LES PRINCIPES
DE
L'ANALYSE ET DE LA GÉOMÉTRIE [1]

I. — LES PRINCIPES DE L'ANALYSE.

Dans la seconde moitié du siècle dernier, l'attention des mathématiciens s'est portée sur les fondements des différentes branches de la pensée mathématique. En particulier, depuis vingt ans, un grand nombre de publications ont paru sur la philosophie des sciences mathématiques; elles sont bien en accord avec les tendances de l'époque où nous vivons, et où l'esprit humain applique dans des directions variées une critique de plus en plus pénétrante. Placé à ce point de vue, on a trouvé même dans le nombre entier, comme je le rappelais au début du chapitre précédent, des difficultés que n'a pas dédaignées un grand physicien comme Helmholtz. Plus grandes encore étaient les difficultés relatives aux nombres incommensurables qui, dans l'antiquité, avaient tant troublé les géomètres grecs; pour les analystes modernes, un nombre incommensurable représente, dans l'ensemble des nombres rationnels, une coupure qui correspond à un partage de ces nombres rationnels en deux classes.

L'étude arithmétique du concept du continu est loin d'être simple, et a donné lieu à de nombreuses recherches,

[1] Extrait du Chapitre II du Livre « *La Science moderne et son état actuel* », 1re édition 1905.

parmi lesquelles il faut citer celles de M. Dedekind et de M. G. Cantor. Nous ne pouvons que nous y arrêter un moment. Pour les anciens analystes, la notion était tout intuitive, se rattachant, par exemple, à la vue d'un segment de droite; dans l'ensemble des points d'une droite qui forme le continu linéaire, il y a dans tout intervalle, si petit qu'il soit, des points appartenant à l'ensemble. Cette propriété a été longtemps considérée comme catactéristique du continu. En fait, l'ensemble des points d'une droite correspondant à une abscisse rationnelle jouit de la propriété précédente et est distinct du continu linéaire. A cette propriété de l'ensemble qu'on exprime souvent en disant qu'il est dense, il faut en adjoindre un autre pour caractériser l'ensemble continu.

On l'exprime, en disant que, de plus, l'ensemble doit être parfait. Voici ce que l'on entend par un ensemble parfait. Dans un ensemble de points, on appelle point-limite un point A dans le voisinage duquel (si petit que soit autour de lui ce voisinage) il y a toujours un point de l'ensemble autre que A. L'ensemble *dérivé* d'un ensemble donné est l'ensemble formé par ses points limites. Un ensemble est dit *parfait*, quand il coïncide avec son dérivé. Le continu est un ensemble à la fois parfait et dense. L'ensemble des nombres commensurables est bien dense, mais il n'est pas parfait, puisqu'il ne contient pas ses points limites qui correspondent à des nombres incommensurables.

Ces notions sont abstraites, mais le caractère de ces spéculations est précisément une grande méfiance de l'intuition, et c'est ici la lutte entre l'intuition et la logique. Au reste, on rencontre toujours dans l'histoire de la Science les principales notions avec un caractère tout d'abord purement intuitif, et ce n'est que beaucoup plus tard que commence l'examen critique. Ainsi les géomètres n'ont pas pendant longtemps éprouvé le besoin de définir la longueur d'un arc de courbe ou l'aire d'une surface; c'étaient pour eux des notions premières. L'intuition ne pouvait évidemment amener à considérer des courbes non rectifiables ou des aires non quarrables. Il en est de même pour l'idée de fonction, c'est-à-dire de dépendance entre deux ou plusieurs grandeurs, sur laquelle repose toute la science mathématique. Il a fallu longtemps avant qu'on se rendît compte de l'étendue extraordinaire de cette notion. On doit, d'ailleurs, reconnaître qu'il est indispensable, pour les progrès de la Science, que les choses paraissent d'abord simples. Sans vouloir trop généraliser, on peut dire que l'erreur est quelquefois utile, et que, dans les époques vraiment créatrices, une vérité incomplète ou approchée peut être plus féconde que la même vérité accompagnée des restrictions nécessaires. L'histoire de la Science confirme plus d'une fois cette remarque. Si, par exemple, Newton et Leibnitz avaient pensé que les fonctions continues n'ont pas nécessairement une dérivée, ce qui est le cas général, le Calcul différentiel n'aurait pas pris naissance; de même, les idées inexactes de Lagrange sur la possibilité des développements en séries de Taylor ont rendu d'immenses services, et il est heureux que Newton ait eu, au début de ses recherches, pleine confiance dans les lois de Képler. Mais, sans prolonger cette digression, pour laquelle je puis d'ailleurs renvoyer au chapitre précédent, nous devons revenir à l'examen des principes de la mathématique moderne.

