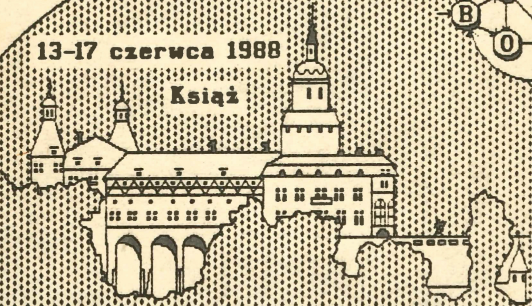
Redaktorzy:
A.Straszak
Z.Nahorski
J.Sikorski

13-17 czerwca 1988

Książ



1. Krajowa Konferencja Badań Operacyjnych i Systemowych

Tom 1

BOS'88

POLSKIE TOWARZYSTWO BADAŃ
OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

POLSKIE TOWARZYSTWO BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH

TOM 1

OPTYMALIZACJA
METODY I ZASTOSOWANIA

I KRAJOWA KONFERENCJA

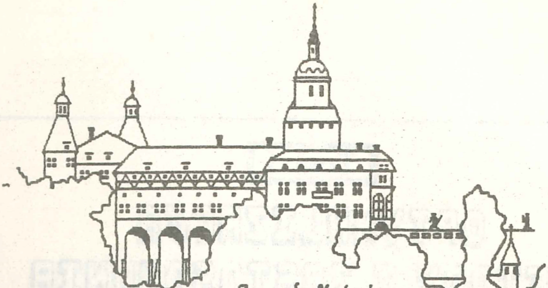
BADAŃ OPERACYJNYCH i SYSTEMOWYCH

Książ, 13 - 17 czerwca 1988

BOS'88

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH POLSKIEJ AKADEMII NAUK

1989
WARSZAWA



Zamek Książ

I Krajowa Konferencja Badań Operacyjnych i Systemowych

Organizator konferencji

Polskie Towarzystwo Badań Operacyjnych i Systemowych
przy współpracy
Instytutu Badań Systemowych PAN

Komitet naukowy konferencji

Jerzy Hołubiec, Andrzej Kałuszko, Jerzy Kisielnicki, Henryk Kowalowski, Roman Kulikowski, Franciszek Marecki, Zbigniew Nahorski, Stanisław Piasecki, Jarosław Sikorski, Jan Stachowicz, Jan Stasierski, Andrzej Straszak, Maciej Sysło, Władysław Świtalski

Redaktorzy naukowi materiałów

Andrzej Straszak, Zbigniew Nahorski, Jarosław Sikorski

2. Problemy optymalizacji i algorytmy ich rozwiązywania

2.3

I Krajowa Konferencja
Badań Operacyjnych i Systemowych
Książ, 13 - 17 czerwca 1988r.

Analiza probabilistyczna wybranych klas binarnych zadań załadunku

Krzysztof Szkatuła

Instytut Badań Systemowych PAN
01-447 Warszawa, ul. Newelska 6

W pracy rozważono wybrane podklasy zadań załadunku na minimum i maksimim. Pokazano, że tak zwane algorytmy zachłanne uzyskują dla zadań o dużych rozmiarach rozwiązania bliskie do optymalnego z prawdopodobieństwem dążącym do jedności.

1. Wprowadzenie

Rozpatrzmy parę binarnych zadań załadunku:

$$z_{MAX}(n)=\max\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b(n),\ x_i=0 \text{ albo } 1,\ i=1,\dots,n\} \tag{1}$$

$$z_{MIN}(n)=\min\{-\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq d(n),\ x_i=0 \text{ albo } 1,\ i=1,\dots,n\} \tag{2}$$

Zakładamy, że $c_i, a_i > 0$, $i=1,\dots,n$, $b(n), d(n) \geq 0$.

Są to ważne zadania optymalizacji dyskretnej, o dużym znaczeniu przy rozwiązywaniu problemów praktycznych [2]. Istotnym polem zastosowań (1) lub (2) są różnorodne relaksacje i podzadania wielu ważnych zagadnień praktycznych takich na przykład jak zadania szeregowania prac lub inne zadania występujące na przykład w elastycznych systemach produkcyjnych.

Pomimo swojej prostej postaci (1) i (2) są NP-trudnymi zadaniami optymalizacji dyskretnej [1]. Oznacza to konieczność używania do rozwiązywania zadań praktycznych algorytmów przybliżonych. Szczególne znaczenie spośród nich mają algorytmy zachłanne.

