OSOBNE ODBICIE Z T. XXXVI „WIADOMOŚCI MATEMATYCZNYCH"

E. STAMM, WŁ. M. KOZŁOWSKI, S. DICKSTEIN.

Józef Peano

WARSZAWA
1933

G. Peano.

E. STAMM.

Józef Peano.

Na wiosnę, 20 kwietnia 1932 r. zmarł jeden z najznakomitszych współczesnych matematyków, logików i filologów porównawczych, Józef Peano, profesor analizy wyższej na uniwersytecie w Turynie, twórca włoskiej szkoły matematyczno-logicznej, a także twórca najpoważniejszego obecnie języka międzynarodowego, łaciny bez gramatyki.

Peano urodził się 27 sierpnia 1858 r. w Spinetta, małej miejscowości piemonckiej prowincji Cuneo, kilkadziesiąt kilometrów na południe od Turynu. Przodkowie jego od dawien dawna poświęcali się rolnictwu.

Młody Józef ukończył szkołę powszechną w latach 1865 — 1868 i średnią w latach 1868 — 1876 w pobliskiem Cuneo, studja zaś matematyczne na uniwersytecie w Turynie, w latach 1876 — 1880, gdzie w r. 1880 w wieku 22 lat otrzymał 16 lipca dyplom doktora matematyki. Na uniwersytecie studjował pod kierunkiem znanych matematyków włoskich, między innymi Genocchiego, Faà di Bruna, D'Ovidia i Siacciego.

Wkrótce po otrzymaniu doktoratu został asystentem D'Ovidia, później Genocchiego, a w roku 1886 objął stanowisko profesora Wojskowej Akademji Artyleryjskiej w Turynie, z którego to stanowiska zrezygnował w roku 1901. W r. 1890 został mianowany nadzwyczajnym profesorem analizy wyższej na uniwersytecie turyńskim, w r. 1895 profesorem zwyczajnym. Na stanowisku tem wytrwał aż do śmierci, t. j. do 20 kwietnia 1932 r. Jeszcze 19 kwietnia miał swój zwykły wykład na uniwersytecie.

Prosty to bieg życia tak wielkiego uczonego; ale też i Peano sam odznaczał się zawsze największą prostotą. Jedynem urozmaiceniem jego życia były chyba liczne podróże, jakie odbywał pieszo, koleją, okrętem, a nawet hydroplanem po Anglji, Austrji, Belgji, Francji, Hiszpanji, Holandji, Kanadzie, Niemczech, Szwajcarji, Tunisie, Węgrzech i Włoszech.

Jego cicha a jednak tak intensywna praca znalazła oczywiście uznanie, nie tylko w jego ojczyźnie, lecz także i zagranicą. Był Peano członkiem Królewskiej Akademji „dei Lincei" w Rzymie, Królewskiej Akademji Nauk w Turynie, Narodowej Rady Badań Naukowych, Królewskiego Instytutu Lombardzkiego Nauk i Sztuk, prezesem Akademji „pro Interlingua", komandorem orderu „Corona d'Italia", kawalerem orderu „Santi Maurizio e Lazzaro", członkiem Meksykańskiego Towarzystwa Naukowego, Narodowego Instytutu w Genewie i Towarzystwa Matematyczno-Fizycznego w Kazaniu.

Peano ogłosił ogółem 212 prac naukowych, z tego 175 poświęconych logice i matematyce (24 dzieł, 151 rozpraw i artykułów), 37 filologji porównawczej i językowi międzynarodowemu (7 dzieł, 30 artykułów).

Śledząc całokształt naukowej pracy Peany, przedewszystkiem w zakresie logiki i matematyki, przychodzimy do wniosku, że świadomie czy też podświadomie — jak to bywa u ludzi genjalnych — kierował się on zasadą: „prawda, jasność, prostota" a ponieważ trzy te cechy są zarazem cechami piękna — więc i „piękno". I zwrócić muszę tutaj uwagę na to, że zasady te stosował on i poza badaniami filozoficznemi i matematycznemi, a mianowicie w swej praktyce pedagogicznej i w swych badaniach językowych, które doprowadziły go do tak prostego i pięknego języka międzynarodowego, jakim jest łacina bez gramatyki, a przedewszystkiem w swem pięknem a prostem życiu.

Jego uczeń, obecnie profesor matematyki uniwersytetu medjolańskiego, Ugo Cassina, wyraził się w nekrologu[1]),

[1]) Schola et Vita, VII, 1932, str. 118.

że praca naukowa Peany posiada charakter „rewolucyjny". I słusznie! Gdziekolwiek przyłożył swą rękę, chociażby do spraw najprostszych, otrzymywał rezultaty nowe, niezwykle oryginalne. Jeśli weźmiemy pod uwagę chociażby logikę, to przecież cała dzisiejsza subtelna logika Russella i Whiteheada na jego zasadniczych spoczywa ideach. A moc innych pomysłów, czy w elementarnych działach matematyki, czy też w najniedostępniejszych dziedzinach analizy wyższej!

Nie mam zamiaru pisać na tem miejscu zwyczajnej mowy pogrzebowej; chciałbym przedstawić czytelnikowi pozytywnie zdobycze, jakie przypisać musimy Peanie w zakresie logiki, podstaw matematyki, dyscyplin matematycznych, dydaktyki matematyki i języka międzynarodowego, na podstawie jego pism, oraz bezpośredniego porozumiewania się z nim.

Zacznę od logiki. Peano miał zawsze na myśli przedewszystkiem logikę w zastosowaniu do dyscyplin matematycznych. Mimoto jednak jest jego logika daleko subtelniejsza w odniesieniu do jakiegokolwiek rozumowania, aniżeli logika Boole'a lub Schrödera. Na logice Peany wyrosła przecież bodaj wprost przesubtelniona logika Russella i innych, logika, która stosowana jest nawet do najtrudniejszych zagadnień dzisiejszej myśli.

Logika matematyczna jest logiką, posiadającą postać dyscyplin matematycznych. Każda dyscyplina matematyczna. posiada metodę dedukcyjną i symboliczną. Dlatego logika matematyczna posiada swój układ pewników, który wyłącznie służy do rozwinięcia całej teorji, a zarazem posiada swoje symbole.

Pierwszym, który uważał logikę za dyscyplinę matematyczną, był Leibniz. Operował on już pewnemi symbolami logicznemi, jednak nie był jeszcze w posiadaniu układu pewników logiki. Zasadę bezsprzeczności wyrażał on np. symbolem „$A - A \propto N$" (znak $\propto$ oznaczał równość), sylogizm Barbara symbolem „ si $e \,\Gamma d$ et $d \,\Gamma a$, tunc $e \,\Gamma a$", zasadę podwójnego przeczenia symbolem „$A \propto$ non non A", zasadę tautologji symbolami „$A + A \propto A$, $AA \propto A$"

i t. d. Ideałem Leibniza była „characteristica universalis", system dedukcyjno-symboliczny, który miał być syntezą logiki matematycznej i języka międzynarodowego. Ideał tej metody wyraża on słowami: „ ... ut sufficiat duos disputantes omissis verborum concertationibus sibi invicem dicere: calculemus, ita enim perinde ac si duo arithmetici disputarent de quodam calculi errore".

Badania Leibniza zostały pogrzebane w pyle niepamięci po jego śmierci Dopiero w połowie XIX w. stworzył G. Boole nowy system logiki matematycznej. Później powstały systemy innych uczonych. Logika matematyczna mogła się teraz poszczycić już i układem pewników.

Jednak z pomocą logik w tych czasach utworzonych nie można było napisać ściśle jakiegoś traktatu matematycznego symbolicznie. Nie zdołała tego dokonać ani logika Boole'a, ani Schrödera, ani innych.

Stało się to faktem dopiero, gdy Peano utworzył swój system logiki, zastosowanej specjalnie do dyscyplin matematycznych. W ten sposób stał się Peano pierwszym prawdziwym kontynuatorem idei Leibniza, mianowicie jego „characteristica universalis".

Peano tworzył i udoskonalał swój system stopniowo. W r. 1889 wydał dziełko „Arithmetices principia, nova methodo exposita"[2]). W dziełku tem opiera się na kilku zasadniczych pojęciach i buduje na nich całą logikę, konieczną do rozwinięcia arytmetyki i arytmetykę samą. Całe dziełko ma tylko 36 stron. Później pokazało się, że z pomocą tych zasadniczych pojęć i symboli można zbudować nie tylko całą arytmetykę, lecz także analizę wyższą.

W tymże roku ogłasza Peano symbolicznie napisany traktat geometrji „I pincipii di geometria, logicamente esposti"[3]). Traktat pisany jest tylko z pomocą symboli logicznych, użytych w arytmetyce z dodatkiem specjalnych geometrycznych.

[2]) **15.** — **Liczby drukiem tłustym oznaczają numer porządkowy pracy Peany w spisie bibjograficznym, podanym na końcu.**

[3]) **17.**

Później pojawia się coraz więcej prac Peany oraz jego uczniów, t. zw. włoskiej szkoły matematyczno-logicznej, prac dążących w tymsamym kierunku. Prawie wszystkie zebrane są w klasycznem dziele, które wydawał Peano od r. 1894 do 1908, przy współudziale wielu swych uczniów p. t. „Formulario Mathematico" (Wstęp 1894, t. I 1895, t. II 1896, t. III 1901, t. IV 1902, t. V 1908)[4]. Wiele z rozdziałów drukowanych w „Formulario" drukowanych było przedtem bezpośrednio w „Rivista di Matematica" (1891 — 1907), które to czasopismo redagował Peano. „Formulario" ma tak swoistą postać, że warto się z nim bliżej zapoznać. Poszczególne tomy, z wyjątkiem wstępu — który obejmuje tylko logikę matematyczną, a był później reprodukowany w tomach właściwych — są powtórzeniami wraz z uzupełnieniami. Tom II obejmuje I, tom III obejmuje t. II i t. d., t. V obejmuje wszystkie poprzednie. Jednak trafia się, że pewne dyscypliny matematyczne, rozwinięte w jakimś tomie, nie są powtórzone w tomach następnych; np. teorja ciał liczbowych opracowana przez Fano w t. I nie jest powtórzona w żadnym z tomów następnych. Najpełniejszym jest ostatecznie t. V, wydany w r. 1908, posiadający str. 499[5]. Obejmuje on wszystkie zasadnicze dyscypliny matematyczne, od arytmetyki i elementarnej geometrji począwszy.

Wszystko drukowane jest symbolami logicznemi i matematycznemi Peany. Jeśli chodziłoby tylko o ekonomję — rzecz dzisiaj pierwszorzędną — to musimy przyznać, że symbolika Peany jest w „Formulario" około 10 razy ekonomiczniejsza, aniżeli mowa matematyków z ich symbolami. Tom V „Formulario" o 500 str. równoważny jest 10 tomom, każdy po 500 str., pisanych zwyczajnie.

Symbolizm logiczny Peany doprowadził jednak jeszcze do rezultatów ważniejszych, aniżeli ekonomja. Oto pokazało się, że pojęcie granicy, tak różnie traktowane przez różnych matematyków, tkwi w najprostszem pojęciu granicy górnej, którą Peano oznacza przez l′ (limite supérieure Guilmina,

---

[4]) **61, 63, 85, 90, 94, 100, 108, 119.**

[5]) **119.**

obere Grenze Weierstrassa, ideales Maximum Pringsheima) i które jest o wiele praktyczniejsze, aniżeli pojęcie granicy Cauchy'ego (które Peano oznacza przez Lm)[6]. Pokazało się, że kryterja zbieżności szeregów nie są zupełnie poprawne[7]), i t. d. Pokazało się, wreszcie, że dowód całkowalności równań różniczkowych nie da się praktycznie przeprowadzić w sposób zupełny zapomocą języka, a więc bez pomocy daleko posuniętej symboliki[8]).

Symbolika Peany pozwala sprawdzać mechanicznie, powiem, wprost optycznie, prawdziwość dowodów. Intuicja prowadziła nas bardzo często do błędów, czego dowodem współczesna teorja mnogości.

Aby móc drukować swój „Formulario" i swoje pismo „Revista" odpowiednio do zamierzeń, nabywa Peano w r. 1898 od Faà di Bruna małą drukarenkę za 407 lirów. Studjuje sztukę drukarską, a rezultatem tych studjów jest nadzwyczajne uproszczenie symboliki matematycznej, uproszczenie, jakie można obserwować właśnie w „Formulario"[9]). Szkoda, że matematycy i specjaliści drukarze, a zwłaszcza specjaliści sztuki drukarskiej w dziedzinie dyscyplin matematycznych nie zwracają większej uwagi na zdobycze, jakie osiągnął Peano w tym kierunku. Powiem tylko, że druk „Formulario" nie wymagał, mimo swej wszechstronności, żadnych nowych czcionek, że był zawsze jednolinijny, nie wymagał ani wykładników potęgowych, ani wskaźników. Obniża to oczywiście cenę druku nadzwyczajnie[10]).

Peano zwraca baczną uwagę w opracowywaniu jakiejś dyscypliny matematycznej na definicje, gdyż w dawnej matematyce spotykamy wiele pojęć źle zdefinjowanych[11]). Według Peany posiada definicja w matematyce zazwyczaj postać

określane = określające, definiendum = definiens.

[6]) **119**, str. 105 n., 116 n., 211 n.

[7]) **119**, str. 298 n., 303 n.

[8]) **119**, str. 416 n. Por. także **46, 58, 59, 141**.

[9]) Por. **119, 159, 170**.

[10]) Por. **61, 63, 85, 90, 94, 100, 108, 119**, nast. **159, 170**.

[11]) **119, 95, 134, 158, 174**.

W niektórych definicjach występuje jeszcze jednak hipoteza (racja)[12]. M. Burali Forti[13]) dzieli dlatego definicje w matematyce na definicje pierwszego rodzaju (bez hipotezy) i drugiego rodzaju (z hipotezą).

Przykład definicji z hipotezą:

$$a \varepsilon q \,.\, m \varepsilon 2 N_1 + 1 \,.\, \supset . \sqrt[m]{a} = \iota q \frown x \ni (x^m = a)$$

Jest to definicja nieparzystego pierwiastka z liczby rzeczywistnj a. Hipotezą jest część definicji do symbolu, $.\supset.$, definiendum symbol $\sqrt[m]{a}$, definiens część definicji po $\sqrt[m]{a} =$. Jeśli a jest liczbą rzeczywistą, a m liczbą nieparzystą, większą od 1, to $\sqrt[m]{a}$ jest liczbą rzeczywistą x (jedyną) taką, że $x^m = a$.

Każda definicja w matematyce jest nominalna. Arystotelesowska metoda definicji „per genus proximum et differentiam specificam" nie obejmuje wszystkich definicyj matematycznych. To, co definjujemy, nie musi istnieć. Wielką rolę odgrywają w matematyce definicje przez indukcję zupełną, mianowicie, gdy określamy funkcję liczby całkowitej zapomocą wartości $f(0)$, ustalając związek między $f(n)$ a $f(n+1)$.—Bardzo często operuje Peano definicjami przez abstrakcję. W definicjach takich nie określamy wprost jakiegoś przedmiotu matematycznego w zwyczajny sposób, lecz określamy równość takich przedmiotów. Np. w symbolice Peany:

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\supset: \mathrm{Num}\, a = \mathrm{Num}\, b \,.=.\, \exists (b f a)\ \mathrm{rcp}$$

Jest to definicja mocy zbiorów (Mächtigkeit Cantora). — Definicja przez abstrakcję ma postać

$$h_{u,v} \,.\supset: \varphi u = \varphi v \,.=.\, p_{u,v}$$

$h_{u,v}$ jest hipotezą dla u i v, $\varphi u = \varphi v$ jest równością, którą określamy zapomocą warunku lub relacji $p_{u,v}$ między u i v.

---

12) **61**, str. 44.

13) Logica matematica, 1894.

Relacja ta musi być zwrotna, symetryczna i przechodnia. Inaczej mówiąc, każda taka relacja ma własności równości, da się na równość zamienić. W naszym przykładzie mamy do czynienia z relacją doskonałego [14]) odwzorowania. Nie w każdym jednak przypadku zamieniamy taką relację na równość; przykładem — podobieństwo figur.

Z równoważności „definiendum = definiens" wynika, że wszędzie można podstawić w twierdzeniach definiens zamiast definiendum. Jeśli po takiem podstawieniu uzyskamy wyrażenie nie wiele dłuższe lub też nie wiele bardziej zawikłane od poprzedniego, to definicja nie jest praktyczna, a więc zbyteczna. Jeżeli zaś definiendum nie da się w żaden sposób wyeliminować przez podstawienie definiens, to definicja jest nieodpowiednia. —

Same definicje nie tworzą jeszcze żadnej dyscypliny matematycznej. Konieczne są zasadnicze pojęcia i zasadnicze twierdzenia czyli pewniki. Z układu pewników wnioskujemy metodą dedukcyjną z pomocą definicyj wszystkie twierdzenia danej dyscypliny matematycznej. Wchodzi więc tutaj w grę logika. Peano, podobnie jak i późniejsze badania, wykazuje, że nie może być ona logiką klasyczną, a zarazem nie może być w wielu przypadkach logiką słowną, lecz musi być symboliczną. Logika słowna ze swemi wieloznacznościami nie jest w stanie uchwycić subtelności, jakie pojawiły się w najnowszych czasach w pewnych dyscyplinach matematycznych, tak jak i logika klasyczna nie jest w stanie rozwiązać paradoksów teorji mnogości.

Logika Peany jest przeważnie logiką sądów i stosunków.

Podczas gdy liczba słów języka, wyrażających stosunki logiczne, wynosi według Peany około 1000, używa Peano [15]) symboli logiki matematycznej 12, a mianowicie·

---

[14]) Termin wprowadzony przez prof. Sierpińskiego na odwzorowanie jedno — jednoznaczne.

[15]) Por. np. **119.** str. 3 — 13.

$=$ równe	$\supset$ wynika	$\frown$ i
Cls klasa	ε jest	$\ni$ które
$-$ nie	$\smile$ albo	Λ klasa pusta
$\exists$ istnieje	ι symbol klasy jednostkowej	$\bar{\iota}$ symbol indywiduum.

