



**INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK**

**TECHNIKI INFORMACYJNE  
TEORIA I ZASTOSOWANIA**

Wybrane problemy  
Tom 2 (14)

*poprzednio*

**ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH  
I ZARZĄDZANIU**

Pod redakcją  
Andrzeja MYŚLIŃSKIEGO

Warszawa 2012



**INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK**

**TECHNIKI INFORMACYJNE  
TEORIA I ZASTOSOWANIA**

Wybrane problemy  
Tom 2 (14)

*poprzednio*

**ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH  
I ZARZĄDZANIU**

Pod redakcją  
Andrzeja Myślińskiego

**Warszawa 2012**

Wykaz opiniodawców artykułów zamieszczonych w  
niniejszym tomie:

Dr hab. inż. Andrzej MYŚLIŃSKI, prof. PAN

Dr hab. inż. Ryszard SMARZEWSKI, prof. KUL

Dr hab. Dominik ŚLĘZAK

Prof. dr hab. inż. Andrzej STRASZAK

Prof. dr hab. inż. Stanisław WALUKIEWICZ

Dr hab. Adam WIERZBICKI

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN  
Warszawa 2012

**ISBN 9788389475442**



# METODY FIZYKI KWANTOWEJ W WYCENIE OPCJI NA AKCJE

**Marcin Wróblewski**

*Studia Doktoranckie IBS PAN,  
e-mail: wrobel@e-wrobel.pl*

**Streszczenie.** Przedmiotem pracy jest wycena opcji oparta o numeryczne rozwiązanie równania Blacka-Scholesa. Wykorzystując operator energii potencjalnej cząstki w polu swobodnym równanie Blacka-Scholesa zastąpiono równoważnym równaniem Schrödingera. Metodę różnic skończonych wykorzystano jako metodę dyskretyzacji tego równania. Metodę charakterystyk wykorzystano jako algorytm obliczeniowy. Przedstawiono i omówiono wyniki obliczeń numerycznych.

**Słowa kluczowe:** równanie Blacka-Scholesa, równanie Schrödingera, metoda charakterystyk, wycena opcji

## 1 WSTĘP

Celem pracy jest wykazanie, że możliwa jest transformacja równania Blacka-Scholesa do równania Schrödingera i tym samym modelowanie wyceny opcji na akcje z użyciem metod mechaniki kwantowej. Takie podejście pozwoli na sprawdzenie czy zagadnienie wyceny opcji na akcje może korespondować ze znanym i udokumentowanym kwantowym zjawiskiem fizycznym.

Metody rozwiązywania problemów fizyki kwantowej mogą być stosowane wtedy gdy analizowane równania spełniają szereg wymagań narzuconych przez formalizm matematyczny. Proponowane podejście polega na częściowym określeniu parametrów równania Blacka-Scholesa na podstawie dostępnych danych doświadczalnych, jak też z wykorzystaniem metod fizyki kwantowej.

Model Blacka-Scholesa używany jest do przewidywania ceny opcji w funkcji czasu. Dany jest nieliniowym równaniem różniczkowym cząstkowym [1]

$$\frac{\partial V(S, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V(S, \tau)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V(S, \tau)}{\partial S} - rV(S, \tau) = 0, \quad (1)$$

gdzie:  $V(S, \tau)$  jest ceną instrumentu pochodnego [2] zależną od ceny  $S$  instrumentu bazowego oraz ewolucji czasowej  $\tau$ , gdzie  $\tau \in [0, T]$ ,  $T > 0$ . Ponadto:  $r$  – roczna stopa procentowa,  $r \in R$ ,  $\sigma$  – odchylenie standardowe,  $\sigma \in R$ ,  $\sigma\eta > 0$ ,  $S$  – cena instrumentu bazowego (akcji),  $S = S(\tau)$ ,  $S : [0, T] \rightarrow R$ . Zakładamy, że parametry  $r$  oraz  $\sigma$  powyższego równania są stałe i większe od 0, a cena  $S$  jest nieujemną liczbą rzeczywistą.

Równanie Blacka-Scholesa [1] jest matematycznym modelem rynku finansowego, który powstał jako wyidealizowany model rzeczywistych rynków finansowych. Największą zaletą modelu była umiejętność przewidywania cen opcji europejskich. Opcja europejska jest kontraktem, dającym swojemu posiadaczowi prawo (ale nie obowiązek) kupienia (lub sprzedania) akcji w czasie zwanym terminem realizacji. Kupno lub sprzedaż odbywa się po wcześniej ustalonej cenie, tzw. cenie realizacji. Głównym założeniem modelu Blacka-Scholesa jest to, że ceny akcji opisywane są procesami stochastycznymi Wienera [2], oraz że na rynku finansowym znajdującym się w równowadze nie ma możliwości generowania pewnego zysku z zerowego kapitału. Oznacza to, że jeżeli istnieje pewna strategia inwestycyjna, która może przynieść zysk, to jest ona obciążona ryzykiem poniesienia strat.

