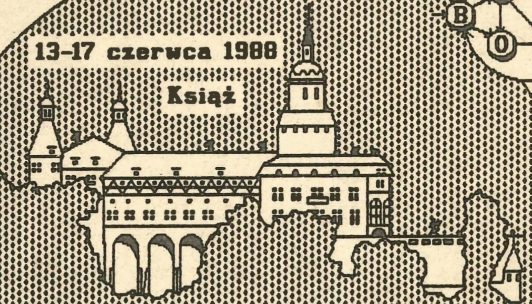
Redaktorzy:
A.Straszak
Z.Nahorski
J.Sikorski



13-17 czerwca 1988
Książ

# 1. Krajowa Konferencja Badań Operacyjnych i Systemowych

Tom 2

BOS'88

POLSKIE TOWARZYSTWO BADAŃ
OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

POLSKIE TOWARZYSTWO BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH

TOM 2

# WSPOMAGANIE PODEJMOWANIA DECYZJI
## MODELE I SYSTEMY

I KRAJOWA KONFERENCJA

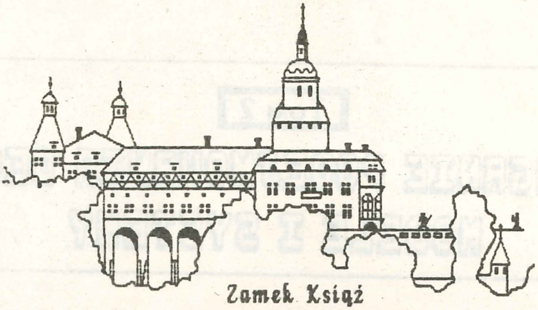
# BADAŃ OPERACYJNYCH i SYSTEMOWYCH

Książ, 13 - 17 czerwca 1988

**BOS'88**

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH POLSKIEJ AKADEMII NAUK

1989
WARSZAWA



Zamek Książ

# I Krajowa Konferencja Badań Operacyjnych i Systemowych

**Organizator konferencji**

Polskie Towarzystwo Badań Operacyjnych i Systemowych
przy współpracy
Instytutu Badań Systemowych PAN

**Komitet naukowy konferencji**

Jerzy Hołubiec, Andrzej Kałuszko, Jerzy Kisielnicki, Henryk Kowalowski, Roman Kulikowski, Franciszek Marecki, Zbigniew Nahorski, Stanisław Piasecki, Jarosław Sikorski, Jan Stachowicz, Jan Stasierski, Andrzej Straszak, Maciej Sysło, Władysław Świtalski

**Redaktorzy naukowi materiałów**

Andrzej Straszak, Zbigniew Nahorski, Jarosław Sikorski

# 6. Formalizacja modeli decyzyjnych

6.7

I Krajowa Konferencja
Badań Operacyjnych i Systemowych
Książ, 13 - 17 czerwca 1988r.

# ZASTOSOWANIE TEORII SKOŃCZENIE WYMIAROWYCH CIĄGŁYCH GRUP PRZEKSZTAŁCEŃ DO ANALIZY I SYNTEZY FUNKCJI PRODUKCJI

Dariusz Wagner
Instytut Badań Systemowych PAN
ul.Newelska 6
01-447 Warszawa

Analizę zjawisk ekonomicznych, a w szczególności wpływu postępu technicznego, można prowadzić - zgodnie z propozycją R.Sato - stosując teorię ciągłych grup przekształceń. W pracy omówiono podstawowe elementy tego podejścia, zwracając szczególną uwagę na zagadnienia analizy i syntezy funkcji produkcji. Na podstawie analizy wybranych opisów funkcji produkcji wskazano na konieczność stosowania różnych definicji niezmienniczości (niezmienniczość funkcji, równania różniczkowego, funkcjonału całkowego). Zaproponowano ogólny schemat postępowania przy analizie własności funkcji produkcji odniesionych do wpływu postępu technicznego. Rozpatrywane podejście zilustrowano przykładem analizy wybranej funkcji produkcji.

