



**WSPOMAGANIE INFORMATYCZNE
ROZWOJU
SPOŁECZNO-GOSPODARCZEGO
I OCHRONY ŚRODOWISKA**

Suplement

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: **BADANIA SYSTEMOWE**

Tom 37

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2004



POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

**WSPOMAGANIE INFORMATYCZNE
ROZWOJU
SPOŁECZNO-GOSPODARCZEGO
I OCHRONY ŚRODOWISKA**

Suplement

Redakcja:

**Jana Studzińskiego
Ludosława Drelichowskiego
Olgierda Hryniewicza**

Książka wydana dzięki dotacji KOMITETU BADAŃ NAUKOWYCH

Książka zawiera wybór artykułów poświęconych omówieniu aktualnego stanu badań w kraju w zakresie rozwoju modeli, technik i systemów zarządzania oraz ich zastosowań w różnych dziedzinach gospodarki narodowej. Wyodrębnioną grupę stanowią artykuły omawiające aplikacyjne wyniki projektów badawczych i celowych KBN.

Recenzenci artykułów:

Dr hab. inż. Maciej Krawczak

Dr Grażyna Petriczek

Prof. dr hab. inż. Andrzej Straszak

Dr inż. Jan Studziński

Komputerowa edycja tekstu: Anna Gostyńska

© Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa 2004

**Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa**

Sekcja Informacji Naukowej i Wydawnictw IBS PAN
tel. 836-68-22

**ISBN 83-85847-93-6
ISSN 0208-8029**

WSPOMAGANIE INFORMATYCZNE OCHRONY ŚRODOWISKA

ZASTOSOWANIE ANALIZY HARMONICZNEJ W MODELU TEMPERATURY GLEBY

Lucyna Bogdan

Instytut Badań Systemowych, Polska Akademia Nauk

<bogdan@ibspan.waw.pl>

This paper concerns the modeling of soil temperatures changes as a function of air temperatures. The method of harmonic analysis was applied. The results are quite satisfactory and suggest that this method can be used for solving the tasks of approximation meteorological data problems.

Keywords: harmonic analysis of measurements data, meteorological data monitoring, mathematical modeling of temperature changes.

1. Estymowanie trendu liniowego i składnika okresowego

Zadanie polega na dopasowaniu do zadanych danych w postaci

T	t ₁	t ₂	t _k
Y _t	Y ₁	Y ₂	Y _k

modelu o postaci

$$Y_t = \alpha + \beta t + Y_{ot}$$

gdzie Y_{ot} jest zmienną o okresie N . Należy znaleźć współczynniki α , β i postać trygonometryczną zmiennej Y_{ot} .

Posłużymy się **Twierdzeniem 1**

Załóżmy, że $a_n \in \mathbb{R}_n$, $n \in \mathbb{N}$, jest ciągiem o okresie $N \geq 2$. Dla $p \in \mathbb{N}$, $p \leq N/2$ I każdego $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujemy

$$C_p(n) = \cos\left(p \frac{2\pi}{N} n\right), \quad S_p(n) = \sin\left(p \frac{2\pi}{N} n\right),$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k$$

$$\alpha_p = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \cos\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) a_k \quad \text{dla} \quad 0 < p < N/2$$

$$\alpha_p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) a_k \quad \text{dla} \quad p = N/2$$

$$\beta_p = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \sin\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) a_k$$

Przy tych założeniach

$$a_n = \begin{cases} \alpha_0 + \sum_{j=1}^{N/2} \alpha_j C_j(n) + \sum_{j=1}^{N/2-1} \beta_j S_j(n), & n \in N, \text{ gdy } N \text{ jest parzyste} \\ \alpha_0 + \sum_{j=1}^{(N-1)/2} \alpha_j C_j(n) + \sum_{j=1}^{(N-1)/2} \beta_j S_j(n), & n \in N, \text{ gdy } N \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$

nazywamy postacią trygonometryczną ciągu.

