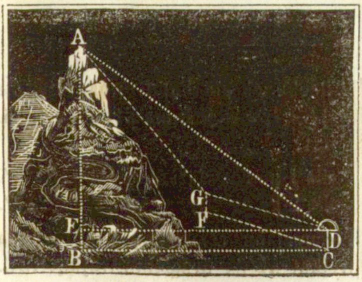
L. $247^m.49$	2,3935577
L. wst 59°42′	9,9362098
L′. wst 57°37′	0,0734087
L. AP. . . . . ,	=2,4031762

Odległość szukana $AP = 253^m,032$

93. **Przykład 9.** *Znaleźć wysokość przedmiotu, którego spodek jest nieprzystępny.*

Takie zadanie ma miejsce, gdy n. p. znaleźć chcemy wysokość AB góry (fig. 26) względem poziomu przechodzącego przez punkt dany C, leżący w dolinie: bo wtenczas spodek B pionu AB, spuszczonego z wierzchołka téj góry, nie jest przystępny, i odległości tegoż spodka od stanowiska C wprost wymierzyć nie podobna. Lecz i w tym razie, nadawszy płaszczyźnie

Fig. 26.



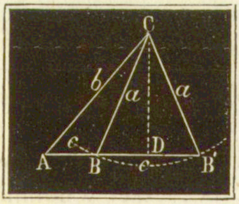
kątomiaru położenie pionowe, zmierzyć można kąt ADE. Gdyby zatém w trójkącie prostokątnym ADE znana jeszcze była przeciwprostokątna DA, wysokość AE wyrachowaćby się dała, jak w przykładzie 1. Otóż, odległość punktu widzialnego A od stanowiska D, daje się wyznaczyć, jak to w przykładzie 8 dopiéro się pokazało; a więc i wysokość AE wyrachowaną być może, do któréj przydawszy EB=DC, tojest wysokość środka narzędzia nad stanowiskiem C, wypadnie szukana wysokość góry.

Niech będzie kąt ADE=60°49′; dowolnie obrana podstawa CF=DG; tudzież niech kąty ADG i AGD takie mają wartości, jakie miały w przykładzie 8 (fig. 25) podstawa AB i kąty A i B: natenczas odległość AD (fig. 26) będzie równa $253^m,032$. Rozwiązując potém trójkąt prostokątny ADE, w którym wiadomy jest bok AD i kąt ADE, wypadnie wysokość AE=$220^m,913$; a przydawszy do AE jeszcze $1^m,3$ na wysokość środka kątomiaru nad poziom stanowiska C, wysokość AB góry będzie równa $222^m,213$.

Przypadek II.

94. Przykład 10. *W trójkącie* ABC (*fig.* 19) *dane są:* $a = 2597^m,845$, $b = 3084^m,327$, $A = 56°12'47''$; znaleźć trzeba B, C i c (74).

Fig. 19.



Tu dwa są rozwiązania: bo kąt A jest ostry i $a<b$ (75, 3cie.)

Rachunek na kąt B

podług wzoru: $\text{wst } B = \dfrac{b \text{ wst } A}{a}$.

L. 3084,327	3,4891604
L. wst 56°12′47″	9,9196592
L′. 2597,845	6,5853868
L wst B.	=9,9942064

Rachunek na kąt B pokazuje, że wst B<1; a więc B ma dwie wartości, tojest:

dla 1-go rozwiązania B=80°39′43″,
dla 2-go „ B=99°20′17″.

Pierwszemu rozwiązaniu odpowiada trójkąt AB′C, drugiemu trójkąt ABC.

Rozwiązanie pierwsze: B=80°39′43″.

Rachunek kąta C: C=180°—A—B

$$\begin{array}{r} 180^\circ \\ A=56^\circ\,12'\,47'' \\ B=80^\circ\,39'\,43'' \\ \hline C=43^\circ\ \ 7'\,30'' \end{array}$$

Rachunek na bok c

podług wzoru: $c=\dfrac{a\ \mathrm{wst}\ C}{\mathrm{wst}\ A}$.

L, 2597,845	3.4146132
L. wst 43° 7′30″.	9,8347972
L′. wst 56°12′47″.	0,0803408
L. c	=3,3297512

$c=2136^m,737$ . .

Rozwiązanie drugie: B=99°20′17″.

Rachunek kąta C: C=180°—A—B

$$\begin{array}{r} 180^\circ \\ A=56^\circ\,12'\,47'' \\ B=99^\circ\,20'\,17'' \\ \hline C=24^\circ\,26'\,66'' \end{array}$$

Rachunek na bok c

podług wzoru: $c=\dfrac{a\ \mathrm{wst}\ C}{\mathrm{wst}\ A}$.

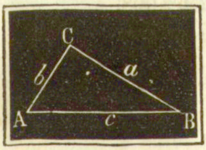
L. 2597.845.	3.4146132
L. wst 24°26′56″.	9,6168759
L′. wst 56°12′47″.	0,0803408
L. c	=3,1118299

$c=1293^m,689$ . .

Te obie wartości na c są dokładne aż do swych części setnych włącznie. Rachunek powyższy sprawdzić można za pomocą równania $b=\dfrac{c\ \mathrm{wst}\,B}{\mathrm{wst}\ C}$. Położywszy koleją w to równanie za c, B i C wartości liczebne wypadłe z dwóch powyższych rozwiązań, tęż samą zawsze wartość na b otrzymamy, tojest $3084^m,327$.

95. Przykład 11. *W trójkącie* ABC (*fig.* 27) *dane są:* $a=6723^m$, $b=4370^m$, $A=41^\circ 11'$; *znaleźć* B, C *i* c.

Fig. 27.



Ten przykład ma jedno tylko rozwiązanie: gdyż kąt A w nim jest ostry i bok $a>b$.

Rachunek na kąt B

podług wzoru: $\mathrm{wst}\ B=\dfrac{b\mathrm{wst}\,A}{a}$.

L. 4370	3,6404814
L. wst 41°11′	9,8185364
L′. 6723	6,1724369
L. wst B	=9,6314547

B=25°20′28″,97 . .

ztąd A+B=66°31′28″,97 . .

więc C=180°—A—B=113°28′31″,03.

Rachunek na bok c

podług wzoru: $c=\dfrac{a\ \mathrm{wst}\ C}{\mathrm{wst}\ A}$.

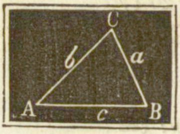
L. 6723	3,8275631
L. wst 66°31′28″,97	9.9624810
L′. wst 41°11″	0,1814636
L. c	=3,9715077

$c=9364^m,99$ . .

Przypadek III.

96. Przykład 12. *W trójkącie* ABC (*fig* 28) *wiadome są bok:* $a=215^m$, $b=259^m$, *i kąt* $C=64°\ 36'10''$; *znaleźć trzeba* A, B *i* c.

Fig. 28.



Przykład ten rozwiązany tu jest dwojakim sposobem: w piérwszym sposobie naprzód wyrachowane zostały kąty A i B, a potém bok *c*; w drugim, nie przechodząc przez kąty, obliczono bok *c* za pomocą kąta posiłkowego, a przez to razem i kąty A i B.

W tym przykładzie $a+b=474^m$, $b-a=44^m$, $\frac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{1}{2}C=90°-32°\ 18'5''=57°\ 41'55''$.

Sposób piérwszy (77).

Rachunek na kąty A *i* B

p. wz.: $\text{sty}\ \frac{1}{2}(A-B)=\frac{b-a}{a+b}\ \text{sty}\ \frac{1}{2}(A+B)$

L. 44	1,6434527
L. sty 57°41′55″	10,1991402
L′. 474	7,3242217
L. sty ½ (B—A).	=9,1668146

½ (B—A)= 8°21′10″,98 . .

A że ½ (B+A)=57°41′55″;

więc A=49°20′44″,02 . .

B=66° 3′ 5″,98 . .

Rachunek na bok c

podług wzoru: $c=\frac{b\ \text{wst}\ C}{\text{wst}\ B}$

L. 259	2,4132998
L. wst 64°36′10″	9,9558589
L′. wst 66° 3′ 5″,98	0,0390957
L. c..........	=2.4082544

c=256^m,008.

Sposób drugi (79).

Rachunek na bok c *za pomocą wzorów:*

$$\text{sty}\ \varphi=\frac{b-a}{a+b}\ \text{doty}\ \tfrac{1}{2}C\ ;\quad c=\frac{(a+b)\ \text{wst}\ \tfrac{1}{2}C}{\text{dost}\ \varphi}.$$

Obliczenie kąta posiłkowego φ.

L. 44	1,6434527
L. doty 32° 18′5″	10,1991402
L′. 474	7,3242217
L. sty φ...... ..	=9,1668146

φ=8° 21′ 10″,98 . .

Obliczenie boku c.

L. 474	3,6757783
L. wst. 32° 18′ 5″	9,7278443
L′. dost 8°21′ 10″,98	0.0046317
L. c	=3,4082543

c=256^m,008 . .

Obliczenie kątów A *i* B.

Ponieważ doty $\frac{1}{2}C$=sty $\frac{1}{2}$ (B+A); a zatém sty φ = sty $\frac{1}{2}$ (B — A), tojest $\frac{1}{2}$(B—A)=φ=8°21′10″,98.. Ztąd takież same wypadają wartości na kąty A i B, jak z piérwszego rozwiązania.

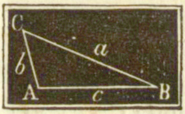
Sprawdzenie trzech kątów w trójkącie.

A=49°20′44″,02
B=66° 3′ 5″,98
C=64°36′ 10″

A+B+C=180°.

97. Przykład 13. *W trójkącie* ABC (*fig.* 29) *wiadome są: log.* a=5,3467021, *log.* b=4,7892167 *i kąt* C=51° 16′; *znaleźć trzeba kąty* A *i* B.

Fig. 29.



W tym razie najkrócéj będzie rachować kąty A i B podług wzorów: sty $\psi = \frac{b}{a}$, sty $\frac{1}{2}$(A—B)= sty (45°—ψ) sty $\frac{1}{2}$(A+B) (**80**).

Rachunek na kąt posiłkowy φ.

L. b 4,7892167
L′. a 4,6532979

L. sty ψ . . . . =9,4425146
ψ=15°29′2″,09 . .
a zatém 45°—ψ=29°30′57″,91 . .
A że A+B=180°—C=180°—51° 16′ =128°,44;
więc $\frac{1}{2}$(A+B)=64°22′.

Rachunek na sty $\frac{1}{2}$(A—B).

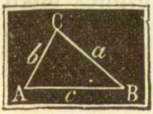
L. sty 29°30′57″,91 9,7529264
L. sty 64°22′ 10,3189079

L. sty $\frac{1}{2}$(A—B) . . . . =10,0718343
$\frac{1}{2}$(A—B)= 49°43′ 1″,31 .;
więc A=114° 5′ 1″,31 .,
B= 14°38′58″,69 . .

Przypadek IV.

98. Przykład 14. *W trójkącie* ABC (*fig.* 30) *dane są:* a=9459^m,31, b=8032^m,29, c=8242^m,58; *znaleźć wypada kąty* A, B i C (**81**).

Fig. 30.



Tu jest: 2s=25734,18; s=12867,09; $s-a$= 3407,78; $s-b$=4834,8; $s-c$=4624,51.

Rachunek na kąt A

pod. wz.: wst $\frac{1}{2}$A=$\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$.

L. (s—b) 3,6843785
L. (s—c) 3,6650657
L′. b 6,0951606
L′. c. 6,0839368

2 L. wst $\frac{1}{2}$A 19,5285416
L. wst $\frac{1}{2}$A 9,7642708
$\frac{1}{2}$A=35°31′47″,37,
A=71° 3′34″,74.

Rachunek na kąt B

pod. wz.: wst $\frac{1}{2}$B=$\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$.

L. (s—a) 3,5324716
L. (s—c) 3,6650657
L′. a 6,0241405
L′. c 6,0839368

2 L. wst $\frac{1}{2}$B 19,3056146
L. wst $\frac{1}{2}$B 9,6528073
$\frac{1}{2}$B=26°43′ 0″,36,
B=53°26′ 0″,72.

Rachunek na kąt C

pod. wz.: $\text{wst}\,\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$.

L. $(s-a)$	3,5324716
L. $(s-b)$.	3,6843785
L′. a	6,0241405
L′. b	6,0951606
2 L. wst ½ C	19,3361512
L. wst ½ C	9.6680756

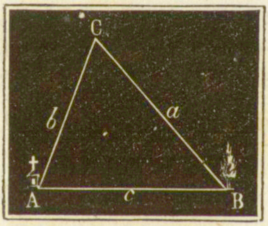
½C=27° 45′ 12″,27,
C=55° 30′ 24″,54.

Sprawdzenie.
A= 71° 3′ 34″,74.
B= 53° 26′ 0″,72.
C= 55° 30′ 24″,54.

A+B+C=180°.

99. Przykład 15. *Wyznaczyć na gruncie punkt* C (*fig.* 31), *którego odległości* a *i* b *od dwóch innych punktów* A *i* B, *na tymże gruncie leżących, wymierzone zostały.*

Fig. 31.



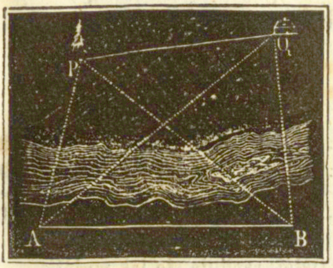
Gdy trójkąt ABC jest mały, punkt C będzie wspólném przecięciem się dwóch łuków, zakreślonych z punktów A i B, jako środków, promieniami równémi dwom odległościom wiadomym. Lecz jeżeli te odległości są wielkie, tak postąpić sobie nie można. W tym przypadku potrzeba naprzód wymierzyć odległość AB; potém dochodzi się rachunkiem kąt A z trzech wiadomych boków trójkąta ABC, jak to w przykładzie poprzedzającym się pokazało; i nareszcie, wytknąwszy na gruncie kierunek boku AC, odcina się na tymże boku odległość AC=b, a koniec jego C będzie punktem szukanym.

ROZWIĄZANIE NIEKTÓRYCH JESZCZE PRZYKŁADÓW Z MIERNICTWA.

100. Przykład 16. *Znaleźć odległość* PQ (*fig.* 32) *dwóch punktów niedostępnych, ale widzialnych.*

Aby rozwiązać to zadanie, należy naprzód wymierzyć podstawę AB, oraz kąty BAP, BAQ, ABP, ABQ, a potém wyznaczyć boki AP i AQ w trójkątach ABP i ABQ tak, jak w przykła-

Fig. 32.



dzie 8 (**92**). Kąt PAQ będzie tu także wiadomy; bo, jeżeli cztéry punkta A, B, P, Q na jednéj leżą płaszczyznie, to być powinno PAQ=BAP—BAQ: a w każdym razie, kąt ten bezpośrednio wymierzyć się daje. W trójkącie więc PAQ znane są dwa boki i kąt między niemi zawarty: przeto bok PQ łatwo wyrachować można (**77**).

Niech będą części dane: $AB=345^m,29$, $BAP=69°26'$, $BAQ=44°31'$, $PAQ=25°41'$, $ABP=48°15'$, $ABQ=102°14'$.

Z tych danych wypada, że $APB=62°19'$, $AQB=33°15'$; a dalszy rachunek odbywa się sposobem następującym:

Rachunek na bok AP.

wst APB : wst ABP=AB : AP.

L. AB	2,5381840
L. wst ABP	9,8727722
L'. wst APB	0,0527975
L. AP	=2,4637535

$AP=290^m,907$.

Rachunek na bok AQ

wst AQB : wst ABQ=AB : AQ

L. AB	2,5381840
L. wst ABQ	9,9900247
L'. wst AQB	0.2609871
L. AQ	=2,7891958

$AQ=615^m,454$.

Rachunek na kąty P *i* Q.

Niech będzie $AQ=p$, $AP=q$, APQ=P, AQP=Q: natenczas $p+q=906,361$, $p-q=324,547$, $\frac{1}{2}(P+Q)=77°9'30''$; potém, na zasadzie proporcyi

$p+q : p-q = \text{sty}\,\frac{1}{2}(P+Q) : \text{sty}\,\frac{1}{2}(P-Q)$,

jest:

L sty $\frac{1}{2}$(P+Q)	10,6421427
L. $(p-q)$	2,5112776
L'. $(p+q)$	7,0427988
L. sty $\frac{1}{2}$(P—Q)	10,1961191

$\frac{1}{2}(P-Q)=57°31'6''$; a zatém $P=134°40'36''$ i $Q=19°38'24''$.

Rachunek na bok PQ: wst Q : wst PAQ=q : PQ.

L. q	2,4637535
L. wst PAQ	9,6368859
L'. wst Q	0,4735196
L. PQ	=2,5741590

$PQ=375^m,110$.

101. Inne rozwiązanie. Odległości AP i AQ znaleziono w powyższym rachunku przechodząc przez ich logarytmy; tu więc używać można kąta posiłkowego ψ, o którym mowa była pod

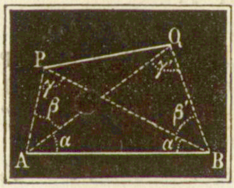
n. **80**. Za jego pomocą znalazłszy log. AP i log. AQ, wyrachujemy kąty P i Q, jak następuje:

Rachunek na kąt ψ.	*Rachunek na kąty* P i Q.
$\text{sty}\,\psi = \frac{AP}{AQ}$.	$\text{sty}\,\frac{1}{2}(P-Q) = \begin{cases}\text{sty}\,\frac{1}{2}(P+Q) \\ \times\,\text{sty}(45^\circ-\psi).\end{cases}$
L. AP. 2,4637535	L. sty $\frac{1}{2}$(P+Q) 10,6421427
L′, AQ 7,1208042	L. sty $\frac{1}{2}$(45°—ψ) 9,5539790
L. sty ψ 9,6745577	L. sty $\frac{1}{2}$(P—Q) . . . . . =10,1961217
$\psi = 25^\circ 17' 55''$	$\frac{1}{2}(P-Q) = 57^\circ 31' 6''$
$45^\circ - \psi = 19^\circ 31'\ 5''$.	Daléj, rachuje się jak wyżéj.