## 1. Wprowadzenie

Możliwość zastosowania teorii skończenie wymiarowych ciągłych grup przekształceń do analizy zjawisk ekonomicznych została przedstawiona w książce "Theory of technical change and economic invariance" [Sato (1981).]. W książce tej zaproponowano, aby wpływ zmian technologii (postęp techniczny) opisywać w postaci zależności tworzących ciągłą grupę przekształceń. Opracowany w ramach teorii grup przekształceń aparat analizy niezmienniczości równań różniczkowych R. Sato zastosował m.in. do badania funkcji produkcji, funkcji popytu oraz ekonomicznych praw zachowania.

W pracy ograniczono się do rozpatrzenia zagadnienia zastosowania teorii grup przekształceń do opisu wpływu postępu technicznego na funkcję produkcji. W tym celu przestawiono kilka typowych postaci funkcji produkcji, zwracając szczególną uwagę na założenia przyjmowane przy ich konstrukcji. Omówiono podstawowe pojęcia teorii grup przekształceń i wynikającej z niej metodyki badania niezmienniczości funkcji, równań różniczkowych i funkcjonałów całkowych. Przedstawiono zaproponowaną przez R.Sato interpretację tych pojęć odniesioną do funkcji produkcji oraz pokazano (w myśl propozycji R.Sato) związek między niezmienniczością funkcji i neutralnością postępu technicznego w sensie Hicksa [Allen (1975)]. Funkcję produkcji można traktować jako rozwiązanie odpowiednio skonstruowanego układu równań różniczkowych lub równania różniczkowego odpowiedniego rzędu. Biorąc pod uwagę fakt, iż z niezmienniczości równań wynika niezmienniczość ich rozwiązań [Owsiannikow (1978)], badanie niezmienniczości funkcji produkcji można zastąpić analizą niezmienniczości równania różniczkowego określającego tę funkcję. Na podstawie przeprowadzonych rozważań został zaproponowany ogólny schemat postępowania przy analizie funkcji produkcji odniesionej do wpływu postępu technicznego. Podano przykład takiej analizy.

## 2. Funkcja produkcji

Przyjmując, że wielkość czynników produkcji może być zmieniana w sposób ciągły oraz, że istnieje jednoznaczna zależność między wielkością produkcji a tymi czynnikami, produkcję uzyskaną przy danych nakładach określa się stosując tzw. funkcję produkcji [Allen (1975)].

$$y = f(L_1,\dots,L_n;\ a_1,\dots,a_b) \qquad (1)$$

gdzie: $L_i\,(i=1,\dots,n)$ - wielkości czynników produkcji, $L_i \geq 0$;

$a_\beta\,(\beta=1,\dots,b)$ - parametry (stałe lub zależne od warunków początkowych, czasu, czynników produkcji);

$y$ - wielkość produkcji mierzona w odpowiednich jednostkach, $y \geq 0$. Zazwyczaj zakłada się, że jest to produkcja odpowiadająca pełnemu wykorzystaniu czynników produkcji.

Na funkcję f są nałożone zazwyczaj ograniczenia dotyczące jej różniczkowalności, jednorodności, znaków pochodnych odpowiednich rzędów, np. dla klasycznej funkcji produkcji typu

$$y = f(L,K;a) \qquad (2)$$

gdzie L - wielkość zatrudnienia, K - zasób kapitału, przyjmuje się, że f jest klasy $C^2$, $\frac{\partial f}{\partial K};\ \frac{\partial f}{\partial L} > 0$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial L^2};\ \frac{\partial^2 f}{\partial K^2} < 0$ w obszarze, w którym jest ona określona. Zakłada się ponadto jednorodność tej funkcji, tzn. $f(cL,\ cK) = cf(L,K)$, gdzie c - stała. Przykładem funkcji spełniającej wszystkie przedstawione wyżej ograniczenia jest funkcja typu Cobba-Douglasa

$$y = a_1 L^{a_2} K^{1-a_2} \quad \text{gdzie } a_1>0,\ 0<a_2<1 \qquad (3)$$

Warto odnotować, że jeśli funkcja (2) jest jednorodna względem zmiennych K i L to można ją przedstawić w postaci [Allen (1975)]

$$y = Lh(KL^{-1};a) \qquad (4)$$

Jednakże nie zawsze wszystkie te założenia są uwzględniane przy konstrukcji funkcji produkcji. W pracy [Gadomski (w druku)] dla celów modelowania produkcji stali w Polsce zastosowano funkcję produkcji o postaci

$$y = f(K,L;a) = a_1L^{-1}(KL^{-1})^{a_2}\exp\,[-a_3(KL^{-1})];\ a_1,a_3>0,\ a_2>1 \qquad (5)$$

