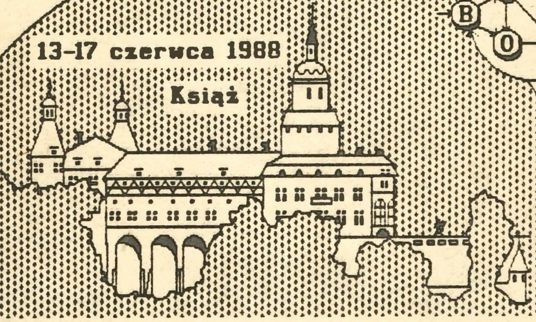
Redaktorzy:
A.Straszak
Z.Nahorski
J.Sikorski

13-17 czerwca 1988

Książ



1. Krajowa Konferencja Badań Operacyjnych i Systemowych

Tom 1

BOS'88

POLSKIE TOWARZYSTWO BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH POLSKIEJ AKADEMII NAUK

POLSKIE TOWARZYSTWO BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH

TOM 1

OPTYMALIZACJA
METODY I ZASTOSOWANIA

I KRAJOWA KONFERENCJA

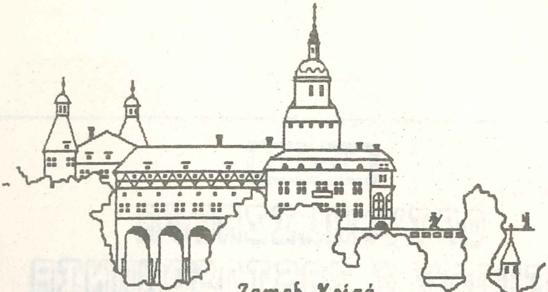
BADAŃ OPERACYJNYCH i SYSTEMOWYCH

Książ, 13 - 17 czerwca 1988

BOS'88

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH POLSKIEJ AKADEMII NAUK

1989
WARSZAWA



I Krajowa Konferencja Badań Operacyjnych i Systemowych

Organizator konferencji

Polskie Towarzystwo Badań Operacyjnych i Systemowych
przy współpracy
Instytutu Badań Systemowych PAN

Komitet naukowy konferencji

Jerzy Hołubiec, Andrzej Kałuszko, Jerzy Kisielnicki, Henryk Kowalowski, Roman Kulikowski, Franciszek Marecki, Zbigniew Nahorski, Stanisław Piasecki, Jarosław Sikorski, Jan Stachowicz, Jan Stasierski, Andrzej Straszak, Maciej Sysło, Władysław Świtalski

Redaktorzy naukowi materiałów

Andrzej Straszak, Zbigniew Nahorski, Jarosław Sikorski

2. Problemy optymalizacji i algorytmy ich rozwiązywania

2.6

I Krajowa Konferencja
Badań Operacyjnych i Systemowych
Książ, 13 - 17 czerwca 1988r.

METODA WYZNACZANIA (ε,α) - OSZACOWANIA OPTYMALNEJ WARTOŚCI FUNKCJI CELU W ZADANIU OPTYMALIZACYJNYM Z PROBABILISTYCZNYMI OGRANICZENIAMI

Marian Chudy
Wojskowa Akademia Techniczna
01-489 Warszawa 49

Praca zawiera podstawy matematyczne metody wyznaczania (ε,α) - oszacowania optymalnej wartości funkcji celu w zadaniu optymalizacyjnym z probabilistycznymi ograniczeniami. Przyjęto założenie, że możliwe jest uzyskanie przedziałowych ocen statystycznych kwantyli zmiennych losowych występujących w ograniczeniach rozpatrywanego zadania.

1. Wprowadzenie

Rozpatrywane zadanie optymalizacyjne ma postać: wyznaczyć x^* (spełniające poniższe ograniczenia) takie, że

$$f(x^*) = \min f(x) \tag{1}$$

przy ograniczeniach

$$P\{ g_i(x) \le z_i \} \ge 1 - p_i \ , \quad i = \overline{1,m} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \ , \quad j = \overline{1,n} \tag{3}$$

gdzie

z_i - zmienna losowa, $i = \overline{1,m}$,

$g_i(x)$ funkcja rzeczywista zmiennej $x \in E^n$.

Dla przypadku gdy znane są rozkłady zmiennych losowych z_i, metody rozwiązywania takich zadań podane są na przykład w pracy Judina (1979).