Przykład następujący jest zadaniem odwrotném w porównaniu z dopiéro rozwiązaném.

102. Przykład 17. *Za pomocą znanéj odległości* PQ (*fig.* 33) *wyznaczyć podstawę* AB, *nie mogącą być wymierzoną, ale z któréj końców widziane są punkta* P *i* Q.

Fig. 33.



Zadanie to rozwiązuje *Delambre* następującym sposobem:

Niech będzie: $QAB=\alpha$, $PAQ=\beta$, $PBA=\alpha'$, $PBQ=\beta'$; $AQ=x$, $BP=x'$, $AP=y$, $BQ=y'$, $PQ=z$; $APB=\gamma$, $AQB=\gamma'$; $APQ=P$, $AQP=Q$, $BPQ=P'$, $BQP=Q'$.

Trójkąt APQ daje: $P+Q=180^\circ-\beta$, czyli $\frac{1}{2}(P+Q)=90^\circ-\frac{1}{2}\beta$; i $\text{sty}\,\frac{1}{2}(P-Q)=\text{sty}\,\frac{1}{2}(P+Q)\frac{x-y}{x+y}$, n. **77**, [I].

Lecz $\frac{x-y}{x+y}=\text{sty}\,(45^\circ-\psi)$, gdzie $\text{sty}\,\psi=\frac{y}{x}$ (**80**); a $\text{sty}\,\frac{1}{2}(P+Q)=\text{doty}\,\frac{1}{2}\beta$: więc

[1] $$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(P-Q)=\text{doty}\,\tfrac{1}{2}\beta.\ \text{sty}\,(45^\circ-\psi).$$

Podobnym postępując sposobem, wypada z trójkąta BPQ

[2] $$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(Q'-P')=\text{doty}\,\tfrac{1}{2}\beta'.\ \text{sty}\,(45^\circ-\psi'),$$

gdzie $\text{sty}\,\psi'=\frac{y'}{x'}$.

Z trójkąta ABP jest $y = \frac{\mathrm{AB.\,wst}\,\alpha'}{\mathrm{wst}\,(\alpha+\beta+\alpha')}$, a z trójkąta ABQ, $x = \frac{\mathrm{AB.\,wst}\,(\alpha'+\beta')}{\mathrm{wst}\,(\alpha'+\beta'+\alpha)}$; a zatém

[3] $$\mathrm{sty}\,\psi = \frac{y}{x} = \frac{\mathrm{wst}\,\alpha'\ \mathrm{wst}\,(\alpha'+\beta'+\alpha)}{\mathrm{wst}\,(\alpha+\beta+\alpha')\ \mathrm{wst}\,(\alpha'+\beta')}.$$

Z tych samych trójkątów także jest $y' = \frac{\mathrm{AB.\,wst}\,\alpha}{\mathrm{wst}(\alpha'+\beta'+\alpha)}$, i $x' = \frac{\mathrm{AB.\,wst}\,(\alpha+\beta)}{\mathrm{wst}\,(\alpha+\beta+\alpha')}$; a ztąd

[4] $$\mathrm{sty}\,\psi' = \frac{y'}{x'} = \frac{\mathrm{wst}\,\alpha\ \mathrm{wst}\,(\alpha+\beta+\alpha')}{\mathrm{wst}\,(\alpha'+\beta'+\alpha)\ \mathrm{wst}\,(\alpha+\beta)}.$$

Wzory [1] i [3] służą do wyrachowania kątów P i Q; wzory zaś [2] i [4] do wyrachowania kątów P′ i Q′.

Znalazłszy kąty P i Q, łatwo wyrachować x i y z trójkąta APQ na mocy wzorów:

$$x = \frac{z.\,\mathrm{wst\,P}}{\mathrm{wst}\,\beta},\quad y = \frac{z.\,\mathrm{wst\,Q}}{\mathrm{wst}\,\beta};$$

podobnież, znalazłszy kąty P′ i Q′, obliczyć można wartości na x' i y' z trójkąta BPQ podług wzorów:

$$x' = \frac{z.\,\mathrm{wst\,Q'}}{\mathrm{wst}\,\beta'},\quad y' = \frac{z.\,\mathrm{wst\,P'}}{\mathrm{wst}\,\beta'}.$$

Nakoniec, rozwiązując trójkąt ABP, albo ABQ, wypada

[5] $$\mathrm{AB} = \frac{y\ \mathrm{wst}\,\gamma}{\mathrm{wst}\,\alpha'} = \frac{z\,\mathrm{wst\,Q.\,wst}\,(\alpha+\beta+\alpha')}{\mathrm{wst}\,\alpha'\ \mathrm{wst}\,\beta},\ \text{albo}$$

[6] $$\mathrm{AB} = \frac{y'\ \mathrm{wst}\,\gamma'}{\mathrm{wst}\,\alpha} = \frac{z\,\mathrm{wst\,P'.\,wst}\,(\alpha'+\beta'+\alpha)}{\mathrm{wst}\,\alpha\ \mathrm{wst}\,\beta'}.$$

Z powyższego pokazuje się, że podstawę AB znaleźć można dwojakim sposobem, tojest, rachując bądź podług wzorów [1], [3], [5], bądź téż podług [2], [4], [6].

Gdy $z=2625$, $\alpha=43°$, $\beta=57°$, $\alpha'=55°$, $\beta'=60°$, będzie $\alpha'+\beta'=115°$, $\alpha'+\beta'+\alpha=158°$, $\alpha+\beta=100°$, $\alpha+\beta+\alpha'=155°$.

Rachunek na kąt ψ

L. wst α'	9,9133645
L. wst $(\alpha'+\beta'+\alpha)$	9,5735754
L'. wst $(\alpha'+\beta')$	0,0427243
L'. wst $(\alpha+\beta+\alpha')$	0,3740517
sty ψ	$=9,9037159$

$\psi=38°42'0'',34.$;

ztąd $45°-\psi=6°17'59'',66.$

Rachunek na kąty P *i* Q.

L. sty $(45°-\psi)$	9,0429668
L. doty $\frac{1}{2}\beta$	10,2652356
sty $\frac{1}{2}(P-Q)$	$=9,3082024$

$\frac{1}{2}(P-Q)=11°29'35'',86.$;

a że $\frac{1}{2}(P+Q)=61°30'\ 0'',00.$;

więc $P=72°59'35'',86.$, $Q=50°\ 0'24'',14.$

Rachunek na AB.

L. z	3.4191293
L. wst Q	9,8842966
L. wst $(\alpha+\beta+\alpha')$	9,6259483
L'. wst α'	0.0866355
L'. wst β	0,0764086
L. AB	$=3,0924183$

$AB=1237^{m},13$ . .

Rachunek na kąt ψ'.

L. wst α	9,8337833
L. wst $(\alpha+\beta+\alpha')$	9,6259483
L'. wst $(\alpha+\beta)$	0,0066585
L'. wst $(\alpha'+\beta'+\alpha)$	0,4264246
sty ψ'	$=9,8928147$

$\psi'=38°0°1'',12.$

ztąd $45°-\psi'=6°59'58''',88.$

Rachunek na kąty P' i Q'.

L sty $(45°-\psi')$	$=9,0891243$
L. doty $\frac{1}{2}\beta'$	$=10,2385606$
sty $\frac{1}{2}(Q'-P')$	$=9.3276849$

$\frac{1}{2}(Q'-P')=12°\ 0'20'',33.$

a że $\frac{1}{2}(Q'=P')=60°\ 0'\ 0'',00.$;

więc $Q'=72°\ 0'20'',33.$, $P'=47°59'39'',67.$

Rachunek na AB.

L. z	3,4191293
L. wst P'	9.8710349
L. wst $(\alpha'+\beta'+\alpha)$	9,5735754
L'. wst α	0,1662167
L'. wst β'	0.0624694
L. AB	$=3,0924257$

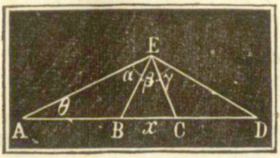
$AB=1237^{m},16$ . .

Więc, podstawa szukana trzyma $1237^{m},1$, gdzie części dziesiętne są pewne: bo w obu wypadkach, jakie wyżéj otrzymano, zachodzi różnica tylko w częściach setnych.

Zagadnienie to można jeszcze rozwiązać następującym sposobem. Za podstawę AB bierze się dowolna odległość i wynajduje się PQ tak, jak w przykładzie 16: niech m wyraża tę obliczoną długość. Potém ułożyć trzeba następującą proporcyą: *podstawa przypuszczona, tak się ma do podstawy szukanéj prawdziwéj, jak* m, *do prawdziwéj długości na* PQ. Z proporcyi téj widocznie wypadnie wartość na podstawę AB.

103. Przykład 18. *Mając wiadome dwa odcinki* AB$=$a, CD$=$c (*fig.* 34) *linii prostéj* ABCD, *oraz kąty* α, β, γ *pod któremi wszystkie trzy odcinki są widziane ze stanowiska* E; *znaleźć trzeba odcinek* BC$=x$.

Fig. 34.



Niech θ znaczy kąt EAB, będzie EBC$=\alpha+\theta$, ECD$=\alpha+\beta+\theta$, EDC$=180^\circ-(\alpha+\beta+\gamma+\theta)$.

Dwa piérwsze trójkąty AEB, EBC dają

$$\mathrm{BE}=\frac{a \text{ wst } \theta}{\text{wst } \alpha}, \quad \mathrm{CE}=\frac{(a+x) \text{ wst } \theta}{\text{wst } (\alpha+\beta)};$$

ztąd

[1] $$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{CE}}=\frac{a \text{ wst } (\alpha+\beta)}{(a+x) \text{ wst } \alpha}.$$

Dwa drugie trójkąty DEC, DEB dają podobnie

$$\mathrm{CE}=\frac{c \text{ wst } (\alpha+\beta+\gamma+\theta)}{\text{wst } \gamma}, \quad \mathrm{BE}=\frac{(c+x) \text{ wst } (\alpha+\beta+\gamma+\theta)}{\text{wst } (\beta+\gamma)};$$

ztąd znowu

[2] $$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{CE}}=\frac{(c+x) \text{ wst } \gamma}{c \text{ wst } (\beta+\gamma)}.$$

Porównawszy równania [1], [2] z sobą, będzie

$$\frac{a \text{ wst } (\alpha+\beta)}{(a+x) \text{ wst } \alpha}=\frac{(c+x) \text{ wst } \gamma}{c \text{ wst } (\beta+\gamma)},$$

albo $$\frac{ac. \text{ wst } (\alpha+\beta) \text{ wst } (\beta+\gamma)}{\text{wst } \alpha \text{ wst } \gamma}=(a+x)(c+x);$$

a tém samém

$$x=-\left\{\frac{a+c}{2}\right\}\pm\frac{a-c}{2}\sqrt{1+\frac{4ac}{(a-c)^2}\cdot\frac{\text{wst}(\alpha+\beta) \text{ wst } (\beta+\gamma)}{\text{wst } \alpha \text{ wst } \gamma}}.$$

Nakoniec, położywszy $\text{sty}^2\varphi = \frac{4\,ac}{(a-c)^2} \cdot \frac{\text{wst}(\alpha+\beta)\,\text{wst}(\beta+\gamma)}{\text{wst}\,\alpha\ \text{wst}\,\gamma}$,

będzie

$$x = -\left\{\frac{a+c}{2}\right\} \pm \left\{\frac{a-c}{2}\right\} \text{sie}\,\varphi.$$

A ponieważ wartość na x musi być dodatna: przeto w tém ostatniém równaniu wziąć należy albo znak górny, gdy $a>c$; albo też znak dolny, gdy $a<c$.

Niech będzie $a=1094^{\text{m}}$, $c=780^{\text{m}}$, $\alpha=45°$, $\beta=52°$, $\gamma=36°$; a zatém $\frac{1}{2}(a+c)=937$, $\frac{1}{2}(a-c)=157$, $(a-c)^2=98596$, $4ac=3413280$, $\alpha+\beta=97°$, $\beta+\gamma=88°$.

Rachunek na kąt φ podług wzoru:

$$\text{sty}^2\varphi = \frac{4ac}{(a-c)^2} \cdot \frac{\text{wst}(\alpha+\beta)\,\text{wst}(\beta+\gamma)}{\text{wst}\,\alpha.\ \text{wst}\,\gamma}$$

L. $4ac$	6,5331719
L. wst $(\alpha+\beta)$	9,9967509
L. wst $(\beta+\gamma)$	9.9997354
L'. $(a-c)^2$	5.0061407
L'. wst α	0,1505150
L'. wst γ	0,2307813
2 L. sty φ	=21.9170950

L. sty φ=10,9585475,

φ=83° 43′ 18″,61.

Rachunek na wyraz $\frac{1}{2}(a-c)$ sie φ.

L. $\frac{1}{2}(a-c)$	2,1958997
L sie φ	10,9604470
L. $\frac{1}{2}(a-c)$ sie φ	=3,1563467

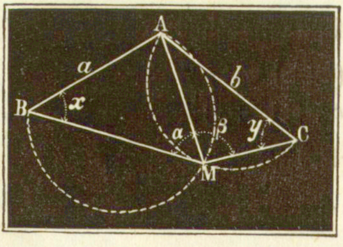
$\frac{1}{2}(a-c)$ sie φ=1433$^{\text{m}}$,33.

A zatém x=—937+1433,33

= 496$^{\text{m}}$, 33.

104. Przykład 19. *Mając dane trzy stanowiska* A, B, C (*fig.* 35) *na poziomym gruncie; znaleźć punkt czwarty* M *na tymże gruncie, z którego odległości* AB i AC *widziane są pod kątami danemi.*

Fig. 35.



Podług wysłówienia tego, kąty AMB i AMC są znane. Nakreśliwszy zatém na prostych AB i AC, odcinki kół, mieszczących w sobie odpowiedne tym liniom kąty dane, tedy łuki tych odcinków przetną się z sobą w punktach A i M; a z tych M musi być punktem szukanym. To postępowanie nie daje się jednak wykonać na gruncie; przeto kąt BAM i odległość AM wyrachować się powinny. Następujący sposób rachowania, w którym naprzód wynajdują się kąty ABM i ACM, zdaje się być najkrótszym.

Niech będzie AB$=a$, AC$=b$, BAC=A, AMB$=\alpha$, AMC$=\beta$; tudzież niech x i y wyrażają niewiadome kąty ABM i ACM.

Czworobok ABMC daje

$$x+y=360°-(A+\alpha+\beta):$$

summa zatém $x+y$ będzie znana. Trzeba jeszcze mieć ich różnicę.

Z trójkątów ABM i ACM wypada:

[1] $\quad \text{wst}\,\alpha:\text{wst}\,x=a:\text{AM}; \quad \text{wst}\,\beta:\text{wst}\,y=b:\text{AM}.$

Porównawszy z sobą wartości na AM, otrzymane z tych dwóch proporcyj, będzie

$$\frac{a\,\text{wst}\,x}{\text{wst}\,\alpha}=\frac{b\,\text{wst}\,y}{\text{wst}\,\beta} \quad \text{czyli} \quad \frac{b\,\text{wst}\,\alpha}{a\,\text{wst}\,\beta}=\frac{\text{wst}\,x}{\text{wst}\,y}.$$

Uczyniwszy $\dfrac{a\,\text{wst}\,\beta}{\text{wst}\,\alpha}=a'$, i wprowadziwszy ilość tę a', którą łatwo obliczyć przez logarytmy, w otrzymane dopiéro równanie, wypadnie

$$\frac{b}{a'}=\frac{\text{wst}\,x}{\text{wst}\,y}, \quad \text{zkąd} \quad \frac{b+a'}{b-a'}=\frac{\text{wst}\,x+\text{wst}\,y}{\text{wst}\,x-\text{wst}\,y};$$

więc (40)

$$\frac{b+a'}{b-a'}=\frac{\text{sty}\,\frac{1}{2}(x+y)}{\text{sty}\,\frac{1}{2}(x-y)}.$$

A ponieważ summa $x+y$ jest znana; z równania ostatniego i różnicę $x-y$ wyrachować można, a tém samém także kąty x i y z osobna. Tak więc i wiadomy będzie kąt BAM$=180°-(\alpha+x)$, i odległość AM z jednéj z proporcyj [I] obliczymy.

Gdy $a=1327^{\text{m}}$, $b=1480^{\text{m}}$, kąt A$=112°$, $\alpha=50°\,12'$ $\beta=89°\,30'$, będzie $x+y=108°\,18'$ i sty $\frac{1}{2}(x+y)=$sty $54°\,9$.

Rachunek na ilość $a' = \dfrac{a \text{ wst} \beta}{\text{wst} \alpha}$.

L. a	3,1228709
L. wst β.	9,9999835
L'. wst α	0,1144785
L. a'	=3,2373329

$a' = 1727,16$ . .

a zatém $a' - b = 247,16$ . .

$b + a' = 2207,16$ . .

Rachunek na odległość AM

podług wzoru: $\text{AM} = \dfrac{a.\text{wst}\, x}{\text{wst}\, \alpha}$.

L. a	3,1228709
L. wst x.	9,8520497
L'. wst α.	0,1144785
L AM.	=3,0893991

$\text{AM} = 1228^{\text{m}},56$.

Rachunek na różnicę kątów x—y

podług wzoru: $\dfrac{b+a'}{a'-b} = \dfrac{\text{sty}\, \frac{1}{2}(x+y)}{\text{sty}\, \frac{1}{2}(y-x)}$.