Dla zadań (1) i (2) działanie algorytmów zachłannych może być przedstawione w następującej postaci:

Bez utraty ogólności można założyć, że dla (1) współczynniki zadania są posortowane tak, aby $\frac{c_{i-1}}{a_{i-1}} \geq \frac{c_i}{a_i}$, $i=2,\dots,n$, oraz w przypadku (2): $\frac{c_{i-1}}{a_{i-1}} \leq \frac{c_i}{a_i}$, $i=2,\dots,n$. Przyjmujemy na początku pracy algorytmów; $s=0$, $z=0$, $x_i=0$, $i=1,\dots,n$. Dalej rekurencyjnie dla $i=1,2,\dots,n$ ustalamy

$$s:=s+a_i,\quad z:=z+c_i,\quad x_i:=1$$

jeśli

dla zadania (1)

$s+a_i \geq b(n)$

dla zadania (2)

$s+a_i \leq d(n)$

w przeciwnym przypadku $s:=s$, $z:=z$, $x_i=0$.

Jeśli stosowaliśmy algorytm zachłanny do zadania (1) to, $g_{MAX}(n)=z$ jest wartością funkcji celu uzyskanego rozwiązania. W przypadku zadania (2) $g_{MIN}(n)=z$ jest wartością uzyskanego rozwiązania. W przypadku zadania (1) algorytm zachłanny zawsze uzyskuje rozwiązanie dopuszczalne zadania. Dla (2) tylko w przypadku jeśli zbiór rozwiązań dopuszczalnych zadania jest niepusty ($\sum_{i=1}^{n} a_i \geq d(n)$).

Przykłady

$$z_{MAX}(n)=\max\{2px_1+\sum_{i=2}^{n} qx_i \mid px_1+\sum_{i=2}^{n} qx_i \leq q,\ x_i=0 \text{ albo } 1,\ i=1,\dots,n\}$$

$g_{MAX}(n)=2p$. Jeśli $q>2p$, to wtedy $z_{MAX}(n)=q$

$$z_{MIN}(n)=\min\{px_1+\sum_{i=2}^{n} 2qx_i \mid px_1+\sum_{i=2}^{n} qx_i \geq q,\ x_i=0 \text{ albo } 1,\ i=1,\dots,n\}$$

$g_{MIN}(n)=p$. Jeśli $p>2q$, to wtedy $z_{MIN}(n)=2q$.

Przyjmując odpowiednie wartości p i q można ilorazy $\frac{g_{MAX}(n)}{z_{MAX}(n)}$ (w przypadku zadania (1)) lub $\frac{z_{MIN}(n)}{g_{MIN}(n)}$ (dla (2)) uczynić dowolnie małymi. Oznacza to, że w tak zwanym najgorszym przypadku algorytmy zachłanne zachowują się dowolnie źle (to znaczy, że dla każdego n istnieje zadanie dla którego te ilorazy mogą być mniejsze od dowolnie małej wartości $\varepsilon>0$).

Lemat 1 [4]

Jeśli $d(n)=\sum_{i=1}^{n} a_i - b(n)$, to wtedy

$$z_{MAX}(n)=\sum_{i=1}^{n} c_i - z_{MIN}(n)$$

$$0 \leq z_{MAX}(n) - g_{MAX}(n) \leq g_{MIN}(n) - z_{MIN}(n)$$

Liniowe relaksacje zadań (1) i (2) mają następującą postać:

$$\bar{z}_{MAX}(n)=\max\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b(n),\ 0 \leq x_i \leq 1,\ i=1,\dots,n\} \tag{3}$$

$$z_{MIN}(n)=\min\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq d(n),\ 0 \leq x_i \leq 1,\ i=1,\dots,n\} \tag{4}$$

Niech

$$a_i(\lambda)=\begin{cases} a_i & \text{jeśli } \dfrac{c_i}{a_i}>\lambda \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases}$$

$$c_i(\lambda)=\begin{cases} c_i & \text{jeśli } \dfrac{c_i}{a_i}>\lambda \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases}$$

$$s_n(\lambda)=\sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda),\quad z_n(\lambda)=\sum_{i=1}^{n} c_i(\lambda)$$

$$a_i'(\lambda)=\begin{cases} a_i & \text{jeśli } \dfrac{c_i}{a_i}\leqq\lambda \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases}$$

$$c_i'(\lambda)=\begin{cases} c_i & \text{jeśli } \dfrac{c_i}{a_i}\leqq\lambda \\ 0 & \text{w przyciwnym przypadku}\end{cases}$$

$$s_n'(\lambda)=\sum_{i=1}^{n} a_i'(\lambda),\quad z_i'(\lambda)=\sum_{i=1}^{n} c_i'(\lambda),\quad i=1,\dots,n.$$