Oznaczmy przez

z_{ip_i} - kwantyl rzędu p_i zmiennej losowej z_i, $i=\overline{1,m}$.

Powyższe zadanie (1)-(3) można równoważnie przedstawić następująco: wyznaczyć x^* (spełniające poniższe ograniczenia) takie, że

$$f(x^*) = \min f(x) \tag{4}$$

przy ograniczeniach

$$g_i(x) \le z_{ip_i}, \quad i=\overline{1,m} \tag{5}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n} \tag{6}$$

Załóżmy, że wielkości z_{ip_i} są nieznane, lecz istnieje możliwość dokonania eksperymentu statystycznego celem uzyskania statystycznych ocen tych wielkości.

Nie znając rzeczywistych wartości kwantyli z_{ip_i} nie jesteśmy w stanie wyznaczyć rzeczywistej wartości $f(x^*)$, możemy natomiast wyznaczyć jej statystyczną ocenę opierając się na statystycznych ocenach wielkości z_{ip_i}.

Statystyczny odpowiednik zadania (4) - (6) ma postać:

$$\min f(x) \tag{7}$$

przy ograniczeniach

$$g_i(x) \le \tilde{z}_{ip_i}(k_i), \quad i=\overline{1,m} \tag{8}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n} \tag{9}$$

gdzie

$\tilde{z}_{ip_i}(k_i)$ - estymator kwantyla z_{ip_i} dla próby o liczności k_i. Jest to w rzeczywistości rodzina zadań, gdyż dla różnych wartości estymatora $\tilde{z}_{ip_i}(k_i)$ otrzymamy różną postać ograniczenia (8)

2. Podstawy metody.

Definicja 1.

Zmienną losową t spełniającą warunek

$$P\{|f(x^*) - t| \le \varepsilon\} \ge \alpha$$

nazywamy (ε, α) - oszacowaniem wartości $f(x^*)$.

Takiego oszacowania bedziemy poszukiwali.

Potrzebnym do dalszych rozważań jest lemat pochodzący z pracy Luenbergera (1974).

Lemat 1.

Jeżeli $f(.)$ jest wypukłym funkcjonałem określonym na

wypukłym podzbiorze D przestrzeni liniowej X oraz odwzorowanie $G : X \to Y$ jest wypukłe, gdzie
Y - przestrzeń unormowana z wyróżnionym stożkiem dodatnim P, to funkcjonał

$$h(y) = \inf \{ f(x) : x \in D,\ G(x) \le y,\ y \in Y \}$$

jest wypukły i nierosnący, tzn. jeśli $y' \ge y''$ (w sensie stożka P), to $h(y') \le h(y'')$

Wprowadźmy oznaczenia

$\bar{z}_{ip_i}$ - granica górna dwustronnego przedziału ufności kwantyla z_{ip_i} dla próby o liczności k_i, oraz zdefiniujemy wektory

$$\bar{z}_p(k) = (\bar{z}_{1p_1}(k_1),\ldots,\bar{z}_{mp_m}(k_m)),$$

$$\underline{z}_p(k) = (\underline{z}_{1p_1}(k_1),\ldots,\underline{z}_{mp_m}(k_m)),$$

$$\tilde{z}_p(k) = (\tilde{z}_{1p_1}(k_1),\ldots,\tilde{z}_{mp_m}(k_m))$$

Przyjmując w zadaniu (7) - (9) założenie, że $f(.)$ oraz $g_i(.)$, $i=\overline{1,m}$ są funkcjami wypukłymi oraz zauważając, że wielkości występujące w lemacie 1 mają w odniesieniu do zadania (7)-(9) postać $X = E^m$, $Y = E^m$,

$$P = \{y = (y_1,y_2,\ldots,y_m) \in E^m : y_i \ge 0,\quad i=\overline{1,m}\}$$

$$D = \{x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in E^n : x_i \ge 0,\quad i=\overline{1,n}\},$$ oraz

$G(x) = (g_1(x),\ g_2(x),\ldots,g_m(x))^T$, możemy uzyskać następujący wniosek:

jeżeli

$$P\{\underline{z}_p(k) \le z_p \le \bar{z}_p(k)\} \ge \beta \tag{10}$$

to

$$P\{h(\bar{z}_p(k)) \le h(z_p) \le h(\underline{z}_p(k))\} \ge \beta \tag{11}$$

gdzie

$$z_p = (z_{1p_1},\ldots,z_{mp_m}),$$

gdyż z własności funkcji $h(.)$ wynika, że dla każdego zdarzenia, dla którego zachodzi nierówność w nawiasie sześciennym warunku (10) zachodzi nierówność w nawiasie sześciennym warunku (11).