Do tej pory stosowano wiele metod rozwiązania równania (1). Jedną z metod jest opisana w pracy [3]. Opiera się ona na numerycznym rozwiązywaniu równania Blacka-Scholesa z wykorzystaniem metody elementu skończonego.

Zupełnie inne podejście zostało zaproponowane w pracy [4]. Polega ono na rozwiązaniu równania Blacka-Scholesa przy założeniu braku arbitrażu [5] na rynku, a następnie porównano otrzymane wyniki obliczeń z danymi eksperymentalnymi, wykazując, że na rynku obecny jest arbitraż. Praca [6] jest próbą przedstawienia równania Blacka-Scholesa w postaci równania Schrödingera opisującego cząstkę swobodną znajdującą się w zewnętrznym potencjale generowanym przez bąbel arbitrażowy.

Równania różniczkowe cząstkowe najczęściej rozwiązywane są numerycznie z wykorzystaniem metody elementu skończonego [7]. Celem pracy jest wykazanie analogii między równaniem Blacka-Scholesa a równaniem Schrödingera, które jest podstawowym równaniem opisującym zjawiska fizyki kwantowej, do którego rozwiązania stosuje się często prostsze metody numeryczne takie jak metody różnic skończonych [8] oraz poszukuje się rozwiązania z użyciem funkcji bazowych.

W pracy sprowadzono równanie Blacka-Scholesa do postaci równania Schrödingera opisującego cząstkę swobodną znajdującą się w uogólnionym potencjale charakteryzującym rynek akcji, oraz wyznaczono parametry rozwiązania w oparciu o dane doświadczalne. Pozwoli to wykorzystać metody matematyczne fizyki kwantowej do poszukiwania rozwiązania równania Blacka-Scholesa.

### 1.1 NOTACJA

W poruszanych zagadnieniach będziemy stosować pojęcia analizy funkcjonalnej. Jednym z podstawowych pojęć jest pojęcie przestrzeni Hilberta [9]. Jest to rzeczywista lub zespolona przestrzeń liniowa  $V$  z określonym iloczynem skalarnym, który będziemy oznaczać symbolicznie przez  $\langle x|y \rangle$ ,  $x, y \in V$ . Przestrzeń Hilberta jest zupełna, (czyli taka, w której każdy ciąg Cauchy'ego ma granicę należącą do tej przestrzeni) w normie równej  $\|x\|_V = \sqrt{\langle x|x \rangle_V}$ ,  $x \in V$ .

### 1.2 ILOCZYN SKALARNY

Iloczyn skalarny jest działaniem, które dwóm wektorom z przestrzeni liniowej  $V$  przyporządkowuje element ciała  $K$ . W dalszej części będziemy mieli do czynienia z przestrzeniami wektorowymi nad ciałem liczb zespolonych  $C$ , dlatego definicja iloczynu skalarnego będzie dostosowana do tego przypadku. Niech  $v, w \in V$  będą wektorami należącymi do przestrzeni  $V$ , to ich iloczyn skalarny będziemy oznaczać jako  $\langle v|w \rangle \in C$ . W poniższych rozważaniach, symbolem  $*$  oznaczamy sprzężenie zespolone. Wymagamy, aby zostały spełnione następujące warunki:

$$\langle v|v \rangle \geq 0 \text{ oraz } \langle v|v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0, \quad (2)$$

$$\langle v|w \rangle = \langle w|v \rangle^*,$$

$$\langle v_1 + v_2 | w \rangle = \langle v_1 | w \rangle + \langle v_2 | w \rangle \quad (3)$$

oraz

$$\langle v | w_1 + w_2 \rangle = \langle v | w_1 \rangle + \langle v | w_2 \rangle \quad \forall v, w \in V, \quad (4)$$

$$\langle v | cw \rangle = c \langle v | w \rangle \text{ oraz } \langle cv | w \rangle = c^* \langle v | w \rangle \quad (5)$$

$$\forall v, w \in V \quad c \in C,$$

Iloczyn skalarny w przestrzeni  $n$ -wymiarowej można zdefiniować w następujący sposób:

$$\langle v|w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i^* w_i, \quad (6)$$

gdzie  $v_i, w_i$  - są współrzędnymi w pewnej bazie przestrzeni  $V$ .