Przykładowo dla $N = 3$ otrzymujemy

$$a_n = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right) + \beta_1 \sin\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$$

oraz dla $N = 4$

$$a_n = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\left(\frac{2\pi}{4} n\right) + \beta_1 \sin\left(\frac{2\pi}{4} n\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{2\pi}{4} n\right)$$

Do przeprowadzenia dowodu tego twierdzenia wykorzystujemy niżej podany lemat i następujące

Twierdzenie 2

Niech $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną i niech pod przestrzenie $(C_0, C_1, S_1, \dots, C_k, S_k) \in Y$ będą niezerowe i wzajemnie prostopadłe.

Wtedy dla każdego $y \in Y$ rzut punktu y na podprzestrzeń $(C_0, C_1, S_1, \dots, C_k, S_k)$ jest dany wzorem

$$\hat{y} = \sum_{i=0}^k \left\langle y, \frac{y_i}{\|y_i\|^2} \right\rangle y_i$$

Jeżeli

$$C_n(t) = \cos(nt), \quad n=0, 1, \dots, k$$

$$S_n(t) = \sin(nt), \quad n=1, 2, \dots, k$$

to aproksymacją funkcji y elementami przestrzeni $(C_0, C_1, S_1, \dots, C_k, S_k)$ jest funkcja

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \sum_{n=0}^k \frac{\langle y, C_n \rangle}{\|C_n\|^2} C_n + \sum_{n=1}^k \frac{\langle y, S_n \rangle}{\|S_n\|^2} S_n = \frac{\langle y, C_0 \rangle}{\|C_0\|^2} C_0 + \sum_{n=1}^k \frac{\langle y, C_n \rangle}{\|C_n\|^2} C_n + \sum_{n=1}^k \frac{\langle y, S_n \rangle}{\|S_n\|^2} S_n = \\ &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^k \alpha_n C_n + \sum_{n=1}^k \beta_n S_n \end{aligned}$$

Wykorzystano przy tym zależności:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle, \text{ ponieważ } \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$1 = C_0 \Rightarrow \|C_0\|^2 = 1$$

$$C_n(t) = \cos(nt) \Rightarrow \|C_n(t)\|^2 = \frac{N}{2}$$

$$S_n(t) = \sin(nt) \Rightarrow \|S_n(t)\|^2 = \frac{N}{2}$$

Przedstawione zależności, z wyjątkiem definicji normy, która została tu przypomniana dla jasności, wynikają, jak już było wspomniane, z następującego lematu:

Lemat

Dla dowolnych $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 2$ i dla $p \in Z \cap \left[0, \frac{N}{2}\right]$ zdefiniujmy

$$C_p = \begin{bmatrix} \cos\left(p \frac{2\pi}{N} \cdot 1\right) \\ \cos\left(p \frac{2\pi}{N} \cdot 2\right) \\ \vdots \\ \cos\left(p \frac{2\pi}{N} \cdot N\right) \end{bmatrix} \quad C_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad S_p = \begin{bmatrix} \sin\left(p \frac{2\pi}{N} \cdot 1\right) \\ \sin\left(p \frac{2\pi}{N} \cdot 2\right) \\ \vdots \\ \sin\left(p \frac{2\pi}{N} \cdot N\right) \end{bmatrix}$$

Dla dowolnych $p, q \in Z \cap \left[0, \frac{N}{2}\right]$ będzie wówczas:

1. $\langle 1, C_p \rangle = \langle 1, S_p \rangle = \langle C_q, S_p \rangle = 0$
2. $\langle C_q, C_p \rangle = \langle S_q, S_p \rangle = 0$ jeśli $p \neq q$
3. $\langle C_p, C_p \rangle = \langle S_p, S_p \rangle = 0 = \frac{N}{2}$ jeśli $p < \frac{N}{2}$

$$4. \langle C_p, C_p \rangle = N \quad \langle S_p, S_p \rangle = 0 \quad \text{jeśli } p = \frac{N}{2}$$

Dowód lematu.