L'idée de fonction s'est singulièrement agrandie depuis cinquante ans. Les fonctions *usuelles* rentrent dans les fonctions analytiques de Lagrange, c'est-à-dire développables, en général, par la formule de Taylor; ne se tenant pas à cette définition, toute une école de géomètres a approfondi la notion de fonction prise dans toute sa généralité. Ce fut, pour l'époque, un résultat bien remarquable, quand les travaux de Riemann et de Weierstrass montrèrent qu'il existe des fonctions continues n'ayant pas de dérivées. Toutes les propositions accordées pour les fonctions usuelles doivent être reprises, quand on se place au point de vue le plus général.

On rencontre alors des énoncés très déconcertants; ils sont particulièrement curieux, quand on fait des applications géométriques. Quoi de plus simple semble-t-il, qu'une courbe dont les coordonnées sont des fonctions continues d'un paramètre variant entre deux valeurs déterminées ? M. Peano a cependant montré qu'on peut choisir ces deux fonctions de telle sorte que, quand le paramètre varie, le point puisse prendre une position quelconque dans un rectangle; nous avons donc *une courbe qui est une aire.* De tels résultats nous apprennent à nous défier de nos intuitions les plus simples; c'est ici la revanche de la logique. On aurait aussi beaucoup étonné les géomètres du XVIII[e] siècle en leur disant qu'il existe des surfaces développables qui ne sont pas des surfaces réglées. Ces énoncés supposent évidemment qu'on ne fait pas sur les fonctions dont on se sert, les hypothèses particulières admises au début du calcul différentiel.

Ici une question se pose. Qu'est-ce qui a guidé plus ou moins consciemment dans le choix de ces hypothèses ? Il n'est pas douteux que le souci des applications aux phénomènes naturels n'ait très souvent guidé le mathématicien dans son choix. Une hypothèse essentielle a été celle de la continuité. Suivant le vieil adage, *Natura non facit saltus*, nous avons le sentiment, on pourrait dire la croyance, que, dans la nature, il n'y a pas de place pour la discontinuité. Il est utile quelquefois de conserver le discontinu dans nos calculs, par exemple, quand nous regardons comme nulle la durée du choc en Mécanique rationnelle, ou quand nous réduisons à une surface les couches de passage dans plusieurs questions de Physique; mais nous savons que, pour si petite qu'elle soit, les chocs ont une certaine durée, et les physiciens nous ont appris à mesurer l'épaisseur de certaines couches où se produisent des variations très rapides.

L'idée de dérivée s'impose déjà moins; elle répond cependant au sentiment confus de la rapidité plus ou moins grande avec laquelle s'accomplit tel ou tel phénomène. L'hypothèse relative à la possibilité de la dérivation d'une fonction a donc une origine analogue à celle de la continuité; d'ailleurs, d'après ce que j'ai dit plus haut, l'idée de continuité n'est pas aussi claire au fond qu'elle en a l'air, mais il s'agit ici de la notion intuitive du continu physique.

Dans d'autres cas, on ne voit pas de cause du même ordre dans la particularité imposée à la fonction; il en est ainsi, ce semble, pour la propriété des fonctions analytiques. Les fonctions étudiées les premières dont j'ai retracé sommairement l'histoire dans le chapitre précédent, comme les fonctions rationnelles, l'exponentielle, les lignes trigonométriques jouissant de cette propriété, l'attention se sera trouvée portée sur elles; et ensuite la facilité avec laquelle cette hypothèse a permis d'aborder certaines questions a fait acquérir aux fonctions analytiques une importance considérable. C'est donc à la facilité avec laquelle nous les manions dans nos calculs qu'elles doivent le grand rôle qu'elles jouent.