### 1.3 POJĘCIE BAZY

Pojęcie bazy jest jednym z najbardziej podstawowych pojęć algebry liniowej [10] i jest definiowane jako minimalny zbiór wektorów taki, że każdy wektor przestrzeni  $V$  jest kombinacją liniową wektorów tego zbioru. W przestrzeni funkcji zespolonych i całkowalnych w pewnym obszarze  $\Omega \subset \eta C$ , iloczyn skalarny  $\langle v|w \rangle$  można zdefiniować jako:

$$\langle v|w \rangle = \int_{\Omega} v^* w \, dx, \quad \forall v, w \in V, \quad (7)$$

Bazę przestrzeni liniowej wybieramy taką, aby wszystkie jej wektory bazowe były do siebie ortogonalne. Dodatkowo, jeśli wektory bazowe będą unormowane, wtedy taka baza nazywa się bazą ortonormalną. Wektory  $v, w \in V$  nazywamy ortogonalnymi jeżeli:

$$\langle v|w \rangle = 0 \quad \forall v, w \in V, \quad (8)$$

Wektor  $v \in V$  [1] nazywamy unormowanym, jeżeli:

$$\langle v|v \rangle = 1, \quad (9)$$

W dalszej części pracy będziemy wykorzystywać oznaczenie:

$$\delta_{ij} \stackrel{ndef}{=} \langle e_i|e_j \rangle, \quad \forall e_i, e_j \in V, \quad (10)$$

Symbol  $\delta_{ij}$  nazywa się deltą Kroneckera [13] i przyjmuje wartość 1 gdy  $i = j$  lub 0, gdy  $i \neq j$ .

### 1.4 ZAWARTOŚĆ PRACY

W rozdziale 2 przedstawiono elementarne pojęcia i metody mechaniki kwantowej, które umożliwiają zastosowanie metod fizyki kwantowej w poruszanych zagadnieniach ekonomicznych. W rozdziale 3 przekształcono równanie Blacka-Scholesa do postaci równania Schrödingera, w tym w sekcji 3.1 wprowadzono pojęcie potencjału uogólnionego. W rozdziale



4 rozwiązano numerycznie równanie Schrödingera dla potencjału uogólnionego z wykorzystaniem metod charakterystyk (pakiet Mathematica). W rozdziale 5 zaprezentowano i przedyskutowano wyniki eksperymentów numerycznych.

W poruszanych zagadnieniach będziemy stosować pojęcia analizy funkcjonalnej. Jednym z podstawowych pojęć jest pojęcie przestrzeni Hilberta [9]. Jest to rzeczywista lub zespolona przestrzeń liniowa  $V$  z określonym iloczynem skalarnym, który będziemy oznaczać symbolicznie przez  $\langle x|y \rangle$ ,  $x, y \in V$ . Przestrzeń Hilberta jest zupełna, (czyli taka, w której każdy ciąg Cauchyego ma granicę należącą do tej przestrzeni) w normie równej

$$\|x\|_V = \sqrt{\langle x|x \rangle_V}, \quad x \in V.$$

## 2 WYBRANE ELEMENTY MECHANIKI KWANTOWEJ

Równanie Schrödingera [1] ma następującą postać:

$$\hat{H}\Psi(x\eta, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}, \quad (11)$$

gdzie  $x \in (-\infty, +\infty)$  jest zmienną przestrzenną,  $\eta t \in (\eta 0, T)$ ,  $\eta, T > 0$  – zmienną czasową,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  – jest stałą Diraca (jest to tzw. zredukowana stała Planck’a:  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} Js$ ),  $H$  jest hamiltonianem, a  $m$  jest masą badanej cząstki.  $H$  jest operatorem hermitowskim, czyli samosprężonym operatorem energii badanego układu fizycznego. Funkcja  $\Psi(x\eta, t)$  jest funkcją zespoloną i reprezentuje stan kwantowy [12], który oznacza zestaw parametrów przyjmujących tylko pewne ustalone wartości, które opisują obiekt kwantowy. Kwadrat funkcji falowej  $\Psi(x, t)$  jest interpretowany jako gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w badanym obszarze przestrzeni. Znaczenie to [13] zostało nadane w 1926r przez niemieckiego fizyka Max’a Born’a.

Funkcje falowe muszą spełniać następujące warunki [14]:

1. Z probabilistycznej interpretacji funkcji falowej wynika, że prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w czasie  $t$  i obszarze  $\Gamma$ , gdzie  $x \in \Gamma$  dane jest przez:  $P = \int_{\Gamma} |\psi(x, t)|^2 dx$ ,
2. Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w całej przestrzeni  $\eta V$  jest równe jeden, czyli:  $\int_{\eta V} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$ ,
3. Stanom fizycznym odpowiadają tylko takie funkcje falowe, które są całkowalne z kwadratem,  $\psi \in L^2(\eta V)$ ,

4. Z obserwacji fizycznych (eksperyment) wynika, że funkcje falowe znikają na brzegach, czyli  $\psi(\pm\infty, t) = 0$ ,
5. Funkcja falowa jest ciągła i odpowiada tylko jednemu stanowi cząstki.