ad.1. Twierdzimy, że jeżeli $p \in Z$ i $\frac{p}{N} \notin Z$, to

$$\sum_{k=1}^N \cos\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) = \sum_{k=1}^N \sin\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) = 0 \quad (1)$$

Otóż dla

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) \in C \text{ mamy} \quad (2)$$

$$1 - z \neq 0 \quad (3)$$

Dalej, ponieważ dla ogólnej postaci mamy

$$z = r \cos \phi + i r \sin \phi = r e^{i \phi} \quad (4)$$

czyli

$$z^n = (r e^{i \phi})^n = r^n e^{i n \phi} \quad (5)$$

Formuła von Moivre stanowi, że

$$(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos(n \phi) + i \sin(n \phi) \quad (6)$$

Wobec tego otrzymujemy ze wzoru (2)

$$z^n = \cos\left(p \frac{2\pi}{N} n\right) + i \sin\left(p \frac{2\pi}{N} n\right) \quad (7)$$

Dla $n = N$ otrzymujemy na podstawie (7)

$$z^N = \cos\left(p \frac{2\pi}{N} N\right) + i \sin\left(p \frac{2\pi}{N} N\right) \quad (8)$$

Ponieważ $\cos(2\pi p) = 1$ i $\sin(2\pi p) = 0$, to $z^N = 1$ i stąd wynika, że

$$1 - z^N = 0 \quad (9)$$

Ponieważ

$$\sum_{k=1}^N \cos\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) + i \sum_{k=1}^N \sin\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) = z + z^2 + \dots + z^N = z \frac{1 - z^N}{1 - z} \quad (10)$$

jako n -ty wyraz szeregu geometrycznego.

Wobec (3) i (9) mamy

$$z \frac{1 - z^n}{1 - z} = 0$$

Stąd wynika, że

$$\sum_{k=1}^N \cos\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) + \sum_{k=1}^N \sin\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) = 0 \quad (11)$$

i stąd

$$\langle 1, C_p \rangle = \langle 1, S_p \rangle = 0, \text{ cbdo.}$$

ad.2. Jeżeli $p, q \in \mathbb{N} \cap [0, N/2]$ i $p \neq q$, to

$$\begin{aligned} \langle C_p, C_q \rangle &= \sum_{k=1}^N \cos\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) \cos\left(q \frac{2\pi}{N} k\right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N \cos\left(p+q \frac{2\pi}{N} k\right) + \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^N \cos\left(p-q \frac{2\pi}{N} k\right) \right) = \frac{1}{2} (\langle 1, C_{p+q} \rangle + \langle 1, C_{p-q} \rangle) = 0 + 0 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

ponieważ $2\cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$.

Dowód dla $\langle S_p, S_q \rangle$ przeprowadza się podobnie, korzystając z zależności $2\sin x \cos y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$.

ad.3. Jeżeli $p \in \mathbb{N} \cap [0, N/2]$ i $p < N/2$, to

$$\begin{aligned} \langle C_p, C_p \rangle &= \sum_{k=1}^N \cos\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) \cos\left(p \frac{2\pi}{N} k\right) - \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N \cos\left(p+p \frac{2\pi}{N} k\right) + \sum_{k=1}^N \cos\left(p-p \frac{2\pi}{N} k\right) \right) - \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N \cos\left(2p \frac{2\pi}{N} k\right) + \sum_{k=1}^N \cos\left(0 \cdot \frac{2\pi}{N} k\right) \right) = \frac{1}{2} (0 + N) = \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

a jeżeli $p = N/2$, to $\langle C_p, C_p \rangle = \frac{1}{2} (N+N) = N$, cbdo.

Dowody dla $\langle S_p, S_p \rangle = \frac{N}{2}$ (dla $p < \frac{N}{2}$) i dla $\langle S_p, S_p \rangle = 0$ (dla $p = \frac{N}{2}$) są podobne, jak wyżej, co pozwala nie dowodzić szczegółowo pktu 4 lematu.

Dla przeprowadzenia dowodu twierdzenia 1 należy skorzystać z twierdzenia 2 i udowodnionego powyżej lematu.