Wtedy zadania dualne do (3) i (4) mogą być zapisane w następującej postaci:

$$\phi_{MAX}(n)=\min_{\lambda\geqq 0}\{z_n(\lambda)+\lambda(b(n)-s_n(\lambda))\}$$

$$\phi_{MIN}(n)=\max_{\lambda\geqq 0}\{z_n'(\lambda)+\lambda(d(n)-s_n'(\lambda))\}$$

Lemat 2 [3,4]

1) Jeśli istnieje λ_n takie, że $s_n(\lambda_n)\leqq b(n)$, to wtedy

$$z_n(\lambda_n)\leqq g_{MAX}(n)\leqq z_{MAX}(n)\leqq z_{MAX}'(n)\leqq \phi_{MAX}(n)\leqq z_n(\lambda_n)+$$
$$+\lambda_n(b(n)-s_n(\lambda_n))$$

2) Jeśli istnieje λ_n' takie, że $s_n'(\lambda_n')\geqq d(n)$ to wtedy

$$z_n'(\lambda_n')+\lambda_n'(d(n)-s_n'(\lambda_n')) \leq \phi_{MIN}(n) \leq z_{MIN}'(n) \leq z_{MIN}(\ ) \leq$$

$$\leq g_{MIN}(\lambda_n') \leq z_n'(\lambda_n').$$

2. Analiza probabilistyczna zadań (1) i (2)

Dla przeprowadzenia analizy probabilistycznej niezbędny jest probabilistyczny model zadania. Aby go sformułować założymy, że a_i, c_i są realizacjami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych (w.n.z.l.) A_i, C_i z dystrybuantami $G_i(x)=P\{A_i<x\}$, $H_i(x)=P\{C_i<x\}$, $i=1,\dots,n$. Zakładamy także, że w.n.z.l. A_i, C_i są określone na $(0,1]$. Wtedy wszystkie zależne od a_i, c_i wielkości stają się również realizacjami odpowiednich z.l., zmienne te dla odróżnienia od ich realizacji będziemy oznaczać dużymi literami.

Dla dwóch nieskończonych ciągów liczbowych U_n, V_n będziemy pisać

1) $U_n \sim V_n$ jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}|U_n - V_n| = 0$

2) $U_n \approx V_n$ jeśli $\dfrac{U_n}{V_n} \sim 1$

Skrót a.s. (almost surely) oznacza, że zdarzenie losowe zachodzi prawie na pewno to znaczy, wszędzie za wyjątkiem być może zbioru miary 0.

Twierdzenie 1 [3]

Jeśli istnieje λ_n takie, że

$$E(S_n(\lambda_n)) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{1/\lambda_n} x[1-H_i(\lambda x)]\,dG_i(x) = b(n) - \sqrt[3]{\frac{b^2(n)}{\lambda_n}} \qquad (5)$$

oraz

$$\frac{1}{b(n)\cdot\lambda_n} \sim 0, \text{ to wtedy}$$

$$E(Z_n(\lambda_n)) \approx Z_n(\lambda_n) \approx G_{MAX}(n) \approx Z_{MAX}(n) \qquad \text{a.s.} \qquad (6)$$

Dla określonej założeniami Twierdzenia 1 klasy probabilistycznych zadań (1) algorytm zachłanny jest asymptotycznie optymalny prawie na pewno.

Rozpatrzmy teraz zaburzone zadanie (1)

$$\tilde{z}_{MAX}(n) = \max\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le s_n(\lambda_n),\ x_i=0 \text{ albo } 1,\ i=1,\dots,n\}$$

gdzie zaburzenie prawej strony ograniczenia jest równe $s_n(\lambda)-b(n)$.