Le mot *infini* revient souvent en mathématiques, mais les mathématiciens n'ont vu longtemps dans ce terme qu'une expression indiquant un nombre supérieur à tout nombre donné, laissant certains philosophes disserter sur l'infini statique et l'infini dynamique, et, comme le disait M. J. Tannery : « La notion de l'infini dont il ne faut pas faire mystère en mathématiques se réduit à ceci : après chaque nombre entier, il y en a un autre. » Depuis les travaux de M. Cantor sur les ensembles, et particulièrement sur les nombres transfinis, des points de vue nouveaux ont été introduits, dont il appartient à l'avenir de montrer l'importance. On doit attacher un grand intérêt à cette remarque, d'après laquelle l'ensemble des nombres rationnels est *énumérable*, tandis que l'ensemble des nombres ne l'est pas, ce qui revient à dire que les nombres rationnels peuvent être affectés à un numéro d'ordre déterminé, tandis que les nombres irrationnels ne sont pas susceptibles d'être *comptés;* une sorte de brèche est ainsi faite dans l'*infini*. Il serait trop long de nous arrêter ici sur les nombres ordinaux transfinis. Nous donnerons plus aisément une idée des nombres cardinaux transfinis, en revenant aux ensembles. Deux ensembles, entre les éléments desquels peut être établie une correspondance uniforme, sont dits avoir la même puissance ou le même nombre cardinal. Pour l'ensemble des nombre entiers, ce nombre cardinal, que nous pouvons appeler a, est le premier nombre cardinal transfini. A l'ensemble des nombres réels correspondra, au contraire, une puissance ou un nombre cardinal différent de a; désignons-le par c. Il existe des ensembles dont la puissance ou le nombre cardinal n'est ni a ni c; ainsi, on peut montrer qu'à l'ensemble de toutes les fonctions possibles d'une variable définies dans un certain intervalle, correspond un nombre cardinal plus grand que c. Ceci suffit à faire entrevoir une sorte d'arithmétique des nombres transfinis, sur laquelle on a déjà publié de nombreux travaux. Il n'y aura lieu évidemment de la développer que si ces vues se montrent fécondes dans l'analyse; la considération des nombres transfinis a permis déjà de découvrir certains théorèmes, mais on doit dire qu'ils ont pu ensuite être obtenus par une autre voie. Ces spéculations sur l'infini forment un chapitre tout nouveau dans la science mathématique de ces dernières années, mais il faut reconnaître que ce chapitre n'est pas exempt de paradoxes. C'est ainsi que l'on a pu définir certains nombres appartenant et n'appartenant pas tout à la fois à des ensembles déterminés. Toutes les difficultés de ce genre résultent de ce que l'on ne s'entend pas sur le mot *existence*. Certains adeptes de la théorie des ensembles sont des scolastiques, qui auraient aimé à discuter les preuves de l'*existence* de Dieu avec saint Anselme et son contradicteur, le moine de Noirmoutiers Gaunilon.

L'extension de nos idées sur les fonctions et sur l'infini n'est pas la seule qu'aient poursuivie depuis trente ans les mathématiciens qui s'intéressent aux principes de la Science; la question des quantités complexes a vivement excité l'intérêt, d'autant qu'une certaine obscurité planait sur elle, obscurité qu'entraînait le mot expressif, mais peu heureux, de quantités imaginaires. Le sujet ne présente plus aujourd'hui rien de mystérieux. En supposant que les lois commutative et associative subsistent, Weierstrass a réalisé des systèmes de nombres où figurent n symboles et où tous les nombres sont formés linéairement avec ces symboles; il fait, en outre, l'hypothèse que la somme, la différence, le produit et le quotient de deux nombres du système font eux-mêmes partie du système. Il y a une infinité de tels systèmes de nombres complexes. Ces nombres diffèrent seulement en un point des nombres complexes ordinaires. Quand n est supérieur à deux, il peut exister des nombres différents de zéro, dont le produit par certains autres nombres est nul. On appelle ces nombres des diviseurs de zéro. Malgré cette singularité, cette nouvelle algèbre est réductible à l'algèbre des nombres complexes ordinaires; il n'y a donc là qu'une curiosité et nullement un instrument nouveau dont puisse profiter l'Analyse mathématique.

Nous avons admis que les lois commutative et associative subsistaient dans l'algèbre précédente. On s'est placé à un point de vue plus général en supposant que seule la loi associative subsiste, abandonnant la loi commutative, de telle sorte que le produit de deux facteurs ne soit pas nécessairement indépendant de l'ordre des facteurs. On a alors une algèbre beaucoup plus générale; un exemple célèbre d'un système à quatre unités est fourni par les *quaternions* d'Hamilton. De nombreux travaux ont établi des classifications dans cette théorie. On demandera si ce vaste symbolisme est susceptible d'accroître un jour la puissance de l'Analyse. Il est permis de penser que ces algèbres nouvelles n'auront d'autre intérêt pratique que de conduire à des notations plus condensées, ce qui peut, d'ailleurs, avoir son prix, comme on le voit pour les quaternions, dont l'emploi est si prisé en Angleterre par les physiciens.

II. — LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE.

Après les principes de l'Analyse, l'étude des bases de la géométrie n'a pas moins attiré l'attention : tout n'est pas si clair que le croient beaucoup de personnes dans les commencements de la géométrie, et d'Alembert a pu écrire jadis que la définition et les propriétés de la ligne droite sont l'écueil et le scandale de la géométrie. Nous sommes aujourd'hui bien convaincus qu'il y a dans toute science un point au delà duquel on ne peut remonter : il faut poser certaines données, certains concepts, et formuler au sujet de ces concepts des axiomes ou postulats qui reviennent, au fond, à les définir. On posera, par exemple, au début de la géométrie élémentaire, les concepts de point, de ligne droite, et l'on formulera cet axiome que deux points déterminent toujours une droite. C'est pour le géomètre un difficile problème que d'établir la géométrie sur un système complet et non contradictoire d'axiomes indépendants; dans ces derniers temps, des travaux remarquables, tels que ceux de M. Veronese et surtout de M. Hilbert, ont été publiés dans cette voie. Suivant qu'on adopte tel ou tel système d'axiomes, on aura telle ou telle géométrie. On peut maintenant se demander quelle est l'origine de ces postulats. Pour Kant, la source de nos connaissances géométriques est dans l'intuition, et les axiomes, plus ou moins explicitement formulés au début de la géométrie ont un caractère de nécessité absolue; l'espace est pour Kant une forme *a priori* de notre sensibilité. Les géomètres ne souscrivent pas en général à cette opinion, depuis qu'on a montré que diverses géométries, exemptes de toute contradiction logique, peuvent être obtenues en partant de divers systèmes de postulats, mais certains philosophes continuent à y voir une confirmation de la doctrine kantienne, selon laquelle, entre toutes les formes logiquement possibles d'espace, une seule nous est donnée et imposée, comme forme d'intuition, par notre nature d'êtres sensibles, et non par notre raison.

L'observation et l'expérience jouent un rôle indispensable dans la formation de nos connaissances géométriques; mais, tout en admettant ce point indiscutable pour la plupart, les avis sont encore très partagés. Quelques physiciens voient uniquement dans les axiomes des inductions basées sur les observations et les mesures faites sur les corps : c'est l'empirisme géométrique. D'autres attribuent un rôle plus ou moins grand à l'esprit travaillant sur les données de l'expérience. Pour certains même, comme M. Poincaré, le concept *de groupe*, sur lequel nous reviendrons dans un moment, et dont il a été déjà question au chapitre précédent, préexiste dans notre esprit et s'impose comme forme de notre entendement; en outre, plusieurs interprétations de l'expérience sont possibles, et parmi celles-ci l'esprit a choisi la plus *commode* et la plus *simple.* Je me suis expliqué dans l'introduction sur la signification de ces mots en même temps que sur ce qu'est pour nous le réel. Les biologistes, dominés par la thèse évolutionniste, ne manquent pas de demander aux mathématiciens ce que c'est que l'esprit *humain* et sa *logique;* pour eux, la commodité et la simplicité résultent de l'hérédité et de l'habitude, et la logique n'est que le résumé de l'expérience ancestrale. Dans un article sur la logique et l'expérience, M. Le Dantec plaisante, avec esprit, ceux qui parlent d'un monde euclidien et il ajoute : « Si les choses étaient autrement, nous aussi nous serions autrement, mais nous ne pourrions exister qu'adéquats aux choses. » Sans discuter sur le sens du mot *adéquat*, je dirai simplement qu'on peut regarder la géométrie comme une *théorie* relative aux *faits géométriques*, en entendant le mot *théorie* comme nous le ferons plus loin en mécanique et en physique. D'une manière plus précise, il paraît impossible de séparer l'acquisition des notions géométriques des notions physiques les plus simples, la géométrie dans des temps très anciens ayant fait partie de la physique. Sans changer l'ensemble de ces notions, on ne peut ,semble-t-il, remplacer le groupe euclidien par un autre. On retombe ainsi, sous un autre point de vue, sur les idées de Gauss, qui considérait comme un fait expérimental que la courbure de notre espace est nulle, et regardait le système euclidien comme plus vrai que les autres systèmes géométriques.

Ceci dit, nous allons rester maintenant sur le terrain mathématique, et sur celui de la logique au moins actuelle. J'ai fait tout à l'heure allusion à divers systèmes possibles de postulats. Si l'on ouvre un traité de géométrie élémentaire, on ne trouve formulé bien explicitement qu'un seul axiome : il porte le nom de *postulatum d'Euclide.* En réalité un nombre considérable d'axiomes sont sous-entendus, et, en étudiant les plus récents travaux sur les principes de la géométrie, on est effrayé à la vue de la longue liste des postulats nécessaires à poser pour que la géométrie ait toute la rigueur logique qu'on lui attribue généralement. Les plus importants se rapportent aux concepts de droites, de plans, d'angles, de congruences; il en est un autre, d'une nature différente, qu'il pourrait paraître inutile de formuler, c'est l'axiome de continuité ou axiome d'Archimède. Au point de vue logique, ce serait une erreur. Ainsi on a pu construire des géométries étranges dans lesquelles, en portant à partir d'un point d'une droite une succession de segments égaux, il n'est pas possible d'atteindre un point déterminé de la droite, quelque grand que soit le nombre de ces segments; or, l'axiome d'Archimède affirme précisément cette possibilité.