Twierdzenie 1.

Jeżeli dla pewnego $k = (k_1,k_2,\ldots,k_m)$ granice $\underline{z}_p(k)$ oraz $\bar{z}_p(k)$

dwustronnego przedziału ufności dla z_p spełniają warunki

$$P\{\underline{z}_p(k) \le z_p \le \bar{z}_p(k)\} \ge \alpha \tag{12}$$

oraz

$$h(\underline{z}_p(k)) - h(\bar{z}_p(k)) \le 2\varepsilon \tag{13}$$

dla tych zdarzeń, dla których zachodzi warunek (12), to

$$\tilde{t} = \frac{h(\bar{z}_p(k)) + h(\underline{z}_p(k))}{2} \tag{14}$$

jest (ε,α) - oszacowaniem wartości $f(x^*)$ ∎

Powstaje z kolei pytanie, kiedy spełniony jest warunek (12). Mogą tu wystąpić dwa przypadki. Pierwszy, gdy pary $(\underline{z}_{ip_i}(k_i), \bar{z}_{ip_i}(k_i))$, $i=\overline{1,m}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi wyznaczonymi na poziomie ufności β_i tzn. gdy

$$P\{\underline{z}_{ip_i}(k_i) \le z_{ip_i} \le \bar{z}_{ip_i}(k_i)\} \ge \beta_i \ , \quad i=\overline{1,m} \tag{15}$$

Warunek (12) będzie spełniony gdy

$$\beta = \prod_{i=1}^{m} \beta_i \ge \alpha \tag{16}$$

Drugi przypadek, gdy pary $(\underline{z}_{ip_i}(k_i), \bar{z}_{ip_i}(k_i))$, $i=\overline{1,m}$, są zmienny losowymi zależnymi.

W tym przypadku należy korzystać z rozkładu łącznego (co jest praktycznie nierealizowalne) lub z przybliżeń np. Benferrniego zamieszczonych w pracy: Bickel J.P., Doksum A.K. (1977) tzn.

$$P\left\{\underline{z}_p(k) \le z_p \le \bar{z}_p(k)\right\} \ge 1 - \sum_{i=1}^{m} (1 - \beta_i) \tag{17}$$

gdzie

β_i - poziom ufności granic dwustronnego przedziału ufności dla kwantyli z_{ip_i}.

Dla spełnienia warunku (12) wystarczy aby $\beta_i = 1 - \dfrac{1-\alpha}{m}$.

Twierdzenie 2.

Jeżeli granice $\underline{z}_{ip_i}(k_i)$, $\bar{z}_{ip_i}(k_i)$, $i=\overline{1,m}$ dwustronnych przedziałów ufności dla dowolnego $k_i > 0$ są skończone i spełniają warunek

$$\bigwedge_{\varepsilon_i>0} \lim_{k_i\to\infty} P\left\{\left|\bar{z}_{ip}(k_i) - \underline{z}_{ip}(k_i)\right| > \varepsilon_i\right\} = 0, \quad i=\overline{1,m} \tag{18}$$

to dla zadanych ε i α istnieje $k^* = (k_i^*, k_2^*, \ldots, k_m^*)$ takie że dla $k \geq k^*$

$$P\left\{ h(\underline{z}_p(k)) - h(\bar{z}_p(k)) \leq 2\varepsilon \right\} \geq \alpha \quad \blacksquare \tag{19}$$

Twierdzenie to pokazuje, że istnieją dostatecznie duże liczności k_i^*, $i=\overline{1,m}$ prób takie, że wyznaczone z tych prób granice dwustronnych przedziełów ufności spełniają warunki (12) i (13) dla kwantyli z_{ip_i}. Ponadto wyznaczona z wzoru (14) wielkość stanowi wymagane oszacowanie wartości $f(x^*)$. Podane twierdzenia stanowią podstawę dostatecznie prostej procedury obliczeniowej wyznaczanie (ε,α) - oszacowania podanej w pracy: Chudy M. (1987).