Dla naszego modelu w postaci

$$Y_t = \alpha + \beta t + Y_{ot} \quad (14)$$

podprzestrzeni, na której szukamy rzutu wektora Y (obiektu), jest podprzestrzeń $(\mathbf{1}, T, C_1, S_1, C_2, S_2, \dots, C_k, S_k)$.

Rozważmy teraz następujący przykład.

Niech będą następujące dane:

t	1	2	3	4	5	6	7
Y_t	8	28	30	8	28	30	20

Zastosujemy model (14) ze zmienną Y_{ot} o okresie $N=6$. Przyjmujemy

$$T = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{vmatrix} \quad Y = \begin{vmatrix} 8 \\ 28 \\ 30 \\ 8 \\ 28 \\ 30 \\ 20 \end{vmatrix} \quad C_1 = \begin{vmatrix} \cos(\frac{2\pi}{6} \cdot 1) \\ \cos(\frac{2\pi}{6} \cdot 2) \\ \cos(\frac{2\pi}{6} \cdot 3) \\ \cos(\frac{2\pi}{6} \cdot 4) \\ \cos(\frac{2\pi}{6} \cdot 5) \\ \cos(\frac{2\pi}{6} \cdot 6) \\ \cos(\frac{2\pi}{6} \cdot 7) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad S_1 = \begin{vmatrix} \sin(\frac{2\pi}{6} \cdot 1) \\ \sin(\frac{2\pi}{6} \cdot 2) \\ \sin(\frac{2\pi}{6} \cdot 3) \\ \sin(\frac{2\pi}{6} \cdot 4) \\ \sin(\frac{2\pi}{6} \cdot 5) \\ \sin(\frac{2\pi}{6} \cdot 6) \\ \sin(\frac{2\pi}{6} \cdot 7) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 1) \\ \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 2) \\ \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 3) \\ \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 4) \\ \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 5) \\ \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 6) \\ \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 1) \\ \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 2) \\ \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 3) \\ \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 4) \\ \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 5) \\ \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 6) \\ \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} \cos(\beta \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 1) \\ \cos(\beta \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 2) \\ \cos(\beta \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 3) \\ \cos(\beta \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 4) \\ \cos(\beta \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 5) \\ \cos(\beta \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 6) \\ \cos(\beta \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot 7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Obliczamy teraz macierz $X = [1 \ T \ C_1 \ S_1 \ C_2 \ S_2 \ C_3]$ oraz macierze $X^T X$ i $X^T Y$.
Rozwiązujemy następnie układ równań

$$X^T X \alpha = X^T Y \quad (15)$$

i otrzymujemy przykładowy model w postaci

$$Y_t = 2 + 2t - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right) + 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right) + 6 \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right) - 6\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}) - (1) \cos(\pi t), \quad t \in N$$

o współczynnikach:

$$\alpha_0 = 2, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 2\sqrt{3}, \alpha_4 = 6, \alpha_5 = -6\sqrt{3}, \alpha_6 = -1$$

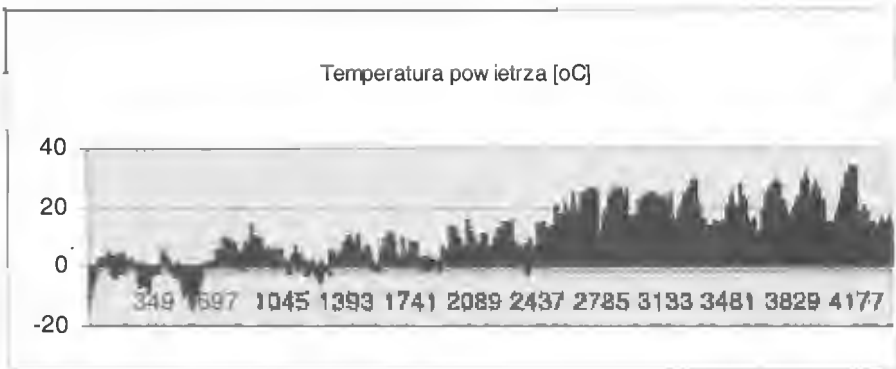
2. Model temperatury gleby

Powyższą metodę zastosowano do znalezienia modelu temperatury gleby na głębokości 50 cm w zależności od temperatury powietrza. Na rys. 1 i 2 przedstawiono dane pomiarowe, na podstawie których zostanie zbudowany model. Dane zawierają 4372 pomiary temperatury wykonane w ciągu sześciu miesięcy jednego roku od stycznia do czerwca, co godzinę.