L. $(a'-b)$	2,3929782
L. sty $\frac{1}{2}(x+y)$	10.1411320
L'. $(b+a')$	6,6561660
L. sty $\frac{1}{2}(y-x)$.	=9,1902764

$\frac{1}{2}(y-x) = 8^0 48' 34'',67.$;

a że $\frac{1}{2}(x+y) = 54^0\ 9'$;

więc $x = 45^0 20' 25'',33.$,

$y = 62^0 57' 34'',67.$

Wartość na kąt BAM.

$\text{BAM} = 180^0 - (\alpha + x)$

$= 180^0 - 95^0 32' 25''33.$,

$= 84^0 27' 34'',67.$

ROZDZIAŁ TRZECI.

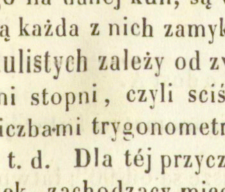
ROZWIĄZYWANIE TRÓJKĄTÓW KULISTYCH.

ZWIĄZKI MIĘDZY KĄTAMI I BOKAMI TRÓJKĄTA KULISTEGO.

105. Wzór zasadniczy. Części trójkąta kulistego, wykreślonego na danéj kuli, są wiadome, gdy znana jest liczba stopni, którą każda z nich zamyka. Rozwiązanie więc zadań o trójkątach kulistych zależy od związków, zachodzących między temi liczbami stopni, czyli ściśléj mówiąc, między odpowiadającemi im liczbami trygonometrycznemi, wyrażającemi wstawy, dostawy i t. d. Dla téj przyczyny wyprowadzimy naprzód wzór na związek, zachodzący między którymkolwiek kątem i trzema bokami trójkąta kulistego; a potém okażemy, jak z niego się wywodzą rozwiązania trójkąta kulistego w każdym szczególnym przypadku. Kąty zawsze nazwiemy A, B, C; a boki im przeciwne a, b, c.

Niech będzie O (fig. 36) środkiem kuli, na któréj leży trójkąt kulisty ABC. Poprowadziwszy promienie OA, OB, OC; nakreśliwszy prostopadłe AD i AE do AO, piérwszą na płaszczyznie OAB, drugą na płaszczyznie OAC; i przyjąwszy, że prostopadłe te spotykają przedłużone promienie OB i OC w punktach D i E: będzie kąt DAE równy kątowi A trójkąta kulistego. Założywszy nadto, że OA=1, będzie

Fig. 36.



$$AD = \text{sty}\, c,\quad OD = \text{sie}\, c,\quad AE = \text{sty}\, b,$$
$$OE = \text{sie}\, b.$$

Trójkąty DAE i DOE dają (66)

$$\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2\,AD.\,AE.\ \text{dost}\ A=\overline{DE}^2,$$
$$\overline{OD}^2+\overline{OE}^2-2\,OD.\,OE.\ \text{dost}\ a=\overline{DE}^2.$$

Po odjęciu piérwszego z tych równań od drugiego, skróćmy równanie otrzymane na mocy, że $\overline{OD}^2-\overline{AD}^2=\overline{OE}^2-\overline{AE}^2=1$; potém wstawmy w nie za linie, wyrażenia ich trygonometryczne, i podzielmy toż równanie przez 2, a mieć będziemy:

$$1-\text{sie}\ b\ \text{sie}\ c\ \text{dost}\ a+\text{sty}\ b\ \text{sty}\ c\ \text{dost}\ A=o.$$

Lecz $\text{sie}\ b=\frac{1}{\text{dost}\ b}$, $\text{sty}\ b=\frac{\text{wst}\ b}{\text{dost}\ b}$, $\text{sie}\ c=\frac{1}{\text{dost}\ c}$, $\text{sty}\ c=\frac{\text{wst}\ c}{\text{dost}\ c}$; a zatém wstawiwszy te wartości w powyższy wypadek, otrzymamy

$$1-\frac{\text{dost}\ a}{\text{dost}\ b.\ \text{dost}\ c}+\frac{\text{wst}\ b\ \text{wst}\ c\ \text{dost}\ A}{\text{dost}\ b\ \text{dost}\ c}=0;$$

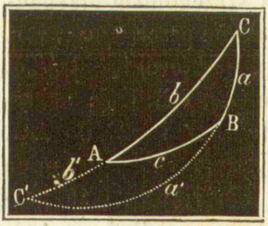
a z tego równania wypadnie

[1] $\text{dost}\ a=\text{dost}\ b\ \text{dost}\ c+\text{wst}\ b\ \text{wst}\ c\ \text{dost}\ A.$

To równanie jest wzorem zasadniczym trygonometryi kulistéj.

106. Chociaż boki b i c na figurze 36 mniejsze są od 90°; łatwo jednak przekonać się, że wzór [1] jest ogólny. I tak, gdy jeden z tych boków n. p. b czyli AC (fig. 37) większy jest od 90°; z przedłużenia boków CA i CB, aż do przecięcia się z sobą w punkcie C′, wypada: że łuki CAC′ i CBC′ są obadwa półobwodami kół wielkich, i że drugi trójkąt C′AB, utworzony przez przedłużenia dwóch boków trójkąta piérwszego, ma boki a' i b', czyli BC′ i AC′, równe spełnieniom boków a i b, oraz że kąt BAC′ równy jest spełnieniu kąta A. A że w trójkącie C′AB boki b' i c mniejsze są od 90°, przeto wzór [1] do niego się stosuje: więc być powinno

Fig. 37.

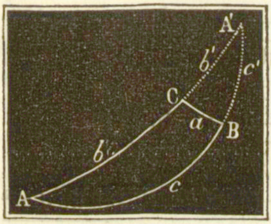


$$\text{dost}\ a'=\text{dost}\ b'\ \text{dost}\ c+\text{wst}\ b'\ \text{wst}\ c\ \text{dost}\ BAC'.$$

Lecz $a'=180°-a$, $b'=180°-b$, $BAC'=180°-A$: wstawiwszy zatém te wartości w to nowe równanie, i zamieniwszy w niém wszystkie znaki na przeciwne, wypadnie znowu wzór [1]; więc wzór ten stosuje się i do przypadku, kiedy $b>90°$.

Gdy w trójkącie ABC obadwa boki b i c są większe od 90° (fig. 38); po przedłużeniu boków AB i AC aż do spotkania się w punkcie A', utworzy się drugi trójkąt BCA', mający kąt A' równy kątowi A, i boki b' i c' równe spełnieniom boków b i c. A ponieważ wzór [1] daje się przystosować do trójkąta BCA'; przeto i prawdziwym być musi dla trójkąta ABC: bo, położywszy w tym wzorze $180°-b$ i $180°-c$ za b i c, nic w niém niezmieniamy.

Fig. 38.



Nakoniec, powyższy ogólny wzór sprawdzić także można w przypadkach, gdy $b=90°$ i $c=90°$ bądź razem, bądź z osobna. Ale to dowodzenie jest zbyteczne: bo, jeżeli się już okazało, że wzór [1] stosuje się do wartości na boki b i c tak bliskich 90°, jak się spodoba, stosować się też będzie do przypadków, o których teraz mowa.

107. Wzór [1] odnieść można do każdego z boków trójkąta: a tak wypadają trzy równania, służące do wyznaczenia trzech jakichkolwiek części trójkąta, gdy trzy pozostałe są wiadome. Lecz, aby to wykonać się dało, potrzeba mieć gotowe wzory wyrażające związki między cztérema któremikolwiek częściami trójkąta. Takowych związków tylko cztéry różnych być może, a mianowicie:

108. 1ód. *Związek między trzema bokami i jednym kątem.* Równanie [1], już wywiedzione, wyraża ten związek; a przemieniwszy w niém głoski jedne na drugie, trzy różne jego odmiany wypadną, tojest:

[1] $\text{dost}\, a = \text{dost}\, b\ \text{dost}\, c + \text{wst}\, b\ \text{wst}\, c\ \text{dost}\, A$,
[2] $\text{dost}\, b = \text{dost}\, a\ \text{dost}\, c + \text{wst}\, a\ \text{wst}\, c\ \text{dost}\, B$,
[3] $\text{dost}\, c = \text{dost}\, a\ \text{dost}\, b + \text{wst}\, a\ \text{wst}\, b\ \text{dost}\, C$.

109. 2re. *Związek między dwoma bokami, i dwoma przeciwległemi im kątami.* Aby wyprowadzić równanie wyrażające n. p. związek między a, b, A i B, należy rugować c z wzorów [1] i [2]: co się uskutecznia, biorąc z tych równań wartości na wst c i dost c, i wstawiając je w równanie $\text{wst}^2 c + \text{dost}^2 c = 1$. Lecz sposób następujący, podobny do użytego wyżéj pod n. **68**, nierównie jest prostszy.

Równanie [1] daje $\text{dost}\,A = \dfrac{\text{dost}\,a - \text{dost}\,b\,\text{dost}\,c}{\text{wst}\,b\,\text{wst}\,c}$:

a ztąd

$$\text{wst}^2 A = 1 - \text{dost}^2 A = 1 - \frac{(\text{dost}\,a - \text{dost}\,b\,\text{dost}\,c)^2}{\text{wst}^2 b\,\text{wst}^2 c},$$

$$= \frac{(1-\text{dost}^2 b)(1-\text{dost}^2 c) - (\text{dost}\,a - \text{dost}\,b\,\text{dost}\,c)^2}{\text{wst}^2 b\,\text{wst}^2 c},$$

$$= \frac{1-\text{dost}^2 a - \text{dost}^2 b - \text{dost}^2 c + 2\,\text{dost}\,a\,\text{dost}\,b\,\text{dost}\,c}{\text{wst}^2 b\,\text{wst}^2 c};$$

więc

$$\frac{\text{wst}\,A}{\text{wst}\,a} = \sqrt{\frac{1-\text{dost}^2 a - \text{dost}^2 b - \text{dost}^2 c + 2\,\text{dost}\,a\,\text{dost}\,b\,\text{dost}\,c}{\text{wst}\,a\,\text{wst}\,b\,\text{wst}\,c}}.$$

Tu niemasz żadnéj wątpliwości co do znaku ilości piérwiastkowéj: bo gdy kąty i boki są mniejsze od 180°, wstawy ich muszą być dodatne.

Ponieważ druga strona ostatniego równania nie zmienia się, zamieniając A i a na B i b, i *odwrotnie*; albo A i a na C i c, i *odwrotnie*; przeto wypada

$$[4] \qquad \frac{\text{wst}\,A}{\text{wst}\,a} = \frac{\text{wst}\,B}{\text{wst}\,b} = \frac{\text{wst}\,C}{\text{wst}\,c}:$$

więc, *w trójkącie kulistym, wstawy kątów mają się do siebie, jak wstawy boków im przeciwnych.*

110. 3cie. *Związek między dwoma bokami, kątem niemi zawartym, i kątem jednemu z nich przeciwnym.* Aby znaleźć równanie na ten związek, odpowiadające połączeniu a, b, A, C, trzeba naprzód rugować dost c z równań [1] i [3]. Co zrobiwszy, będzie

$$\text{dost}\ a = \text{dost}\ a\ \text{dost}^2 b + \text{dost}\ b\ \text{wst}\ a\ \text{wst}\ b\ \text{dost C} + \text{wst}\ b\ \text{wst}\ c\ \text{dost A}.$$

Przeniosłszy dost a dost ^2b na piérwszą stronę, i uważając że dost$a$—dost$a$ dost ^2b=dost a wst ^2b; a potém, podzieliwszy wynikłe równanie przez wst$b$ wst a, będzie

$$[\text{i}]\quad \frac{\text{dost}\ a\ \text{wst}\ b}{\text{wst}\ a} = \text{dost}\ b\ \text{dost C} + \frac{\text{wst}\ c\ \text{dost A}}{\text{wst}\ a}.$$

Lecz $\frac{\text{wst}\ c}{\text{wst}\ a} = \frac{\text{wst C}}{\text{wst A}}$ [4]; a zatém na związek szukany wypadnie równanie

$$\text{doty}\ a\ \text{wst}\ b = \text{dost}\ b\ \text{dost C} + \text{wst C doty A}.$$

Przemieniwszy w tém równaniu głoski jedne na drugie, sześć następujących jego odmian mieć będziemy, tojest:

[5] $\text{doty}\ a\ \text{wst}\ b = \text{dost}\ b\ \text{dost C} + \text{wst C doty A}$,

[6] $\text{doty}\ b\ \text{wst}\ a = \text{dost}\ a\ \text{dost C} + \text{wst C doty B}$,

[7] $\text{doty}\ a\ \text{wst}\ c = \text{dost}\ c\ \text{dost B} + \text{wst B doty A}$,

[8] $\text{doty}\ c\ \text{wst}\ a = \text{dost}\ a\ \text{dost B} + \text{wst B doty C}$,

[9] $\text{doty}\ b\ \text{wst}\ c = \text{dost}\ c\ \text{dost A} + \text{wst A doty B}$,

[10] $\text{doty}\ c\ \text{wst}\ b = \text{dost}\ b\ \text{dost A} + \text{wst A doty C}$.

111. 4$^{\text{te}}$. *Związek między jednym bokiem i trzema kątami.* Chcąc wywieść równanie na ten ostatni związek, wypada rugować b i c z równań [1], [2], [3]. W tym celu wstawia się naprzód wartość na dost c z równania [3] w równanie [1]: ztąd będzie, jak wyżéj [i],

$$\frac{\text{dost}\ a\ \text{wst B}}{\text{wst}\ a} = \text{dost}\ b\ \text{dost C} + \frac{\text{wst}\ c\ \text{dost A}}{\text{wst}\ a};$$

a to równanie, na mocy związków

$$\frac{\text{wst}\ b}{\text{wst}\ a} = \frac{\text{wst B}}{\text{wst A}}\ \text{i}\ \frac{\text{wst}\ c}{\text{wst}\ a} = \frac{\text{wst C}}{\text{wst A}},$$

zamienia się na następujące:

[m] $\text{dost}\, a \text{ wst B} = \text{dost}\, b \text{ wst A dost C} + \text{dost A wst C}.$

Wstawiając potém wartość na dost c w równanie [2], albo krócéj, zamieniając w ostatniém równaniu a i A na b i B, i odwrotnie, będzie znowu

[n] $\text{dost}\, b \text{ wst A} = \text{dost}\, a \text{ wst B dost C} + \text{dost B wst C}.$

Pozostaje więc tylko rugować dost b z równań [m] i [n]. To uskuteczniwszy, znajdziemy szukany związek między częściami A, B, C i a trójkąta; a przystosowawszy go koleją do trzech kątów A, B, C, trzy następujące jego odmiany otrzymamy:

[11] $\text{dost A} = -\text{dost B dost C} + \text{wst B wst C dost}\, a,$

[12] $\text{dost B} = -\text{dost A dost C} + \text{wst A wst C dost}\, b,$

[13] $\text{dost C} = -\text{dost A dost B} + \text{wst A wst B dost}\, a.$

112. Podobieństwo uderzające tych równań do wzoru zasadniczego [1] prowadzi do ważnego wniosku. Niech będzie trójkąt kulisty A′B′C′, którego boki a', b', c', są spełnieniami kątów A, B, C: na zasadzie wzoru [1] jest

$$\text{dost}\, a' = \text{dost}\, b' \text{ dost}\, c' + \text{wst}\, b' \text{ wst}\, c' \text{ dost A}':$$

a że wst a'=wstA, dost a'=—dost A, wst b'=wst B, i t. d.; więc

$$-\text{dost A} = \text{dost B dost C} + \text{wst B wst C dost A}'.$$

Z równania tego wypada na dost A′ wartość równa i znakiem tylko przeciwna téj, która się otrzymuje z równania [11] na dost a; a zatém $a = 180° - \text{A}'$. Tak samo będzie $b = 180° - \text{B}'$ i $c = 180° - C$; więc, *mając dany trójkąt kulisty i nakreśliwszy drugi trójkąt, którego boki są spełnieniami kątów piérwszego; będą na odwrót i boki piérwszego trójkąta spełnieniami kątów drugiego.*

Z téj przyczyny, takie dwa trójkąty zowią się *spełniającemi się* wzajemnie. Z Geometryi wiadomo, że każdy z takowych trójkątów nakreśla się, biorąc za bieguny jednego, trzy wierzchołki drugiego trójkata: dla téj znowu własności nazwano je trójkątami *polarnemi* względem siebie.