<u>Twierdzenie 2</u> [3]

$$\tilde{z}_{MAX}(n) = \tilde{g}_{MAX}(n) = z_n(\lambda_n) = \tilde{z}'_{MAX}(n)$$

Jeśli zachodzi (5) oraz $\frac{b(n)}{\lambda_n} \sim 0$, to wtedy

$$S_n(\lambda_n) \sim b(n),\ E(Z_n(\lambda_n)) \sim Z_n(\ _n) \qquad \text{a.s.}$$

Z Twierdzenia 2 wynika, że gdy spełnione są jego założenia, to zaburzenie dąży do zera wraz z n dążącym do nieskończoności prawie na pewno.

<u>Twierdzenie 3</u> [4]

Jeśli istnieją λ_n', $r(n)$, $0 \le \lambda_n' \le 1$, $r(n) \ge 0$ takie, że

$$E(S_n'(\lambda_n')) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 x H_i(\lambda_n x)\, dG_i(x) = d(n) + r(n)$$

oraz

$$d(n) = O(r^2(n)), \quad r(n) \approx +\infty \; ; \quad \lambda_n \cdot r(n) \sim 0$$

to wtedy

$$E(Z'_n(\lambda'_n)) \sim Z'_n(\lambda'_n) \sim G_{MIN}(n) \sim Z_{MIN}(n) \quad \text{a.s.} \tag{7}$$

■

Z Twierdzenia 3 wynika, że przy spełnieniu założeń rozwiązanie zachłanne dąży do rozwiązania optymalnego zadania (2) prawie na pewno.

3. Przykład

Niech $G_i(x)$, $H_i(x)$, $i=1,\dots,n$, mają rozkład równomierny na $(0,1]$, to znaczy

$$G_i(x) = H_i(x) = x, \qquad 0 < x \leq 1.$$

1) Jeśli $0 < b(n) \leq \frac{1}{6} n$, to wtedy

$$E(Z_n(\lambda_n)) \sim \sqrt{\frac{2}{3} n \cdot b(n)} \quad \text{oraz}$$

przy spełnieniu założeń Twierdzenia 1, założenia Twierdzenia 2 są spełnione tylko wtedy, kiedy

$$b(n) = O(\sqrt[3]{n})$$

2) Jeśli $\frac{1}{6} n < b(n) \leq \frac{1}{2} n$, to wtedy

$$E(Z_n(\lambda_n)) \sim \frac{1}{8} n + \frac{2}{3} b(n)\left(1 - \frac{b(n)}{n}\right)$$

i tylko założenia Twierdzenia 1 są spełnione.

3) Założenia Twierdzenia 3 są spełnione jeśli $b(n)=O(n^{2/3})$ oraz $r(n)=O(\sqrt[3]{n})$ i wtedy

$$E(Z'_n(\lambda'_n)) \sim \frac{3}{2} \frac{d^2(n)}{n} .$$

4. Podsumowanie

Założenia Twierdzenia 1 i 3 wyodrębniają dość szerokie klasy losowych binarnych zadań załadunku, dla których algorytmy zachłanne uzyskują rozwiązania bliskie optymalnym prawie na pewno. Oznacza to, że w tak zwanym średnim przypadku algorytmy zachłanne wykazują diametralnie odmienne od najgorszego przypadku zachowanie. Oczawiście należy zachować ostrożność przy wyciąganiu wniosków praktycznych, gdyż modele probabilistyczne nie zawsze są adekwatnym opisem zadań rzeczywistych.

Bardzo ciekawą interpretację mają wyniki Twierdzenia 2. Mianowicie, przy spełnieniu założeń Twierdzenia, dla klasy losowych binarnych zadań załadunku z asymptotycznie zerowo zaburzoną prawą stroną ograniczenia algorytmy zachłanny i progowy uzyskują zawsze rozwiązanie optymalne, równe są też wartości rozwiązań optymalnych zadania dyskretnego i jego ciągłej relaksacji.

Z Twierdzenia 1-3 wynika, że funkcje rzeczywiste $E(Z_n(\lambda_n))$ i $E(Z_n'(\lambda_n'))$ są dobrymi przybliżeniami tak rozwiązań optymalnych jak progowych i zachłannych dla zadań (1) i (2). Wykazują one w postaci funkcyjnej zależność tych rozwiązań od rozmiaru zadania (n), prawej strony ograniczenia (b(n) lub d(n)) oraz w niejawnej postaci od rozkładów probabilistycznych zmiennych losowych opisujących współczynniki funkcji celu i lewej strony ograniczenia.

Przeprowadzono eksperyment obliczeniowy, w którym współczynniki funkcji celu i lewej strony ograniczenia były generowane losowo z rozkładem równomiernym w przedziale (0,1].

Uzyskane wyniki potwierdzają dla zadania (1) asymptotyczną optymalność algorytmu progowego, przy czym zbieżność jest szybka już dla zadań o stosunkowo niewielkich rozmiarach (kilka tysięcy zmiennych). Eksperyment obliczeniowy potwierdził również dobre zachowanie algorytmu progowego dla klas zadań nie opisanych założeniami Twierdzenia 1.

Literatura

[1] M.R. Garey and D.S. Johnson, Computers and Intractability: a Quide to the Theory of NP-completeness (Freeman, San Francisco, 1979).

[2] M.M. Sysło, N. Deo and J.S. Kowalik, Discrete Optimization Algorithms (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983).

[3] K. Szkatuła and M. Libura, On Probabilistic Properties of Greedy-like Algorithms for the Binary Knapsack Problem, Proceedings of the Advanced School on Stochastics in Combinatorial Optimization, CISM, Udine, Italy 22-25 September 1986, G. Andreatta, F. Mason, P. Serafini - editors, World Scientific, Singapore, New Yersey, Hong Kong, 1987.

[4] K. Szkatuła, Probabilistic Analysis of the Selected Class of Binary Knapsack Problems, ZPM-3-29/CPBP/02.15, 1987, referat wygłoszony na C O87, A Conference on Combinatorial Optimization, 6-8 April, 1987, University of Southampton.

L I T E R A T U R A

(1) Crabill T. B., Gross D., Magazine M. J. (1977) A Classified Bibliography of Research on Optimal Design and Control of Queues. Operations Res. Vol. 25, No. 2, pp. 219-232.

(2) Deb R. K., Serfozo R. F. (1973) Optimal Control of Batch Service Queues. Advances Appl. Probability 5, 340-361.

(3) Kosten L. (1973) Stochastic Theory of Service Systems, Pergamon Press, New York.

(4) Weiss H. J. (1979) The Computation of Optimal Control Limits for a Queue with Batch Services, Manag. Sci. 25, 320-328.

(5) Stanek S. (1984) Wybrane [illegible] systemy masowej obsługi [illegible], Praca doktorska, [illegible]

(6) Королюк В., Турбин А. (1976) Полумарковские процессы и их приложения, Киев.

(7) [illegible] (1982) Systemy masowej obsługi [illegible] zgłoszeń [illegible] Przegląd Stat. [illegible]

(8) Neuts M. (1967) A general class of bulk queues with Poisson input, Ann. Math. Stat. 38, 759-770.

(9) ______ (1979) Queues solvable without Rouché's theorem. Operations Res. 27.

(10) Keilson J. (1966) The ergodic queue length distributions for queueing systems with finite capacity. J. Roy. Stat. Soc. B28.

Zarząd
Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych

Prezes
prof.dr hab.inż. Andrzej Straszak
Instytut Badań Systemowych PAN

Wiceprezes
prof.dr hab.inż. Jan Stasierski
Wojskowa Akademia Techniczna

Wiceprezes
prof.dr hab.inż. Stanisław Piasecki
Instytut Badań Systemowych PAN

Sekretarz generalny
dr inż. Zbigniew Nahorski
Instytut Badań Systemowych PAN

Sekretarz
dr inż. Jarosław Sikorski
Instytut Badań Systemowych PAN

Skarbnik
dr inż. Andrzej Kałuszko
Instytut Badań Systemowych PAN

Członkowie
prof.dr hab. Jerzy Kisielnicki
Wydział Zarządzania UW

doc.dr hab.inż. Bohdan Korzan
Wojskowa Akademia Techniczna

doc.dr hab.inż. Jan Stachowicz
Zakład Nauk Zarządzania PAN

doc.dr hab.inż. Maciej Sysło
Instytut Informatyki UWr.

Komisja rewizyjna
PRZEWODNICZĄCY

dr Władysław Świtalski
Katedra Cybernetyki i Badań Operacyjnych UW

CZŁONKOWIE

dr inż. Janusz Kacprzyk
Instytut Badań Systemowych PAN

dr inż. Marek Malarski
Instytut Transportu PW

doc.dr hab.Henryk Sroka
Akademia Ekonomiczna w Katowicach

dr inż. Leon Słomiński
Instytut Badań Systemowych PAN

PION III