Tout le monde aujourd'hui a entendu parler de la géo métrie euclidienne et des géométries non euclidiennes. Un *postulatum*, célèbre dans la Science, porte le nom d'Euclide. Le célèbre géomètre grec demande que l'on accorde que par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite (l'énoncé d'Euclide avait une forme un peu différente, mais il revient entièrement au précédent). Il avait vainement essayé de rattacher logiquement cette affirmation aux données plus ou moins intuitives sur lesquelles il fondait la géométrie. Pendant longtemps on chercha une démonstration du fameux *postulatum*. Ces démonstrations sont intéressantes à parcourir, on y retrouve tous les genres d'erreurs souvent rééditées dans le courant du siècle dernier, et que reverra sans doute de temps en temps le siècle présent; ce sont toujours des substitutions à l'hypothèse euclidienne d'une autre hypothèse que l'auteur juge plus évidente. Quoiqu'il se termine par des erreurs, il faut signaler cependant à part un travail d'un Jésuite italien, le père Saccheri, paru en 1733 sous le titre pittoresque « Euclides ab omni nœvo vindicatus ». Au lieu de substituer à l'hypothèse euclidienne quelque autre postulat paraissant plus plausible, le père Saccheri veut atteindre le but cherché en montrant qu'on rencontre des contradictions, si l'on n'admet pas le célèbre postulat. Considérons avec lui un quadrilatère plan $A\ B\ C\ D$, dans lequel deux côtés opposés AD, BC sont égaux et perpendiculaires à un troisième AB. Si l'on admet l'hypothèse euclidienne, les angles C et D sont droits; si l'on ne l'admet pas, les angles sont encore égaux, et l'on peut supposer qu'ils sont droits, aigus ou obtus. Saccheri croit pouvoir montrer qu'on arrive à des contradictions, si on n'est pas dans le cas de l'angle droit; cette partie du Mémoire est mauvaise, mais l'auteur fait auparavant quelques remarques fondamentales qui le placent, malgré lui, parmi les précurseurs des géométries non euclidiennes. Il montre que, suivant que l'on sera dans le cas de l'angle droit, de l'angle aigu ou de l'angle obtus, la somme des angles d'un triangle sera égale, inférieure ou supérieure à deux droits, et il voit très bien que celle de ces circonstances se présentant pour un seul triangle se présentera pour tout autre triangle, proposition que Legendre devait retrouver plus tard pour le cas où la somme est égale ou inférieure à deux droits.

Dans cet historique des géométries non euclidiennes, si rapide qu'il soit, on doit citer encore Lambert, dont les résultats les plus remarquables sont relatifs à l'aire d'un triangle, quand on abandonne l'axiome d'Euclide, aire dans l'expression de laquelle figure l'excès positif ou négatif de la somme des angles du triangle sur deux angles droits; la géométrie sphérique occupa beaucoup Lambert et il eut l'intuition très nette que le cas où la somme des angles d'un triangle est moindre que deux droits correspond à la géométrie sur une sphère de rayon imaginaire. Enfin Legendre s'occupa longuement du *postulatum* d'Euclide; en particulier, il montra très simplement que dans un triangle, la somme des angles d'un triangle ne peut surpasser deux droits, mais sa démonstration, il ne faut pas l'oublier, suppose que la droite est infinie, hypothèse qui n'est pas vérifiée dans la géométrie sphérique où le rôle de la droite est tenu par les arcs de grand cercle. Il résulte aussi clairement des recherches de Legendre que le postulat d'Euclide revient à dire que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits. On peut, d'ailleurs, donner bien d'autres formes au *postulatum* d'Euclide, en posant qu'il existe des droites équidistantes, ou encore qu'il existe des figures semblables. L'illustre Gauss, qui, dès les dernières années du XVIII[e] siècle, avait approfondi toutes ces questions, sans en rien dire que dans quelques lettres particulières publiées il y a seulement peu d'années, regardait l'axiome d'Euclide comme équivalent à l'assertion que l'aire d'un triangle peut grandir indéfiniment.