113. *Analogie Nepera.* To nazwisko nadano pewnym proporcyom, używanym do uprostszenia rozwiązań trójkątów kulistych w niektórych przypadkach. Proporcye te otrzymują się następującym sposobem:

Równanie [1] i [2] dają

$$\text{dost}\, a - \text{dost}\, b\ \text{dost}\, c = \text{wst}\, b\ \text{wst}\, c\ \text{dost}\, \text{A},$$
$$\text{dost}\, b - \text{dost}\, a\ \text{dost}\, c = \text{wst}\, a\ \text{wst}\, c\ \text{dost}\, \text{B}.$$

Z podzielenia drugiego z tych równań przez piérwsze, i z uwagi że $\frac{\text{wst}\, a}{\text{wst}\, b} = \frac{\text{wst}\, \text{A}}{\text{wst}\, \text{B}}$, wypada

$$\frac{\text{dost}\, b - \text{dost}\, a\ \text{dost}\, c}{\text{dost}\, a - \text{dost}\, a\ \text{dost}\, c} = \frac{\text{wst}\, \text{A}\ \text{dost}\, \text{B}}{\text{wst}\, \text{B}\ \text{dost}\, \text{A}}.$$

Wyraziwszy to równanie w kształcie proporcyi i porównawszy różnicę wyrazów każdego stosunku ze summą tychże samych wyrazów, po stosowném, a łatwo dostrzedz się dającém przerobieniu, wypadnie

$$[\text{o}] \qquad \frac{\text{dost}\, b - \text{dost}\, a}{\text{dost}\, b + \text{dost}\, a} \times \frac{1 + \text{dost}\, c}{1 - \text{dost}\, c} = \frac{\text{wst}\,(\text{A}-\text{B})}{\text{wst}\,(\text{A}+\text{B})}.$$

Lecz, na mocy znanych wzorów (**40, 37, 29**) jest:

$$\frac{\text{dost}\, b - \text{dost}\, a}{\text{dost}\, b + \text{dost}\, a} = \text{sty}\,\tfrac{1}{2}(a+b)\ \text{sty}\,\tfrac{1}{2}(a-b),$$
$$\frac{1 + \text{dost}\, c}{1 - \text{dost}\, c} = \frac{1}{\text{sty}^2\tfrac{1}{2}c},$$
$$\text{wst}\,(\text{A}+\text{B}) = 2\ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B})\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}),$$
$$\text{wst}\,(\text{A}-\text{B}) = 2\ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B});$$

wstawiwszy więc te wartości w powyższy wypadek [o], będzie

$$[\text{p}] \quad \text{sty}\,\tfrac{1}{2}(a+b)\ \text{sty}\,\tfrac{1}{2}(a-b) = \text{sty}^2\tfrac{1}{2}c\,\frac{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B})\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}.$$

Z drugiéj strony, związek $\dfrac{\text{wst}\,a}{\text{wst}\,b}=\dfrac{\text{wst A}}{\text{wst B}}$ daje

$$\frac{\text{wst}\,a+\text{wst}\,b}{\text{wst}\,a-\text{wst}\,b}=\frac{\text{wst A}+\text{wst B}}{\text{wst A}-\text{wst B}};$$

a to wyrażenie znowu zamienić można na następujące (**40, 39**):

$$[\text{q}]\qquad \frac{\text{sty}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{sty}\frac{1}{2}(a-b)}=\frac{\text{wst}\ \frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})\ \text{dost}\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{dost}\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})\ \text{wst}\ \frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}.$$

Z pomnożenia równań [p] i [q], a potém z podzielenia ich przez siebie wypadają dwa równania, zamykające tylko kwadraty. Nareszcie, wyciągnąwszy piérwiastki kwadratowe z obudwóch stron tych równań, i pomnąc na to, że sty $\frac{1}{2}(a+b)$ i dost $\frac{1}{2}$ (A+B), na mocy równania [p], powinny mieć znaki jednakowe, otrzymamy

$$[14]\qquad \text{sty}\ \tfrac{1}{2}(a+b)=\text{sty}\ \tfrac{1}{2}\,c\ \frac{\text{dost}\ \frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{dost}\ \frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})},$$

$$[15]\qquad \text{sty}\ \tfrac{1}{2}(a-b)=\text{sty}\ \tfrac{1}{2}\,c\ \frac{\text{wst}\ \frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{wst}\ \frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}.$$

Wzory te stosować się także mogą do trójkąta polarnego: bo dosyć jest położyć w nie za a, b, c, A, B, równe im wartości 180°—A, 180°—B, 180°—C, 180°—a, 180°—b; a będzie

$$[16]\qquad \text{sty}\ \tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B})=\text{doty}\ \tfrac{1}{2}\,\text{C}\ \frac{\text{dost}\ \frac{1}{2}(a-b)}{\text{dost}\ \frac{1}{2}(a+b)},$$

$$[17]\qquad \text{sty}\ \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})=\text{doty}\ \tfrac{1}{2}\,\text{C}\ \frac{\text{wst}\ \frac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\ \frac{1}{2}(a+b)}.$$

Cztéry powyższe wzory są wspomnionemi proporcyami czyli analogiami, odkrytemi przez Nepera, a tu napisanemi w postaci równań. Dwa piérwsze z nich służą do rozwiązania trójkąta kulistego, gdy dany będzie jeden bok jego i dwa kąty, przyległe temuż bokowi; dwa drugie zaś, gdy dwa boki trójkąta są wiadome i kąt między niemi zawarty (*).

(*) Położywszy w równaniach [14], [15], [16] i [17] *naprzód* c i C za a i A, i odwrotnie a i A za c i C; *powtóre* c i C za b i B, i odwrotnie b i B

114. *Związki między częściami trójkąta kulistego prostokątnego.* Aby otrzymać wzory służące do rozwiązania trójkąta prostokątnego, dosyć jest uczynić kąt $A=90°$ we wszystkich związkach zawiérających kąt A, i któreśmy wyżéj wyprowadzili. To uskuteczniwszy, wypadnie

[a]	$\text{dost}\, a = \text{dost}\, b\ \text{dost}\, c$,		n. 108.
[b]	$\text{wst}\, b = \text{wst}\, a\ \text{wst}\, B$,	$\text{wst}\, c = \text{wst}\, a\ \text{wst}\, C$,	n. 109.
[c]	$\text{sty}\, b = \text{sty}\, a\ \text{dost}\, C$,	$\text{sty}\, c = \text{sty}\, a\ \text{dost}\, B$,	n. 110.
[d]	$\text{sty}\, b = \text{wst}\, c\ \text{sty}\, B$,	$\text{sty}\, c = \text{wst}\, b\ \text{sty}\, C$,	tamże.
[e]	$\text{dost}\, B = \text{wst}\, C\ \text{dost}\, b$,	$\text{dost}\, C = \text{wst}\, B\ \text{dost}\, c$,	n. 111.
[f]	$\text{dost}\, a = \text{doty}\, B\ \text{doty}\, C$,		tamże,

tojest razem sześć wzorów, zarówno dogodnych w rachunku z logarytmami. Piérwszy z tych wzorów wyraża związek między przeciwprostokątną i dwoma bokami przyległemi kątowi prostemu; drugi, między przeciwprostokątną, bokiem jednym, i kątem mu przeciwnym; trzeci, między przeciwprostokątną, bokiem jednym, i kątem mu przyległym; czwarty, między dwoma bokami i kątem, jednemu z nich przeciwnym; piąty, między jednym bokiem i dwoma kątami ukośnemi; nakoniec szósty, między przeciwprostokątną i dwoma kątami ukośnemi. A tak, mając dane dwie z pięciu części trójkąta kulistego prostokątnego, znaleźć można, za pomocą jednego z tych wzorów, części jego pozostałe.

115. Tu wypada jeszcze przytoczyć niektóre ważne własności trójkąta prostokątnego, a mianowicie:

1ód. że dost a, jak wzór [a] pokazuje, zawsze ma znak ten sam, co iloczyn dost b dost c. A że to miejsce będzie miało, gdy albo wszystkie trzy dostawy są dodatne, albo z nich jedna tylko; przeto *w trójkącie kulistym prostokątnym, albo każdy*

---

za c i C, wypadną jeszcze cztéry pary równań podobnych do powyższych, z których jedna połowa służy do tegoż celu, co i równania [14] i [15], a druga do tego, co równania [16] i [17]. Wszystkich więc Analogiów, odpowiadających wszelkim, po dwie branym, połączeniom kątów i boków trójkąta kulistego, jest 12. Przyp. Tłum.

z trzech boków jest mniejszy od 90°; *albo dwa są większe od* 90°, *a trzeci jest mniejszy;*

2re. że sty b, jak uczy wzór [d], ten sam ma znak, co sty B; a sty c ten sam, co sty C. Więc, *każdy z boków przyległych kątowi prostemu jest tego samego gatunku, co kąt mu przeciwny: to jest, że kąt i bok mu przeciwny albo razem mniejsze są od* 90°; *albo też obadwa większe od* 90°.

ROZWIĄZANIE TRÓJKĄTÓW KULISTYCH PROSTOKĄTNYCH.

116. Trójkąt kulisty może mieć dwa, a nawet trzy kąty proste. W ostatnim przypadku, trzy boki jego są ćwiartkami okręgu koła. W piérwszym przypadku, boki przeciwne obudwom kątom prostym także są ćwiartkami okręgu koła; ale trzeci kąt, jako mający za miarę trzeci bok trójkąta, taką samą zawiéra liczbę stopni, jaką zawiéra ten bok. Ponieważ widoczna jest, że w dwóch wspomnionych przypadkach nie ma potrzeby rozwiązania trójkąta kulistego; przeto niżéj tylko mowa będzie o trójkącie zawiérającym jeden kąt prosty. Chcąc taki trójkąt rozwiązać, dosyć jest mieć wiadome dwie z pięciu jego części: a tak sześć różnych prrypadków tego rozwiązania być może.

117. **Przypadek I.** *Mając daną przeciwprostokątną* a *i bok* b; *znaleźć bok* c *i kąty* B *i* C:

Wzory [a], [b] i [c] dają

$$\text{dost}\, c = \frac{\text{dost}\, a}{\text{dost}\, b}, \quad \text{wst}\, B = \frac{\text{wst}\, b}{\text{wst}\, a}, \quad \text{dost}\, C = \frac{\text{sty}\, b}{\text{sty}\, a}.$$

Ponieważ tu łuki i boki nie mogą być większe od 180°, a w téj granicy jeden tylko łuk odpowiada danéj dostawie; przeto bok c i kąt C wyznaczone są bez żadnéj wątpliwości. Co do kąta B, jako wyznaczony przez wstawę, zdaje się, że go bądź za ostry, bądź za roztwarty uważać można; lecz, podług uwag pod n. **115**, on tego musi być gatunku, jakiego jest bok dany b.

118. Przypadek II. *Mając dane dwa boki* b *i* c *przyległe kątowi prostemu, znaleźć przeciwprostokątną* a *i kąty* B *i* C.

Z równań [a] i [d] wypada

$$\text{dost}\, a = \text{dost}\, b\ \text{dost}\, c,\quad \text{sty}\, B = \frac{\text{sty}\, b}{\text{wst}\, c},\quad \text{sty}\, C = \frac{\text{sty}\, c}{\text{wst}\, b};$$

W tym przypadku, widocznie żadna wątpliwość nie zachodzi.

119. Przypadek III. *Mając daną przeciwprostokątną* a *i kąt* B, *znaleźć boki* b, c *i kąt* C.

Równania [b], [c], [f] dają

$$\text{wst}\, b = \text{wst}\, a\ \text{wst}\, B,\quad \text{sty}\, c = \text{sty}\, a\ \text{dost}\, B,\quad \text{doty}\, C = \text{dost}\, a\ \text{sty}\, B.$$

Z tych równań wypadające wartości na c i C nie są wątpliwe; a bok b musi być tegoż samego gatunku, co kąt B (115).

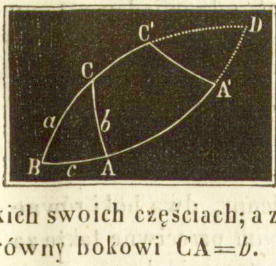
120. Przypadek IV. *Mając dany bok* b, *i kąt jemu przeciwny* B, *znaleźć boki* a, c *i kąt* C.

Równania [b], [d], [e] dają

$$\text{wst}\, a = \frac{\text{wst}\, b}{\text{wst}\, B},\quad \text{wst}\, c = \frac{\text{sty}\, b}{\text{sty}\, B},\quad \text{wst}\, C = \frac{\text{dost}\, B}{\text{dost}\, b}.$$

Tu, z powodu wstaw, wątpliwość zachodzić może, i nie trudno przewidzieć, iż ona rzeczywiście w tym przypadku ma miejsce.

Fig. 39.



Jakoż, jeżeli przypuścimy, że trójkąt BAC (fig. 39), prostokątny przy A, czyni zadosyć warunkom zadania: natenczas, po przedłużeniu BA i BC aż do przecięcia się w punkcie D, i po odcięciu DA′=BA i DC′=BC, trójkąty BAC, DA′C′ będą sobie równe we wszystkich swoich częściach; a zatém kąt A′ musi być prosty i bok C′A′ równy bokowi CA=b. Ztąd trójkąt BA′C′ jest prostokątny i zawiéra także dwie części dane B i b. Można przeto wziąć od upodobania $a < \text{albo} > 90°$; lecz, skoro jedna z tych wartości się przyjmie, gatunek boku c tém samém wskazany będzie przez równanie dost a=dost b dost c, i tegoż samego gatunku musi być kąt C.

Gdy b=B, jeden tylko trójkąt o dwóch kątach prostych istnieć może: A żadnego nie będzie trójkąta, gdy wst b > jest od wst B.

121. **Przypadek V.** *Mając dany bok* b, *przyległy kątowi prostemu, i kąt* C *przyległy temuż bokowi, znaleźć boki* a, c *i kąt* B.

Z równań [c], [d], [e] wypada

$$\text{sty}\, a = \frac{\text{sty}\, b}{\text{dost}\, C}, \quad \text{sty}\, c = \text{wst}\, b\ \text{sty}\, C, \ \text{dost}\, B = \text{dost}\, b\ \text{wst}\, C.$$

Wartości na a, c i B, otrzymane z tych równań, żadnéj nie ulegają wątpliwości.

122. **Przypadek VI.** *Mając dane dwa kąty pochyłe* B *i* C, *znaleźć* a, b *i* c.

Z równań [f] i [e] mamy

$$\text{dost}\, a = \text{doty}\, B\ \text{doty}\, C, \ \text{dost}\, b = \frac{\text{dost}\, B}{\text{dost}\, C}, \ \text{dost}\, c = \frac{\text{dost}\, C}{\text{wst}\, B}.$$

I te równania dają wartości niewątpliwe na boki szukane; a nawet ostrzegają o tém, czy trójkąt może istnieć, lub nie.

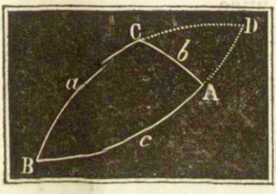
123. Uwaga. W wielu przypadkach rozwiązanie trójkąta kulistego jakiegokolwiek, przywodzi się do rozwiązania trójkąta prostokątnego. I tak:

1ód. Gdy w trójkącie kulistym między trzema danemi częściami znajduje się jeden bok równy 90°; tedy kąt, odpowiadający temu bokowi w trójkącie polarnym, będzie prosty. Nadto, ponieważ wiadome będą dwie z pięciu innych części trójkąta polarnego; przeto go rozwiazać można podług tego, co się wyżéj powiedziało: a rozwiązawszy go, tém samém rozwiążemy trójkąt dany.

2re. Gdy trójkąt dany jest równoramienny, dwa boki równe uważać się mogą za jednę część, i kąty im przeciwne także za jednę część. W tym razie dwie części wystarczają do rozwiązania trójkąta: łuk bowiem koła wielkiego, poprowadzony przez wierzchołek trójkąta danego i przez środek jego podstawy, podzieli go na dwa trójkąty prostokątne, równe kąty i boki mające. A ponieważ, oprócz kąta prostego w każdym z tych trójkątów, dwie jeszcze części będą wiadome; przeto te obadwa trójkąty łatwo się rozwiążą. Rozwiazanie więc trójkąta równoramiennego przywodzi się do rozwiązania trójkątów prostokątnych.

3cie. Gdy w trójkącie kulistym ABC (fig. 40) jest $a+b=180°$; tedy przedłużywszy boki a i c aż do spotkania się w D, będzie $a+CD=180°$; więc $CD=b$. A że każda część wiadoma trójkąta ABC daje poznać część jednę trójkąta CDA i *odwrotnie;* przeto rozwiązanie trójkąta, w którym summa dwóch boków równa jest 180°, zależy od rozwiązania trójkąta równoramiennego, a ztąd też od rozwiązania trójkąta prostokątnego.

Fig. 40.



4te. Toż samo powiedzieć można o trójkącie kulistym, w którym dwa kąty nawzajem się spełniają: bo, gdy $a+b=180°$, musi też być $A+B=180°$, i *odwrotnie.* Jakoż, w trójkącie równoramiennym ACD (fig. 40) kąt $CAD=D=B$; a że $CAD+CAB=180°$; więc, i w trójkącie ABC mieć będziemy $A+B=180°$.

ROZWIĄZANIE TRÓJKĄTÓW KULISTYCH JAKICHKOLWIEK.