3. Uwagi końcowe.

Najczęściej oprócz wartości t^* (ε,α) - oszacowania wartości $f(x^*)$wyznaczonego dla prób liczności k^*, istotne znaczenie ma również znajomość rozwiązania x^o odpowiadającego wielkość t^*. Wektor taki mozna uzyskać rozwiązując np. zadanie postaci

$$\min(f(x) - t^*)^2 \tag{20}$$

przy ograniczeniach

$$g_i(x) \leq z^*_{ip_i}(k_i^*), \quad i=\overline{1,m} \tag{21}$$

$$x_j \geq 0, \quad j=\overline{1,n} \tag{22}$$

gdzie

$z^*_{ip_i}(k_i^*)$ - granica górna dwustronnego przedziału ufności dla kwantyla z_{ip_i}, wyznaczona dla próby o liczności k_i^*.

Z definicji t^* oraz własności funkcji $h(.)$, wyznaczone rozwiązanie zadania (20)-(22) będzie poszukiwanym wektorem x^o.

Literatura

1. Chudy M. (1987) Statystyczna metoda rozwiązywania pewnej klasy zadań stochastycznych z probabilistycznymi ograniczeniami. Biuletyn WAT Nr 5,

2. Bickel J.P., Doksum' A.K. (1977) Matheatical statistics. Holden - Day.

3. Fisz M. (1958) Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Warszawa.

4. Judin D.B. (1979) Zadaczi i mietody stochasticzeskowo programmirowanija. Moskwa.

5. Luenberger D. (1974) Teoria optymalizacji. Warszawa.

L I T E R A T U R A

(1) Crabill T. B., Gross D., Magazine M. J. (1977) A Classified Bibliography of Research on Optimal Design and Control of Queues. Operations Res. Vol. 25, No. 2, ss. 219-232.

(2) Deb R. K., Serfozo R. F. (1973) Optimal Control of batch Service Queues. Advances Appl. Probability 5, ss. 340-361.

(3) [illegible] (1979) Stochastic Theory of Service Systems. Pergamon Press, New York [illegible] 1980.

(4) Weiss H. J. (1979) The Computation of Optimal Control Limits for a Queue with Batch Services, Manag. Sci. 25 ss. 320-328.

(5) [illegible] (1984) [illegible], Praca doktorska, [illegible].

(6) Королюк В., Турбин А. (1976) Полумарковские процессы и их приложения, Киев.

(7) [illegible] (1982) [illegible] zakończenia [illegible] ss. [illegible].

(8) Neuts M. (1967) A general class of bulk queues with Poisson input, Ann. Math. Stat. 38, ss. 759-770.

(9) ______ (1979) Queues solvable without Rouché's theorem. Operations Res. 27.

(10) [illegible] (1966) The ergodic queue length distributions for queueing systems with finite capacity. J. Roy. Stat. Soc. B28.

Zarząd
Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych

Prezes
prof.dr hab.inż. Andrzej Straszak
Instytut Badań Systemowych PAN

Wiceprezes
prof.dr hab.inż. Jan Stasierski
Wojskowa Akademia Techniczna

Wiceprezes
prof.dr hab.inż. Stanisław Piasecki
Instytut Badań Systemowych PAN

Sekretarz generalny
dr inż. Zbigniew Nahorski
Instytut Badań Systemowych PAN

Sekretarz
dr inż. Jarosław Sikorski
Instytut Badań Systemowych PAN

Skarbnik
dr inż. Andrzej Kałuszko
Instytut Badań Systemowych PAN

Członkowie
prof.dr hab. Jerzy Kisielnicki
Wydział Zarządzania UW

doc.dr hab.inż. Bohdan Korzan
Wojskowa Akademia Techniczna

doc.dr hab.inż. Jan Stachowicz
Zakład Nauk Zarządzania PAN

doc.dr hab.inż. Maciej Sysło
Instytut Informatyki UWr.

Komisja rewizyjna
PRZEWODNICZĄCY

dr Władysław Świtalski
Katedra Cybernetyki i Badań Operacyjnych UW

CZŁONKOWIE

dr inż. Janusz Kacprzyk
Instytut Badań Systemowych PAN

dr inż. Marek Malarski
Instytut Transportu PW

doc.dr hab.Henryk Sroka
Akademia Ekonomiczna w Katowicach

dr inż. Leon Słomiński
Instytut Badań Systemowych PAN

PION III