Z zależności (5) bezpośrednio wynika, że

$$\frac{\partial y}{\partial L}=f(K,L,a)L^{-1}[-1-a_2+a_3(KL^{-1})];\frac{\partial y}{\partial K}=f(K,L;a)L^{-1}[(LK^{-1})a_2-a_3)] \qquad (6)$$

Skąd mamy $\frac{\partial y}{\partial L} = 0$ przy $KL^{-1}=(a_2+1)a_3^{-1}$ oraz $\frac{\partial y}{\partial K} = 0$ przy $KL^{-1}=a_2a_3^{-1}$
A zatem dla $a_2>>1$ $\frac{\partial y}{\partial L} = \frac{\partial y}{\partial K} = 0$ przy $KL^{-1}= a_2a_3^{-1}$ podobnie

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial L^2} &= [a_3(KL^{-1}) - \sqrt{a_2+2}\,(\sqrt{a_2+2} - 1)][a_3(KL^{-1}) -\sqrt{a_2+2}\,(\sqrt{a_2+2} +1)]\\ \frac{\partial^2 y}{\partial K^2} &= [LK^{-1}(a_2- \sqrt{a_2}) - a_3][LK^{-1}(a_2 +\sqrt{a_2})-a_3]\end{aligned} \qquad (7)$$

Drugie pochodne funkcji (5) mogą zatem przyjmować zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne. Przy $KL^{-1}=a_2a_3^{-1}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial K^2} < 0$ oraz (jeśli tylko $a_2>2$) $\frac{\partial^2 y}{\partial L^2} < 0$; oznacza to, że w punkcie tym (przy $a_2>>1$) funkcja (5) osiąga wartość maksymalną.

Dla celów modelowania gałęzi przemysłu działającej w warunkach gospodarki rynkowej wprowadzono ostatnio nowy pośredni sposób definiowania funkcji produkcji [Szananin (1981)]. Przy tym podejściu funkcja produkcji jest określona w wyniku rozwiązania zadania maksymalizacji zdolności produkcyjnych gałęzi przy istnieniu ograniczeń na zużycie czynników produkcji. Jeżeli przyjmiemy, że funkcja produkcji opisuje maksymalną produkcję gałęzi przy ustalonych normach zużycia czynników produkcji, to wykorzystując pojęcie tzw. uśrednionych zdolności produkcyjnych można ją przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} y &= \int_{\Omega} \zeta(z_1,\dots,z_n)dz_1\dots dz_n = g_o(p_1p_o^{-1},\dots,p_np_o^{-1}), \\ L_1 &= \int_{\Omega} z_1\zeta(z_1,\dots,z_n)dz_1\dots dz_n = g_1(p_1p_o^{-1},\dots,p_np_o^{-1}), \\ L_n &= \int_{\Omega} z_n\zeta(z_1,\dots,z_n)dz_1\dots dz_n = g_n(p_1p_o^{-1},\dots,p_np_o^{-1}) \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie: $\zeta(z_1,\dots,z_n)$ - uśredniona funkcja zdolności produkcyjnych, odpowiednio gładka w obszarze $\Omega[\Omega\{(z_1,\dots,z_n\}; (z_1,\dots,z_n) \in D, \sum_{i=1}^{n} p_iz_i \leq p_o, D \subset R_n^+)\}]$;

$g_1,\dots,g_n$ - funkcje określające popyt na poszczególne czynniki produkcji;

$p_o>0$ - cena jednostkowa wytworzonego produktu;

$p_1>0,\dots,p_n>0$ - ceny wykorzystywanych czynników produkcji

$z_1>0,\dots,z_n>0$ - normy zużycia czynników produkcji na wytworzenie jednostki produktu.

Eliminując z zależności (8) wielkości $p_ip_o^{-1}$ $(i=1,\dots,n)$ otrzymujemy wyrażenie w postaci (1), określające funkcję produkcji.

## 3. Wpływ postępu technicznego

Przyjmujemy, że w wyniku postępu technicznego następuje zmiana wielkości czynników produkcji, którą można przedstawić w postaci zależności:

$$L_i' = s_i(L_1,\ldots,L_n;\ t^1,\ldots,t^r)\quad i=1,\ldots,n \tag{9}$$

gdzie $s_i$ $(i=1,\ldots,n)$ funkcje odpowiednio gładkie; $t=\{t^1,\ldots,t^r\}$ - parametry.