Operatory odpowiadające mierzalnym wielkościom mechanicznym muszą być liniowe i hermitowskie (samosprężone) [15]. Warunek liniowości operatora  $\hat{H}$  opisano poniżej:

$$\hat{H}(au_1 + bu_2) = a\hat{H}u_1 + b\hat{H}u_2, \quad (12)$$

gdzie  $u_1, u_2 \in C$  są zespolonymi ortonormalnymi funkcjami falowymi spełniającymi (1) zaś  $a, b \in R$ . Operator  $\hat{B}$  jest sprzężony do operatora  $\hat{A}$ :

$$\langle \hat{A}u_1 | u_2 \rangle = \langle \hat{B}u_1 | u_2 \rangle^*, \quad \forall u_1, u_2 \in V, \quad (13)$$

Równaniu (12) odpowiada równoważna postać całkowa:

$$\int_{\eta V} \int (\hat{A}u_1)^* u_2 dx = \int_{\eta V} \int u_1^* \hat{B}u_2 dx, \quad (14)$$

Operator  $\hat{A}$  jest samosprężony wtedy, gdy:

$$\langle \hat{A}u_1 | u_2 \rangle = \langle \hat{A}^*u_1 | u_2 \rangle, \quad \forall u_1, u_2 \in V. \quad (15)$$

Operator energii układu fizycznego jest sumą operatora energii kinetycznej  $\hat{T}$  oraz energii potencjalnej  $\hat{U}$ :

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}, \quad (16)$$

gdzie  $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ ,  $\hat{p}$  jest operatorem pędu badanej cząstki i jest dany równaniem:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad (17)$$

Jeżeli operatory  $\hat{T}$  i  $\hat{U}$  są hermitowskie to operator  $\hat{H}$  także musi być hermitowski:

$$\hat{H} = \hat{H}^* = (\hat{T} + \hat{U})^* = \hat{T}^* + \hat{U}^*, \quad (18)$$

Z równan (2) i (5) wynika:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{U}\right)\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}, \quad (19)$$

Rozwiązania równania (19) poszukujemy stosując metodę Fouriera [16] rozdzielania zmiennych, czyli zakładamy, że funkcja  $\Psi(x, \eta, t)$  jest równa iloczynowi funkcji  $(\eta, t)$  zależnej tylko od czasu  $t$  oraz funkcji  $\psi_\eta(x)$  zależnej tylko od współrzędnej przestrzennej  $x$ :

$$\Psi(x, \eta, t) = \eta(t)\psi_\eta(x), \quad (20)$$

Po podstawieniu (20) do (19) otrzymujemy:

$$\eta(t)\eta \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{U} \right) \psi_\eta(x) = i\hbar \frac{\partial \eta(t)}{\partial t} \psi_\eta(x), \quad (21)$$

Następnie po podzieleniu (21) przez  $\psi_\eta(x)\eta(t)$  otrzymujemy:

$$\eta \frac{\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{U} \right) \eta \psi_\eta(x)}{\psi_\eta(x)} = \frac{i\hbar \frac{\partial \eta(t)}{\partial t}}{\eta(t)} = \text{const} = E, \quad (22)$$

Ponieważ lewa strona równania (22) zależy tylko od współrzędnych przestrzennych  $x$ , natomiast prawa tylko od czasu  $t$ , zatem wyrażenia te muszą być równe pewnej stałej, którą tutaj oznaczamy przez  $E$ . Otrzymujemy dwa niezależne równania. Pierwsze z nich opisuje zależność czasową  $\eta(t)$ :

$$\frac{i\hbar \frac{\partial \eta(t)}{\partial t}}{\eta(t)} = E \quad (23)$$

Całkując obustronnie (23) po czasie otrzymujemy:

$$\int \frac{i\hbar \frac{\partial \eta(t)}{\partial t}}{\eta(t)} dt = \int E dt \quad (24)$$

Rozwiązaniem równania (24) jest:

$$(\eta, t) \eta = C e^{-\frac{iE}{\hbar} t} \quad (25)$$

gdzie  $C$  jest stałą całkowania. Funkcję  $\psi_\eta(x)$  otrzymujemy rozwiązując równanie (26):

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{U} \right) \eta \psi_\eta(x) = E \psi_\eta(x), \quad (26)$$

gdzie  $E$  jest wartością własną hamiltonianu  $\hat{H}$ .

Równanie (26) jest równaniem na tzw. wartości własne operatora  $\hat{H}$ , a  $E$  jest wartością własną operatora  $\hat{H}$  i opisuje energię układu opisanego funkcją falową  $\psi_\eta(x)$ . Dla uproszczenia obliczeń zakładamy, że  $\hbar = 1$ .

Funkcja  $(\eta t)$  czyli część zależna od czasu jest stosunkowo łatwa do wyznaczenia z równania (25), przy czym stałą  $C$  wyznaczamy z warunków początkowych (eksperyment), natomiast wyznaczenie części  $\psi(\eta x)$  zależnej od współrzędnych przestrzennych  $x$  jest trudniejsze do wyznaczenia ze względu na nieznaną potencjał  $\hat{U}$ . Metody rozwiązania równania (26) są rozwijane zarówno przez chemików kwantowych jak też fizyków molekularnych i w większości przypadków bazują na zaawansowanych metodach numerycznych.