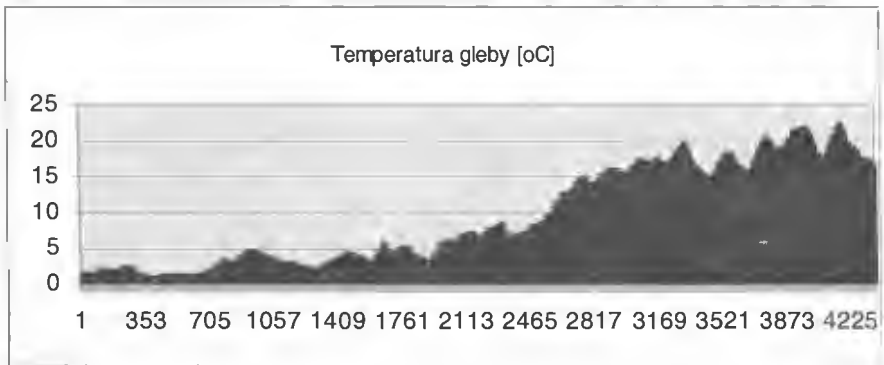
Rysunek 1 przedstawia pomiary temperatury powietrza, natomiast rys. 2 przedstawia pomiary temperatury gleby na głębokości 50cm wykonywane w tych samych chwilach czasowych. Na rys. 3 przedstawiono funkcję współczynników autokorelacji, która pokazuje 24-godzinny cykl występujący w pomiarach. Pomiary zostały więc wygładzone średnią ruchomą 24-godzinną.

Rysunek 4 pokazuje funkcję współczynników autokorelacji przy większym przesunięciu. Wyniki wskazują, że należy zwrócić uwagę na przesunięcie

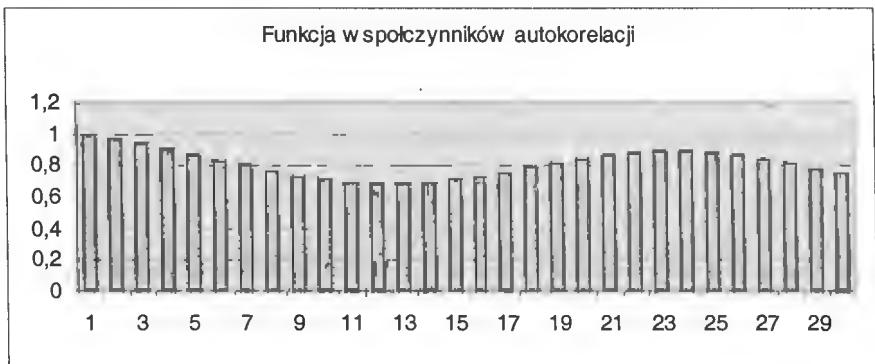
wynoszące 192 godziny. Rezultaty otrzymane w pracy (Bogdan, Studziński, 2003) potwierdzają to przypuszczenie.



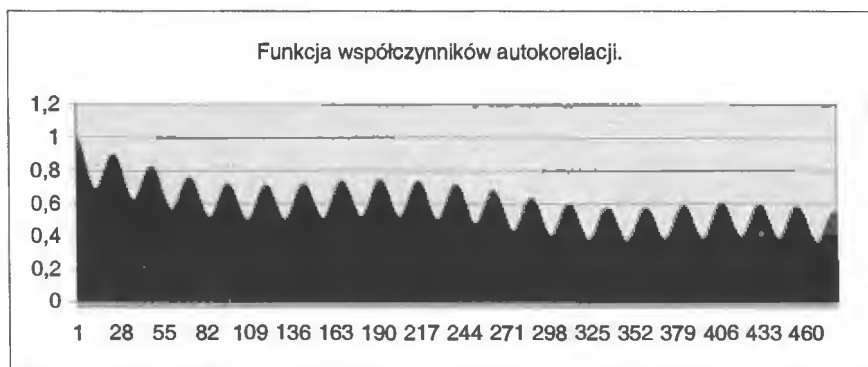
Rysunek 1. Pomiary temperatury powietrza.