Zmianę ilości wytworzonego produktu, związaną z zaistniałym postępem technicznym, można opisać wzorem

$$y' = f(L_1',\ldots,L_n';\ a_1,\ldots,a_b) = q(L_1,\ldots,L_n;\ a_1,\ldots,a_b;t^1,\ldots,t^r) \tag{10}$$

Jeśli

$$y' = g_t[f(L;a)] \text{ gdzie } g_t \text{ - funkcja parametrów } t \tag{11}$$

to taki postęp techniczny jest neutralny w sensie Hicksa[Allen (1975)]. Zależność (11) oznacza, że w wyniku zaistniałego postępu technicznego nie ulega zmianie kształt funkcji produkcji. Innymi słowy, efekt postępu technicznego przekształca się w efekt skali.

## 4. Pojęcia podstawowe teorii ciągłych skończenie wymiarowych grup przekształceń.

Przyjmiemy, że jest dana grupa ciągłych przekształceń działająca w przestrzeni $R_n$, przy czym przekształcenia te są zależne od r parametrów. Grupę tę oznaczymy jako $G_r^n$. Przekształcenia tworzące tę grupę można przedstawić albo w tzw. postaci skończonej

$$x_l' = h_x^l(x,u;t)\quad u_k' = h_u^k(x,u;t)\quad l=1,\ldots,n-m;\ k=1,\ldots,m \tag{12}$$

przy czym $x_l'|_{t=0}=x_l$ $u_k'|_{t=0}=u_k$; $t=\{t^1,\ldots,t^r\}$ parametry grupy albo w postaci operatorów infinitezymalnych

$$X_\alpha = \xi_{x\alpha}^l \frac{\partial}{\partial x_l} + \xi_{u\alpha}^k \frac{\partial}{\partial u_k}\quad l=\overline{1,n-m};\ k=\overline{1,m};\ \alpha=1,\ldots,r \tag{13}$$

tworzących algebrę Liego, przy czym $(X_\alpha,X_\beta)= c_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma\ (\alpha,\beta=1,\ldots,r;\gamma=\overline{1,r})$

Operatory $X_\alpha$ można przedłużać na wyższe pochodne [Owsiannikow (1978)]. Przedłużenie na pochodne pierwszego rzędu ma postać:

$$\tilde{X}_\alpha = X_\alpha + \xi^k_{pl\alpha} \frac{\partial}{\partial p^k_l} \quad \text{gdzie } p^k_l = \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad \text{oraz } \xi^k_{pl\alpha} = D_l \xi^k_{u\alpha} - p^k_j D_i (\xi^j_{x\alpha}) \tag{14}$$

$$j = \overline{1, n-m}$$

Def. 1 [Owsiannikow (1978)]. Rodzinę funkcji $f(x,u)=c$, gdzie $c$ stała, nazywamy niezmienniczą względem grupy $G^n_r$, jeśli $f(x',u')=c'$ to znaczy w wyniku działania grupy $G^n_r$ funkcja należąca do danej rodziny przekształca się w funkcję należącą również do tej rodziny.

Tw. 1 [Owsiannikow (1978)]. Warunkiem koniecznym i dostatecznym aby rodzina funkcji $f(x,u) = c$ była niezmiennicza względem grupy $G^n_r$ jest spełnienie równości:

$$X_\alpha f(x,u) = \rho_\alpha(f) \quad \alpha = 1,\dots,r \tag{15}$$

gdzie $\rho_\alpha$ funkcja odpowiednio gładka.

Def. 2 [Owsiannikow (1978)]. Układ równań.

$$S^\mu[x,u,p^{(1)},\dots,p^{(N)}] = 0; \; \mu=1,\dots,M; \; p^{(N)} = \frac{\partial^N u_k}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_N}} \tag{16}$$

jest niezmienniczy względem grupy $G^n_r$ jeśli w wyniku jej działania każde rozwiązanie tego równania zostaje przekształcone również w jego rozwiązanie.