### 3 Przekształcenie równania Blacka-Scholesa do postaci równania Schrödingera

W rozdziale 3 dokonamy próby powiązania równania Blacka-Scholesa z równaniem Schrödingera. W tym celu w równaniu (1) wprowadzimy nowe zmienne:

$$y = \ln S, \text{ oraz } t = -i\tau \text{ (rotacja Wicka)} \quad (27)$$

Uzasadnieniem powyższego podstawienia jest to, że cena  $S$  jest nieujemną liczbą rzeczywistą i można wyznaczyć dla niej logarytm naturalny. Stosując rotację Wicka [17] w równaniu (27) zamieniamy zmienną czasową  $\tau$  na urojoną zmienną czasową  $t$ . Po zgrupowaniu w równaniu (1) członów niezależnych od czasu i przeniesieniu ich na lewą stronę, oraz po przeniesieniu członu zależnego od czasu na prawą stronę, otrzymujemy:

$$\left( \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} r S \frac{\partial}{\partial S} - r \right) V(S, \tau) = -\frac{\partial V(S, \tau)}{\tau}. \quad (28)$$

Wprowadzenie nowej zmiennej  $y$  oraz  $t$  powoduje, że dotychczasowe operatory różniczkowania przyjmują postać:

$$\frac{\partial}{\partial S} = \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = -i \frac{\partial}{\partial t}, \quad (30)$$

Podstawiając (30) do (28) otrzymujemy:

$$\left( -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + r \left( \frac{\partial}{\partial y} - 1 \right) \right) V(y, t) = i \frac{\partial V(y, t)}{\partial t}, \quad (31)$$

Równanie (31) możemy także zapisać w bardziej ogólnej postaci:

$$\hat{H}_{B-S} V(y, t) = i \frac{\partial V(y, t)}{\partial t}, \quad (32)$$

gdzie symbolem  $\hat{H}_{B-S}$  oznaczamy hamiltonian równania Blacka-Scholesa sprowadzonego do równania Schrödingera. Korzystając z analogii do równania Schrödingera, możemy napisać, że:

$$\hat{H}_{B-S} = \hat{T}_{B-S} + \hat{U}_{B-S}, \quad (33)$$

gdzie  $\hat{T}_{B-S}$  jest operatorem energii kinetycznej cząstki opisywanej równaniem (32) i jest postaci:

$$\hat{T}_{B-S} = -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (34)$$

$\hat{U}_{B-S} = r \left( \frac{\partial}{\partial y} - 1 \right)$ , jest operatorem energii potencjalnej cząstki opisywanej równaniem (32). Z równania (31) wynika, że równanie Blacka-Scholesa zostało sprowadzone do równania Schrödingera cząstki swobodnej znajdującej się w polu o potencjale:

$$\hat{U}_{B-S} = r \left( \frac{\partial}{\partial y} - 1 \right). \quad (35)$$

Wstawiając (35) do (32) zapisujemy równanie (32) w bardziej ogólnej postaci:

$$\left( -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \hat{U}_{B-S} \right) V(y, t) = i \frac{\partial V(y, t)}{\partial t}. \quad (36)$$

Stosowanie aparatu matematycznego mechaniki kwantowej jest możliwe tylko wtedy, gdy sprawdzimy, że potencjał  $\hat{U}_{B-S}$  występujący w równaniu (36) jest hermitowski. W tym celu sprawdzono czy:

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}_{B-S} f | g \rangle &= \int \left[ r \left( \frac{\partial}{\partial y} - 1 \right) f \right]^* g dy = \\ &= \int r \frac{\partial f^*}{\partial y} g dy - r \int f^* g dy, \end{aligned} \quad (37)$$

Z właściwości delty Kroneckera opisanej w (10) wynika, że całka  $\int f^* g dy$  występująca w drugiej części powyższego równania jest równa 0. Całkując (37) przez części otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}_{B-S} f | g \rangle &= r \int \frac{\partial f^*}{\partial x} g dy = r \left[ fg - \int f^* \frac{\partial g}{\partial y} dx \right] = \\ &= \int f^* \left( -r \frac{\partial}{\partial y} \right) g dy, \end{aligned} \quad (38)$$

Z równania (38) wynika, że operatorem sprzężonym do operatora  $\hat{U}_{B-S} = r \left( \frac{\partial}{\partial y} - 1 \right)$  zadanego równaniem (37) jest operator:

$$\hat{U}_{B-S}^* = -r \frac{\partial}{\partial y}. \quad (39)$$

Z równan (37) oraz (39) wynika, że potencjał  $\hat{U}_{B-S}$  zadany równaniem (35) nie spełnia założeń wynikających z hermitowskości. Oznacza to, że mimo, tego, że równanie Blacka-Scholesa zostało formalnie sprowadzone do równania Schrödingera, to występujący w nim operator energii potencjalnej nie opisuje żadnego fizycznego zjawiska. Dalsze rozważania będą polegały na numerycznym rozwiązaniu równania Schrödingera z niehermitowskim potencjałem  $\hat{U}_{B-S}$ . Równanie Schrödingera z niehermitowskim potencjałem jest równaniem różniczkowym cząstkowym, dla którego należy sprawdzić istnienie rozwiązania. Rozwiązania równania (32) będziemy poszukiwać w wyniku obliczeń numerycznych przeprowadzonych pakietem Mathematica.