Dla objaśnienia dodamy jeszcze, że $\frown$ jest symbolem mnożenia logicznego, $\smile$ symbolem dodawania logicznego, $-$ symlem negacji, ε oznacza przynależność indywiduum do klasy ($a \, \varepsilon \, \alpha$, a jest indywiduum klasy α), ιa, gdzie a jest indywiduum, oznacza klasę jednostkową, $\bar{\iota} \alpha$, gdzie α jest klasą jednostkową oznacza indywiduum. Symbol $x \ni p_x$, gdzie p_x oznacza wypowiedź, zawierającą zmienną logiczną x oznacza „wszystkie x, które spełniają warunek p_x" — Naprzykład:

$$a \, \varepsilon \, N_1 + 1 . - \exists \, Np \, \bar{\iota} \, x \ni (x^2 \leqq a . a \, \varepsilon \, N_1 \times x) . \supset . a \, \varepsilon \, Np$$

co przedstawia znane twierdzenie z teorji liczb (Leonardo z Pizy, Liber abbaci, 1202): Jeżeli a jest liczbą naturalną, większą niż 1 i jeżeli niema takiej liczby pierwszej x, której kwadrat jest mniejszy lub równy a, jeżeli następnie a jest wielokrotnością liczby x, to a jest liczbą pierwszą. — W przedstawieniu tem jest N_1 symbolem liczby naturalnej, a więc $N_1 + 1$ liczby naturalnej większej jak 1, Np symbolem liczby pierwszej, $N_1 \, x$ symbolem wielokrotności liczby x; kropki oddzielają poszczególne części twierdzenia.

Wspomnę tutaj jeszcze, że A. Padoa, jeden z uczniów Peany, zredukował podane wyżej symbole logiczne w liczbie 12 do 3, a mianowicie $=$, $\frown$, ε [16]).

W stosunku do dawniejszej logiki symbolicznej szczególnego znaczenia nabierają wprowadzone przez Peanę symbole ε oraz ι. Dawna logika symboliczna nie odróżnia

[16]) La logique déductive dans sa dernière phase de développement, 1912. Por. też moje sprawozdanie „Wiad. Mat." XVII. str. 339-346. oraz **83** spisu bibl.

jeszcze pojęć $\supset$ i ε, a następnie a oraz ιa, gdzie a jest indywiduum, zaś ιa klasą jednostkową. To odróżnienie tworzy jednak podstawę teorji typów, rozwiniętej przez B. Russella i A. N. Whiteheada, która podejmuje rozwiązanie najsubtelniejszych nawet zagadnień ze współczesnej teorji mnogości. Tak jest więc teorja typów kontynuacją logiki Peany.

Peano akcentuje również, podobnie jak przed nim Peirce i Schröder, a po nim przedewszystkiem Russell, ważność teorji stosunków dla matematyki[17]).

Arytmetyka zawdzięcza Peanie również bardzo wiele. I nie chodzi tutaj o jakieś poszczególne twierdzenia, lecz o całokształt, o system arytmetyki. Peano sprowadził podstawy arytmetyki do tak prostej a ścisłej postaci, że późniejsze badania Padoy, Pieri'ego, Huntingtona, Dicksona, Buraliego-Fortiego, a nawet Russella i Whiteheada, nie wiele pozytywnych dodały rezultatów. A trzeba zaznaczyć, że przed Peaną, przed pierwszą jęgo pracą w tym kierunku (1889)[18]), badania nad podstawami arytmetyki były stosunkowo nikłe. Wspomniećby można tu tylko o pracach Grassmanna, Hankela, G. Cantora, Dedekinda, Weierstrassa, Helmholtza, Kroneckera i E. Schrödera.

Opiera Peano całą arytmetykę, a więc i całą algebrę i analizę wyższą na trzech zasadniczych pojęciach (prócz logicznych)

$$N_0, \ 0, \ +.$$

N_0 oznacza klasę liczb 0, 1, 2, 3, ... , 0 zero, $+$ oznacza plus, a więc $a+$ liczbę naturalną, następującą po a[19]). Układ pewników składa się z 6 następujących (w symbolice Peany):

---

[17]) **61**, str. 37 — 41, **108**. str. 315. Por. też moją pracę „Uber Relativfunktionen u. Relativgleichungen, „Monatshefte f. Math. u. Physik, XXXVIII, 1931, str. 147 — 166.

[18]) **15**.

[19]) Por. **119** (najnowsze przedstawienie) str. 27 n., **15** (pierwsze przedstawienie), **103** (najobszerniejsze przedstawienie), a następnie **35, 66, 92, 153, 155, 181, 183, 184**, oraz odpowiednie części **63, 80, 94, 100, 108**.

I. $$N_0 \varepsilon \mathrm{Cls}$$

II. $$0 \varepsilon N_0$$

III. $$a \varepsilon N_0 . \supset . a+ \varepsilon N_0$$

IV. $$s \varepsilon \mathrm{Cls} . 0 \varepsilon s : a \varepsilon s . \supset_a . a+ \varepsilon s : \supset . N_0 \supset s$$

V. $$a, b \varepsilon N_0 . a+ = b+ . \supset . a = b$$

VI. $$a \varepsilon N_0 . \supset . a + - = 0 .$$

Słownie:

I. N_0 jest klasą.

II. 0 należy do klasy N_0.

III. Jeżeli a należy do N_0, to i liczba następująca po a należy do N_0.

IV. Jeżeli s jest klasą (własnością), jeżeli 0 należy do s (posiada tę własność), jeżeli liczba następująca po a należy do s (posiada tę własność), o ile a do s należy (tę własność posiada), to z tego wynika, że każda liczba z klasy N_0 należy do s (tę własność posiada).

V. Jeżeli a i b należą do N_0 i jeżeli liczba następująca po a równa się liczbie następującej po b, to i $a=b$.

VI. Jeżeli a należy do N_0, to liczba następująca po a nie równa się 0.

Pewnik IV jest zasadą indukcji zupełnej, którą Dedekind udowadnia, a którą Peano przyjmuje za pewnik. Wspomnę, że zasada ta, której hipoteza składa się z pierwszych trzech pewników, da się wyrazić także w ten sposób, że klasa N_0 jest najmniejszą klasą, spełniającą warunki I, II, III.

Nie można wyobrazić sobie większej prostoty układu pewników i mniejszej ich liczby, przy zachowaniu tej prostoty. Na tych 6 prostych pewnikach zbudowany jest cały gmach arytmetyki, algebry i analizy wyższej.

Peano podaje następnie dowód niezależności tych 6 pewników.

W następstwie przedstawię krótko definicje najważniejszych pojęć arytmetyki, tak jak to czyni P e a n o.

Definicja cyfr:

$$1 = 0 +, \quad 2 = 1 +, \; 3 = 2 +, \; 4 = 3 +, \; \ldots\ldots$$

Definicja dodawania:

$$a \varepsilon N_0, \supset . \; a + 0 = a$$

$$a, b \varepsilon N_0 . \supset . \; a + (b +) = (a + b) +$$

Definicja mnożenia:

$$a \varepsilon N_0 . \supset . \; a \times 0 = 0$$

$$a, b \varepsilon N_0 . \supset . \; a \times (b + 1) = (a \times b) + a$$

Definicja potęgowania:

$$a \varepsilon N_0, \supset . \; a \ulcorner 0 = 1$$

$$a, b \varepsilon N_0 . \supset . \; a \ulcorner (b + 1) = (a \ulcorner b) \, a$$

Symbol $a \ulcorner b$ oznacza, „a do potęgi b".

Definicja liczb naturalnych:

$$N_1 = N_0 + 1$$

Definicja większości i mniejszości:

$$a, b \varepsilon N_0, \supset : b > a = . \; b \varepsilon a + N_1$$

$$a, b \varepsilon N_0 . \supset : a < b = . \; b > a$$

Definicja różnicy:

$$a \varepsilon N_0 . \; b \varepsilon a + N_0, \supset . \; b - a = \iota \, [N_0 \frown x \ni (x + a = b)]$$

Definicja ilorazu:

$$a \varepsilon N_1 . \; b \varepsilon N_1 \, x a . \supset . \; b/a = \iota \, [N_1 \frown x \ni (x \times a = b)]$$

Definicja liczb całkowitych:

$$n = +N_0 \smile -N_0$$

Definicja liczb wymiernych dodatnich:

$$R = N_1/N_1$$

Definicja liczb wymiernych:

$$r = +R \smile -R \smile \iota 0$$

Aby określić liczby rzeczywiste, wprowadza Peano pojęcie górnej granicy (obere Grenze Weierstrassa, ideales Maximum Pringsheima), które uważa za najprostsze z używanych w matematyce. Przy tej sposobności przedstawimy krótko zapatrywania Peany w tym przedmiocie [20]).

Peano wprowadza następujące pojęcia granicy, z których 8 pierszych odnosi się do klas, zaś dalsze do funkcyj:

$l'u$ górna granica klasy u, podklasy liczb wymiernych dodatnich,

l,u dolna granica takiej klasy,

$\Lambda' u$ górne granice podklas niepustych w u,

Λ, u dolne granice takich podklas,

$\Lambda\ u$ suma logiczna obu poprzednich klas,

$\lambda\ u$ skończone granice, objęte klasą $\Lambda\ u$,

∇u klasa pochodna klasy u,

$\delta\ u$ klasa wartości skończonych w ∇u,

Lm x limes x,

lm x granica x.

Aby zdefinjować $l'u$ określa Peano najpierw symbol η:

$$\eta = R \frown x \ni (x < 1)$$

Jest to więc klasę ułamków właściwych dodatnich. Wtedy oznacza ηa, gdzie a jest liczbą wymierną dodatnią, klasą

[20]) Por. **119**, str. 105 n., 116, 139 n., 211 n., oraz **41**, str. 77, **46**, **49**, **141**.

liczb wymiernych dodatnich, mniejszych od a, zaś ηu, gdzie u jest podklasą w R, klasę liczb wymiernych dodatnich, z których każda jest mniejsza od jakiegoś u. Zapomocą symbolu η definjuje Peano nie wprost $\text{l}'u$, gdzie u' jest klasą, lecz relację $a < \text{l}'u$, gdzie a jest liczbą wymierną dodatnią:

$$u \varepsilon \text{Cls}'\text{R}. a \varepsilon \text{R} . \supset : a < \text{l}'u . = a \varepsilon \eta u$$

Jeżeli u jest podklasą liczb wymiernych dodatnich, zaś a liczbą wymierną dodatnią, to „a jest mniejsze od górnej granicy klasy u" znaczy, że a jest w klasie ηu.

Wynika z tego, że

$$\text{R} \frown x \ni (x < \text{l}'u) = \eta u$$

t. zn., że zbiór liczb wymiernych dodatnich x takich, że jest $x < \text{l}'u$ jest identyczny z klasą ηu.

Mamy następnie

$$a = \text{l}'u . = . \eta a = \eta u$$

Dolną granicę $\text{l}_1 u$ określa Peano z pomocą pojęcia granicy górnej.

Definicje $\Lambda' u$, $\Lambda_1 u$, Λu, λu nie przedstawiają teraz żadnych trudności, podobnie jak ∇u oraz δu.

Na podstawie l' odpowiada każdej klasie liczba skończona lub nieskończona. Na podstawie Λ, λ i δ odpowiada klasie inna klasa. Pojęcia Lm i lim odnoszą się do ciągów i funkcyj. Definicja Lm x brzmi

$$x \varepsilon q f \text{N}_0 . \supset : \text{Lm}\, x = a \ni [m \varepsilon \text{N}_0 . \supset_m . a \varepsilon \Lambda x' (m + \text{N}_0)]$$

Jeżeli x jest ciągiem liczb rzeczywistych $(x_0, x_1, x_2, \ldots x_n \ldots)$, to limes x jest zbiorem takich a, które należą do Λ każdej klasy, złożonej z x ze wskaźnikami m, $m + 1$, $m + 2, \ldots$, gdzie m jest wskaźnikiem dowolnym z szeregu 0, 1, 2, 3, ... Jest to więc iloczyn logiczny klas $\Lambda x'(m + \text{N}_0)$ dla

$m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ — Z definicji tej można łatwo wyprowadzić definicję, najczęściej może używaną:

$$a \varepsilon q . \supset :. a \varepsilon \mathrm{Lm}\, x . = : m \varepsilon \mathrm{N}_0 . h \varepsilon Q . \supset_{m,h}$$

$$\exists (m + \mathrm{N}_0) \frown n \ni [\mathrm{mod}\, (x_n - a) < h]$$

Jeżeli klasa Lm x jest jednostkową, wtedy oznaczamy ją przez lim x:

$$x \varepsilon q f \mathrm{N}_0 . \supset . \lim x = \iota\, \mathrm{Lm}\, x$$

Teraz może Peano określić granicę funkcyj, najpierw Lm, potem lim[21]).

Wróćmy jednak do arytmetyki, a mianowicie do liczb rzeczywistych. Powiedzieliśmy, że Peano określa te liczby zapomocą górnej granicy klas; definicja ta ma postać:

$$Q = \mathrm{l}'^{\,c} [\mathrm{Cls}'\, \mathrm{R} \frown u \ni (\exists u . \exists \mathrm{R} - \eta u)]$$

Liczba rzeczywista dodatnia Q jest górną granicą dowolnej podklasy u liczb wymiernych dodatnich, niepustej, i takiej, że istnieje jakaś liczba wymierna dodatnia, większa od każdej liczby w u.

Po określeniu działań na liczbach rzeczywistych dodatnich określa Peano liczby rzeczywiste w ogóle:

$$q = Q \smile - Q \smile \iota 0.$$

W ten sposób staje się teorja Peany o wiele prostszą od teorji Cantora.

Od roku 1913 zajmuje się Peano rachunkiem liczbowym, podobnie jak to czyniło wielu najznakomitszych matematyków, Euler, Gauss, Fourier, Cauchy i in. Prace jego pobudziły do badań wielu jego uczniów,

---

[21]) **119**, str. 230 n.

a badania te zebrane zostały niejako w traktacie U. Cassiny „Calculo numerico" [22]).

Wiadomo, że teorja błędów działań przybliżonych daje się najściślej zbudować na podstawie rachunku różniczkowego. Peano śledzi związek między obydwiema dziedzinami już od r. 1893 [23]). W r. 1916 wydaje krótką notatkę [24]), w której w sposób zupełnie elementarny, bez posługiwania się rachunkiem różniczkowym, przedstawia teorję błędów w działaniach elementarnych liczbami przybliżonemi, w szacie rachunku różniczkowego. Już w tej notatce posługuje się interwałami zamiast liczbami przybliżonemi i symbolem

$$V_n a = \frac{E(10^n a)}{10^n},$$

który przedstawia liczbę przybliżoną o n dokładnych cyfrach dziesiętnych (skróconą; liczbą dokładną jest a). W następnym roku wydaje ważną pracę w tym kierunku, „Approssimazioni numeriche" [25]), w której operuje w całej rozciągłości interwałami, w przeciwieństwie do wielu innych matematyków, pracujących w tej dziedzinie, którzy posługują się liczbą przybliżoną i błędem. Używa przytem bardzo praktycznych symboli, które czynią teorję przybliżeń bardzo jasną i prostą. Wymieniam tutaj poza wspomnianym symbolem $V_n\, a$, używane już w „Formulario"

$$C_r\, a = E\,\frac{a}{10^r} - 10\, E\,\frac{a}{10^{r+1}},$$

cyfrę r — tego rzędu liczby a i

$$\text{ord}\; a = \max n \frown x \ni (10^x \leqq a),$$

[22]) **49**, II str. 146 n., **103**, str. 96 — 103, **142**, **146**, **160**, **163**, **164**, **166**, **167**, **171**, **173**, **184**, **202**. Traktat Cassiny wyszedł z druku w r. 1928.

[23]) **49**, II, str. 146 — 9.

[24]) **160**.

[25]) **164**.

wykładnik największej potęgi liczby 10, zawartej w a, a następnie

$$M_n a = a - V_n a,$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą (dodatnią), a n liczbą całkowitą; symbol $M_n\ a$ przedstawia mantysę rzędu n-tego liczby a.

W wymienionej rozprawie opracowuje działania stopniowe (graduale), mianowicie mnożenie, potęgowanie, dzielenie, pierwiastkowanie, które okazały się nadzwyczaj praktyczne. Iloczyn stopniowy rzędu n-tego, $a\, x_n\, b$ określa jako sumę

$$\sum C_r\, a\,.\, C_s\, b\,.\, 10^{r+s}$$

gdzie r i s są liczbami całkowitemi z warunkiem $r + s \geqq - n$. Wykazuje przytem związek między temi pojęciami a dawnemi metodami mnożenia. Analogicznie określa inne działania.

Później [26]) stosuje Peano te działania z wielką korzyścią do rozwiązywania równań liczbowych. Upraszcza metodę Ruffiniego-Hornera i wyrachowuje np. zapomocą swej metody 23 dokładne miejsca dziesiętne pierwiastków równania

$$\sqrt[5]{\pi x^3} + \sqrt[3]{\pi x^2} + \sqrt{\pi x} = \pi.$$

Metoda działań stopniowych spotkała się z wielkiem uznaniem na międzynarodowym kongresie matematyków w Bolonji, w r. 1928, jak to zaznaczył prof. S. Dickstein.

Z dziedziny tej wspomnieć jeszcze należy o badaniach Peany reszt szeregów, które uważane były za nieodpowiednie do rachunków praktycznych (np. szeregu Leibniza dla π [27]), oraz o jego notatce o logarytmach [28])).

[26]) **171**.
[27]) **209**.
[28]) **184**.

Peano nie był zwolennikiem zaokrąglania liczb; uważał za praktyczniejsze ich skracanie, które daje tylko liczby dokładne[29]) i jest w użyciu prostsze.

Zajęcie się rachunkiem liczbowym skłoniło Peanę do zajęcia się i tablicami matematycznemi, oraz interpolacją, używaną w tablicach [30]). Metody interpolacji, które podaje Peano[31]), posługując się nowemi symbolami, są nadzwyczaj proste i ścisłe.

W związku z rachunkiem liczbowym interesuje się Peano także teorją kalendarza, jego reformą, oraz rachunkami, związanemi z kalendarzem[32]). Peano jest za reformą kalendarza, a mianowicie za ustaleniem daty Wielkiej Nocy, oraz za tem, aby kalendarz w każdym roku był jednaki. Co do rachunków, związanych z kalendarzem, to wyszkolenie się w nich uważa Peano za pożyteczne nawet dla uczniów. Dlatego pomieszcza je w swej popularnej pracy z zakresu arytmetyki i zabaw matematycznych [33]). I rzeczywiście rachunki te są dla uczniów interesujące, a zarazem wpajają w nich — poza techniką rachowania — pewne ważne pojęcia arytmetyki, które mogą z korzyścią zastąpić rachunki mniej interesujące.