Tw. 2 [Owsiannikow (1978)]. Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby układ równań (16) był niezmienniczy względem grupy $G^n_r$ jest spełnienie równości

$$\tilde{X}_\alpha^{(N)} S^\mu[x,u,p^{(1)},\dots,p^{(N)}] \Big|_{S^\mu=0} = 0 \quad \alpha=1,\dots,r; \; \mu=1,\dots,M \tag{17}$$

gdzie $\tilde{X}_{\alpha}^{(N)}$ - przedłużenie operatora (13) na pochodne rzędu (N).

Jeżeli układ równań (16) jest dany jako układ równań zwyczajnych zapisanych w postaci normalnej

$$\frac{du_k}{dx} = w^k(x,u) \quad u_k(x_o) = u_o \quad k=1,\dots,m \qquad (18)$$

to do jego analizy stosuje się często operator będący sumą operatora (13) i operatora

$$Y_o = \frac{\partial}{\partial x} + w^k \frac{\partial}{\partial u_k} \quad k = \overline{1,m} \qquad (19)$$

reprezentującego rozpatrywany układ równań różniczkowych. Ten nowy operator ma postać

$$\bar{X}_{\alpha} = X_{\alpha} - \xi_{x\alpha} Y_o = (\xi_{u\alpha}^k - w^k \xi_{x\alpha}) \frac{\partial}{\partial u_k} = \xi_{u\alpha}^k \frac{\partial}{\partial u_k}; \ \alpha = 1,\dots,r; \quad k=1,m \qquad (20)$$

Warunek niezmienniczości układu równań (18) względem operatora (20) wynikający z Tw.2, ma postać [Owsiannikow (1978)]

$$Y_o \bar{\xi}_{u\alpha}^k = \bar{X}_{\alpha} w^k \quad \alpha=1,\dots,r; \quad k=1,\dots,m \qquad (21)$$

W pracy [Wagner (1987)] podano różne metody określenia współczynników operatora (20).

<u>Def. 3</u> [Logan (1977)]. Funkcjonał całkowy.

$$J = \int_{\Omega} F[x,u,p^{(1)},\dots,p^{(N)}]dx_1 \dots dx_{n-m} \qquad (22)$$

jest niezmienniczy względem grupy $G_r^n$ jeśli

$$\int_{\Omega} F[x,u,p^{(1)},\dots,p^{(N)}]dx_1 \dots dx_{n-m} = \int_{\Omega} F[x',u',p'^{(1)},\dots,p'^{(N)}]dx'_1 \dots dx'_{n-m} \qquad (23)$$

Tw. 3 [Wagner (1984)]. Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby funkcjonał (22) był niezmienniczy względem grupy $G^n_r$ jest spełnienie równości

$$\tilde{X}^{(N)}_{\alpha} F + FD_l \xi^l_{x\alpha} = 0 \quad \alpha=1,\dots,r; \quad l=\overline{1,n-m} \tag{24}$$

## 5. Opis wpływu postępu technicznego na funkcję produkcji wykorzystujący pojęcia teorii grup przekształceń.

R. Sato poświęcił kilka stron swej książki [Sato (1981)] na uzasadnienie możliwości opisywania wpływu postępu technicznego na czynniki produkcji w postaci przekształceń grupy $G^n_r$. Stosując ten opis mamy

$$X_{\alpha} y = \left(\frac{\partial f}{\partial t^{\alpha}}\right)\Big|_{t=0} = \xi^i_{L\alpha} \frac{\partial f}{\partial L_i} \qquad i=\overline{1,n}; \ \alpha=1,\dots,r \tag{25}$$

gdzie $\xi^i_{L\alpha} = \dfrac{\partial s_i(L,t)}{\partial t^{\alpha}}\Big|_{t=0}$ - infinitezymalna zmiana i-tego czynnika produkcji wywołana postępem technicznym;

$\dfrac{\partial f}{\partial L_i}$ - krańcowa produktywność i-tego czynnika produkcji;

$X_{\alpha} y$ - infinitezymalna miara wpływu postępu technicznego na funkcję produkcji.

Biorąc pod uwagę, że $X_{\alpha} L_i = \xi^i_{L\alpha}$, wielkości $\xi^i_{L\alpha}$ można rozpatrywać jako infinitezymalne miary wpływu postępu technicznego na i-ty czynnik produkcji.