Rysunek 2. Pomiary temperatury gleby.



Rysunek 3. Funkcja współczynnikó w autokorelacji temperatury gleby.



Rysunek 4. Funkcja współczynników autokorelacji temperatury gleby.

Powyższe rozważania służyły określeniu długości okresu składowej harmonicznej modelu. Mamy tutaj dużą dowolność, gdyż dysponujemy bardzo dużą próbką danych. Pierwszą próbę podjęto dla najkrótszego okresu, czyli 12 godzin, następną dla 24 godzin, potem kolejno dla 48 godzin, dla 72 godzin i dłuższych (porównaj tablice 1 i 2).

Tablica 1. Wyniki modelu przy wejściach wygładzonych średnią ruchomą 192h dla okresów 12h, 24h i 48h.

Analiza statystyczna			
	<i>Współczynnik korelacji R</i>	0,95463	
	<i>Błąd standardowy</i>	1,453213	
	<i>Liczba obserwacji</i>	4175	
<i>Parametr</i>	<i>zmienna</i>	<i>Wartość parametru</i>	<i>Odchylenie standardowe</i>
α_0	-	3,3388	0,1919
α_w	w	0,0177	0,0183
α_{t-1}	X_{t-1}	0,8321	0,0054
α_1	$X_{\cos(2\pi t/48)}$	-0,1976	2,7375
β_1	$X_{\sin(2\pi t/48)}$	0,0019	0,0318
α_2	$X_{\cos(2\pi t/24)}$	0,2208	0,0318
β_2	$X_{\sin(2\pi t/24)}$	-1,7473	0,1013
α_3	$X_{\cos(2\pi t/12)}$	-0,0279	0,0396
β_3	$X_{\cos(2\pi t/12)}$	0,5040	5,4113

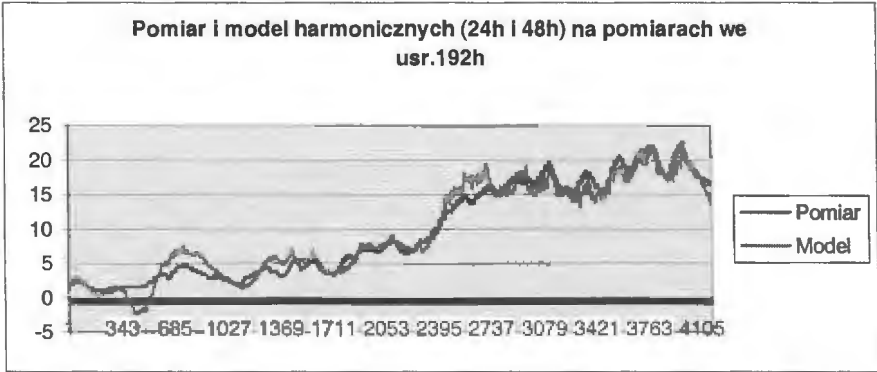
Tablica 2. Wyniki modelu przy wejściach wygładzonych średnią ruchomą 192 h dla okresów 24h, 48h i 72h.

