QUELQUES RÉFLEXIONS

SUR

CERTAINS RÉSULTATS DE HENRI POINCARÉ

CONCERNANT LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE [1]

En relisant quelques pages célèbres de Henri Poincaré sur la stabilité en Mécanique et sur l'explication mécanique des phénomènes naturels, j'ai été conduit à faire quelques réflexions qui, si simples qu'elles soient, présentent peut-être quelque intérêt.

I.

1. On sait quelle admirable application Poincaré a fait de la théorie des invariants intégraux à la discussion de ce qu'il appelle *la stabilité à la Poisson* [2]. Prenons d'abord le cas le plus simple, en envisageant le système

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, n), \tag{1}$$

possédant un invariant intégral

$$\int \cdots \int M\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n, \tag{2}$$

positif, c'est-à-dire pour lequel M $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est positif.

On suppose que, pour des positions initiales correspon-

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 38, 1914.

(2) *Voir* le Tome III (Chap. XXVI) des *Nouvelles méthodes de la Mécanique céleste.*

dant à un certain volume, la trajectoire du point $(x_1, x_2, ..., x_n)$ reste à l'intérieur d'un volume fini V. Poincaré établit que, dans ces conditions, il y a stabilité à la Poisson, c'est-à-dire que, étant considéré un volume v_0 si petit que l'on voudra, il y a des trajectoires qui traversent v_0 une infinité de fois avant et après l'époque *zéro.* D'une manière encore plus précise, la probabilité pour qu'une trajectoire partant d'un point de v_0 ne traverse pas une infinité de fois v_0 est nulle. La démonstration de ces résultats donnée par Poincaré est merveilleuse par sa simplicité et son élégance. Les applications à des questions de Mécanique analytique sont nombreuses, car pour les équations canoniques on peut prendre $M = 1$; il suffira de citer l'exemple d'un corps pesant mobile autour d'un point fixe.

2. On a supposé implicitement, dans ce qui précède, que M et les X restaient finis dans le volume fini V. Poincaré s'arrête un moment sur le cas où il en serait autrement, mais il resterait ici bien des points à élucider, et notamment celui-ci. Disons qu'il y a choc quand les X deviennent infinis. Des circonstances très différentes peuvent alors se produire; un cas intéressant est celui où l'on peut faire un *prolongement analytique* de la trajectoire après le choc, où l'on a, par exemple, quelque chose d'analogue à ce qui se passe d'après Sundmann dans le problème des trois corps quand deux corps viennent à se choquer (le problème des trois corps ne rentre pas d'ailleurs dans le cas actuel, le volume V n'étant pas fini). Il faut évidemment supposer que l'intégrale (2) étendue au volume V reste finie, et l'on peut alors montrer que le théorème sur la stabilité subsiste, à condition d'être généralisé, c'est-à-dire en l'étendant aux trajectoires des points du volume v_0 et à leurs prolongements analytiques, s'il y a lieu de les envisager.

Pour donner un exemple très simple, envisageons dans un plan un point en mouvement avec une fonction des forces

$U(x, y)$. On a les deux équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Le système des quatre équations à considérer est ici

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x},$$
$$\frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dy'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

On a l'intégrale première des forces vives

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - U = h,$$

et l'invariant intégral est

$$(\alpha) \qquad \int\int\int\int dx'\, dy'\, dx\, dy.$$

Pour pouvoir appliquer la théorie générale, il faudra que, pour les valeurs h' voisines d'une valeur convenable h, soit pour h' compris $h - \varepsilon$ et $h + \varepsilon$ (ε étant un nombre positif déterminé), l'inégalité

$$U + h' > 0$$

ait pour conséquence que x et y sont limités. Nous avons alors, par hypothèse, un domaine *fini* dans le plan (x, y) défini par l'inégalité

$$(\beta) \qquad U + h - \varepsilon > 0.$$

Il faut voir si l'intégrale (α) est finie. Il en est bien ainsi. Le domaine d'intégration qui joue le rôle de V de la théorie générale correspond à l'ensemble des valeurs de (x, y, x', y') répondant à l'inégalité (β) et aux inégalités

$$U + h - \varepsilon < \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) < U + h + \varepsilon.$$

On peut intégrer séparément par rapport à (x, y) et à $(x',$

y'). Or

$$\iint dx'\,dy'$$

est l'aire de la couronne

$$2\pi[U+h+\varepsilon-(U+h-\varepsilon)]=4\pi\varepsilon.$$

Il faut former ensuite l'intégrale

$$4\pi\varepsilon\iint dx\,dy$$

étendue à l'aire finie (x, y) définie par l'inégalité (β). Donc *l'intégrale* (4) *a une valeur finie.* On remarquera que U ne reste pas nécessairement finie; pourvu qu'on puisse envisager un prolongement analytique correspondant au cas de $U=\infty$, c'est-à-dire à un choc, la théorie s'applique.

Ceci peut s'appliquer en particulier à un point attiré par n points fixes en raison inverse du carré de la distance. On aurait

$$U=\frac{\mu_1}{r_1}+\frac{\mu_2}{r_2}+\ldots+\frac{\mu_n}{r_n}\qquad(\text{les } \mu \text{ positifs}),$$

les r désignant les distances du point (x, y) à n points fixes O_1, O_2, ..., O_n. Pour h négatif et de valeur absolue assez petite, les courbes

$$U+h=0$$

ont une forme facile à tracer, et l'on aura l'inégalité

$$U+h>0$$

à l'intérieur d'une aire *limitée.* Tout ce qui précède est susceptible d'application.

3. La question devient singulièrement difficile quand V est infini, et ici Poincaré développe quelques vues hardies qui demanderaient à être approfondies. Supposons que, pour le système (1), on puisse prendre $M = 1$. En même

temps que le système (1), envisageons le système

$$\frac{dx_i}{dt'} = \frac{X_i}{P} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

P étant une fonction positive de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si P est convenablement choisi, l'invariant intégral du système (3)

$$\int \cdots \int P\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

pourra avoir un sens, quand l'intégrale est étendue au volume infini V; c'est ce que nous allons supposer. Les équations (1) et (3) donnent

$$dt = \frac{dt'}{P}, \qquad \text{d'où} \qquad t = \int_0^{t'} \frac{dt'}{P}.$$

Les trajectoires correspondant à (1) et (3) sont les mêmes, mais diversement parcourues. Il peut arriver que, pour une valeur finie $t' = T$, le point s'éloigne à l'infini, et qu'en même temps l'intégrale

$$\int_0^T \frac{dt'}{P}$$

soit infinie. C'est, en quelque sorte, *un prolongement analytique des trajectoires de* (1) *au delà du temps* $t = \infty$ que propose Poincaré. On peut y parvenir si, pour le système (3), il est possible de définir un prolongement analytique de la trajectoire au delà du temps $t' = T$. En supposant que toutes les conditions indiquées se trouvent remplies, *ce qui pourra être singulièrement difficile à décider*, il y aura un théorème de stabilité en l'étendant non seulement aux trajectoires, mais aussi à leurs prolongements analytiques.

Un exemple extrêmement simple du type précédent est fourni par le mouvement dans un plan d'un point repoussé par un point fixe en raison inverse du carré de la distance. Supposons le point qui repousse placé à l'origine, et r_1 sa distance au point (x, y); la trajectoire est l'hyperbole classique. La surface

$$(\gamma) \qquad \frac{\mu_1}{r_1} + h > 0 \qquad (\mu_1 < 0,\ h > 0)$$

s'étend à l'infini. On peut trouver $P(x, y)$ de telle sorte que l'intégrale

$$\iint P(x, y)\, dx\, dy,$$

étendue à l'espace infini (γ), soit finie. Il suffit de prendre

$$P(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

La nature du prolongement analytique en question est facile à apercevoir; c'est le passage d'une branche d'hyperbole à l'autre. Servons-nous des coordonnées polaires. On a

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta} \qquad (e > 1).$$

On voit que

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C,$$

t est infini pour $\theta = \alpha \left(\cos\alpha = \frac{1}{e}\right)$. On obtient de suite

$$dt' = P\, d\theta = \frac{1}{C} \frac{r^2\, d\theta}{(1 + r^2)^2},$$

Donc

$$t' = \frac{1}{C} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{r^2\, d\theta}{(1 + r^2)^2},$$

et il est clair que t' est fini pour $\theta = \alpha$; on a

$$T = \frac{1}{C} \int_{\theta_0}^{\alpha} \frac{r^2\, d\theta}{(1 + r^2)^2},$$

et l'on reconnaît de suite que θ peut être développé suivant les puissances e $(t' - T)^{\frac{1}{3}}$; d'où le prolongement analytique cherché.

4. J'ai tenu à entrer dans quelques détails sur la proposition célèbre de Poincaré concernant la stabilité à la Poisson. Il faut reconnaître que c'est seulement dans le cas du paragraphe 1 que l'on a une conclusion précise permettant d'affirmer réellement la stabilité Aussi, ce n'est pas sans étonnement que l'on voit le parti que d'éminents physiciens ont cherché à tirer de ce théorème auquel ils donnent la forme générale suivante : *un système dynamique, si complexe soit-il, repasse en général une infinité de fois par une configuration aussi voisine que l'on veut de son état initial.* D'après ce qui précède, rien n'autorise à énoncer une telle proposition, et les probabilités sont plutôt pour qu'elle soit inexacte. Pour le moment au moins, l'idée du *retour éternel*, à laquelle se sont plu tant d'esprits philosophiques, cherche en vain des confirmations dans les théorèmes généraux de la Mécanique analytique, et *l'on peut constater une fois de plus la tendance qu'ont à oublier des restrictions gênantes ceux qui veulent philosopher sur l'avenir de l'Univers.*

II.

Je passe maintenant à une tout autre question. Dans la Préface de son livre *Électricité et Optique*, Poincaré se demande ce que l'on doit entendre par *interprétation mécanique d'un phénomène naturel.* Cette interprétation est ramenée par lui *à la possibilité de la formation d'un système d'équations de Lagrange avec un certain nombre de paramètres* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *que l'expérience atteint directement et permet de mesurer.* Dans ces équations figurent l'énergie cinétique T et une fonction des forces U. Cette possibilité étant supposée, on pourra toujours, d'après Poincaré, déterminer p *masses* m_i (visibles ou cachées) et leurs $3\,p$ coordonnées (x_i, y_i, z_i) fonctions des q (en prenant p assez grand), de manière que la force vive de ce système de masses soit égale à l'énergie cinétique T figurant dans les équations de Lagrange. L'indétermination est ici très grande, et c'est précisément là qu'en veut venir Poincaré, dont la conclusion est que, *s'il y a une explication mécanique, il y en a une infinité.*

Il faut avouer, dirons-nous, que cette indétermination est même trop grande, car on perd complètement de vue les corps en présence. Ainsi, par exemple, suivant les formes qu'auront l'ensemble des masses partiellement indéterminées m_i, il *pourra y avoir ou non des chocs.* Il y a quelque chose de singulier à avoir des explications où des circonstances analytiques aussi différentes peuvent se présenter. On peut aussi se demander *ce que devient la répartition des forces réelles dans les systèmes, en partie arbitraires, auxquels on est conduit.* Les vues générales de Poincaré esquissées ci-dessus portent certes la marque de son puissant esprit, mais elles prêtent à bien des difficultés et font par trop abstraction des réalités; elles sont d'un philosophe et non d'un physicien. Il semble que la notion d'explication mécanique ne prenne un sens précis, pouvant d'ailleurs varier de l'une à l'autre, que pour des catégories bien précisées de phénomènes, et peut-être est-il vain de chercher une définition générale. Il n'est pas nécessaire, pour avoir une explication que l'on dira mécanique, d'apercevoir les équations différentielles de mouvements moléculaires, quand rien ne vient en régler l'arbitraire. Ce n'est pas à dire que les explications moléculaires ne soient pas parfois fécondes. Trop de travaux ont montré le contraire dans ces dernières années, mais ce n'est pas par une voie aussi arbitraire et aussi indéterminée que celle indiquée par Poincaré, que peuvent être introduits atomes et molécules.