Z definicji 1 bezpośrednio wynika, że warunek (11) określający neutralność postępu technicznego w sensie Hicksa jest niczym innym jak żądaniem, aby funkcja produkcji (1) była niezmiennicza względem grupy $G^n_r$ określającej wpływ postępu technicznego.

Zagadnienie niezmienniczości funkcji produkcji można również ująć inaczej. Załóżmy, że w zależności (1) pierwsze (n-m) czynników produkcji traktujemy jako zmienne niezależne a pozostałe m-jako zmienne zależne. Przy tym założeniu równość

$$f(L_1,\dots,L_{n-m},L_{n-m+1},\dots,L_n) = \text{const} \qquad (26)$$

można interpretować jako rozwiązanie odpowiedniego układu równań. Zazwyczaj tylko jeden z czynników produkcji jest traktowany jako zmienna niezależna, przyjmujemy, że jest to $L_1$. Możemy wtedy założyć, że mamy dany układ równań

$$\frac{dL_{1+k}}{dL_1} = \psi_1^{1+k}(L_1,\dots,L_n) \quad k=1,\dots,m; \; n=1+m \qquad (27)$$

Rozwiązania tego układu równań przy spełnieniu odpowiednich warunków zależą od m stałych.

Jeśli rozpatrujemy tylko dwa czynniki produkcji (nakłady kapitału i wielkość zatrudnienia), to ograniczenia nakładane na funkcję produkcji dotyczą również pochodnych rzędu wyższego niż pierwszy (powiedzmy rzędu N). Wtedy funkcję produkcji możemy traktować jako rozwiązanie równania

$$\phi(K,L,\frac{dL}{dK},\dots,\frac{d^NL}{dK^N}) = 0 \qquad (28)$$

Należy jednak podkreślić, że wprowadzając nowe zmienne $M_{l+1}=\frac{dM_l}{dK}$; $M_1=L$; $l=1,\dots,N-1$ otrzymujemy układ równań w postaci (27). Wiadomo [Owsiannikow (1978)], że z niezmienniczości układu równań (16) (Def. 2) wynika niezmienniczość jego rozwiązań. A zatem analizę niezmienniczości funkcji produkcji (1) - rozpatrywanej jako rozwiązanie układ równań (27) lub (28) (w zależności od przyjętych założeń) - można prowadzić badając warunki niezmienniczości tych równań. Należy podkreślić, że wyniki badania niezmienniczości funkcji nie muszą się w przypadku ogólnym pokrywać z rezultatami analizy niezmienniczości odpowiadających im równań. Na przykład rozpatrując równanie (28) zapisane w postaci (27) określimy przekształcenia (12) zależne od zmiennych $M_l$ (a więc i od pochodnych $\frac{d^{l-1}\bar{L}}{dK^{l-1}}$. Analizując zaś bezpośrednio funkcję produkcji mamy do czynienia jedynie z przekształceniami zależnymi od L i K.

Jeśli funkcja produkcji jest definiowana pośrednio przy użyciu funkcjonałów całkowych (8), to do badania warunków jej niezmienniczości należy zastosować Definicję 3 i Twierdzenie 3.

Przedstawione rozważania umożliwiają sformułowanie następującego schematu postępowania przy analizie funkcji produkcji prowadzonej w odniesieniu do wpływu postępu technicznego:

1° Ustalamy czy analizie podlega bezpośrednio funkcja produkcji czy też równanie różniczkowe odpowiedniego rzędu, którego rozwiązanie stanowi rozpatrywana funkcja produkcji, czy też funkcjonał całkowy z więzami określający pośrednio tę funkcję.

2° Wyznaczamy współczynniki operatora infinitezymalnego (13) (określającego grupę przekształceń), względem której dana funkcja (równanie, funkcjonał całkowy) jest niezmiennicza.

3° Mając określony operator infinitezymalny, względem którego dana funkcja (równanie, funkcjonał całkowy) jest niezmiennicza określamy postać skończoną przekształceń (12), podając - w miarę możliwości - ich interpretację ekonomiczną. Rozpatrujemy możliwość wprowadzenia nowych zmiennych sprowadzających uzyskany operator do pożądanej postaci, posługując się zależnością $X = \xi_L^i \frac{\partial}{\partial L_i} = X\tilde{L}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{L}_i}$ $(i=\overline{1,n})$. Wyznaczamy postać funkcji produkcji odpowiadającą nowym zmiennym $[f(\tilde{L})]$.