Aby obliczyć np. dzień tygodnia jakiejkolwiek daty podaje Peano następującą prostą metodę.

„Liczbą tygodniową“ S nazywa Peano 0 dla niedzieli, 1 dla poniedziałku, 2 dla wtorku i t. d, wreszcie 6 dla soboty. Zatem np. symbol (liczby rzymskie oznaczają miesiące)

$$S(17\ \mathrm{V}\ 1928) = 4$$

oznacza, że dzień 17 maja 1928 r. był czwartkiem. Liczbę tygodniową miesiąca obliczamy dla lat zwykłych w sposób następujący:

---

[29]) **163,**

[30]) **166, 167. 168.**

[31]) **167.**

[32]) **182, 182′. 182″. 187, 196. 198.**

[33]) **187.**

$$\mathrm{S\,I} = 0,\ \mathrm{S}(m+1) = \mathrm{R}\,\frac{\mathrm{S}m + \text{liczba dni miesiąca } m}{7},$$

gdzie symbol $\mathrm{R}\,\frac{a}{b}$ oznacza resztę z podzielenia a przez b. Mamy więc dla lat zwykłych

$$\mathrm{S\,I} = 0,\ \mathrm{S\,II} = 3,\ \mathrm{S\,III} = 3,\ \mathrm{S\,IV} = 6,\ \mathrm{S\,V} = 1,\ \mathrm{S\,VI} = 4,$$

$$\mathrm{S\,VII} = 6,\ \mathrm{S\,VIII} = 2,\ \mathrm{S\,IX} = 5,\ \mathrm{S\,X} = 0,\ \mathrm{S\,XI} = 3,\ \mathrm{S\,XII} = 5.$$

Dla lat przestępnych kładziemy $\mathrm{S\,I} = 6$, z czego wynika $\mathrm{S\,II} = 2$, poczem, od marca począwszy, występują te same liczby, jak w latach zwykłych.

„Tygodniową liczbą roku“ zwykłego jest tygodniowa liczba ostatniego dnia roku poprzedniego, tygodniową zaś liczbą roku przestępnego jest tygodniowa liczba 1-go stycznia tegoż roku. Dla roku r kalendarza juljańskiego, do $4\,x$ 1582, mamy równość

$$\mathrm{S}r = \mathrm{R}\,\frac{4 + r + \mathrm{E}\,\frac{r}{4}}{7};$$

dla kalendarza gregorjańskiego podaje Peano dla pełnych stuleci, jeżeli

$$r = 100\,s,$$

wzór

$$\mathrm{s}(100\,s) = 6 - 2\mathrm{R}\,\frac{s}{4},$$

dla dowolnego zaś roku:

$$r = 100\,s + n$$

wzór

$$S(100s + n) = R\,\frac{S(100s) + n + E\frac{n}{4}}{7}.$$

Mamy np. dla $r = 1900 + n$

$$S(1900 + n) = R\,\frac{S(1900) + n + E\,\frac{n}{4}}{7},$$

a ponieważ

$$S\,1900 = S(100.19) = 6 - 2R\,\frac{19}{4} = 0,$$

więc

$$S(1900 + n) = R\,\frac{n + E\,\frac{n}{4}}{7}.$$

Jeżeli obliczyliśmy tygodniową liczbę roku Sr i tygodniową liczbę miesiąca Sm, to tygodniowa liczba daty r, m, d, gdzie r oznacza rok, m miesiąc, d dzień oblicza się z wzoru

$$S(r, m, d) = R\,\frac{Sr + Sm + d}{7}.$$

Aby obliczyć datę Wielkiej Nocy podaje Peano dla znalezienia epaktów roku r, t. zn. liczby dni do 1. I. od ostatniej pełni, wzór

$$e(r) = R\,\frac{8 + 11R\,\frac{r}{19}}{30}$$

dla kalendarza juljańskiego, zaś

$$e(r) = \mathrm{R}\,\frac{8 + 11\,\mathrm{R}\,\frac{r}{19} - \mathrm{E}\,\frac{r}{100} + \mathrm{E}\,\frac{r}{300} + \mathrm{E}\,\frac{r}{400}}{30}$$

dla kalendarza gregorjańskiego.

Pełnię wiosenną p podaje natomiast równość

$$p = 21\,\mathrm{III} + \left(29 - \mathrm{R}\,\frac{e+6}{30}\right)\,\text{dni}.$$

Data Wielkiej Nocy D oblicza się teraz zapomocą wzoru

$$D = p + (7 - \mathrm{S}p)\ \text{dni},$$

gdzie Sp oznacza tygodniową liczbę pełni wiosennej.

Nie będę tutaj przedstawiał innych zagadnień z tego zakresu, które w prosty sposób rozwiązuje Peano[34]). Zatrzymałem się i tak dłużej nad rachunkami kalendarzowemi, a to z tego powodu, że również, jak Peano, uważam je za odpowiednie dla szkół. Chciałbym w ten sposób zwrócić uwagę naszych pedagogów na ten przedmiot.

W zakresie analizy wyższej poczynił Peano również bardzo wiele doniosłych odkryć. Nie możemy oczywiście nawet wspomnieć o wszystkich.

O pojęciu granicy mówiliśmy już dawniej. Przedstawimy pojęcie funkcji[35]).

Pojęcia funkcji, działania, odwzorowania są identyczne. Funkcja jest wyrażana często zapomocą znaku, który poprzedza zmienną niezależną — znaku przedfunkcyjnego — często zapomocą znaku, który następuje po zmiennej — znaku pofunkcyjnego. Np. : log x, sin x, $a!$

Jeżeli mamy dwie klasy liczb a, b, to symbol

$$u\ \varepsilon\ a\ \mathfrak{f}\ b$$

---

[34]) **187**, str. 33 — 51.

[35]) **7, 7′, 23. 44, 46, 49, 58. 61, 63, 94. 100. 103, 108, 119. 131.**

oznacza, że u jest znakiem pofunkcyjnym, który przekształca każdą z liczb klasy a w jakąś liczbę klasy b, przechodzi zatem wtedy x na xu. Mamy więc definicję

$$a, b \varepsilon \mathrm{Cls}. \supset:. u \varepsilon a \mathfrak{j} b . =: x \varepsilon a. \supset_x . xu \varepsilon b$$

Natomiast symbol

$$u \varepsilon b f a$$

oznacza, że u jest znakiem przedfunkcyjnym, który przekształca każdą liczbę klasy a na jakąś liczbę klasy b:

$$a, b \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset:. u \varepsilon bfa . = : x \varepsilon a . \supset_x . ux \varepsilon b$$

Termin „funkcja" ma w matematyce często znaczenie wyżej podane. Z definicji podanej wynika, że jeżeli u przekształca klasę a w klasę b i jeżeli c jest podklasą klasy a, to u przekształca też c w pewne b. Znak funkcyjny nie jest ściśle związany z zakresem, w którym funkcja jest określona, a więc z zakresem zmienności; możemy bowiem zakres ten zwęzić lub rozszerzyć. Dlatego nie można mówić o równości dwu funkcyj. Dwie funkcje mogą dawać identyczne wyniki w pewnym zakresie, a rożne w innym. Jeżeli postępujemy tak, to termin „funkcja" odnosi się do układu $(u; a)$, gdzie symbol $(m; n)$ oznacza układ, składający się z dwu przedmiotów m, n; wtedy jest u funkcją zdefinjowaną powyżej, a zaś zakresem zmienności. Peano mówi wtedy o funkcji określonej i oznacza ją przez F albo Funct. Mamy więc definicje:

$$a, b \varepsilon \mathrm{Cls}. u \varepsilon b f a . x \varepsilon a . \supset . (u; a) x = ux,$$

$$a, b \varepsilon \mathrm{Cls}. u \varepsilon b f a . \supset . \mathrm{Variab}\, (u; a) = a,$$

$$a, b \varepsilon \mathrm{Cls}. \supset . b \mathrm{F} a = v \ni \{\exists\, b f a \frown u \ni [v = (u; a)]\}$$

Definicje te wyrażamy słowami w ten sposób:

Jeżeli a i b są klasami liczb, jeżeli u jest znakiem przedfunkcyjnym, przekształcającym każdą z liczb a na jakąś liczbę z b i jeżeli x należy do a, to przez $(u;\, a)x$ oznaczamy wartości $u\,x$.

Jeżeli a i b są klasami liczb i jeżeli u jest znakiem przedfunkcyjnym, przekształcającym każdą z liczb a na jakąś liczbę z b, to zakresem zmienności $(u;$ a) jest klasa a wartości zmiennej niezależnej.

Jeżeli a i b są klasami, to funkcją określoną liczb a nazywamy każdy przedmiot v, dający się przedstawić w postaci $v = (u;\, a)$, gdzie u jest jakimś znakiem przedfunkcyjnym, przekształcającym każdą z liczb a na jakąś liczbę z b.

Oczywiście, że wszystko, co mówiliśmy o funkcjach, określonych zapomocą znaku przedfunkcyjnego, odnosi się także analogicznie i do funkcyj, określonych zapomocą znaku pofunkcyjnego.

„Funkcję określoną" można zdefinjować również i bez pojęcia f. Musimy jednak wprowadzić wtedy pojęcie, które oznaczamy symbolem $a{:}\,b$, gdzie a i b są klasami, $a{:}\,b$ oznacza zbiór dwójek $x;\, y$, dla których x jest elementem klasy a, zaś y elementem klasy b. Zbiór ten jest różny od djady $a;\, b$, która jest układem, utworzonym z klas a i b. Definicja funkcji określonej F ma wtedy postać

$$b\,\mathrm{F}\,a = \mathrm{Cls}'(b\,{:}\,\mathrm{a}) \frown u \ni \{x \,\varepsilon\, a \,.\supset_x .\, \exists y \ni [(y;\, x) \,\varepsilon\, u]:$$

$$x \,\varepsilon\, a .\, (y;\, x) \,\varepsilon\, u .\, (z;\, x) \,\varepsilon\, u .\, \supset_{x,y,z}\, y = z\}$$

Jeżeli a i b są klasami, to $b\,\mathrm{F}\,a$ oznacza każdą relację między b i a tego rodzaju, że każdemu a odpowiada jedno jedyne b.

Przechodzę do badań Peany w poszczególnych dziedzinach analizy wyższej. Referuję chronologicznie:

Już w traktacie o rachunku różniczkowym i całkowym, Genochiego, który opracował Peano[36]) należy zanotować cały szereg samodzielnych jego badań: Prawo dla

---

[36]) **7.**

granicy funkcyj, przyjmujących postać $\frac{\infty}{\infty}$; dowód twierdzenia, że każda funkcja ciągła wielu zmiennych ma maximum i minimum w odpowiednim zakresie zmienności (twierdzenie to udowodnił Weierstrass dla funkcyj jednej zmiennej); przykład funkcji dwu zmiennych, która jest ciągła wzdłuż każdej prostej płaszczyzny, ale nie jest ciągła na całej płaszczyźnie; uogólnienie twierdzenia o wartości średniej; dowód istnienia i różniczkowalności funkcyj uwikłanych; warunki przemienności pochodnych cząstkowych; warunki wyrażenia funcyj wielu zmiennych zapomocą twierdzenia Taylora; całkowanie funkcyj wymiernych, w przypadku, gdy nie znamy pierwiastków mianownika; wyrażenie analityczne funkcji, która dla x wymiernego ma wartość 0, dla x niewymiernego wartość 1. Funkcję tę badał już Dirichlet[37]), lecz nie zdołał nadać jej formy analitycznej. Wyrażenie analityczne tej funkcji ma według Peany postać:

$$x \varepsilon r . \supset . \lim [\beta (n! x) + \beta (-n! x)] \mid n = \lim (\operatorname{sgn} \beta n! x) \mid n = 0,$$

$$x \varepsilon q - r . \supset . \lim [\beta (n! x) + \beta (-n! x)] \mid n = \lim (\operatorname{sgn} \beta n! x) \mid n = 1.$$

W pracy o całkowalności równań różniczkowych pierwszego rzędu[38]) spotykamy się z twierdzeniem, że każde równanie różniczkowe $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, w którem $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą, ma przynajmniej jedno rozwiązanie, które dla $x = a$ przyjmuje wartość b; poza tem może ono posiadać inne rozwiązania. Twierdzenie to, które Peano podał w r. 1886, udowodnił potem jeszcze raz Perron, przyznając pierwszeństwo Peanie.

W pracy o całkowaniu równań różniczkowych linjowych zapomocą szeregów podaje Peano[39]) rozwiązanie każdego układu linjowych równań różniczkowych o zmiennych spółczynnikach zapomocą szeregów. Szeregi te są analogiczne do wykładniczych. Metoda ta jest znana jako metoda przy-

[37]) Werke, I, str. 132.

[38]) 8.

[39]) 9.

bliżeń stopniowych. Później w r. 1890 metodę tę odkrył Picard. W pracy o wrońskjanach[40]) wykazuje Peano, że wyznacznik Wrońskiego może być równy 0, a jednak funkcje nie pozostają w zależności linjowej. Tylko dla funkcyj analitycznych jest warunek ten wystarczający[41]). Wspomnieć należy następnie o krytyce twierdzenia Serreta o wpisanych powierzchniach wielościanowych[42]). Krytykę tę potwierdzili później Schwarz i Hermite.

Za największą jednak chlubę Peany uważam w dziedzinie analizy wyższej, a zarazem teorji mnogości, udowodnienie twierdzenia, że istnieją krzywe, które zapełniają całą i dowolną część płaszczyzny, a nawet przestrzeni n- wymiarowej[43]). Peano wyraża to twierdzenie w następujący sposób symbolicznie:

$$n \varepsilon N_1 . \supset . \exists (C x n \mathrm{f} q) \,\mathrm{cont} \frown \mathrm{f} \ni (f' q = C x n)$$

Hausdorff, jeden z najlepszych znawców teorji mnogości wyraża się w swych zasadach teorji mnogości: „das ist eine der merkwürdigsten Tatsachen der Mengenlehre, deren Entdeckung wir G. Peano verdanken“ [44]). Twierdzenie to wykazuje, że niema różnicy zasadniczej — ze stanowiska teorji mnogości — między linją a przestrzenią, a więc i powierzchnią. Wspomniana wyżej praca Peany stała się punktem wyjścia dla wielu innych prac, które posunęły walnie naprzód nasze wiadomości o podstawach geometrji i o pewnych własnościach mnogości[45]).

[40]) **16**, **84**. Por. Wroński, Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Langrange, 1812; Dickstein, Bibl. math., (2), 6,50 (1892).

[41]) Por. Bôcher, Trans. Amer. Math. Soc., 139 (1901); D. R. Curtiss, Math. Annalen, 63, 282 (1908).

[42]) **22**.

[43]) **23**.

[44]) Grundz. der Mengenlehre, 1914, str. 369.

[45]) Hilbert (Math. Annalen, 1891); Cesaro (Bull. de Darboux, 1897, XXI, str. 257); Moore (Amer. Trans., 1900, str. 72); Lebesgue (Léçons sur l'integration, 1904, str. 45). Por. nast. prace Andreoliego, Broglia, Van Vlecka, Jürgensa, Mazurkiewicza, Rosenthala, Schoenfliesa, Sierpińskiego, Picarda.

W r. 1892 wydał Peano małą rozprawkę o funkcjach monotonnie rosnących i nieciągłych w każdym przedziale [46]).

Mimo, że Peano zajmował się bardzo często badaniami szczegółowemi, zawsze jednak pociągało go przedewszytkiem badanie podstaw. Widzieliśmy to w logice, arytmetyce, a nawet analizie wyższej. To samo rzuca się nam w oczy w dziedzinie geometrji [47]). Jak w arytmetyce dał nam on idealnie prosty układ pewników, tak i w geometrji osiągnął on nadzwyczajną przejrzystość, opierając się na pojęciu punktu i równości dwu wektorów. Muszę tutaj zwrócić uwagę na to że, Peano nie był intuicjonistą lecz lgnął zawsze do rachunku abstrakcyjnego. Dlatego też nie poszedł on w kierunku np. Kleina, czy Hilberta, którego układ pewników geometrji jest wprawdzie abstrakcyjny, związany jednak z intuicją (mimo sztucznego nieco wyrażania się), lecz mówi wprost:

I. p albo pnt oznacza „punkt".
II. p jest klasą.
III. Istnieje punkt.
IV. Jeżeli a jest punktem, to istnieje punkt różny od a
V. Jeżeli a, b, c, d, są punktami, to $a - b = a - b$.
VI. Jeżeli $a - b = c - d$, to z tego wynika że $c - d = a - b$.
VII. Jeżeli $a - b = c - d$, $c - d = e - f$, to z tego wynika $a - b = e - f$.
VIII. Jeżeli $a - b = c - d$ to $a - c = b - d$.
IX. Jeżeli $a - c = b - c$, to $a = b$.
X. Istniej punkt x taki, że $x - a = b - c$.

Symbol $a - b$ oznacza wektor, jako różnicę dwu punktów; pojęciem jednak zasadniczem jest *u* Peany równość wektorów.

Następująca grupa pewników:

XI. $$m \varepsilon N_1 . mu = 0 . \supset . u = 0,$$

[46]) **44**.

[47]) Prace Peany, dotyczące podstaw geometrji: **10**, **13**, **17**, **29**, **29'**, **47**, **54**, **55**, **57**, **82**, **82'**, **82''**, **87**, **102**, **110**, **203**, oraz Formulario.

gdzie u jest wektorem, zaś mu iloczynem liczby i wektora. Jeżeli V oznacza wektor to mamy następnie

XII. $\exists V \frown v \ni (mv = u)$.

Podane pewniki I — XII są od siebie niezależne [48]). Zapomocą pewników I — XII można określić i zbadać wiele figur geometrycznych; nie można jednak zdefinjować pojęcia odległości dwu punktów. Aby to uskutecznić, wprowadza P e a n o pojęcie iloczynu wewnętrznego, czyli skalarowego dwu wektorów u, v; pojęcie to oznaczamy symbolem $u \times v$. Jak wiadomo jest

$$u \times v = \text{mod } u \times \text{mod } v \times \cos (u, v).$$

Mamy zatem dla wektorów $u \times v$ prostopadłych $u \times v = 0$. Pewniki, odnoszące się do pojęcia iloczynu wewnętrznego dwu wektorów, są następujące:

XIII. $u \times v \,\varepsilon\, q$;

q, jak wiadomo, oznacza liczbę rzeczywistą.

XIV. $u \times v = v \times u$,

XV. $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$;

$u + v$ oznacza sumę dwu wektorów. Pewnik ten wyraża, że rzut sumy $u + v$ na w równa się sumie rzutów wektorów u i v. Jeżeli przez V oznaczymy wektor, będziemy mieli dalszy pewnik

XVI. $u \,\varepsilon\, V - \iota 0 . \supset . u^2 \,\varepsilon\, Q$.

Z poprzedniego wynika, że istnieje rachunek geometryczny, analogiczny do algebraicznego; każda równość stopnia drugiego odpowiada jakiemuś twierdzeniu geometrji.

Dalsze pewniki:

XVII. $x \,\varepsilon\, q - r . u \,\varepsilon\, V . \supset . xu \,\varepsilon\, V$

---

[48]) **119**, str. 166-7, 170.

$$\text{XVIII.} \quad i \varepsilon V - \iota 0 . \supset . \exists V - (q i).$$

$$\text{XIX.} \ i \varepsilon V - \iota 0 . j \varepsilon V - (q i) . \supset . \exists V - (q i + q j).$$

$$\text{XX.} \ i \varepsilon V - \iota 0 . j \varepsilon V - (q i) . k \varepsilon V - (q i + q j) .$$

$$\supset . V = q i + q j + q k;$$

$q i$ oznacza wektor równoległy do i, $q i + q j$ wektor komplanarny z wektorami i, j. Ostatni pewnik wyraża, że przestrzeń badana ma trzy wymiary.

Na podstawie tych pewników rozwija Peano geometrję metryczną euklidesową łącznie z trygonometrją. Buduje następnie na tych fundamentach teorję kwaternjonów, przyczem utrzymuje stale łączność z teorjami Grassmanna i Möbiusa, oraz z pojęciami fizyki.

Oto niektóre najważniejsze punkty:

$$u \varepsilon V . \supset . \operatorname{mod} u = \sqrt{(u^2)};$$

określenie wartości bezwzględnej wektora.

$$a, b \varepsilon \mathrm{p} . \supset . d(a, b) = \operatorname{dist}(a, b) = \operatorname{mod}(b - a);$$

jest to określenie odlagłości dwu punktów a, b.

Definicja prostej przez punkt a i równoległej do wektora u:

$$a \varepsilon \mathrm{p} . u \varepsilon V - \iota 0 . \supset . \operatorname{recta}(a, u) = a + q u .$$

Definicja prostej w ogóle (p_2):

$$p_2 = x \ni \{ \exists \ (a, u) \ni [a \varepsilon \mathrm{p} . u \varepsilon V - \iota 0 . x = \operatorname{recta}(a, u)] \}.$$

Definicja płaszczyzny określonej punktem a i dwoma wektorami u, v:

$$a \varepsilon \mathrm{p} . u \varepsilon V - \iota 0 . v \varepsilon V - q u . \supset . \operatorname{plan}(a, u, v) = a + q u + q v:$$

Definicja płaszczyzny w ogóle (p_3):

$$\mathrm{p}_3 = x \ni \{\exists (a, u, v) \ni [a \varepsilon p . \, u \varepsilon V - \iota 0 . \, v \varepsilon V - q u . \, [x =$$

$$= \text{plan}\,(a, u, v)\,]\,\}.$$

W symbolice Peany znane twierdzenia geometryczne otrzymują bardzo prostą postać. Np.

$$(a - b)^2 = (a - c)^2 + (b - c)^2 + 2\,(a - c) \times (c - b)$$

(znane twierdzenie Euklidesa lub Carnota).

Podstawy geometrji badał Peano nie tylko z pomocą pojęcia wektora. Już w r. 1889, w jednej ze swych pierwszych prac[49]) buduje on geometrję na podstawie pojęcia punktu i odcinka, przyczem posługuje się już swojemi symbolami logiki i geometrji, tak, że cały traktat opracowany jest symbolicznie. Jest to geometrja położenia. W tym względzie zbliża się Peano do badań Pascha[50]); podczas, gdy jednak Pasch przyjmuje dla tej geometrji pojęcia podstawowe: punkt, odcinek i ograniczoną część płaszczyzny, odrzuca Peano to ostatnie pojęcie, definjując płaszczyznę. Definicję tą uzyskuje Peano w następujący sposób. Przedstawiam sprawę krótko, bez użycia symboliki.

Punkty oznaczamy małemi literami alfabetu łacińskiego. Jeżeli a, b są punktami, oznacza $a\,b$ klasę punktów, a mianowicie odcinek określony punktami a, b. Symbol $a'b$ oznacza zbiór punktów x, takich, że jest $b \,\varepsilon\, a\,x$. Jest to więc przedłużenie odcinka $a\,b$ poza b. Następnie jeżeli a jest punktem, aK klasą punktów, to aK oznacza figurę, składającą się z odcinków, łączących a z każdym punktem klasy K, a więc zbiór punktów tych odcinków. Analogicznie oznacza a'K zbiór punktów, leżących na przedłużeniach odcinków aK od strony K, zaś aK$'$ zbiór punktów leżących na przedłużeniach odcinków aK od strony a. Wprowadza Peano następnie pojęcia HK, H$'$K, HK$'$, gdzie H i K są klasami punktów.

[49]) **17.**

[50]) Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882.

HK oznacza więc zbiór punktów odcinków między punktami H a punktami K. Analogicznie H'K i HK'. Odcinki H i K nie muszą być różne. Możemy więc tworzyć pojęcia HH, H'H = HH' (ponieważ według jednego z pewników Peany jest $ab = ba$; w tym systemie geometrji Peano nie wprowadza pojęcia zwrotu czyli orjentacji). Otóż kładziemy teraz H'' = HH'

$$x = (ab)''.$$

Trzy punkty a, b, c nazywamy kolinearnemi, jeżeli leżą na jakiejś prostej r. Jeżeli a, b, c są punktami niekolinearnemi, to symbol abc oznacza trójkąt, jako zbiór punktów jego wnętrza. Zatem zbiór punktów x, spełniających równość

$$x - (abc)'',$$

gdzie a, b, c nie są kolinearne jest płaszczyzną.

W tej grupie definicyj określa Peano jeszcze figurę wypukłą: jest to zbiór punktów, mających tę własność, że każdy odcinek, łączący dwa dowolne punkty tej figury zawiera tylko punkty, należące do niej.

Aby skonstruować całą geometrję elementarną, wprowadza Peano jeszcze podstawowe pojęcie ruchu, podobnie jak Pasch[51]).

M. Pieri badając od r. 1897 podstawy geometrji[52]), przyszedł do przekonania, że cała geometrja elementarna da się zbudować na podstawie dwu pojęć, punktu i równoodległości dwu punktów a, b od trzeciego c. Taki system geometrji zbliża się najbardziej do propagowanego przez Leibniza w jego „Characteristica geometrica"[53]). W rozprawce,

---

[51]) **55.**

[52]) Memorie Accad. delle Scienze di Torino, 1897—8; Sur la géometrie envisagée... (Cogr. Int. de Philess, Paris, 1900, t. III, str. 386 n.); Memorie Accad. dei XL, Roma, 1908.

[53]) Math. Schr. wyd. Gerhardt, II, str. 20 — 25. Por. także moje prace: Characteristica geom. Leibniza, Wiad. Mat., XVII, także osobno, Warszawa, 1913; O alg. Logiki, Wiad. Mat. XXX — XXXI, str. 36 — 41; Über Relativfunktionen u. Relativgleichungen, Monatshefte f. Math. u. Physik, XXXVIII, 1931, str. 159 — 166.

wydanej w r. 1902 sprowadza Peano ten system geometrji do swego, opartego na pojęciu punktu i wektora[54]). Określa najpierw pojęcie punktu środkowego dwu punktów a, b.

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{p} . \supset . (a+b)/2 = \iota \mathrm{p} \frown x \ni [d(x, a) = d(x, b):$$

$$y \,\varepsilon\, \mathrm{p} . d(y, a) = d(x, a) . d(y, b) = d(x, b) . \supset_y . y = x.$$

Równość dwu wektorów definjuje się potem w następujący sposób:

$$a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{p} . \supset : a - b = c - d . = . (a+d)/2 = (b+c)/2.$$

Te definicje pochodzą z r. 1908 (Formulario V). W r. 1902 określenia te nieco są odmienne; Peano definjuje tam najpierw pojęcie prostej przez dwa punkty:

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{p} . a -= b . \supset . \text{recta}\,(a, b) = \mathrm{p} \frown x \ni [y \,\varepsilon\, \mathrm{p} . d(y, a)$$

$$= d(x, a) . d(y, b) = d(x, b) . \supset_y . y = x],$$

i płaszczyzny przez trzy punkty:

$$a \,\varepsilon\, p . b \,\varepsilon\, p - \iota a . c \,\varepsilon\, p - \text{recta}\,(a, b) . \supset . \text{plan}\,(a, b, c)$$

$$= p \frown x \,\varepsilon\, [y \,\varepsilon\, p . d(y, a) = d(x, a), d(y, b)$$

$$= d(x, b) . d(y, c) = d(x, c) . \supset_y . y = x].$$

Wtedy punkt środkowy punktów a, b a mianowicie $(a+b)/2$ definjujemy w następujący sposób:

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{p} . a -= b . \supset . (a+b)/2$$

$$= \iota\, \text{recta}\,(a, b) \frown x \ni [d(x, a) = d(x, b)], a \,\varepsilon\, \mathrm{p}, \supset . a$$

$$+ a)/2 = /a.$$

Równość dwu wektorów zaś określamy w ten sposób:

$$a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{p} . \supset : a - b = c - d . = . (a+d)/2 = (b+c)/2.$$

[54]) **102**; por. też **119**, str. 177.

Możnaby teraz postępować w konstrukcji systemu geometrji tak, jak w systemie Peany, opartym na pojęciu punktu, równości dwu wektorów, oraz iloczynu wewnętrznego wektorów. Możliwa jest jednak i odmienna droga. Określamy najpierw równość bezwlędnych wartości dwu wektorów:

$$u, v \varepsilon V. \supset .: \operatorname{mod} u = \operatorname{mod} v. =. a \varepsilon \mathrm{p}. \supset_a d(a, a + u)$$
$$= d(a, a + v).$$

Wynika z tego

$$a, b \varepsilon \mathrm{p}. \supset . d(a, b) = \operatorname{mod}(b - a).$$

Następnie definjujemy prostopadłość dwu wektorów u, v, którą oznaczamy symbolem $u \times v = 0$:

$$u, v \varepsilon V. \supset .: u \times v = 0. =. a \varepsilon p. \supset_a. d(a + u, a +$$
$$+ v) = d(a + u, a - v).$$

Wspomnieć należy tutaj jeszcze o pracy Cesariny Boccalatte, ogłoszonej w r. 1928 pod wpływem Peany[55]) Boccalatte tworzy system geometrji, oparty na pojęciach punktu i kąta prostego. Z pomocą tych pojęć można określić łatwo płaszczyznę. Będzie to płaszczyzna, prostopadła do odcinka bc, przechodząca przez b:

$$b - = c. \supset : a \varepsilon \text{ plan } ba. = . abc \text{ recto},$$

jeżeli abc recto oznacza, że kąt abc jest prosty. Także powierzchnia kuli da się łatwo zdefinjować, jako zbiór punktów b takich, że abc jest kątem prostym:

$$b \varepsilon \text{ sphaer } ac. = . abc \text{ recto}.$$

Prostą można teraz określić w różny sposób. Podajemy definicję następującą: $c \varepsilon \text{ recto } ab = c = a \smile \text{plan } ab = \text{plan } ac.$

---

55) **203.** Por. str. 51: „Dietro suggerimento del. prof. Peano, qui spiego come si possano definire tutte le idee geometriche, mediante due idee che assume come primitivo: punto e angolo retto".

Opierając się na tych definicjach, oraz na definicji prostokąta:

$$(a\,b\,c\,d)\ \text{rectang.} = .\ \text{sphaer}\ a\,c = \text{sphaer}\ b\,d$$

możemy określić środek między a i b:

$$c = (a+b)/2. =: x, y \varepsilon p.\ (a\,x\,b\,y)\ \text{rectang.}\ \supset_{x,\,y}.\ (xyc)\ \text{collin.}$$

Wobec tego równość dwu wektorów określamy tak jak we Formulario V (str. 177):

$$a - b = c - d. = .\ (a + d)/2 = (b + c)/2.$$

Jak widzimy, wszystkie badania Peany nad podstawami geometrji i nad jej rozwinięciem zwracają się zawsze do metody opartej na wektorach. Metoda ta zapoczątkowana przez Bellavitisa (1832) a rozwinięta przez Grassmanna (1844), Hamiltona (1845) i i. ma, jak wiadomo, liczne zastosowania, nie tylko w geometrji, ale i w fizyce. Peano udoskonalił tę metodę znacznie. Podczas gdy u Grassmanna spotykamy się z zawiłym rachunkiem macierzy i wyznaczników, operuje Peano prostemi utworami geometrycznemi, punktem, prostą i płaszczyzną i wprowadza dla wektorów działania znane w arytmetyce i analizie: sumę, różnicę, iloczyn, granicę, pochodną, całkę i t. p.

Dla zilustrowania tej metody podajemy jeszcze twierdzenia, odnoszące się do objętości i powierzchni elipsoidy, oraz do środka ciężkości równoległoboku.

$$o \varepsilon \text{p.}\ i, j, k \varepsilon \text{V.}\ i^2 = j^2 = k^2 = 1.\ i \times j = j \times k = k \times i = 0.$$

$$a\,b\,c \varepsilon Q.\ a \gtreqless b \gtreqless c.\ \supset.\ \text{Volum}\ \{(o + x_1 i + x_2 j$$

$$+ x_3 k)\ |\ x^1 C x 3 \frown x 3\ [(x_1\ |\ a)^2 + (x_2\ |\ b)^2 + (x_3\ |\ c)^2 \leqq 1]\}$$

$$= 4\pi\,a\,b\,c/3.$$

Jest to twierdzenie o objętości elipsoidy.

$$o \varepsilon p,\ i,\ j,\ k \varepsilon V.\ i^2 = j^2 = k^2 = 1.\ i \times j = j \times k = k \times i = 0.$$

$$a\,b\,c \varepsilon Q.\ a \gtreqless b \geqq c.\ E(a,\ b,\ c) = \text{area}\ \{(o + x_1 i$$

$$+ x_2 j + x_3 k) \mid x' C x 3 \frown x 3\ [(x_1 \mid a)^2 + (x_2 \mid b)^2$$

$$+ (x_3 \mid c)^2 = 1]\}.\ E_1(a, b, c) = 4\pi a b.\ E_2(a,\ b,\ c)$$

$$= 4\pi b(a + c)/2.\ E_3(a,\ b,\ c) = 4\pi(a b + a c$$

$$+ b c)/3.\ \supset.\ E_1(a,\ b,\ c \gtreqless E(a,\ b,\ c) \gtreqless |2\ E_1(a,\ b,\ c).$$

$$E(a,\ b,\ c) > 43/48\ E_2(a,\ b,\ c).\ 4/15\pi b(a - c)^2 \mid$$

$$c \gtreqless E(a,\ b,\ c) - E_3(a,\ b,\ c) \gtreqless |5\pi b(a - c)^2| \ c.$$

Jest to twierdzenie o powierzchni elipsoidy, podające przybliżenia tej powierzchni [56]). Wiadomo przytem, że jest

$$E = \int \sqrt{b^2\ c^2\ X^2 + c^2\ a^2\ Y^2 + a^2\ b^2\ Z^2}\ d\,\omega,$$

gdzie mamy

$$x = a \sin \Theta \cos \psi = a X, y = b \sin \Theta \sin \psi = b Y,$$

$$z = c \cos \Theta = c Z,\ d\omega = \sin \Theta\, d\Theta\ d\psi.$$

Twierdzenie o środku ciężkości równoległoboku ma u P e a n y postać;

$$o \varepsilon p.\ u,\ v \varepsilon V.\ \supset.\ G(o + \Theta u + \Theta v) = o + (u + v)/2;$$

o jest wierzchołkiem równoległoboku, u, v bokami [57]).

Rachunek geometryczny, wykształcony przez P e a n ę, stał się punktem wyjścia dla wielu ważnych prac, jak np.

[56]) **27**. **119**. str. 445.

[57]) **119**. str. 446.

Burali-Fortiego, Boggia, Botassa, Pieriego, Marcolonga i i.

Z badań Peany, które przedstawiliśmy dotychczas, można wywnioskować, że umysł jego wykazuje wielkie podobieństwo z umysłem Leibniza Ta sama wszechstronność, ta sama inklinacja do symbolizmu, i jak się później przekonamy, do języka międzynarodowego. Nawet co do treści możemy Peanę zestawić z Leibnizem, a mianowicie w badaniach podstaw logiki i geometrji. Dlatego naturalnem wydaje się, że Peano zachęcił swego ucznia i długoletniego asystenta (1898—9, 1900—1902, 1903—1005) G. Vacca do zbadania rękopisów Leibniza w Hanowerze. Wynik tych badań był nader ciekawy. Pokazało się, że już Leibniz znał wiele twierdzeń logiki symbolicznej, że on właściwie był jej twórcą. Odpowiednie fragmenty logiki symbolicznej, Leibniza, wydobyte z niepamięci przez tego matematyka, ogłoszone zostały w Formulario, a Couturat ogłosił je w pełniejszej postaci później, zachęcony temi badaniami [58]).

Wspomnieliśmy przed chwilą, że Peano, podobnie jak i Leibniz, przywiązywał wielką wagę do symboliki w matematyce. I słusznie, gdyż symbolika jest istotną właściwością matematyki [59]). Peano wyraził się raz, że „symbolika pozwala uczniom szkół średnich rozwiązywać łatwo zagadnienia, które ongiś mogły rozwiązać tylko potężne umysły Euklidesa i Diofanta".

Jeśli chodzi o symbolizowanie matematyki, to Peano jest bezsprzecznie pierwszym, który dzieła tego dokonał. Wprowadził symbole logiki, które tworzą podstawę zupełnej symboliki dyscyplin matematycznych. Uzupełnił następnie i uprościł symbolikę matematyki. Wreszcie utworzył nadzwyczaj prostą symbolikę w geometrji, a w ten sposób osiągnął to, do czego dążyli Leibniz, Hérigone (1634), Carnot (1801), Möbius, Grassmann, Hamilton i i.

---

[58]) Opuscules et fragmentes inédits de Leibniz, 1903.

[59]) Por. moją pracę „Czem jest i czem będzie matematyka?", Wiad. Mat., XIV, 1910, str. 181—196; Praesente et futuro de mathematica, Acad pro Interlingua, Torino, 1926, str. 8 — 10.

Potężny umysł Peany stworzył sobie w zakresie matematyki odrębną szkołę, znaną pod nazwą szkoły włoskiej. U. Cassina, jeden z najbliższych uczniów Peany, wymienia ze szkoły włoskiej, między innymi, następujących uczonych [60]). Włosi: R. Bettazzi, C. Boccalatte, T. Boggio, A. Borio, C. Burali-Forti, U. Cassina, P. Chinaglia, M. Cibrario, M. Cippola, G. Fano, R. Frisone, F. Giudice, A. Padoa, G. Pagliero, M. Pieri, G. Vacca, G. Vailati, E. Viglezio, G. Vivanti i i., Anglicy: H. Jourdain, B. Russell, A. N. Whitehead, Amerykanie: E. Huntington, E. H. Moore, O. Veblen, Francuz: L. Couturat. Z Polaków wymienia Cassina autora niniejszego artykułu.

Gdy spisywałem niniejsze zestawienie prac Peany, przyszło mi na myśl, aby się przekonać, do jakiego wieku miał Peano wybitnie twórcze myśli. Jeśli chodzi o matematykę, to zestawiając prace Peany, doszedłem do wniosku, że ostatnie wybitnie twórcze prace z zakresu matematyki ogłosił on na przełomie XIX i XX wieku. Wtedy ukazało się jego „Analisi della teoria dei vettori" [61]). Później ogłaszał tylko prace syntetyzujące, jak np. Formulario V, oraz prace z zakresu rachunku liczbami przybliżonemi. Prace o krzywej zapełniającej całą płaszczyznę albo przestrzeń n- wymiarową ogłosił Peano w r. 1890, mając 32 lata. W r. 1900 miał lat 42. Po roku 1900 zajmuje się Peano intenzywnie filologją, podobnie jak H. Grassmann.

Peano był nietylko wielkim uczonym, lecz także wielkim pedagogiem. Najlepszym dowodem jest wielka liczba jego uczniów, którzy zajęli pierwsze miejsca wśród uczonych. Pamiętał on o każdym ze swoich uczniów i zwolenników; i chociaż nieraz nie mógł obcować z nimi osobiście, utrzymywał kontakt listownie.

Prac ogólnych z zakresu pedagogiki, czy dydaktyki Peano nie wydawał. Jego uwagi ogólne, tyczące się dy-

[60]) Schola et Vita, Medjolan, VII, 1932, str. 124, 121, 123.
[61]) **89.**

daktyki matematyki, czy nawet wychowania w ogóle, spotykamy w pismach popularnych z zakresu matematyki [62]).

Szczegółowych prac z dydatyki matematyki ogłosił sporo [63]).

Peano starał się, aby matematyka była dla uczniów nie martwą nauką, lecz żywem źródłem entuzjazmu. Dlatego polecał zawsze — i sam to czynił — oprzeć naukę matematyki, poza rzeczywistą teorją, na wiadomościach z historji oraz zastosowaniach praktycznych. Zwraca Peano nawet uwagę na to, że i objaśnienia lingwistyczne wpływają dodatnio na przyswojenie sobie prawd matematzcznych

Oczywiście na pierwszem miejscu musi być ścisłość, prostota i jasność. Temi też trzema hasłami kierował się on w swych badaniach naukowych. O ścisłości w matematyce wyraża się on w jednej ze swych prac w następujacy sposób: [64]).

„Il rigore matematico è molto semplice. Esso sta nell' affermare tutte cose vere, e nel non affermare cose che sappiamo non vere. Non sta nell' affermare tutte le verità possibili. La scienza, o la verità, è infinita; noi non ne conosciamo che una parte finita, e infinitesima rispetto al tutto. E. della scienza che conosciamo, noi dobbiamo insegnare solo quella parte che è maggiormente utile agli alunni". O stosunku nauczyciela do wychowanka wypowiedział się Peano dosadnie w swej przemiłej książeczce „Giochi di aritmetica e problemi interessanti" [65]): La differenza fra noi e gli allievi affidati alle nostre cure sta solo in ciò, che noi abbiamo percorso un più lungo tratto della parabola della vita. Se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare. Nè vale addossare la responssabilità alle scuole inferiori. Dobbiamo prendere gli allievi come sono, e richiamare ciò che essi hanno dimenticato, o studiato sotto altra nomenclatura. Se l'insegnante tormenta i suoi alunni, e invece di cattivarsi il loro amore, eccita odio con-

[62]) Np. **123. 187.**

[63]) **103. 152. 155. 175. 181. 183. 184. 186. 187. 193. 194. 201. 211.**

[64]) **123.**

[65]) **187.**

tro sè e la scienza che insegna, non solo in suo insegnamento sarà negativo, ma il dover convivere con tanti piccoli nemici sarà per lui un continuo tormento".

Peano jest zwolennikiem uczenia matematyki na najniższym stopniu przez zabawę, podobnie jak we Francji Laisant i Lucas. Dlatego też wydał swoje „Giochi di aritmetica". Zawsze zachęcał mnie w listach, abym w tym kierunku pracował. Ponieważ jestem zwolennikiem tego kierunku, pozwolę sobie zacytować odpowiednie miejsca z prac Lucasa i Laisanta, które przytacza również Peano w swych „Giochi", a może w ten sposób zwrócę uwagę na możliwy a u nas nie wyzyskany sposób uczenia matematyki na stopniach niższych.

Lucas mówi trafnie [66]): Pour apprendre à notre écolier la multiplication, gardons nous bien de lui faire réciter, sur un ton dolent et monotone, deux fois deux font quatre deux fois trois font six...; ce serait donner à ses facultés arithmétiques un enterrement de première classe. L'enfant doit construire la table lui-même".

Podobnie wyraża się Laisant [67]): „Attachez-vous à intéresser, à amuser l'énfant, ne lui faites rien apprendre par coeur".

Myślałby może kto, że Peano jako specjalista matematyk nie uznawał wartości pedagogicznej innych nauk. Tak jednak nie było. Swego czasu wyraził się on w następujący sposób: „Dobrze jest nie ograniczać studjów do sasamej matematyki; każda bowiem nauka jest piękna, jeśli zajmujemy się nią dla niej samej, a nie dla egzaminów lub zysku materjalnego".

Ze specjalnych zagadnień dydaktycznych wspomnieliśmy już o uczeniu pewnych działów matematyki na niższych stopniach przez zabawę. I tak poleca on uczyć dodawania przy pomocy kwadratów magicznych, dla których konstrukcji podaje proste prawidła [68]). Bardziej skomplikowa-

[66]) Arithmétique amusante. 1895.

[67]) Initiation mathématique. 1915.

[68]) **193.**

nych działań można uczyć przy pomocy zagadnień kalendarzowych, które przedstawiliśmy wyżej. W tym względzie pięknym zbiorem są wymieniane wyżej „Giochi". W pracach o działaniach wielkościami [69]) rozpatruje Peano między innemi następujące dwa sposoby wyrażania znanego twierdzenia, ze stanowiska ścisłości: „Powierzchnia prostokąta równa się iloczynowi podstawy i wysokości" i „miara powierzchni prostokąta równa się iloczynowi miary podstawy i miary wysokości". W pierwszym przypadku wykonywamy działania na wielkościach, w drugim na liczbach. Pierwsze sformułowanie twierdzenia możemy wyrazić symbolicznie w następujący sposób:

$$m.2 \times m.3 = m^2.6,$$

gdzie bokami prostokąta są $m.2$ i $m.3$. Peano uważa sformułowanie to, niezależne od jednostki miary, za zupełnie poprawne — wbrew poglądom niektórych matematyków — idąc za Euklidesem i Heronem, jeżeli przyjmiemy równość

$$m \times m = m^2.$$

Zresztą i fizyka używa stale pojęcia iloczynu wielkości.

Wiele cennych uwag dydaktycznych zawiera również notatka „I libri di testo per l'aritmetica", wydana w r. 1924 [70]), w której krytykuje Peano liczne nieścisłości, tautologiczne definicje, zbyteczne terminy i t. p. w podręcznikach szkolnych.

Prace Peany na polu filologji porównawczej wiążą się ściśle z jego pracami w dziedzinie matematyki. Działalność Peany jako filologa koncentrowała się na zagadnieniu języka miedzynarodowego i uwieńczona została stworzeniem takiego języka i to języka, według poglądu pierwszych znawców przedmiotu, dzisiaj najdoskonalszego.

---

[69]) Peano nazywa wielkościami długości, powierzchnie, objętości, czas, masę, i inne wielkości fizyczne. Por. **152**, **155**, **175**, **181**, **183**.

[70]) **186**.

Nie mam tu zamiaru uzasadniania potrzeby takiego języka. Zaznaczę tylko, że nadzwyczaj przyspieszony rozwój komunikacji w ostatnich czasach wytwarza sploty interesów międzynarodowych, których załatwienie wymaga wzajemnego porozumiewania się. Następnie powstanie mniejszych państw po wojnie światowej zmusza uczonych tych państw do posługiwania się nie swojemi, mało zrozumiałemi językami, lecz jak najbardziej rozpowszechnionemi; wtedy bowiem tylko dorobek kulturalny tych państw stanie się dorobkiem powszechnym.

Dawniej nie była kwestja języka międzynarodowego tak aktualna, jak obecnie. Historja poucza nas, że, w miarę wpływów politycznych zyskiwały pewne języki narodowe znaczenie języka międzynarodowego. Takiemi były język babiloński, perski, grecki, łaciński i francuski. Od XIX w. żaden z języków nie może się nazywać międzynarodowym. Wzrosła świadomość narodowa, która kazała cenić przedewszystkiem język ojczysty.

To kolejne odgrywanie roli języka międzynarodowego przez różne języki narodowe wykazuje, że języki narodowe nie będą mogły nigdy być stałemi językami międzynarodowemi; ich walor trwa bowiem tak długo, jak walor polityczny danego narodu i to niezależnie od liczby jednostek, mówiących danym językiem. Zjawia się więc potrzeba sztucznego języka międzynarodowego, oczywiście nie sztucznego a priori, utworzonego w postaci konglomeratu z różnych języków narodowych, lecz raczej uproszczonego do ostatecznych granic martwego języka narodowego, więc języka naturalnego, języka a posteriori.

Możliwość utworzenia takiego języka jest dzisiaj niezaprzeczalna. Przeczuwali taki język i byli jego zwolennikami między innymi Descartes, Leibniz, Kochański, Nietsche, Max Müller. Leibniz wypowiedział w tym względzie parę nadzwyczaj trafnych uwag. Należy opuścić wszystkie zbyteczne elementy gramatyczne. Konjugacja jest niepotrzebna, zbyteczne są liczba i osoba czasownika, gdyż są one zaznaczone w podmiocie. Sztuczne rodzaje rzeczowników należy znieść. Przymiotniki niekoniecznie muszą zgadzać się z rzeczownikiem w liczbie, przypadku i rodzaju. Deklinacja jest również zbyteczna, gdyż przypadki dadzą się zaznaczyć zapomocą przyimków. Przytaczam te uwagi Leibniza, aby wykazać później podobieństwo jego pomysłów w tym kierunku z pomysłami Peany.

W poszczególnych dziedzinach umysłowości ludzkiej jest dzisiaj międzynarodowa metoda porozumiewania się ustalona. Przykładami są: alfabet Morsego, morski kodeks sygnałów, zdjęcia topograficzne, nuty, nomenklatura botaniczna i zoologiczna, oznaczanie pierwiastków i reakcyj chemicznych, symbole matematyczne.

Badanie Peany nad językiem międzynarodowym wyrosły na gruncie jego badań nad symboliką matematyczną i logiczną, szczególnie na tym ostatnim. Pierwsze swoje pomysły ogłosił w r. 1903 [71]). Nazwał on swój język międzynarodowy „latino sine flexione". Jest to więc, jak wskazuje nazwa, łacina bez gramatyki.

Że chodzi o metodę bez gramatyki, to jasne. Gramatyka jest i będzie zawsze plagą uczących się każdego języka naturalnego. Należy więc zredukować gramatykę do minimum. Peano uskutecznił to w swoim języku „latino sine flexione", gdyż język ten, w którym pisał i który propagował, ma de facto tylko trzy reguły gramatyczne.

1. Akceptuje się każde słowo wspólne językom europejskim (głównym). Przyznam się, że punkt ten nie jest dla mnie zupełnie jasny. Dawniej, w czasie gdy Peano wydał swój drugi nakład „Vocabulario commune" (1915), pisał on (w swoim języku międzynarodowym) „omni vocabulo de interlingua es latino" [72]). Później, gdy w r. 1927 wydał zestawienie, obejmujące całokształt metody „latino sine flexione" pisze [73]): „Interlingua adopta omne vocabulo commune ad A. F. H. I. P. T. R." (litery oznaczają język angielski, francuski, hiszpański, włoski, portugalski, niemiecki,

[71]) **105**.

[72]) **149**, str. V.

[73]) **189**, str. 4.

rosyjski). Dawniej i w ostatnich czasach był Peano przytem przekonania, że „in generale, vocabulo latino es internationale, si habe derivatos in anglo".

W każdym razie dążył Peano do utworzenia słownika międzynarodowego, i chociaż zasady, na których go utworzył, nie są zupełnie bez zarzutu, pozostawił nam dzieło epokowe w tej dziedzinie. Jest to Vocabulario commune ad linguas de Europa" [74]). Słownik ten obejmuje w drugiem wydaniu przeszło 14000 słówek międzynarodowych. Zawiera on też skrupulatną etymologję oraz bardzo często wiek słówek. Około 1500 słówek jest wspólnych językom: łacińskiemu, angielskiemu, francuskiemu, hiszpańskiemu, włoskiemu, portugalskiemu, niemieckiemu i rosyjskiemu, około 14000 łacińskiemu i angielskiemu, a zarazem i innym.

2. Każde słowo międzynarodowe, pochodzące z łaciny, ma postać tematu łacińskiego (dla rzeczowników i w ogóle imion 6-y przyp. liczby pojedyńczej, rzadko przyp. 1, dla czasowników tryb rozkazujący).

3. Końcówka — s oznacza liczbę mnogą. Końcówka ta może być opuszczona po liczbie większej, od 1 i gdy liczba mnoga wynika z tekstu.

Jakżeż radzi sobie ten język z tak minimalną gramatyką? Używa on wszędzie tematów. Końcówek (z wyjątkiem — s dla liczby mnogiej) niema. Przypadki tworzy się przez dodanie przyimków: de, ad, pro, ab, in i t. d. Rodzajów gramatycznych niema, niema rodzajników, ani zgodności w liczbie, przypadkach, osobach, rodzajach. Niema też konjugacji z końcówkami. Czasy opisuje się. Np. me scribe= piszę, me jam scribe = pisałem, me i scribe albo me vol scribe = będę pisał (me = ja, scribe temat łacińskiego scribere = pisać, jam = już, i temat łaciński i-re = iść, vol temat łaciński chcieć). Opisuje się również tryby zapomocą si, que, ut i t. d.

[74]) **121**, pierwsze wydanie, pod tytułem: Vocabulario commune ad linguas de Europa, **149** wydanie II, pod tyt. Vocabulario commune ad latino-italiano-français-english-deutsch.

Przykład: Latino es lingua internationale ab tempore de imperio Romano, per toto medio aevo, et in scientia usque ultimo seculo. Mathematicos Leibniz, Newton, Euler, Gauss etc. scribe quasi semper in latino. Hodie quasi omne auctore scribe in proprio lingua nationale, id es, in plure lingua neolatino, in plure germanico, in plure slavo et in nipponico. Tale miltitudine de linguas, in labores de interesse commune ad toto humanitate, constitue magno obstaculo ad progressu.

Wybór języka łacińskiego, jako podstawy języka międzynarodowego, jest genialnem posunięciem, gdyż język ten jest najbardziej rozpowszechniony w świecie cywilizowanym, bądź bezpośrednio, bądź pośrednio, tkwiąc w wielu tematach języków narodowych. Każdy inteligentny człowiek rozporządza sporym zasobem tematów łacińskich. Z drugiej strony, gdybyśmy przyjęli na język międzynarodowy klasyczny język łaciński, obciążylibyśmy się niepotrzebnie trudną gramatyką. Z tego powodu upraszcza Peano łacinę do maximum.

Wspomnę jeszcze, że Peano nie uważa swego języka międzynarodowego za język zdolny do zastąpienia języków narodowych. Ma to być, według niego tylko język pomocniczy, odpowiedni przy porozumiewaniu się na terenie międzynarodowym.

Peano był od r. 1908 dyrektorem „Academia pro Interlingua", założonej jeszcze przez zwolenników volapüku w r. 1887. Sam zaczął w latino sine flexione ogłaszać wiele prac matematycznych i lingwistycznych od r. 1903 [75]). Akademja popiera badania języka międzynarodowego. Wydaje sporo publikacyj. Język latino sine flexione przyjął się w niektórych najpoważniejszych pismach naukowych, także u nas w Polsce. W Medjolanie (via E. Pagliano, 46 — Milano 137, Italia) wydaje N. Mastropaolo bardzo intesujący dwumiesięcznik „Schola et Vita", zamieszczający

[75]) Prace Peany z zakresu lingwistyki: **106. 109. 111. 115. 120. 121. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 130'. 132. 133. 135. 144, 144'. 145. 147. 148. 149. 154. 162. 177. 178. 179. 180. 189. 190. 190'. 190''. 191. 192. 199. 204. 205. 207. 208. 208'. 210. 212.**

artykuły naukowe syntetyczne ze wszystkich dziedzin, a zarazem pedagogiczne, przeważnie w latino sine flexione, ale także i w innych językach międzynarodowych, przeważnie opartych na słowniku międzynarodowym. „Schola et Vita" wychodzi już rok VII (w r. 1932). Nawet ostatnie międzynarodowe kongresy matematyków dopuściły dla referentów i dla dyskusji język latino sine flexione.

Z końcem roku 1930 ogłosił Peano bardzo ciekawą rozprawę „Algebra de gramatica" [76]), w której na podstawie swoistej symboliki i działań gramatycznych analizuje słówka międzynarodowe europejskie.

Peano był optymistą. Życie jego było proste, spokojne, pogodne. Był wielkim przyjacielem ludzi, prawdziwym demokratą. Lubił rozmawiać z biedakami, z dziećmi, i starał się być im zawsze pomocnym. Nigdy się nie wywyższał, lecz przeciwnie zachowywał się tak, aby na niego nie zwracano uwagi.

Miłował piękno przyrody, wieś, zwierzęta, zwłaszcza psy. W r. 1891 nabył skromną willę w Cavoretto koło Turynu z ogrodem i najchętniej mieszkał w niej wśród zieleni i kwiatów. Tylko w zimie przenosił się do mieszkania miejskiego. Pracował poza wykładami parę godzin dziennie, przerywając od czasu do czasu pracę na parę minut, aby porozmawiać z żoną lub przejść się po ogrodzie. Skromność i prostota życia odzwierciedliła się też w jego ubieraniu się i odżywianiu. Mleko, zupa, jarzyny, owoce, prosta legumina, wino i kawa oto dzienne menu. Lubiał też od czasu do czasu zapalić toskańskie cygaro.

Zachował do końca życia zdrowie i czerstwość. W przeddzień śmierci jeszcze pisał listy, oraz miał wykład na uniwersytecie.

Niżej podajemy kompletny spis dzieł, rozpraw i notatek Peany w porządku chronologicznym. Pisma oznaczone gwiazdką należą do zakresu lingwistyki. Zapomocą akcentów zaznaczone są tłumaczenia. Liczby rzymskie wskazują na prace w wydaniu książkowem.

---

[76]) **210.**

1. Construzione dei connessi (1, 2) e (2, 2), Accad. Torino, 1881, t. 16.
2. Un teorema sulle forme multiple, Accad. Torino, 1881, t. 17.
3. Formazioni invariantive delle corrispondenze, Giornale di Matem. di Battaglini, 1881, t. 20.
4. Sui sistemi di forme binarie di egual grado, e sistema completo di quante si vogliano cubiche. Accad. Torino, 1882, t. 17.
5. Sull'integrabilità delle funzioni, Accad. Torino, 1883, t. 18.
6. Sulle funzioni interpolari, Accad. Torino, 1883, t. 18.

I. 7. Angelo Genocchi, Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale, pubblicato con aggiunte da G. Peano, Torino, 1884, str. XXXII + 338.

I'. 7'. Angelo Genocchi, Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung, herausgegeben von G. Peano. Übersetzung v. G. Bohlmann u. A. Schepp, mit einem Vorwort v. A. Meyer, Leipzig, 1898.

8. Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine, Accad. Torino, 1886, t. 21.

9. Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari, Accad. Torino, 1887.

II. 10. Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, Torino, 1887, str. XII + 336.

11. Intégration par séries des équations différentielles linéaires, Mathem. Annalen, 1888, t. 32.

12. Definizione geometrica delle funzioni ellittiche, Giornale di Battaglini, 888, t. 26.

12'. Definizione geometrica delle funzioni ellittiche. Teixeira Journ., Porto, t. 9.

III. 13. Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della Logica deduttiva, Torino, 1888, str. 10 + 170.

14. Teoremi su massimi e minimi geometrici, e su normali a curve e superficie, Rend. del Circolo Matem. di Palermo, 1888, t. II.

IV. 15. Arithmetices principia, nova methodo exposita, Torino, 1889, str. XVI + 20.

16. Sur les wronskiens, Mathesis, Gand, 1889, t. 9.

V. 17. I principii di geometria, logicamente esposti, Torino, 1889, str. 40.

18. Une nouvelle forme du reste dans la formule de Taylor, Mathesis, Gand, 1889, t. 9.

19. Su d'una proposizione riferentesi ai determinanti jacobiani, Giornale di Battaglini, 1889, t. 27.

20. Angelo Genocchi, Annuario Univ. Torino, 1889-90.

21. Sur une formule d'approximation pour la rectification de l'ellipse, Comptes Rend. Acad. Paris, 1889, t. 109.

22. Sulla definizione dell'area d'una superficie, Accad. Lincei, 1890, ser. 4, t. 6.

23. Sur une courbe qui remplit une aire plane, Math. Ann. 1890, t. 36.

24. Les propositions du V livre d'Euclide réduites en formules, Mathesis, Gand, 1890, t. 10.

25. Sur l'interversion des dérivations partielles, Mathesis, Gand, 1890, t. 10.

26. Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, Math. Annalen, 1890, t. 37.

27. Valori approssimati per l'area di un ellissoide, Aacad. Lincei, 1890, ser. 4, t. 6.

28. Sopra alcune curve singolari, Accad. Torino, 1890, t. 26.

VI. 29. Elemennti di calcolo geometrico, Torino, Candeletti, 1891.

VI'. 29'. Die Grunzüge des geometrischen Calculs, Leipzig, 1891.

VII. 30. Rivista di Matematica, t. 1, Torino, 1891, str. 272.

31. Principii di logica matematica, Riv. di Matem., t. 1, 1891.

31'. Principios de logica matematica, Progreso, 1892.

32. Sommario dei libri VII, VIII, IX d'Euclide, Riv. di Matem. t. 1, 1891.

33. Formule di logica matematica, Riv. di Matem. t. 1, 1891.
34. Osservazioni ad un articolo di C. Segre, Riv. di Matem., t. 1, 1891.
35. Sul concetto di numero, Riv. di Matem., t. 1, 1891.
36. Lettera aperta al. prof. G. Veronese, Riv. di Matem., t. 1, 1891.
37. Il teorema fondamentale di trigonometria sferica, Riv. di Matem., t. 1, 1891.
38. Sulla formula di Taylor, Accad. Torino, 1891, t. 27.
39. Generalizzazione della formula di Simpson, Accad. Torino, 1892, t. 28.
40. Breve replica al prof. Veronese, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1892, t. 6.

VIII. 41. Rivista di Matematica, t. 2, Torino, 1892, str. 215.
42. Sommario der libro X d'Euclide, Riv. di Matem. 1892, t. 2.
43. Osservazioni sul „Traité d'Analyse" par. H. Laurent, Riv. di Matem. t. 2, 1892.
44. Esempi di funzioni sempre crescenti e discontinue in ogni intervallo, Riv. di Matem., t. 2, 1892.
45. Dimostrazione dell'impossibilità di segmenti infinitesimi constanti, Riv. di Matem., t. 2, 1892.
46. Sulla definizione del limite d'una funzione, Riv. di Matem., t. 2, 1892.
47. Recensione: G. Veronese „Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee", Riv. di Matem., t. 2, 1892.
48. Sur le théorème général relatif a l'existence des intégrales des équations différentelles, Nouv. Annales de Mathém., 1892.

IX. 49. Lezioni di analisi infinitesimale, Torino, 1893, t. 1, 2, str. 600.

X. 50. Rivista di Matematica, t. 3, Torino, 1893, str. 192.
51. Formule di quadratura, Riv. di Matem., t. 3, 1893.
52. Sur les systèmes linéaires, Monatshefte f. Mathem. t. 5, 1894.

XI. 53. Rivista di Matematica, t. 4, Torino, 1894, str. 197.

54. Sulla parte V del Formulario „Teoria dei gruppi di punti", Riv. di Matem., t. 4, 1894.
55. Sui fondamenti della geometria, Riv. di Mat., t. 4, 1894.
56. Un precursore della Logica matematica, Riv. di Matem., t. 4, 1894.
57. Recensione: H. Grassmann „Gesammelte mathematische und physikalische Werke", Riv. di Matem. t. 4, 1894.
58. Sur la définition de la limite d'une fonction, American Journal of Mathem., 1894, t. 17.
59. Estensione di alcuni teoremi di Cauchy sui limiti, Accad., Torino, 1894, t. 30.
60. Notions de logique mathématique, Ass. franc. p. l'avancement des sciences, Congres de Caen, 1894.
61. Notation de Logique mathématique, Turin, 1894.

XII. 62. Rivista di Matematica, t. 5, Torino, 1895, str. 195.

XIII. 63. Formulaire de Mathématiques, t. 1, Torino, 1895, s. 144.

64. Logique mathématique, Form. t. 1, 1895,
65. Opérations algébriques, Form., t. 1, 1895.
66. Arithmétique, Form., t. 1, 1895.
67. Classes de nombres, Form., t. 1, 1895.
68. Recensione: F. Castellano, „Lezioni di meccanica razionale", Riv. di Matem, t. 5, 1895.
69. Il principio delle aree e la storia di un gatto, Riv., di Matem., t. 5, 1895.
70. Recensione: G. Frege, „Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet", Riv., di Matem., t. 5, 1895.
71. Elenco bibliografico sull'Ausdehnungslehre" di H. Grassmann, Riv. di Matem., t. 5, 1895.
72. Sulla definizione di integrale, Annali di Matem., 1895.
73. Sopra lo spostamento del polo sulla terra, Accad. Torino, 1895, t. 30.
74. Sul moto del polo terrestre, Accad. Torino, 1895, t. 30.
75. Sul moto d'un sistema nel quale sussistono moti interni variabili, Accad. Lincei, 1895, ser. 5, t. 4.
76. Sul pendolo di lunghezza variabile, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1896, t. 10.

77. Trasformazioni lineari dei vettori di un piano, Accad. Torino, 1895, t. 31.
78. Introduction au tome II du „Formulaire de mathématiques", Riv. di Matem., t. 6, 1896.
79. Risposta ad una lettera di C. Frege, Riv. di Matem., t. 6, 1896.
80. Sul § 2 del „Formulario", t. II: Aritmetica, Riv. di Matem., t. 6, 1896.
81. Sul moto del polo terrestre, Accad. Lincei, 1896, ser. 5, t. 5.
82. Saggio di calcolo geometrico, Acc. Torino, 1896, t. 31.
82'. Zarys rachunku geometrycznego, przekład S. Dicksteina, Warszawa, 1897.
82''. Entwicklung der Grundbegriffe des geometrischen Calculs, übers. v. A. Lanner, Salzburg, 1897-98.
83. Studii di logica matematica, Accad. Torino, 1897, t. 32.
84. Sul determinante Wronskiano, Accad. Lincei, 1897, ser. 5, t. 6.

XIV. 85. „Formulaire de Mathématiques", t. 2, § 1, Logique mathématique, Turin. 1897, str. 63.
86. Logica matematica, Cogressu de Zürich, 1897.
87. Relazione sulla memoria di M. Pieri, „I principii di geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo", Accad. Torino, 1897.
88. Generalità sulle equazioni differenziali ordinarie, Accad. Torino, 1897, t. 33.
89. Analisi della teoria dei vettori, Accad. Torino, 1898, t. 33.

XV. 90. „Formulaire de Mathématiques", t. 2. § 2, Arithmétique, Turin, 1898, str. 60.
91. La numerazione binaria, Accad. Torino, 1898, t. 34.
92. Sui numeri irrazionali, Riv. di Matem., t. 6, 1899.

XVI. 93. Revue de Mathématiques, t. 6, Turin, 1896-99, s. 188.

XVII. 94. „Formulaire de Mathématiques", t. 2, n. 3. Turin 1899, str. 200.
95. Les définitions mathématiques, Congr. intern. de philos., Paris, 1900.

95′. Definicje w matematyce, tłum. Z. Krygowski, Wiad. Matem., 1902, t. 6.
96. Studio delle basi sociali della Cassa Nazionale mutua cooperativa per le pensioni, Torino, 1901.
97. Formules de logique mathématique, Riv. di Matem., t. 7, 1900.
98. Recensione: O. Stolz u. J. A. Gmeiner, „Theoretische Arithmetik", Riv. di Matem., t. 7, 1901.
99. Dizionario di logica matematica, Saggio presentato al congresso prof. ital., Livorno, 1901.
99′. Dizionario di matematica, parte I, Riv. di Matem., t. 7, 1901.
XVIII. 100. „Formulaire de Mathématiques", t. 3, Paris, 1901, str. 231.
XIX. 101. Revue de Mathématiques. t. 7, 1900 — 1901, Turin, str. 184.
102. La geometria basata sulle idee di punto e distanza, Accad. Torino, 1902, t. 38.
XX. 103. Aritmetica generale e algebra elementare, Torino, 1902, str. VIII + 144.
104. Sur les nombres imaginaires, Bulletin des sc. math. élém., Paris, 1902.
105. Sul massimo della pensione, Torino, 1903.
*106. De latino sine flexione, Riv. di Matem., t. 8, 1903.
107. Principio de permanentia, Riv. di Matem., t. 8, 1903.
XXI. 108. „Formulaire de Mathématiques", t. 4, 1903, str. 408.
*109. Il latino quale lingua ausiliare internazionale, Accad. Torino, t. 39, 1904.
110. Sur les principes de la Géométrie selon M. Pieri, Rapport présenté à la Société phys.-math. de Kasan, 1904.
*111. Vocabulario de latino internationale, 1904.
112. Cassa di riasicurazione, Torino, 1905.
113. Sulle differenze finite, Accad. Lincei, 1906.
114. Super theorema de Cantor-Bernstein, Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. 21, 1906.
114′. Super theorema de Cantor-Bernstein, Addizione, Riv. di matem., t. 8, 1906.

*115. Notitias super lingua internatonale, Riv. di Matem., t. 8, 1906.

XXII. 116. Revue de mathématique, t. 8, 1902 — 1906, Turin str. 160.

117. Sul libro V di Euclide, Boll. di Matem., Bologna, 1906.

118. Sur la convergence absolue des séries et sur le développement en séries entières. Enseignement Mathématique, 1916.

XXIII. 119. „Formulario Mathematico", t. V, Torino, 1908, str. XXXVI 463.

*120. De internationalitate, Correspondence internationale, 1908.

*XXIV. 121. Vocabulario commune ad linguas de Europa, Torino, 1909, str. 87.

122. Notations rationnelles pour le système vectoriel, Enseignement mathématique, 1909.

123. Sui fondamenti dell'Analisi, Boll. della Mathesis, II, 1910.

124. Sugli ordini degli infiniti, Accad. Lincei, 1910, ser. 5, t. 29.

*125. A proposito della lingua internazionale, Riv. Classici e neolatini, VI, 1910-11.

*126. Discussiones de „Academia pro Interlingua" t. I, 1909-10, str. 1, 9, 57.

*127. Lingua de Academia, Acad. pro Interl., t, I, 1910, str. 91, 147, 187.

*128. Exemplo de Interlingua, Acad, pro Interl., t. 1, 1910, str, 163, 191.

*129. De passivo, Acad. pro Interl., t. 2, 1911.

*XXV. 130. 100 exemplo de interlingua cum vocabulario Interlingua-Italiano, Torino, 1911.

*XXV'. 130'. Tosamo, wydanie drugie (ze słownikiem Interlingua - lat. - it.-franç. - engl. - deutsch.), Torino, 1913.

131. Sulla definizione di funzione, Accad. Lincei, 1911, ser. 5, t. 20.

*132. Le latin sans flexions, Les questions modernes, Paris, 1911.

*133. Una questione di grammatica razionale, IV Congr. intern. de philos., Bologna, 1911.

134. Le definizioni in matematica, Institut de de Ciencias, Barcelona, 1911.

*135. De derivatione, Acad. de Interl., t. 3, 1912.

136. Sulla definizione di probabilità, Accad. Lincei, 1912, ser. 5, t. 21.

137. Delle proposizioni esistenziali, Intern. Congr. of Mathem., Cambridge, 1912.

138. Contro gli esami, Torino Nuova, 1912.

139. Derivata e differentiale, Accad. Torino, 1912, t. 48.

140. Relazione sulla memoria di V. Mago: „Teoria degli ordini", Mem. Accad., Torino, 1913.

141. Sulla definizione di limite, Accad., Torino, t. 48, 1913,

142. Resto nelle formule espresso con un integrale definito, Accad. Lincei, 1913, ser. 5, t. 22.

143. Recensione: A. N. Whitehead and B. Russell, „Principia mathematica", Boll. Bibl. e storia delle scienz mat. (Loria), 1913.

*144. Vocabulario de Interlingua, Acad. pro Interl., t. 3, 1913.

*144'. De vocabulario, Schola et Vita, t. 1, 1926.

*145. Questiones de gramatica, Acad. pro Interl., t. 4, 1913.

146. Residuo in formulas de quadratura, Mathesis, Gand. 1914.

*147. Fundamento de Esperanto, Cavoretto — Torino, 1914.

*XXVI. 148. Academia pro Interlingua, t. 1—3, 1909—1914.

*XXVII. 149. Vocabulario Commune ad latino - italiano-français - english - deutsch, Torino, 1915, str. XXXII 320.

150. Resto nella formula di Cavalieri-Simpson, Accad. Torino, t. 50, 1915.

150′. Residuo in formula de quadratura Cavalieri-Simpson, L'Enseignement mathématique, 1916.

151. Relazione sulla memoria di G. Sannia, „I limiti d'una funzione in un punto limite del suo campo", Mem. Accad. Torino, 1915.

152. Prodotto di grandezze, Boll. di Matematiche, del Tenca, 1915.

153. Definitione de numeros irrationale secundo Euclide, Bulletino della „Mathesis", Pavia, 1915.

*154. Praepositiones internationale, World-Speech, (Foster), 1915.

155. Sul prodotto di grandezze, Boll. mat. e fis. (Conti-Tenca), 1915.

156. Le grandezze coesistenti di Cauchy Atti R. Acc. Scienze, Torino, t. 50, 1915.

157. Importanza dei simboli in matematica, Scientia, Milano, 1915.

157′. Importance des symboles en mathématiques, Scientia, Milano, 1915.