124. Przypadek I. *Mając dane trzy boki* a, b, c, *znaleźć kąty* A, B, C.

Aby otrzymać A, naprzykład, wyciąga się z równania [1] n. **108** wartość na

$$\text{dost}\,A=\frac{\text{dost}\,a-\text{dost}\,b\ \text{dost}\,c}{\text{wst}\,b\ \text{wst}\,c};$$

lecz dogodniejszém wyrażeniem do rachunku za pomocą logarytmów jest wartość na wst $\frac{1}{2}$ A, dost $\frac{1}{2}$ A lub na sty $\frac{1}{2}$ A, jak to się pokazało przy rozwiązaniu trójkątów prostokreślnych. Włożywszy zatém tę wartość na dost A we wzór $2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A=1-\text{dost}\,A$ (**31**), będzie

$$2\,\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A}=1-\frac{\mathrm{dost}\,a-\mathrm{dost}\,b\;\mathrm{dost}\,c}{\mathrm{wst}\,b\;\mathrm{wst}\,c}=\frac{\mathrm{dost}\,b\;\mathrm{dost}\,c+\mathrm{wst}\,b\;\mathrm{wst}\,c-\mathrm{dost}\,a}{\mathrm{wst}\,b\;\mathrm{wst}\,c},$$

$$=\frac{\mathrm{dost}\,(b-c)-\mathrm{dost}\,a}{\mathrm{wst}\,b\;\mathrm{wst}\,c}.$$

We wzorze znanym $\mathrm{dost}\,q-\mathrm{dost}\,p=2\,\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}(p+q)\,\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}(p-q)$ uczyniwszy $p=a$ i $q=b-c$, będzie $\mathrm{dost}\,(b-c)-\mathrm{dost}\,a$ $=2\,\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}(a+b-c)\,\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}(a-b+c)$; więc

$$\mathrm{wst}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A}=\sqrt{\frac{\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}(a+b-c)\;\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}(a-b+c)}{\mathrm{wst}\,b\;\mathrm{wst}\,c}}.$$

Dla krótkości, położywszy $a+b+c=2s$, będzie $a+b-c$ $=2(s-c)$, $a-b+c=2(s-b)$; a tém samém wzór powyższy przejdzie w następujący

$$\mathrm{wst}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A}=\sqrt{\frac{\mathrm{wst}\,(s-b)\;\mathrm{wst}\,(s-c)}{\mathrm{wst}\,b\;\mathrm{wst}\,c}}.$$

Podobnież działając, wypada

$$\mathrm{dost}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A}=\sqrt{\frac{\mathrm{wst}\,s\;\mathrm{wst}\,(s-a)}{\mathrm{wst}\,b\;\mathrm{wst}\,c}};$$

a ztąd $$\mathrm{sty}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A}=\sqrt{\frac{\mathrm{wst}\,(s-b)\;\mathrm{wst}\,(s-c)}{\mathrm{wst}\,s\;\mathrm{wst}\,(s-a)}}.$$

125. Przypadek II. *Mając dane dwa boki* a *i* b, *i kąt* A *jednemu z nich przeciwny, znaleźć bok* c i *kąty* B, C.

Kąt B, przeciwny bokowi b, otrzymuje się z proporcyi: $\mathrm{wst}\,a : \mathrm{wst}\,b = \mathrm{wst}\,\mathrm{A} : \mathrm{wst}\,\mathrm{B}$, zkąd

$$\mathrm{wst}\,\mathrm{B}=\frac{\mathrm{wst}\,\mathrm{A}\;\mathrm{wst}\,b}{\mathrm{wst}\,a}.$$

Następnie, najdogodniéj jest wyznaczyć bok c i kąt C za pomocą analogiów Nepera (**113**), które dają

$$\mathrm{sty}\,\tfrac{1}{2}\,c=\mathrm{sty}\,\tfrac{1}{2}(a-b)\frac{\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})},$$

$$\mathrm{doty}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{C}=\mathrm{sty}\,\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\frac{\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}(a+b)}{\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}(a-b)}.$$

Lubo kąt B tu wypada ostry lub roztwarty, bo się otrzymuje przez wstawę; jednakowoż pewnym wartościom na części dane a, b, A, odpowiada tylko jeden trójkąt. Przypadek ten roztrząśniemy niżéj (130) sposobem podobnym do już użytego w przypadku drugim trójkątów prostokreślnych (75).

Kąt C znaleźć także można bezpośrednio z równania [5] n. 110.

$$\text{doty A wst C} + \text{dost } b \text{ dost C} = \text{doty } a \text{ wst } b.$$

W tym celu, naprzód, wynajduje się kąt posiłkowy φ, zakładając, że doty A = dost b doty φ, co daje

$$\text{doty } \varphi = \frac{\text{doty A}}{\text{dost } b};$$

potém, wstawiając z tego wzoru wartość na doty A = dost b doty φ $= \frac{\text{dost } b \text{ dost } \varphi}{\text{wst } \varphi}$ w równanie doty A wst C + dost C dost b = doty a wst b, wypada

$$\text{dost } b\,(\text{wst C dost } \varphi + \text{dost C wst } \varphi) = \text{doty } a \text{ wst } b \text{ wst } \varphi;$$

a to nakoniec równanie daje wzór

$$\text{wst}\,(\text{C} + \varphi) = \frac{\text{sty } b \text{ wst } \varphi}{\text{sty } a},$$

z którego wynajduje się C + φ. A przyjąwszy, że C + $\varphi = m$, będzie C $= m - \varphi$.

Znalazłszy kąt C, wyrachować można bok c z proporcyi wst A : wst C = wst a : wst c. Lecz, chcąc bezpośrednio otrzymać wartość na c, użyć na to potrzeba równania [1] n. 108

$$\text{dost } b \text{ dost } c + \text{dost A wst } b \text{ wst } c = \text{dost } a.$$

Piérwsza strona tego równania zamienia się na jeden wyraz za pomocą kąta posiłkowego φ, zakładając dost A wst b = dost b doty φ. Ztąd jest

$$\text{doty } \varphi = \text{dost A sty } b;$$

a równanie powyższe widocznie przechodzi w następujące:

$$\text{dost}\, b\, (\text{wst}\, \varphi\, \text{dost}\, c + \text{dost}\, \varphi\, \text{wst}\, c) = \text{dost}\, a\, \text{wst}\, \varphi, \text{ czyli}$$

$$\text{wst}\, (c+\varphi) = \frac{\text{dost}\, a\, \text{wst}\, \varphi}{\text{dost}\, b};$$

a zatém, obliczywszy poprzednio kąt φ, łatwo także znajdziemy bok c.

126. Przypadek III. *Mając dane dwa boki* a *i* b *i kąt między niemi zawarty* C, *znaleźć* A, B *i* c.

Wzory [5] i [6] n. 110 dają

$$\text{doty}\, A = \frac{\text{doty}\, a\, \text{wst}\, b - \text{dost}\, b\, \text{dost}\, C}{\text{wst}\, C},\ \text{doty}\, B = \frac{\text{doty}\, b\, \text{wst}\, a - \text{dost}\, a\, \text{dost}\, C}{\text{wst}\, C}.$$

Używając kąta posiłkowego łatwo zamienić liczniki tych równań na jednomiany. Lecz krócéj będzie rachować podług analogiów Nepera (113), tojest podług wzorów

$$\text{sty}\, \tfrac{1}{2}(A+B) = \text{doty}\, \tfrac{1}{2} C\, \frac{\text{dost}\, \tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{dost}\, \tfrac{1}{2}(a+b)},$$

$$\text{sty}\, \tfrac{1}{2}(A-B) = \text{doty}\, \tfrac{1}{2} C\, \frac{\text{wst}\, \tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\, \tfrac{1}{2}(a+b)},$$

z których otrzymują się wartości na $\frac{1}{2}(A+B)$ i $\frac{1}{2}(A-B)$, a tém samém na A i B.

Znalazłszy kąty, dochodzi się bok c z proporcyi wst A : wst C = wst a: wst c. A w razie, gdy c bezpośrednio wyrachować trzeba, na to użyć można wzoru (108)

$$\text{dost}\, c = \text{dost}\, a\, \text{dost}\, b + \text{wst}\, a\, \text{wst}\, b\, \text{dost}\, C,$$

zakładając, że $\text{wst}\, b\, \text{dost}\, C = \frac{\text{dost}\, b\, \text{dost}\, \varphi}{\text{wst}\, \varphi} = \text{dost}\, b\, \text{doty}\, \varphi.$

Ztąd wzorami do rachunku, nie przedstawiającemi żadnéj wątpliwości, będą

$$\text{doty}\, \varphi = \text{sty}\, b\, \text{dost}\, C,\ \text{dost}\, c = \frac{\text{dost}\, b\, \text{wst}\, (a+\varphi)}{\text{wst}\, \varphi}.$$

127. Przypadek IV. *Mając dane dwa kąty* A *i* B, *i bok* c *między niemi leżący, znaleźć* a, b *i* C.

Boki a i b wyznaczyć można za pomocą równań [7] i [9] n. 110

$$\text{doty}\, a = \frac{\text{doty A wst B} + \text{dost B dost}\, c}{\text{wst}\, c},\ \text{doty}\, b = \frac{\text{doty B wst A} + \text{dost A dost}\, c}{\text{wst}\, c};$$

albo lepiéj jeszcze za pomocą analogiów Nepera

$$\text{sty}\, \tfrac{1}{2}(a+b) = \text{sty}\, \tfrac{1}{2} c\, \frac{\text{dost}\, \frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{dost}\, \frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})},$$

$$\text{sty}\, \tfrac{1}{2}(a-b) = \text{sty}\, \tfrac{1}{2} c\, \frac{\text{wst}\, \frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{wst}\, \frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}.$$

Następnie, dochodzi się C z proporcyi wst a : wst c = wst A : wst C. Chcąc kąt C wyrachować wprost, trzeba wziąć równanie (109) dost C = wst A wst B dost c — dost A dost B, i uczynić w niém wst B dost c = dost B doty φ. Ztąd wzorami do rachunku będą

$$\text{doty}\, \varphi = \text{sty B dost}\, c,\quad \text{dost C} = \frac{\text{dost B wst}(\text{A}-\varphi)}{\text{wst}\, \varphi}.$$

W tym przypadku, podobnym do trzeciego, rozwiązanie nie jest wątpliwe.

128. Przypadek V. *Mając dane dwa kąty* A, B *i bok* a, *przeciwny jednemu z nich, znaleźć* b, c *i* C.

Ten przypadek, zupełnie podobny drugiemu, tymże samym sposobem rozwiązuje się i podobnąż wątpliwość przedstawia.

Bok b wynajduje się z proporcyi wst A : wst B = wst a : wst b; a c i C obliczają się podług już przytoczonych (125) wzorów

$$\text{sty}\, \tfrac{1}{2} c = \text{sty}\, \tfrac{1}{2}(a-b)\, \frac{\text{wst}\, \frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}{\text{wst}\, \frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})},$$

$$\text{doty}\, \tfrac{1}{2}\text{C} = \text{sty}\, \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})\, \frac{\text{wst}\, \frac{1}{2}(a+b)}{\text{wst}\, \frac{1}{2}(a-b)}.$$

Bok c także wyrachować można z równania [7] n. 110.

$$\text{doty}\, a\ \text{wst}\, c - \text{dost B dost}\, c = \text{doty A wst B},$$

zakładając że doty a=dost B doty φ; co daje

$$\text{doty}\ \varphi = \frac{\text{doty}\ a}{\text{dost B}},\quad \text{wst}\ (c-\varphi) = \frac{\text{sty B wst}\ \varphi}{\text{sty A}}.$$

Nakoniec, C także wyznaczyć można z proporcyi wst$a$: wst c =wst A : wst C; albo z równania [11] n. III.

$$\text{dost}\ a\ \text{wst B wst C} - \text{dost B dost C} = \text{dost A}.$$

Piérwsza strona tego równania zamienia się na jednomian, przyjmując że dost a wst B=dost B doty φ; a ztąd wypadają wyrażenia

$$\text{doty}\,\varphi = \text{dost}\,a\ \text{sty}\,\varphi,\quad \text{wst}\,(\text{C}-\varphi) = \frac{\text{dost A wst}\ \varphi}{\text{dost B}},$$

służące do wyznaczenia φ i C—φ, a tém samém i kąta C.

129. **Przypadek VI i ostatni.** *Mając dane trzy kąty* A, B, C, *znaleźć boki* a, b, c.

Przypadek ten rozwiązuje się tym samym sposobem, co piérwszy. I tak n. p., aby wyznaczyć bok a, wziąć należy równanie [11] n. III, z którego naprzód jest

$$\text{dost}\ a = \frac{\text{dost A} + \text{dost B dost C}}{\text{wst B wst C}};$$

następnie, trzymając się postępowania użytego w dopiéro przytoczoném miejscu, wyprowadzają się wartości na wst $\frac{1}{2}a$, dost $\frac{1}{2}a$, sty $\frac{1}{2}a$, dogodniejsze do rachowania za pomocą logarytmów. Założywszy, że A+B+C=180°+2S, wyrażeniami na te wartości będą

$$\text{wst}\ \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\text{wst S wst (A}-\text{S)}}{\text{wst B wst C}}},$$

$$\text{dost}\ \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\text{wst (B}-\text{S) wst (C}-\text{S)}}{\text{wst B wst C}}},$$

$$\text{sty}\ \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\text{wst S wst (A}-\text{S)}}{\text{wst (B}-\text{S) wst (C}-\text{S)}}},$$

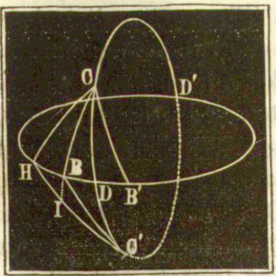
Wielkie podobieństwo tych trzech wzorów do wzorów na wst$\frac{1}{2}$A, dost$\frac{1}{2}$A i sty$\frac{1}{2}$A, wyprowadzonych wyżéj pod n. 124, ztąd pochodzi, że jedne na drugie zamienić można za pomocą trójkąta polarnego (112).

PRZYPADKI WĄTPLIWEGO ROZWIĄZANIA TRÓJKĄTÓW KULISTYCH.

130. Drugi i piąty tylko przypadek rozwiązania trójkątów kulistych jakichkolwiek, przedstawią wątpliwość co do wartości swych części, przez rachunek otrzymanych. Trzeba więc roztrząsnąć, poczém poznać można, czy dwa zachodzą rozwiązania, czy też jedno tylko, i nareszcie kiedy całkiem trójkąta nie będzie. Rozbiór ten atoli poprzedzić należy okazaniem kilku prawd, na których rozumowanie niniejsze się opiera.

Niech będzie na powierzchni kuli nakreślone półkole DCD', (fig. 41), prostopadłe do całego obwodu koła DHD'. Odciąwszy na półkolu łuk CD $<90^\circ$; poprowadziwszy przez punkt C, łuki CB, CB', CH kół wielkich do różnych punktów koła DHD'; przedłużywszy CD tak, aby przedłużenie DC' było równe DC; i nakoniec, połączywszy punkt C' z punktem B łukiem koła wielkiego: natenczas trójkąty CDB i C'DB mieć będą po jednym kącie prostym, zawartym bokami równemi; więc CB=C'B. A że CDC'<CB+BC'; przeto też CD<CB. Więc 1ód *łuk* CD *jest najkrótszy, jaki z punktu* C *do obwodu koła* DHD' *poprowadzić można; a tém samém łuk* CD' *jest największy.*

Fig. 41.



Niech będzie DB'=DB: tedy trójkąty CDB, CDB', także mieć będą po jednym kącie prostym, zawartym bokami równemi; a zatém CB'=CB. Więc 2re *łuki pochyłe jednakowo oddalone od* CD, *czyli od* CD', *są równe sobie.*

Nakoniec, niech będzie DH>DB: nakreślmy C'H i przedłużmy CB aż do przecięcia się z łukiem C'H w punkcie I. Ponieważ łuk CC' jest mniejszy od półkola; przeto przedłużenie łuku CB przetnie przedłużenie łuku CC' w punkcie, leżącym za punktem C: a z tego wypada, że punkt I leżéć musi pomiędzy H i C'. Będzie więc C'B<C'I+IB, a tém samém C'B+BC<C'I+IC. Lecz IC<IH+HC; a zatém też C'I+IC<C'H+HC; więc tém bardziéj C'B+BC<C'H+HC. Że zaś C'B=BC i C'H=HC; przeto będzie BC<HC. Więc 3cie *łuki pochyłe tém są większe, im bardziéj się oddalają od* CD, *czyli im więcéj się zbliżają do* CD'.

131. Teraz roztrząsnąć można, co zachodzi, gdy trójkąt się nakreśla z dwóch danych boków a i b, i z danego kąta A, przeciwnego bokowi a.

Uważać tu naprzód wypada, że w niektórych przypadkach sam rachunek pokazuje, czy trójkąt może być nakreślony, lub nie. Dla poznania tych przypadków, niech (fig. 42 i 43) będzie kąt CAB=A i bok AC=b. Przedłużywszy AC i AB aż do przecięcia się w punkcie E, i spuściwszy łuk CD, prostopadły od AE, będzie łuk CD tego samego gatunku, co kąt A (115). Jeżeli więc kąt A jest ostry, będzie CD najkrótszą odległością punktu C od półkola AE; a jeżeli znowu kąt A jest roztwarty, będzie CD największą odległością (129, 1ód). W piérwszém z tych przypuszczeń trójkąta wykreślić nie będzie można, gdy a<CD, czyli, co za tém idzie, gdy wst a<wst CD; w drugiém zaś niemasz trójkąta, gdy a>CD, tojest, gdy podobnież wst a<wst CD. A że w trójkącie prostokątnym ACD, jest

Fig. 42.

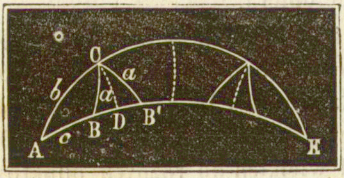
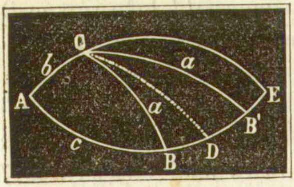


Fig. 43.



$$1 : \text{wst } b = \text{wst A} : \text{wst CD} = \text{wst } b \text{ wst A};$$

więc w obudwóch przypuszczeniach mamy wst a<wst b wst A.

Z drugiéj strony, wynajdując kąt B z trójkąta nieznanego ACB, będzie

$$\mathrm{wst}\,a : \mathrm{wst}\,\mathrm{A} = \mathrm{wst}\,b : \mathrm{wst}\,\mathrm{B} = \frac{\mathrm{wst}\,b\ \mathrm{wst}\,\mathrm{A}}{\mathrm{wst}\,a};$$

więc ta wartość na wstawę kąta B byłaby większą od 1, co oczywiście być nie może.

Gdy się przyjmie, że $a=\mathrm{CD}$; jeden tylko trójkąt ACD być może: i to też pokazuje wartość na wst B, bo wtedy wst $\mathrm{B}=1$.

132. Pomińmy już te przypadki, a zastanówmy się jeszcze nad rozmaitemi związkami, mogącemi zachodzić między częściami danemi a, b, A.

Niech będzie $\mathrm{A}<90°$ i $b<90°$ (fig. 42). Ponieważ i kąt A i bok b mniejszy jest od 90°; przeto AD także musi być $<90°$ (**115**): więc $\mathrm{AD}<\mathrm{DE}$. Jeżeli oprócz tego jeszcze będzie $a<b$; tedy widoczna jest, że pomiędzy CA i CD będzie można nakreślić łuk $\mathrm{CB}=a$, i że, z drugiéj strony, między CD i CE, narysować się daje drugi łuk $\mathrm{CB}'=\mathrm{CB}=a$: to się znaczy, że dwa mogą być trójkąty ACB i ACB′, złożone z tychże samych danych a, b, A. Gdy $a=b$; trójkąt ACB ginie i zostaje tylko trójkąt ACB′. Gdy zaś $a+b=180°$, albo $a+b>180°$; punkt B′ pada na punkt E, albo gdzieś za punktem E, i w tym razie żadnego niemasz trójkąta.