Analiza statystyczna			
	<i>Współczynnik korelacji R</i>	0,8761	
	<i>Błąd standardowy</i>	2,93	
	<i>Liczba obserwacji</i>	4175	
<i>Parametr</i>	<i>zmienna</i>	<i>Wartość parametru</i>	<i>Odchylenie standardowe</i>
α_0	-	-3,3196	2,2275
α_w	W	0,6568	0,1087
α_{t-1}	X_{t-1}	0,7790	0,0107
α_1	$X_{\cos(2\pi t/48)}$	-152,729	202,3142
β_1	$X_{\sin(2\pi t/48)}$	-0,02856	0,06424
α_2	$X_{\cos(2\pi t/24)}$	-0,5859	0,0642
β_2	$X_{\sin(2\pi t/24)}$	-1,6351	0,3406
α_3	$X_{\cos(2\pi t/72)}$	2,7098	2,1397
β_3	$X_{\cos(2\pi t/72)}$	1775,926	2320,557

Jak widać w tab. 2, tworzenie modelu z okresem 72 godz. nie zakończyło się sukcesem.

Tablica 3. Wyniki modelu przy wejściach wygładzonych średnią ruchomą 192 h dla okresów 24h i 48h.

Analiza statystyczna			
	<i>Współczynnik korelacji R</i>	0,9546	
	<i>Błąd standardowy</i>	1,45	
	<i>Liczba obserwacji</i>	4175	
<i>Parametr</i>	<i>zmienna</i>	<i>Wartość parametru</i>	<i>Odchylenie standardowe</i>
α_0	-	-3,3438	0,1918
α_w	W	0,0185	0,0182
α_{t-1}	X_{t-1}	0,8308	0,0050
α_1	$X_{\cos(2\pi t/48)}$	0,0577	0,0319
β_1	$X_{\sin(2\pi t/48)}$	0,0013	0,0318
α_2	$X_{\cos(2\pi t/24)}$	0,2206	0,0318
β_2	$X_{\sin(2\pi t/24)}$	-1,7371	0,10001



Rysunek 5. Wyniki modelowania.

3. Zakończenie

Przedstawiony problem dotyczy modelowania zmian temperatury w glebie w funkcji temperatury powietrza. Do modelowania zastosowano metodę analizy harmonicznej, którą w pracy przedstawiono dość szczegółowo z wyprowadzeniami dowodów.

Otrzymano zadowalające wyniki modelowania, porównywalne z wynikami innych metod, wskazujące na poprawność zastosowanej metody do zadań aproksymacji pomiarów metrologicznych, gdzie zagadnienia występowania cykliów pojawiają się bardzo często.

Literatura

- Bogdan L., Studziński J. (2004) Temperaturmodellierung im Boden anhand der Messungen aus dem meteorologischen Monitoring, in: *Simulation in Umwelt und Geowissenschaften* (A. Gnauck, Hrsg.), Berichte aus der Umweltinformatik, Shaker Verlag, Aachen (w druku).
- Rzymowski W. (2004) *Macierze i operatory*. Wyd. Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin.
- Stoeker H. (1999) *Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Thun.
- Mańczak K., Nahorski Z. (1983) *Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych*. PWN, Warszawa.

**Jan Studziński, Ludosław Drelichowski, Olgierd Hryniewicz
(redakcja)**

**WSPOMAGANIE INFORMATYCZNE
ROZWOJU SPOŁECZNO-GOSPODARCZEGO
I OCHRONY ŚRODOWISKA**

Monografia dotyczy rozwoju i zastosowań nowoczesnych narzędzi informatyki w różnych gałęziach gospodarki ze szczególnym uwzględnieniem obszaru inżynierii i ochrony środowiska. Zamieszczono w niej wybrane artykuły autorów krajowych zajmujących się tą tematyką, starając się zaprezentować czytelnikom aktualny stan polskich możliwości i potrzeb w dziedzinie informatyki stosowanej. Znaczną część artykułów stanowią prace wykonane w ramach projektów badawczych KBN. Autorzy artykułów prezentowali wyniki swoich badań na konferencji pn. Komputerowe Systemy Wielodostępne, zorganizowanej przez Instytut Badań Systemowych PAN i Akademię Techniczno-Rolniczą z Bydgoszczy w Ciechocinku we wrześniu 2004 r.

ISSN 0208-8029

ISBN 83-85847-93-6

**W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy
prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Noweńska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl**