Redaktorzy:

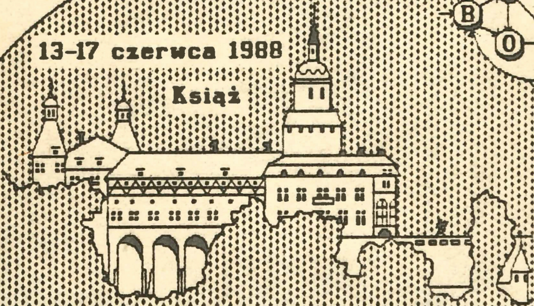
A.Straszak

Z.Nahorski

J.Sikorski

13-17 czerwca 1988

Książ



1. Krajowa Konferencja Badań Operacyjnych i Systemowych

TOM 1

BOS'88

POLSKIE TOWARZYSTWO BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH POLSKIEJ AKADEMII NAUK

POLSKIE TOWARZYSTWO BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH

TOM 1

OPTYMALIZACJA
METODY I ZASTOSOWANIA

I KRAJOWA KONFERENCJA

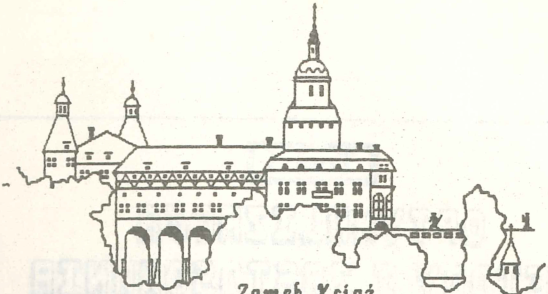
BADAŃ OPERACYJNYCH i SYSTEMOWYCH

Książ, 13 - 17 czerwca 1988

BOS'88

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH POLSKIEJ AKADEMII NAUK

1989
WARSZAWA



Zamek Książ

I Krajowa Konferencja Badań Operacyjnych i Systemowych

Organizator konferencji

Polskie Towarzystwo Badań Operacyjnych i Systemowych
przy współpracy
Instytutu Badań Systemowych PAN

Komitet naukowy konferencji

Jerzy Hołubiec, Andrzej Kałuszko, Jerzy Kisielnicki, Henryk Kowalowski, Roman Kulikowski, Franciszek Marecki, Zbigniew Nahorski, Stanisław Piasecki, Jarosław Sikorski, Jan Stachowicz, Jan Stasierski, Andrzej Straszak, Maciej Sysło, Władysław Świtalski

Redaktorzy naukowi materiałów

Andrzej Straszak, Zbigniew Nahorski, Jarosław Sikorski

2. Problemy optymalizacji i algorytmy ich rozwiązywania

2.4

I Krajowa Konferencja
Badań Operacyjnych i Systemowych
Książ, 13 - 17 czerwca 1988r.

WYZNACZANIE OSZACOWANIA WARTOŚCI OPTYMALNEJ W ZADANIU ZAŁADUNKU Z WIELOMA OGRANICZENIAMI PRZY POMOCY OGRANICZEŃ ZASTĘPCZYCH[1]

Jarosław Sikorski
Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6
01-447 Warszawa

W pracy opisano trzy algorytmy minimalizacji dualnej funkcji ograniczenia zastępczego. We wszystkich przedstawionych algorytmach wykorzystano pojęcie quasi-subgradientu funkcji półciągłej z góry i quasi-wypukłej. Algorytmy te są przeznaczone do rozwiązywania pewnego zadania dualnego dla zadania załadunku z wieloma ograniczeniami. Wykorzystanie ograniczeń zastępczych w tym zadaniu dualnym może prowadzić w praktyce do uzyskiwania oszacowań pierwotnej wartości optymalnej lepszych niż w przypadku dualności Lagrange'a.

1. Wstęp

Zadanie załadunku z wieloma ograniczeniami występuje często jako element składowy w modelach matematycznych tworzonych dla rozwiązywania różnych praktycznych problemów, w których rozmieszczane są zasoby, wybierane alternatywne projekty, ładowane i pakowane towary lub rozcinany materiał. Skuteczność algorytmu typu podziału i oszacowań, który najczęściej jest konstruowany dla tego rodzaju zadań, w dużym stopniu zależy od jakości oszacowania wartości optymalnej w każdym z występujących w wierzchołkach drzewa podziału podzadań. Dobre oszacowania pozwalają efektywnie ograniczać rozwój tego drzewa.

---

[1] Praca została wykonana w ramach RP.I.02 "Teoria sterowania i optymalizacji ciągłych układów dynamicznych i procesów dyskretnych"

W pracy przedstawiono w zarysie schematy algorytmów wyznaczania oszacowań watości optymalnych, w których wykorzystywane jest pojęcie ograniczenia zastępczego wprowadzone przez Glovera (1965),(1968). Oszacowanie uzyskiwane jest poprzez rozwiązywanie pewnego zadania dualnego zawierającego minimalizację funkcji quasi-wupukłej i półciągłej z góry. We wszystkich opisywanych algorytmach, w każdej iteracji rozwiązywane jest klasyczne zadanie załadunku z jednym ograniczeniem. Wykorzystanie dualności ograniczenia zastępczego pozwala na osiągnięcie lepszych oszacowań niż przy pomocy dualności Lagrange'a lub ciągłych relaksacji; Karwan i Rardin (1979), Sikorski (1984).

Trzy opisane w pracy algorytmy można nazwać algorytmami dokładnymi, gdyż ich zbieżność wsparta jest odpowiednimi twierdzeniami. Istnieją ponadto metody przybliżone, które prowadzą do uzyskania oszacowania przy mniejszym nakładzie obliczeń niż w przypadku metod dokładnych a wykorzystują wiele z podstawowych rezultatów teoretycznych; Gavish i Pirkul (1985), Sikorski (1987). Nie prowadzą one oczywiście do uzyskania rozwiązania dualnego zadania ograniczenia zastępczego, ale mogą być źródłem dobrych oszacowań wartości optymalnych w niektórych typach zadań.

2. Podstawowe sformułowania

Rozważmy następujące zadanie programowania całkowitoliczbowego z wieloma ograniczeniami.

(P) $$v(P) = \max \{ cx : Ax \le b , x \in X \} ,$$
$$X = \{ x \in Z^n_+ : x_i \le \theta_i , i=1,\dots,n \} ,$$

gdzie $c \in Z^n_+$, A jest macierzą mxn o elementach $a_{ki} \in Z_+$, $b \in Z^m_+$.

Zadanie (P) nazywane jest zadaniem załadunku z wieloma ograniczeniami gdy $\theta = 1$. W praktycznych zadaniach tego typu najczęściej $m << n$.

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych w (P) można rozszerzyć przez wprowadzenie mnożnika $\omega \in \mathbb{R}^m_+$ i utworzenie jednego ograniczenia w miejsce m ograniczeń pierwotnych. Powstanie wtedy relaksacja zadania (P), która jest klasycznym zadaniem załadunku.

(Z_ω) $$h(\omega) = \max \{ cx : \omega(Ax-b) \le 0 , x \in X \}$$

Wprowadzone ograniczenie nazywane jest zastępczym a funkcja

$h : \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow Z_+$, definiowana przez rozwiązania zadań (Z_ω) - funkcją dualną ograniczenia zastępczego. Ze sposobu wprowadzenia relaksacji wynika, że $h(\omega) \geq v(P)$. Zadanie dualne (D) polega na poszukiwaniu takiego mnożnika ω, który minimalizuje odstęp pomiędzy wartościami $v(P)$ i $h(\omega)$. Taki mnożnik definiuje ograniczenie zastępcze najlepiej aproksymujące, w sensie wartości pierwotnej funkcji celu, zespół ograniczeń pierwotnych.

(D) $$v(D) = \min \{ h(\omega) : \omega \in \mathbb{R}^m_+ \}$$

Z powyższych sformułowań wynika podstawowa relacja zachodząca pomiędzy wartościami optymalnymi dla zadań (P) i (D):

$$v(D) \geq v(P) .$$

Zatem rozwiązanie dualnego zadania ograniczenia zastępczego lub jego przybliżenie może być wykorzystywane jako dolne oszacowanie pierwotnej wartości optymalnej.

Aby scharakteryzować zadanie (D) przytoczono poniżej jego najistotniejsze właściwości.

(W1) W ogólnym przpadku nie można się spodziewać, że $v(D) = v(P)$; może istnieć niezerowy odstęp dualności. $v(D) = v(P)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^m_+$ i takie $\hat{x}$ dopuszczalne w (P), że $h(\hat{\omega}) = c\hat{x}$; wtedy $\hat{x}$ jest rozwiązaniem (P) a $\hat{\omega}$ - rozwiązaniem (D).

(W2) Funkcja h jest półciągła z góry i quasi-wypukła; zbiór nadwykresu $\{ (\omega,q) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R} : q \geq h(\omega) \}$ nie jest zatem wypukły a dolne zbiory poziomicowe $\{ \omega \in \mathbb{R}^m_+ : q \geq h(\omega) \}$ nie są domknięte (h jest obszarami stała); Dyer (1980), Sikorski (1984).

(W3) Wartość $v(D)$ jest osiągana przez funkcję dualną h na wypukłym, względnie otwartym stożku o wierzchołku w $0 \in \mathbb{R}^m$.

(W4) $h(\mu\omega) = h(\omega)$ dla $\mu > 0$, gdyż skalowanie mnożników nie zmienia zbioru dopuszczalnego w (Z_ω).

(W5) Jeśli x^ω jest rozwiązaniem optymalnym zadania (Z_ω), to wektor $g = b-Ax^\omega \in Z^m_+$ jest quasi-subgradientem funkcji h w punkcie $\omega \in \mathbb{R}^m_+$; Greenberg i Pierskalla (1973), Sikorski (1986); dla wszystkich $\upsilon \in \mathbb{R}^m_+$ zachodzi implikacja:

$$\upsilon g \geq \omega g \Rightarrow h(\upsilon) \geq h(\omega) .$$

(W6) Przy następujących oznaczeniach: $T(q) = \{ x \in X : cx \geq q \}$ dla $q \in Z_+$, $R(q) = \{ Ax-b : x \in T(q) \}$, $R^0(q) = \{ \upsilon \in \mathbb{R}^m_+ : \upsilon y > 0$ dla wszystkich $y \in R(q) \}$, zachodzi równość: $v(D) = \max \{ q \in Z_+ : R^0(q) = \emptyset \}$; Sikorski (1984).

(W7) Przy oznaczeniach z (W6) zachodzi równość:

$v(D) = \max \{ q \in Z_+ : coR(q) \cap -\mathbb{R}^m_+ \neq \emptyset \}$; Sikorski (1984).

Jak wynika z powyższego zestawienia, zadanie (D) nie jest łatwe do rozwiązania z punktu widzenia metod numerycznych. Nie istnieje, na przykład, subgradient funkcji dualnej w każdym z punktów jej dziedziny. Z drugiej jednak strony, część z wymienionych właściwości jest pomocna przy konstruowaniu algorytmów rozwiązywania zadania dualnego. Do takich należą (W3) ÷ (W7) .

Właściwość funkcji dualnej sformułowana w (W3) uzasadnia użycie w definicji zadania (D) symbolu "min" w miejsce bardziej ogólnego "inf" (por. Dyer (1980)). (W4) pozwala na modyfikowanie zadania dualnego poprzez arbitralne normalizacje mnożników, które prowadzą do ograniczonych zbiorów dopuszczalnych.

W metodach minimalizacji funkcji wypukłych podstawowe znaczenie ma pojęcie subgradientu, które jest ściśle związane z teorią funkcji sprzężonych. Dla funkcji quasi-wypukłych stworzono analogiczną teorię tzw. funkcji z-quasi-sprzężonych. Na jej gruncie zdefiniowano pojęcie quasi-subgradientu, które uogólnia pojęcie subgradientu na klasę tych funkcji, Greenberg i Pierskalla (1973). Jeden z quasi-subgradientów funkcji dualnej ograniczenia zastępczego w danym punkcie można łatwo wyznaczyć na podstawie (W5). Taki wektor wyznacza hiperpłaszczyznę ortogonalną, która dzieli ortant $\mathbb{R}^m_+$ na dwie części: w jednej nie występują mnożniki, dla których wartość tej funkcji jest mniejsza od aktualnie wyznaczonej $h(\omega)$, a druga zawiera wszystkie mnożniki mające tę właściwość. Zatem przy poszukiwaniu mnożników minimalizujących fukcję h można ograniczyć się tylko do drugiej z wymienionych części. Dwie dodatkowe charakterystyki dualnej wartości optymalnej podane w (W6) i (W7) są bardzo pomocne przy konstruowaniu algorytmów rozwiązywania zadania (D), jako że wykorzystując jednoparametrową rodzinę zbiorów poziomicowych $T(q)$ są opisami bardziej geometrycznymi.

3. Prosta metoda quasi-subgradientowa

Algorytm tej metody naśladuje najprostszy schemat optymalizacji nieróżniczkowalnej. Kolejne przybliżenia najlepszego mnożnika ograniczenia zastępczego wyznaczane są przez przesunięcie się o zadany współczynnik kroku wzdłuż wybranego kierunku. Ponieważ nie jest wyznaczany w każdej iteracji kierunek poprawy dla funkcji dualnej i, co za tym idzie, nie jest prowadzona minimalizacja w kierunku, to ustalany jest zbieżny do zera ciąg współczynników kroku o rozbieżnym szeregu. Jako kierunek poruszania się wykorzystywany jest wektor przeciwny do quasi-subgradientu w danym punkcie. Test zatrzymania w przedstawionym poniżej algorytmie jest bardziej rozbudowany i wymaga rozwiązywania w każdej iteracji pomocniczego zadania liniowego. Zadanie dualne rozwiązywane jest w zmodyfikowanej postaci wykorzystującej właściwość (W4).

(D^2) $$v(D) = \min \langle h(\omega) : \omega \in F^2 \rangle,$$

$$\text{gdzie } F^2 = \langle \omega \in \mathbb{R}^m_+ : \|\omega\|_{L^2} = 1 \rangle$$

Tak więc, wyznaczane mnożniki należą do wycinka sfery jednostkowej. W związku z tym wygodnie jest wykorzystywać w algorytmie kierunki styczne do tej powierzchni w kolejno wyznaczanych punktach. Uzyskiwane są one przez rzutowanie wektora przeciwnego do quasi-subgradientu na odpowiednią hiperpłaszczyznę, co dane jest wzorem

$$d = -g + (g^T\omega)\omega ,$$

gdzie d oznacza wyznaczony kierunek, a g - quasi-subgradient funkcji h w punkcie ω. Jak wykazał Sikorski (1986) wektor d jest także quasi-subgradientem funkcji dualnej w punkcie $\omega \in F^2$.

Test zatrzymania algorytmu oparty jest na charakterystyce wartości $v(D)$ podanej w (W7). W trakcie obliczeń nie ma oczywiście możliwości dysponowania pełnym opisem zbioru $coR(q)$ dla aktualnie wyznaczonej wartości parametru q. W jego miejsce wprowadzona jest wewnętrzna aproksymacja rozpinana przez zbiór wcześniej wyznaczonych wektorów przeciwnych do quasi-subgradientów. Ponieważ generowany w trakcie działania algorytmu ciąg wartości parametru q jest nierosnący, to stwierdzenie istnienia punktów wspólnych dla aktualnej aproksymacji i stożka $-\mathbb{R}^m_+$ pozwala na podstawie (W7) orzec, że wyznaczona wartość $q = v(D)$.

Tak w poniższym, jak i we wszystkich dalej opisywanych schematach algorytmów, zbiór rozwiązań optymalnych w zadaniu (Z_ω) oznaczany jest przez

$$Q(\omega) = \langle x \in X : \omega(Ax-b) \le 0 \ \text{ i } \ cx = h(\omega) \rangle .$$

ALGORYTM QS

Krok 0 : wybierz mnożnik startowy $\omega^1 \in F^2$, ustal ciąg $\langle t^i \rangle$ taki, że $t^i \longrightarrow 0$ a $\sum_{i=1}^{\infty} t^i = \infty$, przyjmij $Z^0 = \emptyset$, $q^1 = \infty$ oraz $i = 1$.

Krok 1 : wyznacz $x^i \in Q(\omega^i)$; niech $g^i = b - Ax^i$.

Krok 2 : $q^{i+1} := \min (cx^i, q^i)$.

Krok 3 : $Z^i := Z^{i-1} \cup \langle -g^i \rangle$; jeśli $\mathrm{co}Z^i \cap -\mathbb{R}^m_+ \neq \emptyset$, to STOP.

Krok 4 : niech $d^i = -g^i + (g^{i^T} \omega^i)\omega^i$, $\tilde{d}^i = d^i / \|d^i\|_{L_2}$.

Krok 5 : $\tilde{\omega}^i_j := \max (0, \omega^i_j + t^i \tilde{d}^i_j)$ dla $j=1,\ldots,m$.

Krok 6 : $\omega^{i+1} := \tilde{\omega}^i / \|\tilde{\omega}^i\|_{L_2}$; $i:=i+1$ i wróć do kroku 1.

W każdej iteracji algorytmu rozwiązywane jest zadanie zastępcze (Z_ω) dla aktualnego mnożnika ω^i. Tworzony ciąg $\langle q^i \rangle$ jest nierosnący, a każdy jego element $q^i = \min \langle cx^k : k=1,\ldots,i \rangle \geq v(D)$. Zatem wszystkie wyznaczone rozwiązania zadań zastępczych $x^k \in T(q^i)$ dla $k=1,\ldots,i$. Oznacza to, że wszystkie wektory $-g^k \in R(q^i)$. A więc $\mathrm{co}Z^i \subset \mathrm{co}R(q^i)$ i spełnienie warunku z kroku 3 pociąga za sobą $\mathrm{co}R(q^i) \cap -\mathbb{R}^m_+ \neq \emptyset$. Zgodnie z (W7) obliczenia mogą zostać wtedy przerwane, gdyż $q^i = v(D)$ i zadanie (D^2) zostało rozwiązane. Sprawdzenie warunku zatrzymania algorytmu wymaga rozwiązywania pomocniczego zadania liniowego w każdej iteracji. Wprawdzie można ten proces znacznie uprościć korzystając ze szczególnych cech pojawiającego się ciągu zadań (patrz Sikorski (1986)), ale w praktyce ten dodatkowy nakład obliczeń może okazać się zbyt duży. Możliwe jest wtedy zastąpienie powyższego testu prostszym heurystycznym testem np. opartym na porównywaniu kilku kolejnych wartości cx^i.

Wszystkie mnożniki ograniczenia zastępczego wyznaczane w algorytmie QS należą do zbioru F^2. Kroki 5 i 6, w których jest to realizowane mogą być modyfikowane (por. Sikorski (1986)), a powyżej prezentowana ich postać jest raczej przykładowa.

Działanie algorytmu jest wsparte teoretycznym rezultatem wykazanym przez Sikorskiego (1986), dotyczącym generowanego ciągu $\langle q^i \rangle$.

TWIERDZENIE 1 Jeżeli zbiór rozwiązań dopuszczalnych w (P) nie jest pusty, to istnieje podciąg $\langle q^{i_s} \rangle$ zbieżny do v(D).

Zaletą algorytmu QS jest prosty sposób wyznaczania kolejnych przybliżeń rozwiązania zadania (D^2). Zasadniczą jego wadą jest natomiast "zygzakowanie" poszukiwań, które może występować w praktycznych zastosowaniach. Powoduje ono niepotrzebne zwiększenie liczby rozwiązywanych zadań zastępczych bez istotnej poprawy uzyskiwanego oszacowania.

4. Metoda zanikającego wielościanu

Schemat tego algorytmu ma związek z charakterystyką wartości $v(D)$ podaną w (W8). Ponieważ w praktyce obliczeniowej nie ma możliwości dysponowania pełnym opisem zbioru $R^o(q)$ dla aktualnej wartości parametru, to wprowadzono jego zewnętrzną aproksymację w postaci wielościanu o skończonej liczbie ścian. Podczas przebiegu algorytmu wyznaczany jest ciąg $\{q^i\}$, który spełnia warunek $q^i \geq v(D)$, oraz odpowiadający mu ciąg wielościanów $\{M^i\}$. Zastosowanie odpowiedniego mechanizmu zawężania kolejnych aproksymacji tak, aby $M^{i+1} \subset M^i$, pozwala wymusić wzrost wartości q^i.

Zadanie dualne rozwiązywane jest w odpowiednio zmodyfikowanej postaci:

(D^1) $$v(D) = \min \{ h(\omega) : \omega \in F^1 \},$$

$$\text{gdzie } F^1 = \{ \omega \in \mathbb{R}^m_+ : \|\omega\|_{L_1} = 1 \}.$$

Tak więc mnożniki ograniczenia zastępczego wyznaczane są z fragmentu hiperpłaszczyzny zawartego w nieujemnym ortancie.

ALGORYTM ZW

Krok 0 : wybierz mnożnik startowy $\omega^1 \in F^1$; przyjmij $M^0 = F^1$, $q^1 = \infty$ oraz $i = 1$.

Krok 1 : wyznacz $x^i \in Q(\omega^i)$; niech $g^i = b - Ax^i$.

Krok 2 : $q^{i+1} := \min (cx^i, q^i)$.

Krok 3 : $M^i := M^{i-1} \cap \{ \upsilon \in F^1 : \upsilon g^i \leq 0 \}$.

Krok 4 : jeżeli $\mathrm{int} M^i = \emptyset$, to STOP, a jeśli nie, to wyznacz $\tilde{\omega}^i \in \mathrm{int} M^i$.

Krok 5 : $\omega^{i+1} := \tilde{\omega}^i$; $i := i+1$ i wróć do kroku 1.

W każdej iteracji algorytmu rozwiązywane jest w kroku 1 zadanie zastępcze (Z_ω) dla mnożnika ω^i. Ponieważ ciąg $\{q^i\}$ ma takie same właściwości jak w algorytmie QS, to wszystkie wektory $-g^k \in R(q^i)$, dla $k=1,\dots,i$. A zatem $R^o(q^i) \cap F^1 \subset \mathrm{int} M^i$, gdzie $M^i = \{ \upsilon \in F^1 : \upsilon^T g^k \leq 0 \text{ dla } k=1,\dots,i \}$. Na tej podstawie warunek $\mathrm{int} M^i = \emptyset$ pociąga za sobą $R^o(q^i) = \emptyset$ i zgodnie z (W6) można orzec, że $q^i = v(D)$. Sprawdzenie warunku zatrzymania w kroku 4 może być realizowane poprzez rozwiązanie pomocniczego zadania liniowego (patrz Dyer (1980)). W przypadku, gdy nie jest on spełniony, to samo zadanie pozwala wyznaczyć punkt z wnętrza M^i. Różne warianty algorytmu ZW mogą powstawać w wyniku stosowania różnych sposobów wyznaczania tego punktu.

Ściany wielościanu M^i należą do hiperpłaszczyzn ortogonalnych do quasi-subgradientów g^k. W i-tej iteracji algorytmu ZW odrzucane są takie mnożniki υ, dla których $\upsilon^T g^i \geq 0$. Ponieważ z konstrukcji zadania (Z_ω) wynika, że $\omega^{i^T} g^i \geq 0$, to zgodnie z właściwością g^i podaną w (W5) oznacza to odrzucenie takich υ, dla których $h(\upsilon) \geq h(\omega^i)$.

Z rezultatu udowodnionego przez Dyera (1980) dla nieco bardziej rozbudowanej wersji algorytmu zanikającego wielościanu wynika zbieżność schematu ZW.

TWIERDZENIE 2 Jeżeli zbiór rozwiązań dopuszczalnych w (P) nie jest pusty, to algorytm ZW zostanie zatrzymany w pewnej iteracji i_t dla $q^{i_t} = v(D)$.

Przy wykorzystaniu algorytmu ZW liczba hiperpłaszczyzn, które potrzebne są do opisu wielościanów M^i, rośnie wraz z liczbą wykonanych iteracji. Powoduje to wzrost nakładów obliczeniowych koniecznych do wyznaczenia kolejnych mnożników, gdyż rośnie rozmiar pomocniczych zadań liniowych. Jest to zasadnicza wada tego algorytmu. Jego zaletą, w porównaniu z algorytmem QS, jest dysponowanie coraz pełniejszą informacją o funkcji dualnej w miarę kontynuowania obliczeń. Informacja zbierana jest w formie wielościennej aproksymacji zbioru $R^o(q^i)$, na podstawie której wyznaczane są kolejne mnożniki. W algorytmie QS wyznaczane są one w oparciu o lokalną informację zawartą w quasi-subgradiencie, przy arbitralnie przyjętym współczynniku kroku.

5. Metoda elipsoidalna

Jak dotąd brak jest efektywnego kryterium pozwalającego ograniczać nadmierny wzrost liczby ścian (w części nie aktywnych) aproksymacji budowanych w algorytmie ZW. Porównanie sformułowań zadań (Z_ω) i (D) z definicją zbioru $R^o(q)$ prowadzi do stwierdzenia, że $R^o(q) = \{ \upsilon \in \mathbb{R}^m_+ : h(\upsilon) < q \}$ dla $q > v(D)$. Zatem aproksymacja dotyczy zbiorów poziomicowych funkcji dualnej. Mając do dyspozycji odpowiedniki subgradientów można próbować, przez analogię z metodami optymalizacji nieróżniczkowalnej, zastosować aproksymacje elipsoidalne w celu uniknięcia niedogodności związanych z aproksymacjami wielościennymi.

Algorytm prezentowany poniżej opiera się na podstawowym schemacie metody elipsoidalnej dla rozwiązywania układów nierówności liniowych podanym przez Blanda i innych (1981). Rozwiązywane jest zadanie (D) a zawężony zbiór mnożników dopuszczalnych

$$F^{\infty} = \{ \omega \in \mathbb{R}^m_+ : \|\omega\|_{L_\infty} \le 1 \}$$

służy do określenia kuli, która, jako szczególny przypadek elipsoidy, ustalana jest w pierwszej iteracji rozpoczynającej działanie algorytmu. Zachowany jest mechanizm z algorytmu ZW, który pozwala wyznaczać coraz większe wartości q^i przy wykorzystaniu właściwości wektorów g^i. Natomiast w miejsce wielościanów M^i wprowadzono elipsoidy opisane nieosobliwymi macierzami B^i i środkami ω^i:

$$E^i = \{ \upsilon \in \mathbb{R}^m_+ : (\upsilon-\omega^i)^T (B^i)^{-1} (\upsilon-\omega^i) \le 1 \} .$$

W i-tej iteracji algorytmu przez środek elipsoidy E^i prowadzona jest hiperpłaszczyzna odcinająca, ortogonalna do wektora a^j. Następną zawężoną aproksymację stanowi najmniejsza elipsoida zawierająca zbiór punktów $\{ \upsilon \in E^i : \upsilon^T a^i \ge \omega^{i^T} a^i \}$. Macierz definiująca elipsoidę E^{i+1} oraz jej środek dane są wzorami:

(WZ1) $$B^{i+1} = \delta[B^i - \sigma(B^i a^i)(B^i a^i)^T / (a^{i^T} B^i a^i)] ,$$

$$w^{i+1} = w^i + \tau B^i a^i / (a^{i^T} B^i a^i)^{0.5} ,$$

gdzie $\delta = m^2/(m^2-1)$, $\sigma = 2/(m+1)$ a $\tau = 1/(m+1)$.

Wykorzystanie wyłącznie quasi-subgradientów funkcji dualnej do generowania hiperpłaszczyzn odcinających mogłoby prowadzić do naruszenia warunku $\omega^i \in \mathbb{R}^m_+$. Należy zatem wprowadzić, tak jak zaproponował Grötschel i inni (1980), dwoistą postać wektora a^i, która zależy od spełnienia warunku dopuszczalności. Jeżeli $\omega^i \in \mathbb{R}^m_+$, to przyjmuje się, że:

(WZ2) $$a^i = \sum_{j \in I^i} \alpha_j e_j ,$$

gdzie $I^i = \{ j : \omega^i_j < 0 \}$, $e^T_j = [0,\dots,1,\dots,0] \in \mathbb{R}^m_+$ (1 dla j-tej współrzędnej), $\alpha_j \ge 0$ i co najmniej jeden współczynnik

$\alpha_j > 0$. Natomiast jeżeli aktualny mnożnik $\omega^i \in \mathbb{R}^m_+$, to przyjmuje się, że $a^i = -g^i$, zgodnie z podstawową ideą postępowania. Schemat algorytmu elipsoidalnego dla rozwiązywania zadania (D) jest następujący.

ALGORYTM EL

Krok 0 : wyznacz ω^1, B^1 tak, aby $F^\infty \subset E^1$; przyjmij $q = \infty$ oraz $i = 1$.

Krok 1 : jeżeli $\omega^i \notin \mathbb{R}^m_+$, to przyjmij a^i zgodnie z (WZ2) i idź do kroku 4.

Krok 2 : wyznacz $x^i \in Q(\omega^i)$; niech $a^i = Ax^i - b$.

Krok 3 : $q^{i+1} := \min (cx^i, q^i)$.

Krok 4 : wyznacz B^{i+1} i ω^{i+1} zgodnie z (WZ1) ; $i := i+1$ i wróć do kroku 1.

Także w powyższym algorytmie, w każdej iteracji rozwiązywane jest zadanie zastępcze dla aktualnego mnożnika. Dostarcza ono nowej wartości progu q^i oraz pozwala skonstruować hiperpłaszczyznę odcinającą część bieżącej elipsoidy. Odrzucane są te punkty z E^i, które nie należą do $\mathbb{R}^m_+$ lub nie należą do zbioru poziomicowego $\{ \upsilon : h(\upsilon) < q^i \}$.

W startowej iteracji algorytmu przyjmuje się najczęściej $B^1 = rI$, gdzie I jest macierzą jednostkową mxm, a r jest dostatecznie duże, żeby $F^\infty \subset E^1$. Przyjęcie np. $\omega^1_j = 1$, dla $j=1,\ldots,m$, oraz $r \geq m$ pozwala osiągnąć tę inkluzję.

Z właściwości (W3) wynika, że istnieje kula domknięta $K(\tilde{\upsilon};\varepsilon)$ (o środku w punkcie $\tilde{\upsilon}$ i promieniu $\varepsilon > 0$) taka, że $K(\tilde{\upsilon};\varepsilon) \subset \{ \upsilon \in F^\infty : h(\upsilon) = v(D) \}$. Ponieważ $F^\infty \subset E^1$, to ze sposobu konstruowania kolejnych elipsoid wynika, że $\{ \upsilon \in F^\infty : h(\upsilon) = v(D) \} \subset E^i$ dla wszystkich i. Powyższe dwie inkluzje pozwalają odnieść ogólne twierdzenie o zbieżności metod elipsoidalnych podane przez Blanda i innych (1981) do algorytmu EL.

TWIERDZENIE 3 W ciągu $\{q^i\}$ wyznaczanym w algorytmie EL istnieje element $q^{i_o} = v(D)$.

Zaletą algorytmu EL jest to, że wykorzystywana jest pewna globalna informacja o funkcji dualnej przechowywana w postaci elipsoid, a jednocześnie nie wzrasta nakład obliczeń w kolejnych iteracjach.

Algorytm EL można zmodyfikować wprowadzając hiperpłaszczyznę odcinającą, która nie przechodzi przez środek elipsoidy. Jest to tzw. głębokie odcięcie (por. Bland i inni (1981)), które może poprawiać zbieżność metody. Wymaga to jedynie zmiany wzorów dla wyznaczania parametrów δ, σ i τ w (WZ1); Sikorski (1988).

Literatura

Bland R.G., Goldfarb D., Todd M.J. (1981) The ellipsoid method: a survey. Ops Res. 29, pp.1039-1091.

Dyer M.E. (1980) Calculating surrogate constraints. Math. Prog. 19, pp.255-278.278.

Gavish B.,Pirkul H. (1985) Efficient algorithms for solving multiconstraint zero-one knapsack problems to optimality. Math. Prog. 31, pp.78-105.105.

Glover F. (1965) A multiphase-dual algorithm fo the zero-one integer programming problem. Ops Res. 13, pp.879-919.

Glover F. (1968) Surrogate constraints. Ops Res. 16, pp.741-749.

Greenberg H.J., Pierskalla W.P. (1973) Quasi-conjugate functions and surrogate duality. Cah. d. C. d'Et.Rech.Oper. 15, pp.437-448.

Grötschel M., Lovasz L., Schrijver A. (1980) The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. Rep. No 80161-OR Univ. of Bonn.

Karwan M.H.,Rardin R.L. (1979) Some relationships between Lagrangian and surrogate duality in integer linear programming. Math. Prog. 17, pp.320-334.

Sikorski J. (1984) Dualne zadanie wyznaczania najlepszego ograniczenia zastępczego. Arch. Aut. Tel. 4, ss.471-481.

Sikorski J. (1986) Quasi-subgradient algorithms for calculating surrogate constraints. In: Malanowski K., Mizukami K. (ed.) Lect.Not.Cont.Inf.Sc.. Springer Verlag v.82, pp.203-236.

Sikorski J. (1987) Przybliżona metoda wyznaczania ograniczeń zastępczych w zadaniach załadunku z wieloma ograniczeniami. Rap. ZPM-12, IBS PAN.

Sikorski J. (1988) Wykorzystanie aproksymacji elipsoidalnych do wyznaczania ograniczeń zastępczych. Arch. Aut. Tel. (w druku).

LITERATURA

(1) Crabill T. B., Gross D., Magazine M. J. (1977) A Classified Bibliography of Research on Optimal Design and Control of Queues. Operations Res. Vol. 25, No. 2, pp. 219-232.

(2) Deb R. K., Serfozo R. F. (1973) Optimal Control of Batch Service Queues. Advances Appl. Probability 5, 340-361.

(3) Kosten L. (1973) Stochastic Theory of a Service System. Pergamon Press, New York, 1973.

(4) [illegible] (1979) The Computation of Optimal Control of a Queue with Batch Service, Manag. Sci. 25 [illegible]

(5) [illegible] (1984) [illegible], praca doktorska, [illegible]

(6) Коронюк Ю., Тарбий А. (1976) Полумарковские процессы и их приложения. Киев.

(7) Schlee G. (1982) [illegible] zastosowania [illegible] :XXIX, 3/4.

(8) Neuts M. (1967) A general class of bulk queues with Poisson input. Ann. Math. Stat. 38, 759-770.

(9) ______ (1979) Queues solvable without Rouché's theorem. Operations Res. 27.

(10) Keilson J. (1966) The ergodic queue length distribution for queueing systems with finite capacity. J. Roy. Stat. Soc. B28.

Zarząd
Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych

Prezes
prof.dr hab.inż. Andrzej Straszak
Instytut Badań Systemowych PAN

Wiceprezes
prof.dr hab.inż. Jan Stasierski
Wojskowa Akademia Techniczna

Wiceprezes
prof.dr hab.inż. Stanisław Piasecki
Instytut Badań Systemowych PAN

Sekretarz generalny
dr inż. Zbigniew Nahorski
Instytut Badań Systemowych PAN

Sekretarz
dr inż. Jarosław Sikorski
Instytut Badań Systemowych PAN

Skarbnik
dr inż. Andrzej Kałuszko
Instytut Badań Systemowych PAN

Członkowie
prof.dr hab. Jerzy Kisielnicki
Wydział Zarządzania UW

doc.dr hab.inż. Bohdan Korzan
Wojskowa Akademia Techniczna

doc.dr hab.inż. Jan Stachowicz
Zakład Nauk Zarządzania PAN

doc.dr hab.inż. Maciej Sysło
Instytut Informatyki UWr.

Komisja rewizyjna
PRZEWODNICZĄCY

dr Władysław Świtalski
Katedra Cybernetyki i Badań Operacyjnych UW

CZŁONKOWIE

dr inż. Janusz Kacprzyk
Instytut Badań Systemowych PAN

dr inż. Marek Malarski
Instytut Transportu PW

doc.dr hab.Henryk Sroka
Akademia Ekonomiczna w Katowicach

dr inż. Leon Słomiński
Instytut Badań Systemowych PAN

PION III