Następnie spróbujemy tak zmodyfikować potencjał  $\hat{U}_{B-S}$ , aby był on hermitowski i rozwiązanie równania Schrödingera dla tego potencjału opisującego fizyczne zjawisko było zbieżne do rozwiązania równania Schrödingera z niehermitowskim potencjałem (33).

### 3.1 Potencjał uogólniony

Porównując operator energii kinetycznej  $\hat{T}$  z operatorem  $\hat{T}_{B-S}$ , oraz zakładając, że  $\sigma$  ma wymiar masy, stwierdzamy, że równanie (32) opisuje cząstkę o masie  $m_{B-S}$ :

$$m_{B-S} = \left( \frac{1}{\sigma} \right)^2. \quad (40)$$

Rozwiązania równania (32) poszukujemy analogicznie jak w przypadku rozwiązania równania (26) czyli zakładamy, że rozwiązaniem jest funkcja  $\eta V(y\eta, t)$  będąca iloczynem funkcji  $\beta(t)$  zależnej od czasu  $t$  oraz funkcji  $\theta(y)$  zależnej od  $y$ .

$$\eta V(y\eta, t) = \beta(t)\theta(y). \quad (41)$$

Z (41) i (34) wynika, że:

$$\beta(t)\eta \left( - - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \hat{U}_{B-S}\eta \right) \theta(y)\eta = i \frac{\beta(t)\eta}{\partial t} \eta \theta(y). \quad (42)$$

Po rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy:

$$\frac{\left(-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \hat{U}_{B-S}\eta\right)\theta(y)\eta}{\theta(y)} = \frac{i\frac{\beta(t)\eta}{\partial t}\eta}{\beta(t)} = \text{const} = k. \quad (43)$$

Funkcja  $\beta(t)\eta$  może być wyznaczona z poniższego równania:

$$\frac{i\frac{\partial \eta}{\partial t} \beta(t)\eta}{\eta \beta(t)} = k. \quad (44)$$

Po obustronnym scałkowaniu równania (44) po  $dt$  otrzymujemy:

$$\int \frac{i\frac{\partial \eta}{\partial t} \beta(t)\eta}{\eta \beta(t)} dt = \int \eta k dt = \beta(t)\eta = C\eta e^{-ikt}, \quad (45)$$

gdzie  $C$  jest stałą całkowania. Równanie na funkcję  $\theta(y)\eta$  zależną od zmiennej  $y$  dane jest poniżej:

$$\left(-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \hat{U}_{B-S}\eta\right)\eta \theta(y)\eta = k\eta \theta(y)\eta. \quad (46)$$

Powyższe równanie zostanie rozwiązane numerycznie, dla zadanych parametrów  $\sigma$ ,  $r$ , które zostaną określone na podstawie opracowania [18] oraz dla  $k$  wyznaczonego na podstawie danych doświadczalnych.

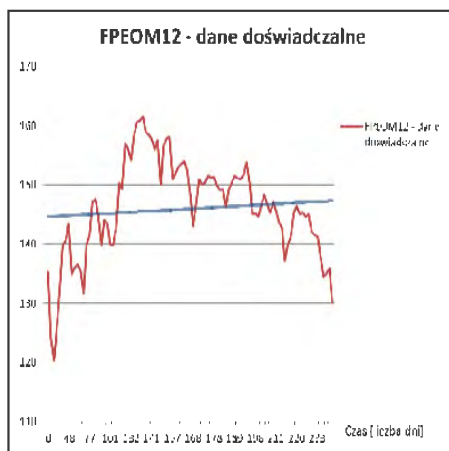
#### 4 Rozwiązanie numeryczne równania Blacka-Scholes'a

Obliczeń dokonano za pomocą pakietu Mathematica z wykorzystaniem metody charakterystyk [19]. Pierwszym krokiem jest wyznaczenie stałej  $k$  na podstawie kalibracji równania (45) do danych giełdowych. W tym celu dokonano analizy opcji FPEOM12, dla których instrumentem bazowym są akcje PEKAO. W równaniu (45) zastąpiono czas urojony  $t$ , czasem rzeczywistym  $\tau$ , gdyż dane giełdowe prezentowane są w funkcji czasu rzeczywistego:

$$\beta(t)\eta = C\eta e^{-ikt} = \beta(\tau\eta)\eta = C\eta e^{k\tau}. \quad (47)$$

Na podstawie danych giełdowych wyznaczono zależność  $\beta(\tau\eta)$  dla opcji FPEOM12:

Na Rys. 1 przedstawiono zmienność ceny opcji FPEOM12 w funkcji czasu dla przedziału czasowego od 20.09.2011r do 17.05.2012r. Stałą  $k$



**Rys. 1.** Zmienność ceny opcji FPEOM12 w funkcji czasu.

wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów na podstawie dopasowania funkcji (45) do danych przedstawionych na Rys. 1. Jej wartość wyznaczono równą 0.0002. Następnym krokiem jest numeryczne wyznaczenie rozwiązania równania (46) przy zadanych parametrach  $r=0.045$ ,  $\sigma = 0.22$  oraz  $k = 0.0002$ .

Najpierw zostaną określone warunki brzegowe równania (46). Zostaną one wyznaczone na podstawie analizy danych giełdowych dla opcji FPEOM12. Na Rys. 2 przedstawiono zależność ceny opcji FPEOM12 w funkcji logarytmu naturalnego ceny akcji PEKAO, czyli zależność  $\theta(y)$ .

Dla porównania przedstawiono także wykres zależności ceny opcji FPEOM12 w funkcji ceny akcji PEKAO.

Na podstawie danych doświadczalnych równanie (46) zostało rozwiązane dla następujących warunków brzegowych:

$$\theta(4.82) = 124.19\theta \quad (48)$$

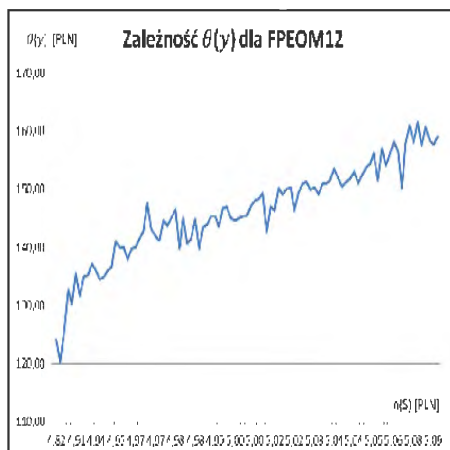
Na Rys. 4 przedstawiono numeryczne rozwiązanie równania (46).

Rozwiązanie równania (46) pokazane na Rys. 4 jest analogiczne do rozwiązania równania Schrödingera dla cząstki swobodnej znajdującej się w polu o stałym potencjale [20]. Zakładając, że:

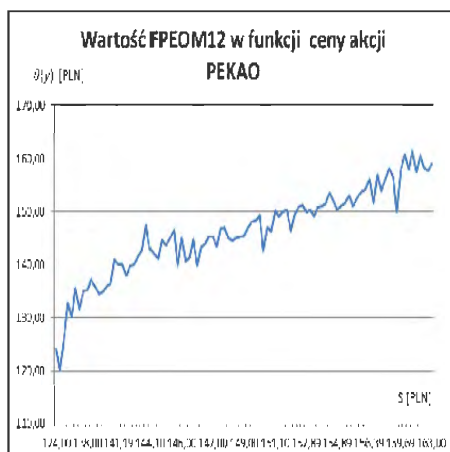
$$\hat{U}_{B-S} = r\left(\frac{\partial}{\partial y} - 1\right) \approx -r. \quad (49)$$

Kolejnym krokiem jest rozwiązanie równania (46) dla hermitowskiego potencjału  $\hat{U}_{B-S} = -r$ . Należy zauważyć, że uproszczenie to pociąga za so-



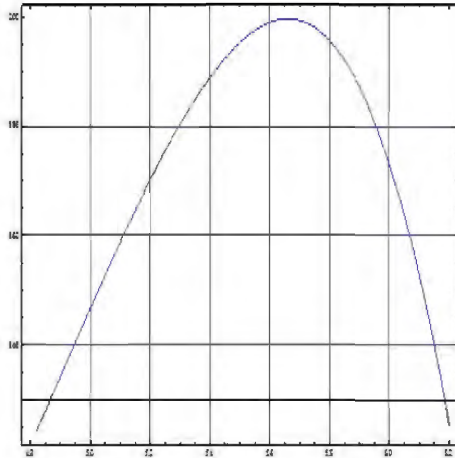


Rys. 2. Zależność  $\theta(y)$  dla FPEOM12.

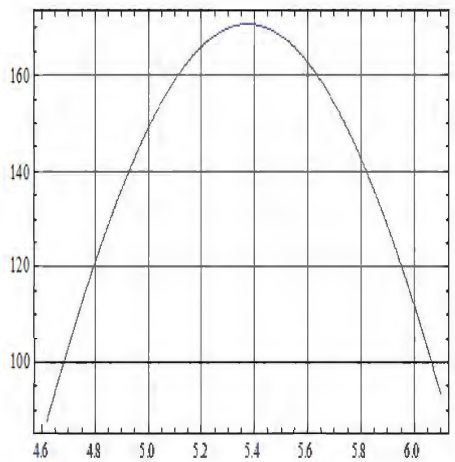


Rys. 3. Zależność ceny opcji FPEOM12 w funkcji ceny akcji PEKAO.