Biorąc pod uwagę, że Tw. 1,2 i 3 podają odpowiednio warunki konieczne i dostateczne niezmienniczości funkcji, równania różniczkowego i funkcjonału całkowego, można zastosować je do syntezy funkcji produkcji o zadanych wartościach, to znaczy niezmienniczej względem przyjętych grup przekształceń, reprezentujących interesujące nas zmiany czynników produkcji (grupa przesunięć, grupa podobieństw itp.).

## 6. Przykłady

W pracy [Chmielarz i Stachurski (1986)] zaproponowano funkcję produkcji klasy VES o postaci

$$y=f(L,K;a)=a_1K+a_2L-\sqrt{a_3K^2+a_4L^2} \qquad a_3a_4>0,\ a_1\geq\sqrt{a_3},\ a_2\geq\sqrt{a_4} \tag{29}$$

Funkcja (29) jest jednorodna. Można przyjąć, że jest ona rozwiązaniem następującego równania pierwszego rzędu.

$$\frac{dL}{dK}=-\frac{a_1\sqrt{a_3K^2+a_4L^2}-a_3K}{a_2\sqrt{a_3K^2+a_4L^2}-a_4L} \tag{30}$$

Warunek (15) prowadzi do zależności:

$$\xi_L=\frac{[\rho(f)\sqrt{a_3K^2+a_4L^2}-\xi_K(a_1\sqrt{a_3K^2+a_4L^2}-a_3K)]}{a_2\sqrt{a_3K^2+a_4L^2}-a_4L} \tag{31}$$

Należy rozpatrzyć następujące przypadki:

1° $\rho(f)\equiv 0$; z zależności (31) wynika, że w tym przypadku

$$\xi_L=-\frac{a_1\sqrt{a_3K^2+a_4L^2}-a_3K}{a_2\sqrt{a_3K^2+a_4L^2}-a_4L}\,\xi_K \tag{32}$$

Wyrażenie określające $\frac{\xi_L}{\xi_K}$ pokrywa się więc z prawą stroną równania (30). Oznacza to, że operator (13) jest w tym przypadku generowany bezpośrednio przez samo równanie (30).

2° $\rho(f) \equiv 1$; przyjmując, że $\xi_K$ ma określoną postać można wyznaczyć $\xi_L$

a) $$\xi_K = \frac{\sqrt{a_3K^2+a_4L^2}}{a_1\sqrt{a_2K^2+a_4L^2}-a_3K} \; ; \; \xi_L = 0 \qquad (33)$$

b) $$\xi_L = \frac{\sqrt{a_3K^2+a_4K^2}}{a_2\sqrt{a_3K^2+a_4L^2}-a_4L} \; ; \; \xi_K = 0 \qquad (34)$$

3° $\rho(f) \equiv f$; z zależności (31) wynika, że

$$\xi_L = L+(K-\xi_K)\,\frac{a_1\sqrt{a_3K^2+a_4L^2} - a_3K}{a_2\sqrt{a_3K^2+a_4L^2}-a_4L} \qquad (35)$$

Na podstawie wzoru (35) łatwo stwierdzić, że jeśli $\xi_K = K$; to $\xi_L = L$. Wynik ten jest oczywisty, bowiem operator o współczynnikach $\xi_K=K$, $\xi_L=L$ odpowiada grupie o przekształceniach $K'=e^tK$; $L'= e^tL$. Niezmienniczość funkcji (29) względem tej grupy jest narzucona przez warunek jednorodności. Z przytoczonych zależności wynika ponadto, że funkcja ta nie jest niezmiennicza względem operatora o stałych współczynnikach ($\xi_K$=const, $\xi_L$=const), a więc grupy opisywanej przekształceniami $K' = K + t^1$; $L'= L + t^1$.