Comme je viens de la dire, Gauss, craignant sans doute « les clameurs des béotiens », dont il parle dans une de ses lettres, ne publia rien des recherches où il établissait que la négation du *postulatum* d'Euclide n'entraîne aucune contradiction. A la géométrie non euclidienne, où la droite a une longueur infinie, se rattachent les noms de Lobatschewski et de Bolyai qui, indépendamment l'un de l'autre, édifièrent une géométrie où la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux angles droits. Le point de départ de Lobatschewski et de Bolyai est le suivant : étant donnés dans le plan une droite et un point, les droites menées par le point se partagent en deux classes, suivant qu'elles rencontrent ou non la droite donnée. Ces deux catégories de droite sont séparées par les *deux parallèles* (coïncidentes dans le cas euclidien) que l'on peut mener du point à la droite. L'hypothèse des deux parallèles menées par un point à une droite caractérise le système de géométrie qu'on appelle souvent *géométrie hyperbolique*, et qui correspond au cas de l'angle aigu dans le quadrilatère de Saccheri dont je parlais plus haut. Le cas où les deux parallèles coïncident correspond à la géométrie euclidienne ou *parabolique;* c'est le cas de l'angle droit de Saccheri. Un chapitre fondamental de la géométrie hyperbolique concerne la trigonométrie non euclidienne, c'est-à-dire les relations entre les angles et les côtés d'un triangle. Comme l'avait prévu Lambert, la géométrie hyperbolique trouve une interprétation dans la géométrie analytique sur une sphère de rayon purement imaginaire. A un tout autre point de vue, Beltrami donna plus tard de la géométrie de Lobatschewski une représentation remarquable, en montrant que la géométrie plane du géomètre russe est identique à la géométrie sur les surfaces à courbure constante négative, du moins quand on se borne à une portion limitée du plan et de la surface correspondante.

Dans la géométrie hyperbolique, on peut mener par un point deux parallèles à une droite. On peut admettre, au contraire, avec Riemann, que par un point on ne puisse pas mener de droite ne rencontrant pas une droite; on aura alors une seconde géométrie non euclidienne dite *elliptique*, dans laquelle la somme des angles d'un triangle dépasse deux droits. Ici le plan n'est plus infini, c'est-à-dire que les distances sur une géodésique restent finies. La géométrie elliptique peut être interprétée par la considération des sphères de l'espace euclidien; toutefois, cette interprétation n'est valable que pour une portion limitée du plan non euclidien et non pour le plan tout entier. Une autre interprétation dans l'espace ordinaire de la géométrie plane elliptique, valable pour le plan entier, a été donnée par M. Klein; considérons dans l'espace ordinaire l'ensemble des droites et des plans passant par un point, puis les angles dièdres formés par deux tels plans, toute relation entre ces éléments sera la traduction d'une relation dans le plan non euclidien, en substituant aux mots *droite*, *plan*, *angle dièdre*, les mots *point*, *droite* et *angle*.

On s'est naturellement demandé comment on pouvait être assuré que, dans des déductions des géométries non euclidiennes, on ne rencontrerait jamais de contradictions. Les interprétations, auxquelles il a été fait plus haut allusion, sauf celles de M. Klein pour la géométrie elliptique, ne donnent pas une réponse satisfaisante, mais celle-ci peut être fournie par la considération des formules auxquelles on arrive en géométrie hyperbolique et qui ne sont autres, comme je le disais tout à l'heure, que celles de la trigonométrie sphérique ordinaire, en supposant le rayon de la sphère purement imaginaire.

Toutefois, si l'on est ainsi assuré que le *postulatum* d'Euclide ne peut être démontré en restant dans le plan, il reste un doute sur l'impossibilité de la démonstration en employant des constructions hors du plan. L'étude des géométries ne doit donc pas se borner au plan; ce fut là l'œuvre de Riemann, d'Helmholtz et, il y a vingt ans, de Sophus Lie. Tous trois se placent à un point de vue analytique et considèrent l'espace comme une multiplicité, c'est-à-dire qu'un point est défini par un système de trois nombres qu'on appelle les *coordonnées du point;* on ne pose plus alors ici la notion de plan et de droite, on part du point comme élément. Riemann a été dans cette voie, alors toute nouvelle, un initiateur. Considérant même des espaces à un nombre quelconque de dimensions, il introduit l'importante notion de *courbure* d'un espace, généralisant les notions classiques dues à Gauss sur la courbure des surfaces. Particulièrement importants sont les espaces à *courbure constante.* Un caractère fondamental des espaces à courbure constante est qu'on peut dans ces espaces déplacer une figure sans altérer ses longueurs et procéder dans les démonstrations par supposition des figures. Pour le cas de deux dimensions, suivant que la courbure constante est négative ou positive, on a la géométrie hyperbolique ou elliptique dont nous parlions plus haut. Dans un espace à trois dimensions à courbure constante, on a des déplacements possibles qui dépendent de *six* paramètres, et, en étudiant ces déplacements, on peut envisager à un nouveau point de vue les hypothèses fondamentales de la géométrie. C'est Helmholtz qui posa le premier la question sur ce terrain. La théorie des groupes n'était pas encore créée à l'époque où le célèbre physicien écrivait son Mémoire; il était presque inévitable qu'il commît quelques erreurs. Cette étude fut complètement reprise par Sophus Lie.

J'ai déjà parlé plusieurs fois de *groupes;* c'est une notion qui joue un rôle fondamental dans la science de notre époque, sur laquelle il convient de dire quelques mots.

Imaginons, avec Sophus Lie, que n relations permettent de transformer n variables en n autres variables, ces relations dépendent d'un certain nombre de paramètres arbitraires. Faisons de plus l'hypothèses que deux transformations de cette forme effectuées successivement donnent une transformation rentrant dans le même type, les valeurs des paramètres étant seulement changées. S'il en est ainsi, on a un *groupe de transformations.* Lie a fait la découverte capitale que la recherche de tous ces groupes, pour un nombre donné de variables et de paramètres, se ramène à l'intégration d'équations différentielles ordinaires. Je ne citerai qu'un résultat, le plus simple de tous ceux qu'à obtenus Sophus Lie; quand il n'y a qu'une seule variable, le groupe peut, par un choix convenable de cette variable, être ramené au groupe linéaire et contient au plus trois paramètres.

Revenons aux principes de la géométrie et aux résultats obtenus par Lie. On a dans l'espace, dont on considère une portion limitée, un groupe de mouvements à *six* paramètres sur lequel on fait diverses hypothèses. D'abord ces mouvements laissent invariables une certaine fonction des coordonnées de deux points quelconques. L'origine de cette hypothèse s'aperçoit d'elle-même : en langage ordinaire et sans signe algébrique, on peut dire grossièrement que, en la faisant, on veut qu'il y ait relativement à deux points de l'espace *quelque chose* qui reste invariable après le mouvement; on pourra appeler ce quelque chose la distance de deux points. En second lieu, on veut, comme le disait Helmholtz, que le mouvement *libre* soit possible dans une certaine région de l'espace. Voici ce qu'on doit entendre par cette hypothèse complexe. Tout d'abord, quand un point de la région est fixé, tout autre point de cette région, *sans aucune exception*, décrit une surface (multiplicité à deux dimensions). Ensuite, quand deux points sont fixés, un point arbitraire (des exceptions étant possibles) décrit une courbe (multiplicité à une dimension); enfin, si trois points arbitraires sont fixés dans la région, tous les points de celle-ci restent en repos (des exceptions étant possibles). Telles sont les conditions que nous imposons à l'espace. Il y a seulement deux types d'espace satisfaisant à ces cond tions. C'est tout d'abord l'espace ordinaire, ou euclidien auquel nous sommes habitués; puis deux espaces, qu'on peut appeler *non euclidiens*, et qui sont dans le cas de trois dimensions les analogues des plans hyperbolique ou elliptique de tout à l'heure. C'est là une proposition bien remarquable et qui montre que les espaces euclidien et non euclidien sont les seuls où l'on puisse faire logiquement les hypothèses qui, dégagées, bien entendu, de leur forme scientifique, sont regardées, par quiconque n'a pas réfléchi à ces questions, comme ayant un caractère nécessaire.

La démonstration du résultat précédent est très délicate. Ainsi les mots « sans aucune exception » que nous avons soulignés plus haut sont d'une extrême importance. Si l'on cherche le groupe des mouvements à six paramètres satisfaisant à la seconde condition, on ne trouve que les groupes euclidiens et non euclidiens, mais si l'on supprime les mots soulignés, on reconnaît qu'il existe d'autres groupes que les précédents.

Ajoutons encore que les problèmes analogues dans le plan admettent des solutions entièrement différentes : les espaces à deux dimensions euclidiens et non euclidiens ne sont pas caractérisés par les propriétés qui leur appartiennent uniquement dans le cas de trois dimensions. Cette circonstance n'avait pas autrefois échappé à Helmholtz. Si nous revenons à la question posée tout à l'heure relativement à l'impossibilité de toute contradiction, il est clair que du point de vue analytique où se place Sophus Lie, il n'y a aucune difficulté.

Au point de vue du géomètre norvégien, l'étude des principes de la géométrie peut donc être regardée comme épuisée, mais on ne doit pas oublier qu'il se borne à considérer une petite portion de l'espace et suppose d'ailleurs que les fonctions servant à caractériser les groupes de mouvement satisfont aux conditions ordinaires de l'analyse infinitésimale. Clifford autrefois et Klein plus récemment ont appelé l'attention sur la question de la *connexité* de l'espace qui est extrêmement intéressante. Il est facile de se rendre compte de ce qu'on entend par là, en se bornant au cas d'une multiplicité à deux dimensions; la surface d'une sphère est différente de la surface d'un tore, au point de vue des courbes fermées tracées sur la surface. Sur la première, toute ligne fermée partage la surface sphérique en deux régions, tandis qu'il en est autrement sur la surface du tore, où l'on peut tracer deux courbes, soit un parallèle et un méridien qui ne limitent aucune portion de la surface; l'ordre de *connexité* des deux surfaces n'est pas le même. Peu importe quelle est la connexité de l'espace, quand on se borne à envisager une partie assez petite, mais il n'en va plus de même, quand on considère l'espace dans son ensemble. Nous ne savons évidemment rien de la connexité de l'espace où nous vivons; nous ne pouvons que faire la supposition qu'il est simplement connexe.

Nous nous somme arrêté un peu longuement sur les géométries dites *non euclidiennes*, qui ont le plus de rapports avec notre géométrie ordinaire. Ces géométries d'espaces à courbure constante pourront très peu différer de celle-ci, si la courbure est très voisine de zéro. On n'a pas manqué de dire que la courbure de notre espace n'était peut-être pas nulle, mais seulement presque nulle; c était, semble-t-il, l'opinion de Gauss, et il n'est pas douteux que la pensée de vivre dans un espace dont la courbure n'est pas nulle a donné une certaine popularité aux géométries non euclidiennes. Dans cet ordre d'idées, on peut aller plus loin, admettre, par exemple, que la courbure de l'espace varie avec les lieux et avec le temps. Pour quelques-uns, ce sont là de pures rêveries : ils pensent que, quel que soit l'espace où nous vivions, nous aurions toujours fait une interprétations de nos sensations dans le langage euclidien qui est pour nous le plus commode. C'est un point auquel j'ai déjà fait allusion plus haut, et sur lequel on peut se donner le plaisir de disserter indéfiniment.

Nous sommes loin d'avoir épuisé l'ensemble des études se rapportant aux principes de la géométrie. Dans ces dernières années, la question de l'indépendance des postulats a surtout précocupé les géomètres allemands, et c'est en construisant des géométries affranchies de tel axiome, que l'indépendance de ces axiomes a été établie par M. Hilbert. On remarquera aussi combien il est inexact de parler, comme on le fait quelquefois, des *trois* seules géométries possibles (hyperbolique, parabolique, elliptique).

Le nombres des géométries logiquement possibles est infini; tout dépend des systèmes de postulats que l'on adopte. Déjà Riemann avait considéré, dans sa célèbre dissertation inaugurale, des géométries dans des espaces à courbure variable d'un point à l'autre. La liste serait longue à dresser des géométries, analogues aux géométries non euclidiennes, qui portent généralement un nom illustre prècédé d'une négation. Une des plus curieuses est la géométrie non archimédienne, où l'on n'admet pas l'axiome d'Archimède, dont j'ai dit un mot tout à l'heure; dans cette géométrie, les procédés par exhaustion ne peuvent être employés dans les démonstrations. Ceci est particulièrement intéressant pour la mesure des aires, et l'on peut faire à ce sujet quelques remarques concernant notre géométrie usuelle. En géométrie plane, deux polygones équivalents sont égaux par addition ou par soustraction, c'est-à-dire peuvent être décomposés en triangles égaux, ou bien peuvent être regardés comme des différences de polygones susceptibles d'être ainsi décomposés. Il n'en est pas de même dans la géométrie de l'espace; Gauss avait déjà il y a longtemps appelé l'attention des mathématiciens sur ce point. On a récemment établi que deux tétraèdres qui ont même base et des hauteurs égales ne sont pas toujours égaux par addition ou soustraction, c'est-à-dire ne peuvent pas être décomposés en tétraèdres égaux ou être regardés comme des différences de polyèdres décomposables en tétraèdres égaux. La stéréométrie ne peut donc pas, comme la planimétrie, être faite sans recourir à des procédés d'exhaustion ou de limite.

Mais j'en ai dit assez sur les principes de la géométrie Pour beaucoup de personnes, les recherches de ce genre paraîtront de bien étranges imaginations. Il n'est cependant pas sans intérêt de mettre à nu les très nombreux postulats indépendants qui sont à la base de notre géométrie, et qui n'ont pas les caractères de nécessité logique que leur attribue l'intuition, celle-ci n'épuisant pas toutes les possibilités logiques. Tout esprit philosophique doit à ce titre s'y intéresser. Au point de vue mathématique, l'étude des principes de la géométrie a offert, comme nous l'avons dit, à Sophus Lie un beau champ d'applications pour la théorie des groupes de transformations qu'il venait de créer. De même, quarante ans auparavant, la théorie des formes quadratiques de différentielles s'était développée grâce aux recherches de Riemann sur les hypothèses qui sont à la base de la géométrie. C'est ainsi que des études, qui paraissaient avoir d'abord un caractère purement philosophique, ont contribué aux progrès des sciences mathématiques.