bą fakt, że  $\frac{\partial \eta \theta(y)}{\partial y} \leq \theta(y)$ . Na podstawie danych giełdowych sprawdzono, że pochodna  $\frac{\partial \eta \theta(y)}{\partial y}$  jest rzędu  $\theta(y)$  co sugeruje, że założenie (49) może być zbyt dużym uproszczeniem. Rozwiązanie to przedstawiono na Rys. 5 dla potencjału  $\hat{U}_{B-S} = -r$  oraz dla parametrów  $r=0.045$ ,  $\sigma = 0.22$ ,  $k=0.0002$  oraz warunków brzegowych  $\theta(\eta 4.82) \eta = 124.19$  oraz  $\theta(\eta ??) = 159$ :



**Rys. 4.** Numeryczne rozwiązanie równania (46) dla parametrów  $r=0.045$ ,  $\sigma = 0.22$ ,  $k=0.0002$  oraz warunków brzegowych  $\theta(\eta 4.82) \eta = 124.19$  oraz  $\theta \eta(??) = 159$ .



**Rys. 5.** Rozwiązanie równania (34)

## 5 Wnioski

Na podstawie rozwiązania przedstawionego na Rys. 4 i 5 można powiedzieć, że rozwiązanie równania (46) przy stałych parametrach  $r$ ,  $\sigma$  oraz  $k$ , jest zbieżne z rozwiązaniem równania Schrödingera dla cząstki swobodnej o masie  $m_{B-S} = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2$ . Zakładając, że  $r$  oraz  $k$  ma wymiar energii, a  $\sigma$  masy, to interpretacją fizyczną równania Blacka-Scholesa, jest cząstka o

energii  $k$  znajdująca się w polu o stałym potencjale  $\hat{U}_{B-S} = -r$ . Kwadrat funkcji  $\theta(y)$  interpretujemy analogicznie jak w przypadku mechaniki kwantowej i oznacza on gęstość prawdopodobieństwa wystąpienia opcji przy zadanym parametrze  $k$  i  $y$ . Parametr  $y$  jest parametrem analogicznym do położenia cząstki w przestrzeni. Potencjał  $\hat{U}_{B-S}$  jest uśrednionym potencjałem pochodzącym od wszystkich członków rynku finansowego, tak więc opisuje giełdę jako źródło potencjału, z którym oddziałuje badana opcja.

## Literatura

1. F.Black, M.Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**, 637-654.
2. Papoulis, A. "Wiener-Levy Process." §15-3 in Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, pp. 292-293, 1984.
3. Rama Cont, Nicolas Lantos and Olivier Pironneau, A Reduced Basis for Option Pricing, J. SIAM on Financial Mathematics. Vol. 2, pp. 287-316 (2011).
4. Mauricio Contreras, Rodrigo Montalva, Rely Pellicer, Marcelo Villena, Dynamic option pricing with endogenous stochastic arbitrage, *Physica A* 389 (2010) 3552-3564.
5. Jan Czekaj - Rynki, Instrumenty i Instytucje Finansowe", Wydawnictwo PWN, Warszawa 2008, s.410.
6. Mauricio Contreras, Rely Pellicer, Marcelo Villena, Aaron Ruiz, A quantum model of option pricing: When Black-Scholes meets Schrodinger and its semi-classical limit, *Physica A* 389 (2010) 5447-5459.
7. Jacek Stasiński, Matematyka II. Metoda elementów skończonych, Warszawa 2003, Preprint, s.2-4.
8. Rafał Kotyński, Metody obliczeniowe mikrooptyki i fotoniki, Warszawa, preprint, s.2-5
9. Walter Rudin, Analiza Rzeczywista i Zespólona, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998, s.86-91.
10. Andrzej Białynicki-Birula: *Alegbra liniowa z geometrią*, PWN, Warszawa 1979
11. E. Schrodinger, Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung), *Ann. Phys.* 79, 361-376 (1926).
12. E.H. Wichmann, Fizyka Kwantowa, Warszawa 1973 PWN, s.293-297.
13. M. Born, *Quantenmechanik der Stossvorgänge*, *Z. fur Physik* 38, 803 (1926).
14. E.H. Wichmann, Fizyka Kwantowa, Warszawa 1973 PWN, s.243.
15. Danuta Przeworska-Rolewicz, Przestrzenie liniowe i operatory liniowe, WNT, Warszawa 1977, s.99-103.
16. R. Leitner, J.Zacharski, Zarys Matematyki Wyższej dla Studentów część II, WNT, Warszawa 1995, s.50.
17. Wick Rotation, [http://en.wikipedia.org/wiki/Wick\\_rotation](http://en.wikipedia.org/wiki/Wick_rotation), Preprint.
18. Andrzej Fierla, Opcje na akcje. Wydanie I, Warszawa: Giełda Papierw Wartościowych w Warszawie SA, 2004, s.18.6
19. N. Prykarpatska, Uogólniona metoda charakterystyk i własności funkcjonalno-analityczne typu Hopfa-Laxa rozwiązań pewnych nieliniowych równan różniczkowych cząstkowych, Kraków 2005, Preprint, s.4-10.
20. E.H. Wichmann, Fizyka Kwantowa, Warszawa 1973 PWN, s.305-307.

ISBN 9788389475442