Na podstawie wzoru (34) można stwierdzić, że warunkiem niezmienniczości funkcji (29) względem grupy przesunięć (np. $K'=K$, $L'=L+t^1$) jest wprowadzenie nowej zmiennej $\tilde{L}$ spełniającej równanie

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial L} = a_2 - a_4 \frac{L}{\sqrt{a_3K^2+a_4L^2}} \qquad (36)$$

Mamy zatem (w tym przypadku jest to oczywiste)

$$\tilde{L} = a_2L - \sqrt{a_3K^2 + a_4L^2} \qquad (37)$$

## 7. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono możliwość wykorzystania teorii skończenie wymiarowych ciągłych grup przekształceń do analizy i syntezy właściwości funkcji produkcji odniesionych do oddziaływania postępu technicznego. Ze względu na wprowadzanie do rozważań coraz to nowych postaci funkcji produkcji, nie spełniających zazwyczaj klasycznych założeń, taka analiza i synteza wydaje się koniecznością. Oczywiście można je prowadzić bez użycia omawianej teorii, w sposób mniej sformalizowany. Badania takie wymagają jednak dużej intuicji i nie zawsze prowadzą do właściwych wniosków ze względu na trudności wprowadzania uogólnień. Przedstawione rozważania mają znaczenie praktyczne. Przyjmując bowiem w badaniach empirycznych określoną postać funkcji produkcji i znając, przynajmniej w zasadzie, zależności opisujące zmianę czynników produkcji pod wpływem postępu technicznego, można stwierdzić czy przy przyjętych założeniach będzie można odróżnić wpływ postępu technicznego od efektu skali.

## Literatura

1. Allen R.G.D. (1975) Teoria makroekonomiczna. Ujęcie matematyczne. PWN, Warszawa.

2. Chmielarz W., Stachurski A. (1986) A class of VES production functions: properties and estimation results. Control and Cybernetics, vol. 15, No. 3-4.

3. Gadomski J. (w druku) Wybrane czynniki kształtujące import rudy miedzi oraz efektywność produkcji i zużycia stali w Polsce. Ekonomia.
4. Logan J.D. (1977) Invariant variational principles. Academic Press, New York.
5. Owsiannikow L.W., (1978) Gruppowoj analiz differencjalnych urawnenij. Nauka, Moskwa.
6. Sato R., (1981) Theory of technical change and economic invariance. Application of Lie groups. Academic Press, New York.
7. Szananin A.A., (1981) K tieorii proizwodstwennych funkcij. Techniczeskaja Kibernetika, No 4.
8. Wagner D. (1984) Some possibilities of applying the theory of continuous transformation groups for analysis and synthesis of dynamic systems. W: System theory and mathematical economics. Proceedings of VI Polish-Italian Symposium. Rome, Pitagora Editrice.
9. Wagner D. (1987) Zastosowanie ciągłych grup przekształceń do wyznaczania całek pierwszych równań różniczkowych zwyczajnych. W: Prace IV Sympozjum "Symulacja procesów dynamicznych", Polana Chochołowska.

ZTI OIN PAN,zam.24/90,nakł.120egz.

# Zarząd

## Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych

### Prezes

prof.dr hab.inż. Andrzej Straszak
**Instytut Badań Systemowych PAN**

### Wiceprezes

prof.dr hab.inż. Jan Stasierski
**Wojskowa Akademia Techniczna**

### Wiceprezes

prof.dr hab.inż. Stanisław Piasecki
**Instytut Badań Systemowych PAN**

### Sekretarz generalny

dr inż. Zbigniew Nahorski
**Instytut Badań Systemowych PAN**

### Sekretarz

dr inż. Jarosław Sikorski
**Instytut Badań Systemowych PAN**

### Skarbnik

dr inż. Andrzej Kałuszko
**Instytut Badań Systemowych PAN**

### Członkowie

prof.dr hab. Jerzy Kisielnicki
**Wydział Zarządzania UW**

doc.dr hab.inż. Bohdan Korzan
**Wojskowa Akademia Techniczna**

doc.dr hab.inż. Jan Stachowicz
**Zakład Nauk Zarządzania PAN**

doc.dr hab.inż. Maciej Sysło
**Instytut Informatyki UWr.**

### Komisja rewizyjna

PRZEWODNICZĄCY

dr Władysław Świtalski
**Katedra Cybernetyki i Badań Operacyjnych UW**

CZŁONKOWIE

dr inż. Janusz Kacprzyk
**Instytut Badań Systemowych PAN**

dr inż. Marek Malarski
**Instytut Transportu PW**

doc.dr hab.Henryk Sroka
**Akademia Ekonomiczna w Katowicach**

dr inż. Leon Słomiński
**Instytut Badań Systemowych PAN**