Tym samym sposobem wszystkie inne przypadki roztrząsnąć można. Wypadki tego rozbioru zamieszczono razem w następującéj tablicy: gdzie znak $\not<$ czyta się *równy albo większy od;* a znak $\not>$ *równy albo mniejszy od.*

$$\mathrm{A}<90°\left\{\begin{array}{ll}
b<90°\left\{\begin{array}{ll} a<b\ .\ . & \text{dwa rozwiązania.} \\ a\not<b\ .\ . & \text{jedno rozwiązanie,} \\ a+b\not<180° & \text{żadne.}\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{c}\text{byleby tylko nie}\\ \text{było}\\ a+b\not<180°.\end{array}\right. \\
b>90°\left\{\begin{array}{ll} a+b<180° & \text{dwa rozwiązania.} \\ a+b\not<180° & \text{jedno rozwiązanie,} \\ a\not<b\ .\ . & \text{żadne.}\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{c}\text{byleby tylko nie}\\ \text{było } a\not<b.\end{array}\right. \\
b=90°\left\{\begin{array}{ll} a<b\ .\ . & \text{dwa rozwiązania.} \\ a\not<b\ .\ . & \text{żadne.}\end{array}\right. &
\end{array}\right.$$

$$A>90^\circ\begin{cases} b<90^\circ\begin{cases} a+b>180^\circ & \text{dwa rozwiązania.} \\ a+b\nless180^\circ & \text{jedno rozwiązanie,}\ \left\{\text{byleby tylko nie było } a\nless b.\right. \\ a\nless b\ .\ . & \text{żadne.} \end{cases} \\ b>90^\circ\begin{cases} a>b\ .\ . & \text{dwa rozwiązania.} \\ a\nless b\ .\ . & \text{jedno rozwiązanie,}\ \left\{\text{byleby tylko nie było } a+b\nless180^\circ.\right. \\ a+b\nless180^\circ & \text{żadne.} \end{cases} \\ b=90^\circ\begin{cases} a>b\ .\ . & \text{dwa rozwiązania.} \\ a\nless b\ .\ . & \text{żadne.} \end{cases} \end{cases}$$

$$A=90^\circ\begin{cases} b<90^\circ\begin{cases} a>b\ .\ . & \text{jedno rozwiązanie,}\ \left\{\text{byleby tylko nie było } a+b\ngtr180^\circ.\right. \\ a\nless b\ .\ . & \text{żadne.} \\ a+b\ngtr180^\circ & \text{żadne.} \end{cases} \\ b<90^\circ\begin{cases} a<b\ .\ . & \text{jedno rozwiązanie,}\ \left\{\text{byleby tylko nie było } a+b\nless180^\circ.\right. \\ a\ngtr b\ .\ . & \text{żadne.} \\ a+b\nless180^\circ & \text{żadne.} \end{cases} \\ b=90^\circ\begin{cases} a=90^\circ & \text{nieskończona liczba rozwiązań.} \\ a<\text{albo}>90^\circ & \text{żadne.} \end{cases} \end{cases}$$

133. Na mocy własności trójkąta polarnego wypadki te zastosować można do piątego przypadku rozwiązania trójkąta kulistego (**128**), tojest, kiedy danemi częściami są: A, B i a; potrzeba tylko wszędzie zamienić a, b, A na A, B, a, tudzież znak $>$ na $<$ i znak $<$ na $>$.

Gdy dane części ściągają się do jednego z przypadków, w którym jedno tylko powinno być rozwiązanie, a rachunek ich dwa daje; natenczas, dla przekonania się, które z tych dwóch rozwiązań wziąć należy, dosyć jest pamiętać, że największe kąty powinny leżeć naprzeciw największym bokom, i odwrotnie.

I tak n.p. przypuśćmy, że dane są: $A = 112^\circ$, $a = 102^\circ$, $b=105$. W tablicy powyższéj między przypadkami, odpowiadającemi $A>90^\circ$, uważają się te, w których $b>90^\circ$; a między témi ostatniemi przypadkami zatrzymać się należy na tym, w którym $a\nless b$. Że zaś, na mocy części danych, jest $a+b=208^\circ$; a zatém $a+b>180^\circ$. Ztąd więc wnosimy, że zadanie powyższe jedno tylko może mieć rozwiązanie: a oprócz tego, z powodu, że b jest $>a$, będzie i kąt $B>A$; więc kąt B musi być roztwarty.

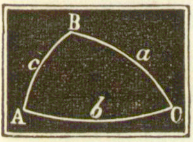
ZASTOSOWANIA.

PRZYKŁADY ROZWIĄZANIA TRÓJKĄTÓW KULISTYCH PROSTOKĄTNYCH.

Przypadek I.

134. P r z y k ł a d 1. *W trójkącie* ABC (*fig.* 44) *dane są: przeciwprostokątna* $a = 107^\circ 25' 5''$ *i bok* $b = 165^\circ 4' 10''$; *znaleźć bok* c, *oraz kąty* B *i* C (117).

Fig. 44.



Rachunek na bok c

podług wzoru: $c = \frac{\text{dost } a}{\text{dost } b}$.

L. dost *a* 9,4761669
L'. dost *b* 0,0149157

L. dost c . . . . =9,4910826
$c = 71^\circ 57' 9'',97$ . .

Rachunek na kąt C

podług wzoru: dost C=sty b doty a.

L. sty *b* 9,4259424
L. doty *a* 9,4965521

L. dost C . . . . =8,9224945
$C = 85^\circ 12' 4'',62$ . .

Rachunek na kąt B

podług wzoru: $\text{wst } B = \frac{\text{wst } b}{\text{wss } a}$.

L. wst *b* 9,4110270
L'. wst *a* 0,0203852

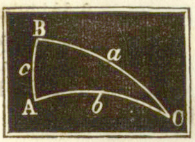
L. wst B . . . . =9,4314122
$B = 50^\circ 39' 57'',81$, albo
$= 164^\circ 20' 2'',19$ . .

A że kąt B tego musi być gatunku, co bok mu przeciwległy *b* (115); przeto
$B = 164^\circ 20' 2'',19$ . .

Przypadek II.

135. P r z y k ł a d 2. *W trójkącie* ABC (*fig.* 45) *dane są: bok* $b = 57^\circ 15'$, *bok* $c = 12^\circ 21' 0'',52$; *znaleźć przeciwprostokątną* a, *i dwa kąty pochyłe* B *i* C (118).

Fig. 45.



Rachunek na przeciwprostokątną a

podług wzoru: dost a=dost b dost c.

L. dost *b* 9,7331768
L. dost c 9.9898317

L. dost *a* . . . . =9,7230085
a=58° 5′ 55″,77 . .

Rachunek na kąt B

podług wzoru: sty $B=\frac{\text{sty b}}{\text{wst c}}$.

L. sty *b* 10,1916394
L′. wst *c* 0,6698189

L. sty B . . . . =10,8614583
B=82° 10′.

Rachunek na kąt C *podług wzoru:* sty $C=\frac{\text{sty c}}{\text{wst b}}$.

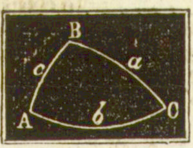
L. sty *c* 9,3403493
L′. sty *b* 0,0751839

L. sty C . . . . =9,4155332
C=14° 35′ 31″,98 . .

Przypadek III.

136. **Przykład 3.** *W trójkącie* ABC (*fig.* 46) *dane są: przeciwprostokątna* a=62° 30′, *i kąt pochyły* B=120° 30′; *znaleźć boki* b, c *i kąt* C (119).

Fig. 46.



Rachunek na bok b
podług wzoru: wst b=wst a wst B.

L. wst *a* 9,9479289
L. wst B 9,9353204

L. wst *b* . . . . =9,8832493
b= 49° 50′ 31″,9 . . albo
=130° 9′ 27″,3 . .

A że kąt B jest roztwarty; więc w tym przykładzie musi być (115)
b=130° 9′ 27′,1 . .

Rachunek na bok c
podług wzoru: sty c=sty a dost B.

L. sty *a* 10,2835233
L. dost B 9,7054689

L. sty c . . . . = 9,9889922
c=44° 16′ 26″, 2.

Rachunek na kąt C
podług wzoru: doty C=dost a sty B.

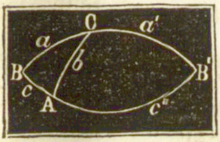
L. dost *a* 9,6644056
L. sty B 10,2298515

L. doty C . . . . = 9,8942571
C=51° 54′ 26″,3 . .

Przypadek IV.

137. Przypadek 4. *W trójkącie* ABC (*fig.* 47) *dane są: bok* b=57°15′, *kąt pochyły* B=82°10′; *znaleźć przeciwprostokątną* a, *bok* c *i kąt* C (120).

Fig. 47.



Rachunek na przeciwprostokątną a

podług wzoru: $\text{wst } a = \frac{\text{wst } b}{\text{wst } B}$.

L. wst *b*	9,9248161
L′. wst B	0,0040716
L. wst *a*	=9,9288877

a= 58° 5′55″,83 . . albo
=121°54′ 4″,17 . .

Rachunek na kąt C

podług wzoru: $\text{wst } C = \frac{\text{dost } B}{\text{dost } b}$.

L. dost B	9,1344702
L′. dost *b*	0,2668232
L. wst C	=9,4012934

C= 14°35′31″,98 . . albo
=165°24′28″,02 . .

Rachunek na bok c

podług wzoru: wst c=sty b doty B.

L. sty *b*	10,1916394
L. doty B	9,1385417
L. wst c	= 9,3301811

c= 12°21′ 0″,52 . . albo
=167°38′59″,48 . .

Tu dwa zachodzą rozwiązania, bo *b*<B.

Części szukane są:

dla pierwszego trójkąta ABC,
a=58° 5′55″,83 . .
c=12°21′ 0″,52 . .
C=14°35′31″,98 . .

dla drugiego trójkąta ABC′,
a′=121°54′ 4″,17 . .
c′=167°38′59″,48 . .
C′=165°24′28″,02 . .

Przypadek V.

138. Przykład 5. *W trójkącie* ABC (*fig.* 46) *dane są: bok przyległy kątowi prostemu* b = 130° 9′ 27″, 1, *i kąt* C=51° 54′26″,3; *znaleźć boki* a, c *i kąt* B (121).

Rachunek na bok a

podług wzoru: $\text{sty a} = \frac{\text{sty a}}{\text{dost C}}$.

L. sty *b*	10,0737627
L′. dost C	0.2097602
L. sty *a*	=10,2835229

a=62° 29′ 59″,9 . .

Rachunek na bok c

podług wzoru: sty c=wst b sty C.

L. wst *b*	9,8832492
L. sty C	10,1057425
L. sty c . . . . =	9,9889917

c=44° 16′ 26″,1 . .

Rachunek na kąt B *podług wzoru:* dost B=dost b wst C.

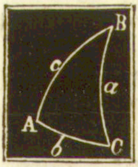
L. dost *b*	9,8094865
L. wst C	9,8959823
L. dost B	=9,7054688

B=180°—59° 30′ 0″,02 . . =120° 29′ 59″,98 . .

Przypadek VI.

139. Przykład 6. *W trójkącie* ABC (*fig.* 48) *dane są: kąt* B=26° 15′, *i kąt* C=73° 10′; *znaleźć* a, b, c.

Fig. 48.



Rachunek na przeciwprostokątną a *podł. wzoru:* dost *a*=doty B doty C.

L. doty B	10,3070250
L. doty C	9,4808011
L. dost *a*	=9,7878261

a=52° 9′ 21″.

Rachunek na bok: $\text{b} = \frac{\text{dost B}}{\text{wst C}}$. dost b

L. dost *b*	9,9527308
L′. wst C	0,0190195
L. ~~wst B~~ dost b	=9,9717503

b=20° 26′ 33″.

Rachunek na bok c: $\text{dost c} = \frac{\text{dost C}}{\text{wst B}}$.

L. dost C	9,4617816
L′. wst B	0,3542942
L. dost c	=9,8160758

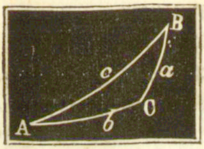
c=49° 5′ 57″.

PRZYKŁADY ROZWIĄZANIA TRÓJKĄTÓW KULISTYCH UKOŚNO-KĄTNYCH.

Przypadek I.

140. Przykład 7. *W trójkącie* ABC (*fig.* 49) *dane są trzy boki:* a=36° 18′, b=59° 47′, c=89° 13′; *znaleźć trzy kąty* A, B *i* C.

Fig. 49.



$a+b+c=2s=185°\,18'$;

więc $s=92°\,39'$.
$s-a=56°\,21'$.
$s-b=32°\,52'$.
$s-c=3°\,26'$.

Rachunek na kąt A:

$$\mathrm{wst}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\mathrm{wst}(s-b)\,\mathrm{wst}(s-c)}{\mathrm{wst}\,b\,\mathrm{wst}\,c}}.$$

L. wst $(s-b)$	9,7345485
L, wst $(s-c)$	8,7773334
L′. wst b	0,0634217
L′. wst c	0,0000406
2 L. wst ½ A	=18,5753442
L. wst ½ A	= 9,2876721

$\tfrac{1}{2}A=11°\,10'\,58'',55$. ;
$A=22°\,21'\,57'',1$ . .

Rachunek na kąt B:

$$\mathrm{wst}\,\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\mathrm{wst}(s-a)\,\mathrm{wst}(s-c)}{\mathrm{wst}\,a\,\mathrm{wst}\,c}}.$$

L. wst $(s-a)$	9,9203519
L. wst $(s-c)$	8,7773334
L′. wst a	0,2276686
L′. wst c	0,0000406
2 L. wst ½ B	=18,9253945
L. wst ½ B	= 9,4626972

$\tfrac{1}{2}B=16°\,52'\,11'',72$. ;
$B=33°\,44'\,23'',44$ . .

Rachunek na kąt C:

$$\mathrm{wst}\,\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\mathrm{wst}(s-a)\,\mathrm{wst}(s-b)}{\mathrm{wst}\,a\,\mathrm{wst}\,b}}.$$

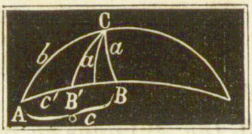
L. wst $(s-a)$	9,9203519
L. wst $(s-b)$	9,7345485
L′. wst a	0,2276686
L′. wst b	0,0634217
2 L. wst ½ C	=19,9459907
L. wst ½ C	= 9,9729953

$\tfrac{1}{2}C=70°\,0'\,12'',4$. ;
$C=140°\,0'\,24'',8$ . .

Przypadek II.

141. P r z y k ł a d 8. *W trójkącie ukośno-kątnym dane są: bok* $a=75°\,19'5''$, $b=87°\,23'\,47''$ *i kąt* $A=32°\,17'$; *znaleźć trzeba* B, C *i* c (*fig.* 50)

Fig. 50.



Ponieważ w tym przykładzie $A<90$, $b<90°$ i $a<b$; przeto dwa będą rozwiązania (132).

Rachunek na kąt B:

$$\text{wst}\,B=\frac{\text{wst}\,A\ \text{wst}\,b}{\text{wst}\,a}.$$

L. wst A	9,7276278
L. wst b	9,9995514
L'. wst a	0,0144175
L. wst B	=9,7415967

$$B=\begin{cases}33°\,28'\,27'',99\ldots \text{dla 1-go rozwiąz.}\\ 146°\,31'\,32'',01\ldots \text{dla 2-go}\ \ ,,\end{cases}$$

$\frac{1}{2}(b+a)=81°\,21'\,26''$

$\frac{1}{2}(b-a)=\ 6°\ 2'\,21''$

$$\tfrac{1}{2}(B+A)=\begin{cases}32°\,52'\,43'',\ 99\ .\ ,\ \text{albo}\\ 89°\,14'\,16'',005\ .\ .\end{cases}$$

$$\tfrac{1}{2}(B-A)=\begin{cases}0°\,35'\,43'',99\ .\ ,\ \text{albo}\\ 57°\ 7'\,16'',05\ .\ .\end{cases}$$

Rachunek na bok c, *i kąt* C.

Sposób I za pomocą analogiów Nepera:

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}c=\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(b-a)\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}(B+A)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}(B-A)}.\qquad \text{doty}\,\tfrac{1}{2}C=\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(B-A)\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}(a+b)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}(b-a)}.$$

Dla 1-go *rozwiązania*, w którém $B=33°\,28'\,27'',99$ . .

L. sty $\frac{1}{2}(b-a)$	9,0244669	L. sty $\frac{1}{2}$(B—A)	8,0168121
L. wst $\frac{1}{2}$(B+A)	9,7346919	L. wst $\frac{1}{2}(a+b)$	9,9950401
L'. wst $\frac{1}{2}$(B—A)	1,9832114	L'. wst $\frac{1}{2}(b-a)$	0,9779501
L. sty $\frac{1}{2}c$	=10,7423702	L. doty $\frac{1}{2}$C	=8,9898023

$\frac{1}{2}c=79°\,44'30''$; $\qquad \frac{1}{2}C=84°\,25'\,15''.92$. ;

$c=159°\,29''$. $\qquad C=168°\,50'\,31'',84$ . .

Dla 2-go *rozwiązania*, w którém $B=146°\,31'\,32'',01$ . .

L. sty $\frac{1}{2}(b-a)$	9,0244669	L. sty $\frac{1}{2}$(B—A)	10,1894945
L. wst $\frac{1}{2}$(B+A)	9,9999776	L. wst $\frac{1}{2}(a+b)$	9,9950401
L'. wst $\frac{1}{2}$(B—A)	0,0758138	L'. wst $\frac{1}{2}(b-a)$	0,9779501
L. sty $\frac{1}{2}c$	=9,1002583	L. doty $\frac{1}{2}$C	=11,1624847

$\frac{1}{2}c=7°\,10'\,46'',51$. ; $\qquad \frac{1}{2}C=3°\,56'\ 6'',31$. ;

$c=14°\,21'\,33'',02$ . . $\qquad C=7°\,52'\,12'',62$ . .

Sposób II za pomocą kątów posiłkowych.

Obliczenie kąta posiłkowego ψ:

$\text{doty}\,\psi=\text{sty}\,b\,\text{dost}\,A.$

L. sty b	11,3422475
L. dost A	9.9270711
L. doty ψ	=11,2693186

$\psi=3^0 4' 43''78$ . .

Obliczenie kąta posiłkowego φ:

$\text{sty}\,\varphi=\text{dost}\,b\,\text{sty}\,A.$

L. dost b	8,6573040
L. sty A	9,8005567
L. sty φ	=8,4578607

$\varphi=1^0 38' 37'',88$ . .

Rachunek na bok c:

$$\text{wst}\,(c+\psi)=\frac{\text{dost}\,a\ \text{wst}\,\psi}{\text{dost}\,b}.$$

L. dost a	9.4038977
L. wst ψ	8,7300536
L'. dost b	1,3426960
L. wst $(c+\psi)$	=9.4766473

$$c+\psi=\begin{cases}17^0 26' 16'',62\ .\ ,\ \text{albo}\\ 162^0 33' 43'',38\ .\ ;\end{cases}$$

$$\text{ztąd}\quad c=\begin{cases}14^0 21' 32'',84\ .\ ,\ \text{albo}\\ 159^0 28' 59'',\ 6\ .\ .\end{cases}$$

Rachunek na kąt C:

$$\text{wst}\,(C+\varphi)=\frac{\text{sty}\,b\ \text{wst}\,\varphi}{\text{sty}\,a}.$$

L. sty b	11.3422475
L. wst φ	8,4576813
L'. sty a	9,4183151
L. wst $(C+\varphi)$	=9,2182439

$$C+\varphi=\begin{cases}9^0 30' 50'',47\ .\ ,\\ 170^0 29'\ 9'',53\ .\ ;\end{cases}$$

$$\text{ztąd}\quad C=\begin{cases}7^0 52' 12'',59\ .\ ,\ \text{albo}\\ 168^0 50' 31'',65\ .\ .\end{cases}$$

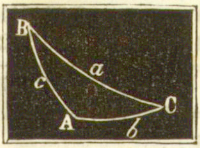
Trójkąt ABC (fig. 50) odpowiada piérwszemu rozwiązaniu, a trójkąt AB'C drugiemu.

Przypadek III.

142. Przykład 9. *W trójkącie* ABC (*fig.* 51) *dane są:*

$a=85^\circ 3' 45''$, $b=41^\circ 36' 46''$, $C=47^\circ 46'$; *znaleźć kąty* A, B *i bok* c.

Fig. 51.



A zatém tu jest $\frac{1}{2}(a+b)=63^\circ 20' 15'',5$; $\frac{1}{2}(a-b)=21^\circ 43' 29'',5$, $\frac{1}{2}C=23^\circ 53'$.

Rachunek na kąty A *i* B *za pomocą analogiów Nepera.*

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A+B)=\text{doty}\,\tfrac{1}{2}C\frac{\text{dost}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}(a+b)}.$$

L. doty $\frac{1}{2}$ C	10,3538012
L. dost $\frac{1}{2}(a-b)$.	9,9680027
L'. dost $\frac{1}{2}(a+b)$.	0,3480129
L. sty $\frac{1}{2}$ (A+B)	10,6698168

$\frac{1}{2}(A+B)=77^0 55' 37'',61$. ;

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A-B)=\text{doty}\,\tfrac{1}{2}C\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}(a+b)}.$$

L. doty $\frac{1}{2}$ C	10.3538012
L. wst $\frac{1}{2}(a-b)$	9,5683776
L'. wst $\frac{1}{2}(a+b)$	0,0488246
L. wst $\frac{1}{2}$ (A—B)	9,9710034

$\frac{1}{2}(A-B)=43^0 5' 19'',26$. ;

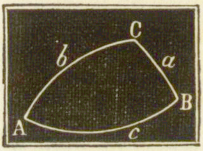
a zatém $A=\frac{1}{2}(A+B)+\frac{1}{2}(A-B)=121^0\ 0' 56'',87$ . .

$B=\frac{1}{2}(A+B)-\frac{1}{2}(A-B)=\ 34^0 50' 18'',35$ . .

Przypadek VI.

145. Przykład 12. *W trójkącie* ABC (*fig.* 54) *dane są: kąty* $A=100°$, $B=127°$ *i* $C=150°\,30'$; *znaleźć trzeba boki* a, b *i* c.

Fig. 54.



$A+B+C=180°+2s=377°\,30'$;

ztąd:

$s=98°\,45'$,

$A-s=1°\,5'$,

$B-s=28°\,15'$.

$C-s=51°\,45'$.

Rachunek na bok a:

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\text{wst}\,s\ \text{wst}\,(A-s)}{\text{wst}\,(B-s)\ \text{wst}\,(C-s)}}.$$

L. wst s	9,9949158
L. wst $(A-s)$	8,3387529
L'. wst $(B-s)$	0,3248454
L'. wst $(C-s)$	0,1049550
2 L. sty $\frac{1}{2}a$	=18,7634691
L. sty $\frac{1}{2}a$	= 9,3817345

$\frac{1}{2}a=13°\,32'\,29''$.;

$a=27°\,4'\,58''$..

Rachunek na bok b:

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\text{wst}\,s\ \text{wst}\,(B-s)}{\text{wst}\,(A-s)\ \text{wst}\,(C-s)}}.$$

L. wst s	9,9949158
L. wst $(B-s)$	9,6751546
L'. wst $(A-s)$	1,6612471
L'. wst $(C-s)$	0,1049550
2 L. sty $\frac{1}{2}b$	=21,4362725
L. sty $\frac{1}{2}b$	=10,7181362

$\frac{1}{2}b=79°\,9'\,59'',52$.;

$b=158°\,19'\,59'',04$ . .

Rachunek na bok c:

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\text{wst}\,s\ \text{wst}\,(C-s)}{\text{wst}\,(A-s)\ \text{wst}\,(B-s)}}.$$

L. wst s	9,9949158
L. wst $(C-s)$	9,8950450
L'. wst $(A-s)$	1,6612471
L'. wst $(B-s)$	0,3248454
2 L. sty $\frac{1}{2}c$	=21,8760533
L. sty $\frac{1}{2}c$	=10,9380266

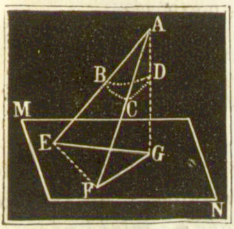
$\frac{1}{2}c=83°\,25'\,14'',41$.;

$c=166°\,50'\,28'',82$ . .

ROZWIĄZANIE NIEKTÓRYCH ZAGADNIEŃ Z GEODEZYI I GEOGRAFII MATEMATYCZNÉJ.

146. Przykład 13. *Przywieść kąt do poziomu.*

Fig. 55.



Niech będzie BAC (fig. 55), kąt położony na płaszczyznie pochyłéj; AD pionowa przez wierzchołek A przechodząca. Poprowadziwszy dowolnie płaszczyznę poziomą MN, przecinającą się z liniami AB, AC, AD w punktach E, F i G, będzie kąt EGF *rzutem poziomym* kąta danego BAC, albo, innemi słowy, kątem *przywiedzionym do poziomu.* Ten to kąt wyrachować trzeba z wiadomych kątów BAC, BAD, CAD, które kątomiarem wymierzyć można.

Zagadnienie to łatwo rozwiązuje się przez wykreślenie: ponieważ linia AG jest dowolna; przeto dostateczną tu mieć można liczbę danych do wykreślenia, naprzód, trójkątów EAG i FAG, potém trójkąta EAF, i na koniec trójkąta EGF.

Kąt EGF rachunkiem także łatwo wynaleźć: wystawiwszy bowiem sobie kulę dowolnego promienia, któréj środek przypada na punkt A; tedy proste AB, AC, AD, przecinające się z powierzchnią téj kuli, wyznaczą na niéj trzy wierzchołki trójkąta kulistego BCD. Boki tego trójkąta są znane, jako miary kątów danych, a kąt BDC w tymże trójkącie jest właśnie kątem szukanym. Rozwiązanie więc zagadnienia, o którém mowa, zależy od rozwiązania piérwszego przypadku trójkąta kulistego ukośno-kątnego (**124**); a zatém do wyrachowania kąta A użyć należy wzoru

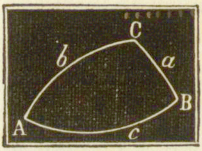
$$\mathrm{wst}\,\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{\mathrm{wst}\,(s-b)\,\mathrm{wst}\,(s-c)}{\mathrm{wst}\,b\,\mathrm{wst}\,c}},$$

przyjąwszy w nim $a=\mathrm{BAC}$, $b=\mathrm{BAD}$, $c=\mathrm{CAD}$, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

Przypadek VI.

145. Przykład 12. *W trójkącie* ABC (*fig.* 54) *dane są: kąty* $A=100°$, $B=127°$ *i* $C=150°\,30'$; *znaleźć trzeba boki* a, b *i* c.

Fig. 54.



$A+B+C=180°+2s=377°\,30''$;

ztąd:

$s=98°\,45'$,

$A-s=\;1°\;5'$,

$B-s=28°\,15'$.

$C-s=51°\,45'$.

Rachunek na bok a:

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\text{wst}\,s\;\text{wst}\,(A-s)}{\text{wst}\,(B-s)\;\text{wst}\,(C-s)}}.$$

L. wst s	9,9949158
L. wst $(A-s)$	8,3387529
L′. wst $(B-s)$	0,3248454
L′. wst $(C-s)$	0,1049550
2 L. sty $\frac{1}{2}a$	$=$18,7634691
L. sty $\frac{1}{2}a$	$=$ 9,3817345

$\tfrac{1}{2}a=13°\,32'\,29''$.;

$a=27°\;4'\,58''$..

Rachunek na bok b:

$$\text{siy}\,\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\text{wst}\,s\;\text{wst}\,(B-s)}{\text{wst}\,(A-s)\;\text{wst}\,(C-s)}}.$$

L. wst s	9,9949158
L. wst $(B-s)$	9,6751546
L′. wst $(A-s)$	1,6612471
L′. wst $(C-s)$	0,1049550
2 L. sty $\frac{1}{2}b$	$=$21,4362725
L. sty $\frac{1}{2}b$	$=$10,7181362

$\tfrac{1}{2}b=\;79°\;9'\,59'',52$.;

$b=158°\,19'\,59'',04$ . .

Rachunek na bok c:

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\text{wst}\,s\;\text{wst}\,(C-s)}{\text{wst}\,(A-s)\;\text{wst}\,(B-s)}}.$$

L. wst s	9,9949158
L. wst $(C-s)$	9,8950450
L′. wst $(A-s)$	1,6612471
L′. wst $(B-s)$	0,3248454
2 L. sty $\frac{1}{2}c$	$=$21,8760533
L. sty $\frac{1}{2}c$	$=$10,9380266

$\tfrac{1}{2}c=\;83°\,25'\,14'',41$.;

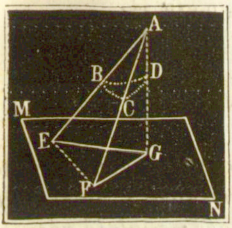
$c=166°\,50'\,28'',82$ . .

ROZWIĄZANIE NIEKTÓRYCH ZAGADNIEŃ Z GEODEZYI

I GEOGRAFII MATEMATYCZNÉJ.

146. Przykład 13. *Przywieść kąt do poziomu.*

Fig. 55.



Niech będzie BAC (fig. 55), kąt położony na płaszczyznie pochyłéj; AD pionowa przez wierzchołek A przechodząca. Poprowadziwszy dowolnie płaszczyznę poziomą MN, przecinającą się z liniami AB, AC, AD w punktach E, F i G, będzie kąt EGF *rzutem poziomym* kąta danego BAC, albo, innemi słowy, kątem *przywiedzionym do poziomu*. Ten to kąt wyrachować trzeba z wiadomych kątów BAC, BAD, CAD, które kątomiarem wymierzyć można.

Zagadnienie to łatwo rozwiązuje się przez wykreślenie: ponieważ linia AG jest dowolna; przeto dostateczną tu mieć można liczbę danych do wykreślenia, naprzód, trójkątów EAG i FAG, potém trójkąta EAF, i na koniec trójkąta EGF.

Kąt EGF rachunkiem także łatwo wynaleźć: wystawiwszy bowiem sobie kulę dowolnego promienia, któréj środek przypada na punkt A; tedy proste AB, AC, AD, przecinające się z powierzchnią téj kuli, wyznaczą na niéj trzy wierzchołki trójkąta kulistego BCD. Boki tego trójkąta są znane, jako miary kątów danych, a kąt BDC w tymże trójkącie jest właśnie kątem szukanym. Rozwiązanie więc zagadnienia, o którém mowa, zależy od rozwiązania piérwszego przypadku trójkąta kulistego ukośno-kątnego (**124**); a zatém do wyrachowania kąta A użyć należy wzoru

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,\text{A}=\sqrt{\frac{\text{wst}\,(s-b)\;\text{wst}\,(s-c)}{\text{wst}\,b\;\text{wst}\,c}},$$

przyjąwszy w nim $a=\text{BAC}$, $b=\text{BAD}$, $c=\text{CAD}$, $s=\tfrac{1}{2}(a+b+c)$.

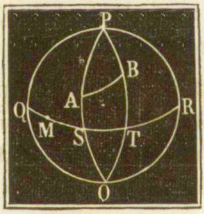
Niech będzie $a=47^\circ 45' 39''$, $b=69^\circ 9' 19''$, $c=80^\circ 17' 36''$; a zatém $2s=197^\circ 52' 34''$, $s=98^\circ 56' 17''$, $s-b=29^\circ 6' 58''$, $s-c=18^\circ 38' 41''$. Rachunek więc odbędzie się, jak następuje:

L. wst $(s-b)$	9,6871552
L. wst $(s-c)$	9,5047412
L'. wst b	0,0275078
L'. wst c	0,0062623
2 L. wst $\frac{1}{2}$ A	$=19,2256665$
L. wst $\frac{1}{2}$ A	$=9,6128332$

$\frac{1}{2}A=24^\circ 12' 27''{,}9.$;
$A=48^\circ 24' 56''$.

147. Przykład 14. *Mając dane szerokości geograficzne dwóch punktów ziemskich i najkrótszą między niemi odległość; znaleźć różnicę ich szerokości geograficznych.*

Fig. 56.



Niech będą: A i B (fig. 56) te punkta; QR równik; P biegun północny; PSO i PTO dwa południki, przechodzące przez punkta A i B; AB łuk koła wielkiego, łączącego też punkta, czyli najkrótsza między niemi odległość. I niech długości geograficzne tych punktów rachowane będą od punktu M w stronę MSR.

Różnica MT—MS między niewiadomemi długościami geograficznemi jest równa łukowi szukanemu ST, czyli kątowi P, zawartemu między dwoma południkami PSO, PTO. Łuki PA, PB są dopełnieniami szerokości danych AS, BT. A tak w trójkącie kulistym APB znane są trzy boki, łatwo więc znajdziemy kąt P, rachując podług wzoru (124):

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}P=\sqrt{\frac{\text{wst}\,(s-AP)\ \text{wst}\,(s-BP)}{\text{wst}\,AP\ \text{wst}\,BP}},$$

gdzie $2s=AP+BP+AP$.

Przyjąwszy: że szerokość geograficzna punktu A=58°22′43″; punktu B=59°56′31″, że obiee te szerokości są północne; nakoniec, że najkrótsza odległość między punktami A i B wynosi 241578 metrów =2°24′56″,8 (*), będzie

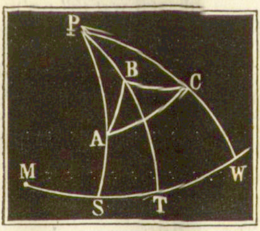
AP=31°37′17″, s=32° 2′51″,5,
BP=30° 3′29″, s—AP= 1°59′22″,5,
AB= 2°24′57″; s—BP= 0°25′34″,5,
więc 2s=64° 5′43″, s—AB=29°37′54″,5; a zatém

lL. wst (s—AP) 8,5405521
lL. wst (s—BP) 7,8715354
lL′. wst AP 0,2904170
lL′. wst BP 0,3002687

2 L. wst ½ P . . . . =17,0027732
L. wst ½ P . . . . . = 8,5013866
½ P=1°49′4″,6 . ;
P=3°38′9″,2 . .

148. Przykład 15. *Z wiadoméj szerokości i długości geograficznéj dwóch punktów ziemskich, znaleźć najkrótszą ich odległość.*

Fig. 57.



Przyjąwszy, jak w przykładzie poprzedzającym, że A i B (fig. 57) są te punkta, że P znaczy biegun północny, MW równik, że PS i PT są dwa południki przechodzące przez punkta dane A i B, których najkrótszą odległością jest łuk AB koła wielkiego: natenczas, aby znaleźć tę odległość AB, dosyć będzie rozwiązać trójkąt APB podług przypadku trzeciego (126) trójkątów ukośno-kątnych.

Podług tego więc, chcąc n. p. wyrachować najkrótsze odległości między Warszawą, Petersburgiem i Moskwą, jeżeli A, B i C te miejsca znaczyć będą, dosyć jest rozwiązać trójkąty APB, APC i BPC. Nazwawszy odległości tych miast od bieguna północnego β, β', β'', ich długości odpowiedne λ, λ', λ''; tedy, podług wiadoméj ich szerokości i długości geograficznéj względem południka paryzkiego, będzie

(*) Łuk koła wielkiego kuli ziemskiéj o 90° ma długości 10000000 metrów a zatém 241578 metr. =2°24′56″,8.

$\beta \;=90^\circ-52^\circ\,13'\;\;5''=37^\circ\,46'55''$, $\lambda \;=18^\circ\,41'26''$,
$\beta' \;=90^\circ-59^\circ\,56'31''=30^\circ\;\;3'29''$, $\lambda'=27^\circ\,59'30''$,
$\beta'' =90^\circ-55^\circ\,45'13''=34^\circ\,14'47''$; $\lambda''=35^\circ\,17'11''$; a ztąd
w trójkącie APB kąt $P=\lambda'-\lambda=\;9^\circ\,18'\;\;4''$,
„ APC „ $P=\lambda''-\lambda=16^\circ\,35'45''$,
„ BPC „ $P=\lambda''-\lambda'=\;7^\circ\,17'41$.

Rachunek na bok AB *w trójkącie* APB
podług wzorów:

$\text{doty}\,\varphi=\text{sty}\,\beta\;\text{dost}\,(\lambda'-\lambda)$.

L. sty β	9,8893996
L. dost $(\lambda'-\lambda)$	9,9942524
L. doty φ	=9,8836520

$\varphi=52^0\,35'\;\;4'',6$. ;
a że $\beta'=30^0\;\;3'29''$. ;
więc $\beta'+\varphi=82^0\,38'\,33'',6$ . .

$$\text{dost AB}=\frac{\text{dost}\,\beta\;\text{wst}\,(\beta'+\varphi)}{\text{wst}\,\varphi}.$$

L. dost β	9,8978185
L. wst $(\beta'+\varphi)$	9,9964095
L'. wst φ	0,1000420
L. dost AB	=9,9942700

$AB=9^0\,17'\,12'',4$ . .

Rachunek na bok AC *w trójkącie* APC
podług wzorów:

$\text{doty}\,\varphi'=\text{sty}\,\beta\;\text{dost}\,(\lambda''-\lambda)$.

L. sty β	9,8893996
L. dost $(\lambda''-\lambda)$	9,9815212
L. doty φ'	=9,8709208

$\varphi=53^0\,23'\,31'$;
a że $\beta''=34^0\,14'\,47''$;
więc $\beta''+\varphi=87^0\,38'\,18''$.

$$\text{dost AC}=\frac{\text{dost}\,\beta\;\text{wst}\,(\beta''+\varphi')}{\text{wst}\,\varphi'}.$$

L. dost β	9,8978189
L. wst $(\beta''+\varphi')$	9,9996305
L'. wst φ'	0.0954286
L. dost AC	=9,9928780

$AC=10^0\,20'\,53'',1$ . .

Rachunek na bok BC *w trójkącie* BPC
podług wzorów:

$\text{doty}\,\varphi''=\text{sty}\,\beta'\;\text{dost}\,(\lambda''-\lambda')$.

L. sty β'	9,7624550
L. dost $(\lambda''-\lambda')$	9,9964706
L. doty φ''	=9,7589256

$\varphi''=60^0\;\;8'\,36''.2$. ;
a że $\beta''=34^0\,14'\,47''$. ;
więc $\beta''+\varphi''=94^0\,23'\,23'',2$ . .

$$\text{dost BC}=\frac{\text{dost}\,\beta'\;\text{wst}\,(\beta''+\varphi'')}{\text{wst}\,\varphi''}.$$

L. dost β'	9,9372763
L. wst $(\beta''+\varphi'')$	9,9987240
L'. wst φ''	0,0618437
L. dost BC	=9,9978440

$BC=5^0\,42'\,15'',7$ . .

Ten rachunek więc pokazuje, że najkrótsze odległości między temi trzema miastmi są następujące:

Warszawy od Petersburga	$9^0\,17'\,12'',4..=139,301$	mil geograficznych.
Warszawy od Moskwy	$10^0\,20'53'',1..=155,221$	z których 15 idzie
Petersburga od Moskwy	$5^0\,42'\,15'',7..=\;85,565$	na 1^0.

DODATEK.

WYWÓD WZORÓW *DELAMBRA* LUB *GAUSSA*,

I ICH UŻYCIE.

1. Pokazało się w textcie pod n. 124, że

$$[1] \qquad \text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{\text{wst}\,(s-b)\ \text{wst}\,(s-c)}{\text{wst}\,b\ \text{wst}\,c}},$$

$$[2] \qquad \text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{\text{wst}\,s\ \text{wst}\,(s-a)}{\text{wst}\,b\ \text{wst}\,c}}.$$

Zamieniając w tych wzorach: *naprzód* A na B, *a* na *b*, i przeciwnie *b* na *a*; *powtóre* A na C, *a* na *c*, i przeciwnie *c* na *a*, będzie

$$[3] \qquad \text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,B=\sqrt{\frac{\text{wst}\,(s-a)\ \text{wst}\,(s-c)}{\text{wst}\,a\ \text{wst}\,c}},$$

$$[4] \qquad \text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,B=\sqrt{\frac{\text{wst}\,s\ \text{wst}\,(s-b)}{\text{wst}\,a\ \text{wst}\,c}},$$

$$[5] \qquad \text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,C=\sqrt{\frac{\text{wst}\,(s-b)\ \text{wst}\,(s-a)}{\text{wst}\,b\ \text{wst}\,a}},$$

$$[6] \qquad \text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,C=\sqrt{\frac{\text{wst}\,s\ \text{wst}\,(s-c)}{\text{wst}\,b\ \text{wst}\,a}}.$$

Rozmnożywszy równanie [1] przez [3], [2] przez [4], [1] przez [4], [3] przez [2], i skróciwszy iloczyny wypadłe za pomocą równań [5] i [6], wypadnie

[7] $$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,\text{A}\ \ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,\text{B}=\frac{\text{wst}\,(s-c)}{\text{wst}\,c}\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,\text{C},$$

[8] $$\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,\text{A}\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,\text{B}=\frac{\text{wst}\,s}{\text{wst}\,c}\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,\text{C},$$

[9] $$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,\text{A}\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,\text{B}=\frac{\text{wst}\,(s-b)}{\text{wst}\,c}\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,\text{C},$$

[10] $$\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,\text{A}\ \ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,\text{B}=\frac{\text{wst}\,(s-a)}{\text{wst}\,c}\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,\text{C}.$$

Następnie, *naprzód* odjąwszy równanie [7] od [8], *powtóre* dodawszy równanie [7] do [8], *potrzecie* dodawszy [10] do [9] i *poczwarte* odjąwszy [10] od [9], będzie

[11] $$\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{A}+\text{B})=\frac{\text{wst}\,s-\text{wst}\,(s-c)}{\text{wst}\,c}\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,\text{C},$$

[12] $$\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{A}-\text{B})=\frac{\text{wst}\,s+\text{wst}\,(s-c)}{\text{wst}\,c}\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,\text{C},$$

[13] $$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{A}+\text{B})=\frac{\text{wst}\,(s-b)+\text{wst}\,(s-a)}{\text{wst}\,c}\,\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,\text{C},$$

[14] $$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{A}-\text{B})=\frac{\text{wst}\,(s-b)-\text{wst}\,(s-a)}{\text{wst}\,c}\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,\text{C}.$$

Nakoniec zamieniwszy za pomocą wzorów, podanych wyżéj pod nr. **39**, w licznikach drugich stron równań [11], [12], [13] i [14] różnice lub summy linij trygonometrycznych na iloczyny, i położywszy w mianownikach tychże równań 2 dost $\tfrac{1}{2}$ c wst $\tfrac{1}{2}$ c za wst c, otrzymamy cztéry następujące wzory:

[I] $$\frac{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{A}+\text{B})}{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,\text{C}}=\frac{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b)}{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,c},$$

[II] $$\frac{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{A}-\text{B})}{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,\text{C}}=\frac{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b)}{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,c},$$

$$[\mathrm{III}]\quad \frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,(A+B)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,C}=\frac{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,(a-b)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,c},$$

$$[\mathrm{IV}]\quad \frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,(A-B)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,C}=\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,(a-b)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,c}.$$

Przemieniwszy w tych wzorach: *naprzód* B i b na C i c, i przeciwnie C i c na B i b; *powtóre* A i a na C i c, i przeciwnie C i c na A i a, ośm jeszcze podobnych wzorów wypadnie, tojest:

$$[\mathrm{V}]\quad \frac{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,(A+C)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,B}=\frac{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,(a+c)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,b},$$

$$[\mathrm{VI}]\quad \frac{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,(A-C)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,B}=\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,(a+c)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,b},$$

$$[\mathrm{VII}]\quad \frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,(A+C)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,B}=\frac{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,(a-c)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,b},$$

$$[\mathrm{VIII}]\quad \frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,(A-C)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,B}=\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,(a-c)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,b},$$

$$[\mathrm{IX}]\quad \frac{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,(C+B)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,A}=\frac{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,(c+b)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,a},$$

$$[\mathrm{X}]\quad \frac{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,(C-B)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,A}=\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,(c+b)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,a},$$

$$[\mathrm{XI}]\quad \frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,(C+B)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,A}=\frac{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,(c-b)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,a},$$

$$[\mathrm{XII}]\quad \frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,(C-B)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}\,A}=\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,(c-b)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,a}\ (*).$$

(*) *Gauss* w dziele swém pod tytułem: Theoria motus corporum coelestium i t. d., wydaném w Hamburgu r. 1809, piérwszy podał wyżéj wywiedzione wzory, lecz bez dowodu; i używał ich do rozwiązania ważnych zagadnień astronomicznych. Wzory te jednak, jak się zdaje, znane były współcześnie i innym astronomom, Panu *Delambre* we Francyi, i Panu *Mollweide* w Niemczech. *Delambre* w wielkiém swojém dziele o Astronomii, wydaném w r. 1814, podał dowodzenie tych wzorów, wyprowadzając je z analogiów *Nepera;* zaś nasz *Jan Sniadecki* wcześniéj, bo jeszcze w r. 1811, szukając ich dowodu, wyciągnął je z równań *Cagnoli.* Obacz: *Trygonometrya kulista* przez *Jana Sniadeckiego.* Wydanie 2-gie stron. 15.

Te dwanaście równań wyrażają związki, jakie tylko zachodzić mogą między wszystkiemi częściami trójkąta kulistego ukośnokątnego, w którym ani żaden kąt, ani żaden bok, nie jest większy od 180°, ani nawet im równy: bo wzory te wywiedliśmy z równań [1], [2], [3], [4], w przypuszczeniu, że ilości piérwiastkowe drugich ich stron są dodatne tylko.

2. Dzieląc *naprzód* równanie [I] przez [II], *powtóre* [III] przez [IV], *potrzecie* [I] przez [III], *poczwarte* [II] przez [IV] wypadną nam analogie Nepera (**113**); a uskuteczniwszy toż samo i w tymże samym porządku na ośmiu pozostałych, wyżéj wyszczególnionych równaniach, zawsze po cztéry branych, otrzymamy wszystkie odmiany analogiów.

3. Wzory *Delambra* czyli *Gaussa*, odznaczają się szczególnie swoją prostotą i tém, że zarówno przystosować się mogą do rozwiązania trójkątów kulistych tak trzeciego (**126**), jak piątego przypadku (**128**). Chcąc, za pomocą tych wzorów, rozwiązać trójkąt, zawsze ich parami używać należy: zkąd tę znowu dogodność nastręczają, że sprawdzenie rachunku w ciągu działania jest łatwe, i że branie potrzebnych liczb z tablic mniej utrudza, aniżeli przy rachowaniu podług innych wzorów.

4. Aby bliżej dać poznać użycie wzorów *Delambra* rozwiążmy jeszcze za ich pomocą trójkąt kulisty, w którym $a=85°\,3'45$, $b=41°\,36'\,46''$, $C=47°\,46'$.

Kąty A i B wyrachujemy naprzód podług wzorów:

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}C\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}C\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}(a+b)},$$

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}C\ \ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}C\ \ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}(a+b)},$$

które wypadają dzieląc równanie [III] przez [I] i [IV] przez [II]; potém obliczymy bok c za pomocą wzorów:

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}c=\frac{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\ \ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}(A-B)\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}(a+b)},$$

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}c=\frac{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\ \ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(A-B)\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}(a-b)},$$

które znowu się otrzymują dzieląc równanie [I] przez [II] i [III] przez [IV]: jeden z tych ostatnich wzorów już jest dostateczny do wyrachowania boku c, drugi przybiéra się dla sprawdzenia tylko wypadku.

Nakoniec, chcąc sprawdzić cały rachunek używać do tego można albo obadwa, albo jedno tylko z równań następujących:

$$\frac{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}C\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}C}=\frac{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}(a+b)\ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}c\ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}c},$$

$$\frac{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}C\ \text{dost}\,\tfrac{1}{2}C}=\frac{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}(a-b)\ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}c\ \text{wst}\,\tfrac{1}{2}c},$$

z których pierwsze jest iloczynem równania [I] przez [IV], drugie równania [II] przez [III].

Wzór rachunku.

Rachunek na kąty A *i* B

L. dost $\frac{1}{2}$ C	9,9611228	L. dost $\frac{1}{2}$ C	9,9611228
L. dost $\frac{1}{2}$ $(a-b)$.	9,9680027	L. wst $\frac{1}{2}$ $(a-b)$.	9,5683775
L′. wst $\frac{1}{2}$ C.	0,3926784	L′. wst $\frac{1}{2}$ C	0,3926784
L′. dost $\frac{1}{2}$ $(a+b)$.	0,3480129	L′. wst $\frac{1}{2}$ $(a+b)$.	0,0488246
L. sty $\frac{1}{2}$ (A+B). . . .	=10,6698168	L. sty $\frac{1}{2}$ (A—B)	=9,9710034
$\frac{1}{2}$(A+B)=77°55′37″,61. .		$\frac{1}{2}$(A—B)=43°5′19″,26. .	

więc A=121°0′56″,87.; B=34°50′18″.35..

Rachunek na bok c

L. dost $\frac{1}{2}$ (A+B).	9.3204699	L. wst $\frac{1}{2}$ (A+B)	9,9902866
L. wst $\frac{1}{2}$ $(a+b)$	9,9511754	L. wst $\frac{1}{2}$ $(a-b)$	9,5683776
L′. dost $\frac{1}{2}$ (A—B).	0,1365003	L′. wst $\frac{1}{2}$ (A—B).	0,1654970
L′. dost $\frac{1}{2}$ $(a+b)$	0,3480129	L′. dost $\frac{1}{2}$ $(a-b)$	0,0319973
L. sty $\frac{1}{2}$ c	9.7561585	L. sty $\frac{1}{2}$ c.	9,7561585

a zatem $\frac{1}{2}$ c=29°41′57″,26.; więc c=59°23′54″,52. .

Sprawdzenie całego rachunku.

L. dost $\frac{1}{2}$ (A+B).	9,3204699	L. dost $\frac{1}{2}$ $(a+b)$	9,6519871
L. wst $\frac{1}{2}$ (A—B).	9,8345030	L. wst $\frac{1}{2}$ $(a-b)$	9,5683776
L′. wst $\frac{1}{2}$ C.	0,3926784	L′. dost $\frac{1}{2}$ c.	0,3050027
L′. dost $\frac{1}{2}$ C.	0,0388772	L′. wst $\frac{1}{2}$ c.	0,0611611
	19,5865285		19,5865285

Z tego rachunku więc wypada: że $A=121°0'56'',87$; $B=34°50'18'',35$; $c=59°23'54'',48$, tojest, toż samo, cośmy już wyżéj (**142**) innym sposobem otrzymali, rozwiązując tenże trójkąt za pomocą analogiów Nepera i kąta posiłkowego.

Porównywając sposób wyżéj użyty z teraźniejszym, pokazuje się: iż działając podług tamtego, i niesprawdzając rachunku, dziesięć różnych logarytmów wyszukać potrzeba w tablicach trygonometrycznych; rachując zaś podług tego, i nadto sprawdzając wypadki, tablice tylko w siedmiu miejscach roztworzyć wypada.

5. Każdy trójkąt prostokreślny może być uważany za trójkąt kulisty, leżący na powierzchni kuli, któréj promień jest nieskończenie wielki; boki więc jego będą łukami kół o promieniu nieskończenie wielkim: a ztąd wstawy tych boków, co do swéj długości, równe są tymże bokom, zaś ich dostawy są nieskończenie wielkie, tojest, równe promieniowi kuli. W tém przypuszczeniu powyższe wzory [I], [II], [III], [IV] przechodzą na następujące:

[1] $$\text{dost}\,\tfrac{1}{2}(A+B)=\text{wst}\,\tfrac{1}{2}C,$$

[2] $$\text{dost}\,\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a+b}{c}\,\text{wst}\,\tfrac{1}{2}C,$$

[3] $$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(A+B)=\text{dost}\,\tfrac{1}{2}C,$$

[4] $$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{c}\,\text{dost}\,\tfrac{1}{2}C.$$

Piérwsze i trzecie z tych równań nic nowego nie uczą; zaś drugie i czwarte użyte być mogą do rozwiązania trójkątów prostokreślnych, należących do przypadku trzeciego (**77**). Dzieląc równanie [4] przez [2] wypada:

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\,\text{doty}\,\tfrac{1}{2}C.$$

A że $\text{doty}\,\tfrac{1}{2}C=\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A+B)$; przeto mamy

$$\frac{\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}=\frac{a+b}{a-b},$$

tojest, wzór ten sam, który w postaci proporcyi wyżéj n. **77** [1] był podany.

Chcąc za pomocą tych wzorów [2] i [4], znaleźć połowę różnicy dwóch kątów niewiadomych A i B, oba razem wziąć się powinny; a potém, aby otrzymać bok trzeci c, dosyć jest wyrachować go podług jednego z tych wzorów.

KONIEC.