158. Le definizioni per astrazione, Boll. della „Mathesis", Pavia, 1915.

159. L'esecuzione tipografica delle formule matematiche, Atti Accad. Scienze, Torino, t. 51, 1915.

160. Approssimazioni numeriche, Rend. R. Acc. dei Lincei, 1916, ser. 5, t. 25.

161. Sul principio d'identità, Boll. della „Mathesis", Pavia- 1916.

*162. Bello et lingua, The Intern. Language, London, 1915.

163. Valori decimali abbreviati e arrotondati, Atti R. Acc. Scienze Torino, t. 52, 1917.

164. Approssimazioni numeriche, Atti R. Acc. Scienze Torino, t. 52, 1917.

165. Eguale-Infinito-Logica matematica — Vettori, Dizionario, cognizioni utili, Torino, 1917.

165′. Eguale, Boll. di mat. (Conti), 1918.

166. Tavole numeriche, Dizionario cognizioni utili, Torino, 1918.

167. Interpolazione nelle tavole numeriche, Atti R. R. Acc. Scienze Torino, t. 53, 1918.
168. Resto nelle formole di interpolazione, Scritti ad E. D'Ovidio, Torino, 1918.
169. Necrologio „Matteo Bottasso" (wspólnie z T. Boggio), Boll. della „Mathesis", Pavia, 1918.
170. Sulla forma dei segni di algebra, Giornale di Matematica finanziaria, Torino, 1919.
171. Risoluzione graduale delle equazioni numeriche Atti R. Accad, Scienze, Torino, t. 54, 1919.
172. Necrologio „Filiberto Castellano", Boll. della „Mathesis", Pavia, 1919.
173. Conferenze matematiche, Annuario R. Università, Torino, 1919-20.
174. Le definizioni in Matematica, Periodico di Matematiche, Bologna, 1921, ser. 4, t. 1.
175. Area de rectangulo, Rassegna di matem., Roma, 1921,
176. Recensione: T. Boggio, „Calcolo differenziale con appl,, geom.", Eserc. mat. Catania t. 1, 1921.

*XXVIII. 177. Collectione de Circulares ad socios de Acad. pro Interl., 1909 — 1924.

*178. Recensione: Guerard, „A short history of the Intern. Language movement" Circulare de Accad. pro Interl., 1922.
*179. Regulas pro interlingua, Circ. de Acad. pro interl, 1922.
*180. Lingua internationale ante Societate de Nationes, Circ. de Acad. pro Interl., 1922.
181. Operazioni sulle grandezze, Atti R. Acc. Scienze Torino, t. 57, 1922.
182. Calculo super Calendario, Circ. de Acad. pro Interl., 1922.
182'. Calculo super Calendario, Urania, Torino, 1922.
182''. Calculo super Calendario, Schola et Vita, t. 3, 1928.
183. Operationes super magnitudines, Rassegna di Matem. e fisica, Roma, 1922, t. 2.

184. Theoria simplice de logarithmos, Wiadomości matemat., Warszawa, 1923.

185. Recensione: A. Natucci, „Il concetto di numero“, Archivio di storia della scienza, t. 4, 1823.

186. I libri di testo per l'Aritmetica, Periodico di matematiche, 1924, ser. 4, t. 4.

XXIX. 187. Giochi di Aritmetica e problemi interessanti, Torino, 1924, str. 63.

188. De Aequalitate, Congr. intern. mat., Toronto, 1924.

188'. De Aequalitate, Acad. pro Interl., 1924, (wyciąg z poprzedniego).

*XXX. 189. Interlingua, Cavoretto-Torino, str. 24. Wyd. 1 w r. 1923, 2 w 1925, 3 w 1927.

*190. Pro historia de Interlingua, § 1: Volapük, Rev. de Acad. pro Interl., 1925.

*190'. Pro historia de Interlingua, § 2: Academia in periodo 1893 — 1908, Rev. de Acad. pro Interl., 1926.

*190''. Pro historia de Interlingua, § 3: Latino simplificato, Revista de Acad. pro Interl., 1926.

*191. Sinense, Rev. de Acad. pro Interl., 1926.

*192. Recensioni: Pankhurst, „The future of international Language“; Di Dia, „La lingua universale”, Rev. de Acad. pro Interl., 1926.

193. Quadrato magico, Schola et Vita, Milano, 1926, t. 1.

194. Jocos de Arithmetica, Schola et Vita, t. 1, Milano, 1926.

*195. De vocabulo mathematica, Riv. mat. pura e appl., Reggio Cal., t. 2, 1927.

196. Sulla riforma del Calendario, Atti R. Acc. Scienze Torino, t. 62, 1927.

197. Vocabulario mathematico, Riv. mat. pura e appl., Reggio Cal. t. 3, 1927.

198. Historia et Reforma de Calendario, Riv. de Acad. pro Interl., 1927.

*XXXI. 199. Collectione de Acad. pro Interlingua, Rev. de Acad. pro Interl., 1925-7.
200. Giov. Peverone, matematico piemontense del secolo XVI, Studi della R. Univ. di Torino, 1928.
201. Historia de numeros, Schola et Vita, t. 3, 1928.
202. Interessante libro super Calculo numerico, Schola et Vita, t. 3, 1928.
203. C. Boccalatte, La geometria basata sulle idee di punto ed angolo retto, Accad. Torino, t. 64, 1928-9. (Praca napisana przez panią Boccalatte pod wpływem Peany).
*204. Vocabulos internationale, Schola et Vita, t. 4, 1929.
*205. Volapük post 50 anno, Schola et Vita, t. 4, 1929.
206. Monete italiane nel 1929, Giorn, mat. e fis., t. 3.
*207. Questiones de Interlingua: ablativo aut nominativo, Schola et Vita, t. 5, 1930.
*208. Studio de linguas, Rend. Unione professori, Milano, 1930.
*208'. Studio de linguas, Schola et Vita, t. 5, 1930.
209. F. Audisio, Calcolo di π colla serie di Leibniz, Rend. Acc. Lincei, 1930, ser. 6, t. 11. (praca napisana pod wpływem Peany).
*210. Algebra de grammatica, Schola et Vita, t. 5, 1930.
211. Jocos de Arithmetica, Rend. Unione professori, Milano, 1931.
*212. Libertate et unione, Schola et Vita, t. 6, 1931.

Strzyżów n. W. 1932.

OSOBNE ODBICIE Z T. XXXVI „WIADOMOŚCI MATEMATYCZNYCH“

WŁ. M. KOZŁOWSKI.

Wspomnienie o Józefie Peano.

Nauka, cywilizacja i ludzkość poniosły przed rokiem bolesną stratę w osobie genialnego w swych pomysłach niezmordowanego w pracy szerokie kręgi obejmującej, a tak skromnego i prostego w życiu w obejściu profesora G. Peano w Turynie, właściwego twórcy logiki symbolicznej, wynalazcy najdoskonalszego (a mającego przed sobą ogromną przyszłość) języka międzynarodowego neolatino; autora niezliczonych prac z zakresów matematyki, logiki i lingwistyki porównawczej [1]). Przed laty czterema przyjaciele i wielbiciele zmarłego święcili jego siedemdziesięciolecie (urodził się 27 sierpnia 1858 r. w Spinetta). Koło najbliższych współpracowników i uczniów wysłało wtedy delegację z życzeniami do jego skromnej siedziby wiejskiej w Cavoretto (pod Turynem), aby złożyła mu życzenia. Odpowiedź sławnego uczonego na przemówienie delegatów najlepiej charakteryzuje skromność tego zacnego męża: „Wiecie najlepiej — rzekł — mili przyjaciele, że daleki jestem od pragnienia publicystyki; wolę bowiem mieć ciszę dokoła siebie. Skoro jednak, czyniąc to, wykonaliście pewną propagandę dla języka międzynarodowego i czynić będziecie ją nadal, pomysł wasz zasługuje na uznanie. Z całego serca więc dziękuję wam i wszystkim przyjaciołom współpracującym z wami”.

---

[1]) Ob. E. Stamm: Bibljografia prac Peany.

Zmarły żył dla dzieła swego, nie pragnąc żadnych honorów ani wyróżnień dla siebie, co wszakże nie przeszkadzało, aby szereg towarzystw i ciał naukowych we Włoszech i za ich granicami, aż do Ameryki, włącznie uczcił go członkostwem i uznaniem. Skromną też była publikacja, dedykowana mu w tym dniu uroczystym: broszura zaledwie dosięgająca stu stron, a cała zredagowana w neolatino, obejmująca artykuły kilkunastu autorów, w tej liczbie trzech polaków [1]).

Rozgłos poszukujących go osób zostaje zwykle w odwrotnym stosunku do wysokości poziomu, na który wznosi się ich myśl lub dzieło: nazwisko prędkobiegów lub obijboków cyrkowo-sportowych powtarza każdy z gapiów ulicznych; o ludziach wiedzy słyszą jedynie ci, którzy mają jakieś, chociażby tylko tytułowe, pojęcie o dziedzinach, w których pracuje uczony. Ale i wśród grona uczonych są tacy, dla których zaszczyty i pieniądze znaczą więcej niż wiedza. Czy można ich nazwać naprawdę uczonymi? To spór o słowa; nie bądźmy pedantami! Każdy jednak przyzna, że ci, do których należał Peano, stanowią najwyższy i najszlachetniejszy typ ludzi naprawdę ideowych: są to najświatlejsze duchy wśród tłuszczy ludzkiej. Chwała jest wprawdzie wynagrodzeniem idealnem i nie brudzi tak jak pieniądz; ktokolwiek jednak pracuje tylko dla wynagrodzenia, chociażby idealnego, nie zaś dla miłości idei, łatwo może zejść na bezdroża. Na pocieszenie zaś tym, których martwi nieproporcjonalność rozgłosu i nagród z zasługą, dodamy, że jeden i drugie są jednodniowe; pamięć zaś prawdziwie zasłużonych trwa wieki, a sława ich najczęściej zaczyna się dopiero po ich śmierci.

Z trzech dziedzin twórczości, którym poświęcił życie Peano, o pierwszych dwóch musimy ograniczyć się do słów kilku zaledwie. Prac jego matematycznych nie możemy tu zgoła referować. Co do logiki, która wiąże się ściśle za-

[1]) Genialność pomysłu neolatino przez autora; Logika matematyczna Peana przez p. Stamma; Uwagi Hoene-Wrońskiego o metafizyce rachunku różniczkowego przez p. Dicksteina.

równo z matematycznemi, jak i z lingwistycznemi dążeniami jego, powiedzieliśmy już, że uważamy go za prawdziwego właściwego twórcę logiki symbolicznej. Sprobujemy to wyjaśnić i uzasadnić w dwóch słowach. Pierwszym, który próbował zastosować znaki matematyczne do myśli o rzeczach (nie-matematycznych), był Leibniz, sławny filozof XVII-go wieku. Pomysły jego, jakkolwiek trafne, zostały wkrótce zapomniane, a zaczynające się w tym kierunku próby angielskie w XIX wieku poszły zgoła inną drogą. Charakterystyczną cechą umysłu Peany było dążenie do wyrażenia myśli najjaśniej i najściślej. Stąd usiłowanie znalezienia sposobu wyrażania zdobyczy matematycznych, bez odwoływania się zgoła do mowy potocznej. Usiłowanie to znajduje wyraz w pięciu tomach dzieła Formulario matematico (1895-1908), zawierających całe szeregi twierdzeń matematycznych, wyrażonych przy pomocy znaków odpowiednich bez jakichkolwiek słów.

Taką to pracą mozolną i cierpliwą, postępując drogą indukcyj t. j. od szczegółu do ogółu, w przeciwności do matematyków, dekretujących wzory matematyczne dla logiki, w domyślnem przypuszczeniu tożsamości tych dwóch typów myślenia wbrew temu, co dowodzą logicy, doszedł Peano do symboliki logicznej, którą starannie wyróżnia od algebraicznej, używając odmiennych znaków, w każdej doskonaląc, upraszczając i uzupełniając symbolikę Leibniza.

Najważniejszym krokiem w tym kierunku, umożliwiającym przejście od logiki do matematyki, jest symbol ε (epsylon grecki), wyrażający należność osobnika do klasy. Matematyka buja w błękitach abstrakcyj; świat jej cały zawiera się w myśli; jest idealny. Ale logika ma do czynienia z pojęciami t. j. klasami, których osobniki mogą być konkretnemi przedmiotami zmysłów. Kiedy więc chcemy wyrazić należność jakiejkolwiek klasy do klasy szerszej, stosunek między pojęciami stawiamy znak Ɔ (np. „koń Ɔ (= jest) zwierzę") wyrażający ów stosunek czysto myślowy; przeciwnie, gdy napiszemy: „Burek ε (= jest) psem", przenosimy już myśl naszą z nieba na ziemię; mówimy o przedmiocie widzialnym i namacalnym. Symbol tego łączy więc konkretny świat zmysłów z logiką pojęć, a jednocześnie oddziela logikę od matematyki [1]).

Dążenie do przezwyciężenia wieloznaczności mowy potocznej przy pomocy znaków, które są nietylko jednoznacz- ale także kosmopolityczne, stawiając na miejsce dźwięków słownych symbole myśli ad hoc stworzone, prowadzi naturalnie do idei języka powszechnego, jakim jest w obrębie nauki matematyka. Dwa języki sztuczne były już wprowadzone, jako środki porozumienia międzynarodowego i cieszyły się powodzeniem Volapük (1880, Scheyer) i Esperanto 1887, Zamenhof). Skoro jednak uczyniono na pierwszym kongresie międzynarodowym filozofów w Paryżu 1900 r. próbę podniesienia esperanta do roli języka naukowego, upadła ona pod krytyką, której poddała ją komisja międzynarodowa, zarówno jak i próbę jego udoskonalenia. Ido Neolatino wówczas jeszcze nie istniało. Powstało ono dopiero w r. 1903, a brak języka, któryby odpowiadał wymaganiom postawionym przez Komisję i stał się przyczyną upadku tak życzliwie przyjętego przez ciała naukowe i z wielkim nakładem pracy przygotowanego wniosku p. Ludwika Couturat'a [2]).

Genialność pomysłu Peany polega na niezwykłej prostocie środków, któremi zapobiega się zarzutom stawianym sztucznym językom międzynarodowym. Zarzucano bowiem nieraz, że język sztuczny, nie uformowany historycznie przez dłuższe użycie w mowie jakiegoś narodu, nie może odpowiadać potrzebom, które stawia jego powszechne użycie. Z drugiej strony jednak na wszystkich niemal kongresach naukowych, gdzie sprawa ta bywała omawiana, odrzucano stanowczo

[1]) Wykład szczegółowy symboliki matematyczno-logicznej Peany i jego szkoły znajdą czytelnicy w Podstawach Logiki autora tych wierszy (Warsz. 1916); główne rysy podaje także jego krótki zarys logiki (1917).

[2]) Pierwszą wiadomość o Neolatino w języku polskim podaliśmy w r. 1912. Był nim artykuł nadesłanego przez jego twórcę do wydawanego przez autora miesięcznika p. t. „Myśl i życie". Artykuł napisany w neolatino, umieściliśmy także w przekładzie polskim (ma str. 127-13 i 142-144).

myśl o przyjęciu, któregokolwiek z języków żywych, jako budzące rywalizację i niechęć. Neolatino wszakże jest językiem narodu już nie żyjącego, a jednak w tysiącoletniej szkole życia już wyrobionego: językiem łacińskim, odznaczającym się niezwykłą precyzją i sprężystością. Przejmuje ono z całą dokładnością nie tylki dźwięki mowy rzymskiej, ale i pisownię klasycznej łaciny.

Wszakże znowuż przeciw językom historycznym wytykają stale komplikacje i nieregularność ich gramatyki, utrudniającej w wysokim stopniu władanie niemi w mowie i w piśmie, a główną pobudką do tworzenia języków sztucznych było właśnie dążenie do usunięcia fantastyczności ich gramatyki. Neolatino redukuje gramatykę klasycznej łaciny niemal do zera[1]), stawiając każdy wyraz obok drugiego bez żadnej zmiany, jak to ma miejsce wjęzyku chińskim, w którym jednak wydaje się corocznie tyle prac uczonych.

Tak-to jednym ruchem postawił Peano sztorcem jajo kolumbowe sprzeczności języka historycznego z wymaganą przez okoliczności gramatycznością. Ale na tem nie kończy się genialność jego pomysłu. Język łaciński przez całe tysiącolecia średniowiecza był językiem literatury uczonej w całej niemal Europie, a wszyskie języki nowożytne zawierają w sobie mniejszą lub większą ilość słów łacińskich; najwięcej zaś języki romańskie (francuski, włoski, hiszpański, portugalski), także angielski i rumuński, tak dalece, że znający jeden z tych języków mogą rozumieć neolatino bez uczenia się. Ale nawet odległe od zachodu narody słowiańskie mają w swych mowach znaczną ilość słów łacińskich, zarówno jak i greckich zlatinizowanych, o których pochodzeniu często nie zdajemy sobie sprawy, codziennie ich używając. Poświadczy o tem następujący ustęp polski, w którym wszystkie wyrazy, prócz łączących je nieodmienników, są pochodzenia łacińskiego: „Szkoła (schola) publiczna jest

[1]) Wyższość jego nad esperantem polega nietylko na jednolitości źródłosłowów (wszystkio są łacińskie) w przeciwności do kakofonicznej ich mieszaniny w esperanto, ale także na braku przepisów gramatycznych prócz jednego *s* w liczbie mn. gdzie znający, którykolwiek z romańskich języków może rozumieć neolatino, nie ucząc się.

widownią (video — widzę) pedagogiczną edukacji uniwersalnej; kultywującej generację inteligentne. Formuje je także lektura domowa popularna. Fenomena natury, arytmetyka, geometrja, geografia literatura, polityka są jej objektami. Polor inteligencji, ewolucja sentymentów moralnych i estetycznych są jej terenem"...

P. Canesi wcielił do słownika swego[1]). 10.000 wyrazów wspólnych języków angielskiemu z łaciną. Słynny słownik angielski Webstera zawiera 5.000 słów angielskich wspólnych z językami romańskiemi, a 2.000 wspólnych z niemieckim i słowiańskiemi. Wydanie, o którem tu mowa (z r. 1861), zawiera 55524 słów pochodzenia grecko-łacińskiego na 22220 germańskich przy 83009 słów wszystkich świadczy to dobitnie, jak niesłusznem jest pod względem leksykologicznym zaliczanie języka angielskiego do germańskich. Tak więc łacina stanowi podstawę (lub jeden ze składników) wszystkich niemal języków Europy, wszczepioną do nich przez Kościół i przez szkołę od czasów bardzo dawnych. Obecnie szerzy się ona, wraz z kulturą zachodnią, na daleki Wschód. Łatwo dostrzec, jak wielkiem ułatwieniem jest to dla jej nabycia.

Neolatino wprowadza więc nas do źródeł cywilizacji nowożytnej. Jest on przytem językiem jednolitym i dźwięcznym — nie sieczką wyrazów różnych gwar zebranych a rażących swą kakofonją, jak oba popularne jego poprzedniki. Zbliżony jest melodyjnością swą do języka włoskiego, który jest najpiękniejszym wykwitem romanistyki. Budowa jego, oddzielająca leksykologję od gramatyki, ułatwia nabycie tego języka w szkole, gdzie uczeń łaciny klasycznej zmuszony jest jednocześnie przyswajać oba składniki, z których gramatyka jest najbardziej kłopotliwym w dobie przewagi pamięci, w której uczą języków w szkołach racjonalnie zorganizowanych, t. j. przed rokiem 12 życia. Przeciwnie, po opanowaniu leksykologji, dopełnienie jej gramatyką stanowi przedmiot małego wysiłku. Neolatino przygotowywa

[1]) Vocabulario interlingua-italiano-inglese e italiano-interlingua, z przedmową Peany, 1921.

więc ucznia do łatwego przyswojenia łaciny klasycznej, o ile zapragnie ją poznać.

Tu tkwi właśnie moment ogromnej wagi tej mowy w zakresie spornego punktu dzisiejszego szkolnictwa: neolatino rozstrzyga syntetycznie spór o łacinie w szkole. Pominięcie zupełne w szkole łaciny, która jest tak doniosłym etapem naszej kultury i piastunką języków europejskich, budzi słuszne wątpliwości[1]). Z drugiej strony wpychanie do głów dziecinnych całej gramatyki łaciny Cyceronowej i żądanie od uczniów posiadania wszystkich jej subtelności, staje się nonsensem i barbarzyństwem, gdy zważymy, jak znikoma liczba tych uczniów będzie się nią posługiwała kiedykolwiek w życiu. Neolatino, oddzielające jedno od drugiego, ułatwia drogę przyszłym latinistom, nawiązuje nić historyczną naszej cywilizacji, nie obciążając umysłów pracą jałową nad subtelnościami gramatyki (których żaden uczeń owładnąć całkowicie nie jest w stanie, natomiast wynagradza włożoną w leksykologję pracę, dając każdemu gotowy do użycia język międzynarodowy i łatwość nabycia szeregu wyżej wymienionych języków żyjących (romańskich i angielskiego) z bardzo małym wysiłkiem nad ich nieskomplikowaną gramatyką.

Wprowadzenie neolatino do szkół wszelkiego typu t. j. zarówno humanistycznych jak realnych, handlowych i klasycznych, jako narzędzia do porozumienia międzynarodowego i przygotowania do przyswojenia innych języków nowożytnych, tudzież jako ogniwa łączącego naszą kulturę z jej źródłami grecko-rzymskiemi, uważamy za dojrzały już dziś postulat szkolnictwa wszystkich narodów. Neolatino oczywiście musi być wprowadzony już w pierwszych kla-

[1]) Kreśląc przed kilkunastu laty program szkoły średniej 7-ioklasowej w celu wykazania, o ile kompletniejsze wykształcenie można dać w tak krótkim czasie, nie zajmując dzieciom więcej nad 15 — 21 godzin w 4-ch pierwszych klasach, a po 24 w 3-ch ostatnich (Ob. „Nowe Tory", Synteza w wykształceniu szkolnem str. 552 — 5683 tabelka str. 567. sierpień 1907 r.). autor, jakkolwiek przeciwny pretensjom klasycyzmu nie wahał się umieścić po 2 godz. łaciny w 4-ch pierwszych klasach, licząc się z tą jej rolą. Dziś zastąpił by je neolatino.

sach szkoły średniej, a w drugiem czteroleciu szkoły elementarnej. Marnotrawstwem jest w dzisiejszem szkolnictwie naszem zaczynanie pamięciowego przedmiotu, jakim są języki, z ich leksykologją od czwartej klasy, t. j. w środku tego krótkiego okresu, w którym rozbudzone życie intelektualne wymaga zużytkowania sił i czasu na przedmioty rozumowane liczbowo i objętościowo przewyższające pamięciowe. Natomiast uczniowie szkół klasycznych mogą już bezpośrednio i rychło przyswajać łacinę klasyczną w tym właśnie okresie; mając gotową leksykologję — przedmiot pamięciowy; gramatyka bowiem jest już przedmiotem rozumowanym.

Propozycję tą omówiliśmy i uzasadniliśmy szerzej w pracy, umieszczonej w „Muzeum“ [1]) do której odsyłamy pragnących bliższego poznania szczegółów [1]).

[1]) Zeszyt IV r. 1931 p. t. Międzynarodowe dydaktyczne walory łaciny uproszczonej (neo-latino) str. 223 — 243.

Drukarnia Kooperatywy Pracowników Drukarskich, Warszawa, Zielna 47, tel. 619-57.

OSOBNE ODBICIE Z T. XXXVI „WIADOMOŚCI MATEMATYCZNYCH".

S. DICKSTEIN.

Peano jako historyk matematyki.

Peano nie napisał wprawdzie osobnego dzieła, poświęconego dziejom matematyki, ale dość przejrzeć jego prace, a zwłaszcza tomy wielkiego dzieła, którem jest „Formularz matematyczny" (*Formulario mathematico)*, aby przekonać się, że prace jego są oparte na niemal wszechstronnej znajomości literatury matematycznej i na krytycznem ujęciu zagadnień matematyki w jej rozwoju historycznym. W przedmowie do t. IV Formularza (1901 — 1903) pisze Peano, że „Formularz przez obfitość twierdzeń i wskazówek historycznych i bibljograficznych odgrywa rolę Encyklopedji. Wszystkie pojęcia są w nim wprowadzone na podstawie prawidłowych definicyj i do wielu podanych w nim wzorów i twierdzeń dołączone są dowody a nawet po kilka dowodów. Tak więc jest możliwe wydobycie z „Formularza" kursów wykładu rozmaitych oddzielnych przedmiotów, jak to sam autor uczynił dla Arytmetyki. Przy pomocy wskazówek, podanych w „Formularzu" można, powiada Peano, udoskonalić historję matematyki schodząc według tych wskazówek do wieków dawniejszych".

Podajmy w krótkości, jakie wiadomości historyczne znajdują się w omawianym tomie IV-ym. Zawierają się one w Notach w każdym niemal paragrafie, często i w tekście przy wzorach. W rozdziałach o Logice matematycznej znajdujemy dane o znaku równości od czasów Recorde'a (1557), Viète'a, Leibniza, o rozwoju historycznym pojęcia klasy poczynając od pojęcia sylogizmu Arystoteles, „*Anali-*

tica priora lib Cap. IV, skąd zacytowany jest w brzmieniu oryginalnem odnośny ustęp[1]), wyjątki z rękopisów Leibniza, aż do Boole'a (1854) i Mc. Colla (1878).

W rozdziale o Arytmetyce znajdujemy interesujące noty historyczne o zasadzie indukcji, którą stosował już Maurolycus w swojem dziele *„Arithmeticorum libri duo"* (Wenecja 1571). B. Pascal w r. 1654. W wykładzie o mnożeniu podane są w brzmieniu oryginalnem wyjątki z Euklidesa i Legendre'a. Ważną i interesującą jest nota historyczna o systemach numeracji i prawidłach działań arytmetycznych, uwzględniająca główne fakty i najważniejsze dzieła i tablice rachunkowe i narzędzia w tej dziedzinie aż do czasów najnowszych. W notach do Teorji liczb wymienieni są Leonardo Fibonacci (1202), *Liber Abaci*, Metius (1626), Oughtred (1631), Rahn *„Teutsche Algebre oder algebraische Rechenkunst"* (1659); przy wzorach zaś wskazani są autorowie, którym zawdzięczamy twierdzenia, wyrażające się dzisiaj temi wzorami. (Euklides, Pascal i inni). W paragrafie o liczbach pierwszych podana literatura; a we wzorach tekstu cytowane w brzmieniu oryginalnem twierdzenia Euklidesa, Leonarda Pisano (1202), Bungusa 1599), Eulera (1782), Waringa, (1770) Lagrange'a (1771).

W „Algebrze" uwagi historyczno-krytyczne zawiera Nota o funkcjach. Nota o liczbach względnych zawiera ciekawe wyjątki z matematyka hinduskiego Brahmagupta, Diofanta i w tekście szereg wzorów z oznaczeniem źródła, z którego biorą początek podane wzory: (Euklides, z Diofant, Euler, Lagrange, Legendre, Oltramare, Degen i wielu innych). W paragrafie o liczbach wymiernych czytamy wyjątek z matematyka hinduskiego Aryabhata. W paragrafie o logarytmach podany ustęp z Nepera (1614). O logarytmie jest jeszcze mowa w paragrafie dalszym.

Pojęcie granicy jest bardzo szczegółowo, krytycznie i historycznie, opracowane w obszernym paragrafie (§ 63),

1) Εἰ τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Β, καὶ τὸ Β κατὰ παντὸς τοῦ Γ, ἀνάγκη το Α κατὰ παντὸς τοῦ Γ κατηγορεῖσθαι.

w którym podano poglądy Wallisa (1665), Leibniza i Maclaurina, Eulera, Lamberta, Cauchy'ego, Abela, Dirichleta i t. d. i gdzie w tekście są cytowane wyjątki z wielu autorów. Paragraf „O pochodnej" zawiera odnoszący się do tego przedmiotu wyjątek z pomnikowej rozprawy Leibniza (1684): *„Nova methodus pro maximis et minimis intemque tangentibus ét singulare pro illis calculi genus.* (Acta Eruditorum, 1684) i z wielkiego dzieła Newtona: *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1686), z L. Hospitala (1696), Lagrange'a (*Fonctions analytiques*), Arbogasta (1800).

W paragrafie „O całce" mamy w notce wyjątek z Cavalier'iego (1634), Jana Bernoulliego (1694), Eulera (1768), Legendre'a. W paragrafie o liczbie *e*, po wzorach które wyrażają jej definicję, podano 346 pierwszych cyfr dziesiętnych tej według Boormana (*Mathem. Mag.* 1883), wzory Eulera, Newtona, Fouriera i t.p. Paragraf 68-y o logarytmie zawiera logarytm dziesiętny liczby *c* t. j. moduł logarytmów dziesiętnych, obliczony przez Adamsa (1878) do 282 cyfr dziesiętnych, oraz wiadomość historyczną, że Gregorius a S. Vincentio w dziele *Opus geometricum*, wydanem w Antwerpji w r. 1647 Alfredo de Sarasa w broszurze *Salutio problematis a R. P. Marino Mersennio minimo propositi* (1649) wyrazili odpowiedniość pomiędzy polem hiperbili a logarytmem.

W tekście twierdzeń wzorów przybliżonych i szeregów na liczbę π, wyrażającą stosunek okręgu koła do średnicy czytamy ustępy z Ptolemeusza, Archimedesa, Aryabathy, mamy liczbę π wyrażoną w 707 cyfrach dziesiętnych według Shanksa (Londyn 1853), wzory z Viète'a, Jana Bernoulliego, Eulera, Machina, Dahsego (1844) i innych.

W paragrafach o rachunku geometrycznym znajdujemy obok wzorów w tekście cytaty z Apolloniusa, Euklidesa, z *Characteristica geometrica* Leibniza (zebrane przez prof. Vacca) dalej wyjątki z arabskiego matematyka Nasir Eddina (1260), Regiomontana (1531), Delambre'a (*Connaissance des temps* 1807), z Cagnoliego „*Trygonometria*“ (1804).

Paragrafy o geometrji różniczkowej zawierają wzory i twierdzenia, związane z nazwiskiem Archimedesa (o kwadraturze paraboli) Apolloniusa o stożkowych Heuracuta (1659), Leibniza (1691), Mersenne'a (*Logica physica mathematica* 1641), Cavalieri'ego (1635), Keplera (1618), Harriota (1603), Girarda (1629), Vivianiego Acta Eruditorum (1692).

Uzupełnienia do tego tomu zawierają wiele ważnych wskazówek historycznych, i krytycznych, podanych przez prof. Peano oraz jego współpracowników pr. p.p. Boggio i Vacca.

Na końcu tomu znajduje się chronologicznie ułożony spis biograficzno-bibljograficzny autorów, których twierdzenia i wzory znajdują się w tekście. Spis ten, bardzo starannie przygotowany przez prof. Vacca, prócz treściwych dat biograficznych, zawiera tytuły dzieł, z których czerpano materjał do Formularza, z podaniem dokładnem stronicy, paragrafu i tp. Spis ten obejmujący 154 nazwiska matematyków (między niemi 17 nazwisk matematyków żyjących w dacie ogłoszenia Formularza).

W tomie V-ym „Formularza“ napisanym w języku latino sine flexione, wydanym w roku 1908, powyższy spis autorów, znacznie rozszerzony i jest ułożony w porządku alfabetycznym nazwisk.

Notatka historyczna o Logice matematycznej w tym tomie wzmiankuje o pracach Lamberta (1781), de Morgana (1827), o najnowszych, dziełach Burali-Forti, Conturat, Russella, Wilsona.

W nocie do § 1 o Geometrji jest mowa o pojęciu wektora, które tkwi w twierdzeniach elementarnych już u Euklidessa, w pracach Wessella (1797), Bellavitisa (rachunek ekwipolencji 1832), Grassmanna (1844), Hamiltona (1845), któremu zawdzięczamy wprowadzenie nazwy „wektor“.

Notatka historyczna o całce potęgi wiąże twierdzenie o obliczeniu pól i objętości z tem pojęciem całki. Peano wyraża w symbolach analitycznych twierdzenia o polu trójkąta, o objętości ostrosłupa, wyznaczenie przez Archimedesa pola paraboli, środka ciężkości trójkąta, przytacza związany z tym przedmiotem wyjątek z dzieła Cavalieri'ego *Géometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*.

Notatka historyczna w § 90, dotycząca całkowalności równań różniczkowych zwyczajnych podaje prace, odnoszące się do tego zagadnienia: Cauchy'ego (1840), Lipschitza (1868, 1876), samego Peano (1886, 1894), Miego (1893) de la Vallée Poussina (1836), Artelà'go (1905), Blissa (1905), Bolza (1904).

W Przedmowie do tomu V-go, Formularza „napisał Peano: „Formularz zawiera historję każdego symbolu" formy, jakie posiada u różnych autorów i w różnym czasie, oraz uzasadnienie historyczne i logiczne przyjęcia danego symbolu. Podana jest historja każdego ważnego twierdzenia. Bibljografja w tomie IV ułożona przez Dr. Vacca w zestawieniu z bibljografją Dr. Pagliero w tomie V-ym stanowi kompendjum krótkie lecz dokładne historji matematyki [1]). Istotnie, jeżeli zachodzi potrzeba wyjaśnienia pojęć matematycznych i wzajemnego ich związku możemy w *Formulario* prof. Peano znaleźć pożądane ścisłe wskazówki. Uznaje wprawdzie sam Peano niewystarczalność jego dzieła, jeżeli chodzi o czasy najnowsze. Pisze bowiem w dalszym ciągu Przedmowy: Formularz ten dość zupełny dla matematyki wieków ubiegłych jest wielce niezupełny co do autorów nowszych i żyjących. Przedstawienie bowiem w symbolach pewnej teorji wymaga zanalizowania każdej idei

[1]) Oto w brzmieniu oryginalnem ustęp powyższy: Formulario contine de omni symbolo formas que habe apud differente auctores et in diverso tempore, et ratione historico et logico de symbolo adoptato. De omni propositione importante es scripto historia. Bibliographia composito per Dr. Vacca, tomo IV de Formulario et posito im correspondentia cum tome V per Dr. Pagliero es compendio breve, sed praeciso de historia de Mathematica.

i ujawnienia każdej hipotezy, co jest sprawą długą i często trudną. Przytem wiele teoryj nowych nie odznacza się dostateczną ścisłością".

Jeśli tak było przed ćwiercią wieku, kiedy Peano obdarzał literaturę matematyczną swojem dziełem, to tem prawdziwsze są słowa powyższe w czasie obecnym. Przez owe ćwierć wieku matematyka poczyniła wielkie postępy: powstały lub rozwinęły się Algebra nowsza, Teorja funkcyj zmiennej rzeczywistej, Teorja mnogości, Analiza funkcjonalna, Geometrja różniczkowa rzutowa i t. d., i wzbogaciły wiedzę matematyczną mnóstwem pojęć i twierdzeń, których nie obejmuje, bo objąć nie mógł, „Formularz". Czy pomiędzy matematykami dzisiejszymi, zwłaszcza wśród uczonych, wykształconych w szkole profesora Peano, i wśród zwolenników jego metod znajdą się jednostki, które kontynuować będą dzieło swego mistrza i podejmą pracę przygotowania tomu VI-go na tej mocnej podwalinie, którą zbudował niezapomniany myśliciel i wielki pracownik nauki. Przesądzać tego nie możemy.

Ale i w tej postaci, do jakiej doprowadził swoje dzieło sam Peano, może „Formularz" nieść bezcenne usługi w studjach naukowych, posiada bowiem trwałość, której nie osłabi najdalszy rozwój matematyki. Szczególnie pożytecznym jest i będzie on dla wykładających, którzy pragną nauczanie podnieść i ożywić przez uwzględnienie rozwoju historycznego pojęć i metod. Ci znajdą w „Formularzu" niezawodnego i niezastąpionego przewodnika.

Sądzimy także, że byłoby wielce pożądane, aby na podstawie pomocy bogatego zasobu uwag, not historycznych oraz wiadomości bibljograficznych, zawartych w „Formularzu" mogły być ułożone. „Wypisy matematyczne", jako książka do czytania dla młodzieży studjującej nauki matematyczne.

Drukarnia Kooperatywy Pracowników Drukarskich. Warszawa, Zielna 47. Tel. 619-57.

„DRUKARNIA KOOPERATYWY PRACOWNIKÓW DRUKARSKICH"
Warszawa Zielna 47 Tel. 619-57