



**POLSKA AKADEMIA NAUK**  
**Instytut Badań Systemowych**

---

---

**WIELOKRYTERIALNE DECYZJE  
KOOPERACYJNE**

**METODY  
WSPOMAGANIA KOMPUTEROWEGO**

**Lech Krus**

**Warszawa 2011**



**POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH**

**Seria: BADANIA SYSTEMOWE  
Tom 70**

---

**Redaktor naukowy:  
Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum**

**Warszawa 2011**

Rada redakcyjna serii: BADANIA SYSTEMOWE

Prof. Olgierd Hryniewicz - przewodniczący

Prof. Jakub Gutenbaum – redaktor naczelny

Prof. Janusz Kacprzyk

Prof. Tadeusz Kaczorek

Prof. Roman Kulikowski

Prof. Marek Libura

Prof. Krzysztof Malinowski

Prof. Zbigniew Nahorski

Prof. Marek Niezgódka

Prof. Roman Słowiński

Prof. Jan Studziński

Prof. Stanisław Walukiewicz

Prof. Andrzej Weryński
------------------------

Prof. Antoni Żochowski



**POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH**

---

**Lech Kruś**

**WIELOKRYTERIALNE DECYZJE  
KOOPERACYJNE  
METODY WSPOMAGANIA KOMPUTEROWEGO**

**Warszawa 2011**

**Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN  
Warszawa 2011**

Dr inż. Lech Kruś  
Instytut Badań Systemowych  
Polska Akademia Nauk  
Newelska 6, 01-447 Warszawa  
email: krus@ibspan.waw.pl

**Recenzenci:**

Prof. dr hab. inż. Ignacy Kaliszewski

Prof. dr hab. inż. Andrzej P. Wierzbicki

**Skład:** Lech Kruś i Urszula Kruś

**Wydawca:**

Instytut Badań Systemowych  
Polska Akademia Nauk  
Newelska 6, 01-447 Warszawa  
www.ibspan.waw.pl

**ISSN 0208-8029**

**ISBN 9788389475381**



## Wprowadzenie

W pracy rozważa się sytuacje decyzyjne, w których jest kilku decydentów negocjujących warunki możliwej współpracy. Problem dotyczy podziału efektów współpracy, przy czym każdy decydent ma swój odrębny, zestaw celów, które chciałby osiągnąć i kieruje się swoimi preferencjami. Cele te są w ogólnym przypadku konfliktowe, zarówno w przypadku każdego decydenta jak i między decydentami. Każdy decydent ma określony wektor kryteriów mierzących poziomy osiągnięcia jego celów, przy czym wartości tych kryteriów zależą od decyzji wszystkich decydentów. Sytuacje takie nazywane są sytuacjami kooperacyjnymi z wielokryterialnymi wypłatami decydentów. Zakłada się, że można zbudować model matematyczny opisujący taką sytuację decyzyjną a w szczególności pozwalający wyznaczyć wielokryterialne wypłaty decydentów w zależności od podejmowanych przez nich decyzji.

Praca dotyczy problemów metodologicznych związanych ze wspomaganie procesu decyzyjnego w takich sytuacjach przy wykorzystaniu modeli matematycznych. Przedstawia się podstawy teoretyczne i metody, które mogą być wykorzystane w konstrukcji systemów komputerowych wsparcia decyzyjnego.

Cechą charakterystyczną rozpatrywanych w pracy problemów w przypadku wielokryterialnych wypłat jest to, że każdy decydent ma do czynienia z pewnym zbiorem tzw. niezdominowanych rozwiązań, przy czym zbiory rozwiązań decydentów są wzajemnie współzależne. Zbiory niezdominowanych rozwiązań są na ogół niemożliwe do zapisania w formie analitycznej i przedstawienia decydom w takiej formie do analizy. Możliwe jest natomiast wyznaczenie pewnej skończonej liczby punktów należących do tych zbiorów przy zastosowaniu metod obliczeniowych.

W uzupełnieniu do rozwijanych w pracy podstaw teoretycznych i metod wspomaganie decyzji kooperacyjnych, rozpatruje się również zagadnienia budowy i zastosowania systemów komputerowych nie tylko do wspomaganie analizy decyzyjnej dokonywanej indywidualnie przez każdego decydenta z uwzględnieniem jego preferencji, ale także do wspomaganie procesu mediacji, w trakcie którego generowane są propozycje mediacyjne.

Dla przypadku pojedynczego decydenta rozwinięte zostały metody wielokryterialnego wspomaganie decyzji. Istnieje już obecnie bardzo wiele prac przeglądowych i monografii poświęconych metodom wielokryterialnego podejmowania decyzji. np. (Branke, Deb, Miettinen, Słowiński 2008), (Wierzbicki, Makowski, Vessels 2000), (Kaliszewski 1994, 2006), (Chankong, Haimes 1983), (Cohon, 1985), (Galas, Nykowski, Żółkiewski 1987), (Hwang, Masud, 1979), (Sawaragi, Nakayama, Tanino 1985), (Steuer 1986), (Yu 1985), (Zeleny 1982). Proponowane w tych pracach podejścia mają na celu umożliwienie decydentowi wyboru ze zbioru rozwiązań niezdominowanych rozwiązania zgodnego z jego preferencjami, przy zastosowaniu pewnej procedury przeglądania tego zbioru. Wykorzystywane są przy tym różne metody obliczeniowe.



Wśród stosowanych podejść na szczególną uwagę zasługują metody stosujące pojęcie tzw. funkcji osiągnięcia, wykorzystujących poziomy aspiracji czy punkty referencyjne, sprecyzowane przez decydenta, por. (Wierzbicki, 1982, 1986, Wierzbicki i inni 2000). W metodach tego typu stosowana jest interakcyjna procedura, w trakcie której decydent może coraz lepiej poznawać zbiór rozwiązań niezdominowanych, wyznaczając przy pomocy systemu komputerowego niektóre rozwiązania z tego zbioru. Odpowiednio dobierając punkty referencyjne może także kierować sposobem przeglądania tego zbioru i wybrać ostateczne rozwiązanie zgodnie ze swoimi preferencjami.

W przypadku kilku decydentów zagadnienie jest bardziej złożone, ponieważ istnieje wiele indywidualnych zbiorów rozwiązań niezdominowanych i zbiory te są współzależne. Decydenci mają zwykle różne cele, których osiągnięcie jest mierzone za pomocą kryteriów i mają różne preferencje. Rozwiązaniem całego problemu jest wariant, który zostanie zaakceptowany przez wszystkich decydentów. Decydenci mogą być w różnej tzw. *pozycji przetargowej*. Każdy z nich może mieć inny wpływ na wyniki współpracy. Wspomaganie procesu decyzyjnego rozumiane jest w tym przypadku jako wspomaganie decydentów w procesie analizy umożliwiającej lepsze rozumienie ich pozycji przetargowej, a także jako wspomaganie procesu negocjacji, tzn. pomoc w znalezieniu akceptowalnego przez nich wszystkich rozwiązania.

Istnieje obecnie wiele prac poświęconym analizie procesów negocjacji a także ich formalnemu opisowi, np. prace (Barclay, Peterson 1976), (Raiffa 1982), (Axelrod 1985), (Wierzbicki 1985, 1987, 1990), (Kersten, Szapiro 1986), (Kersten i inni 1988, 1991), Sebenius (1992, 2007). Idee komputerowego wspomagania procesów negocjacji oraz przykłady zbudowanych systemów można

znaleźć w pracach autorów: Goeltner (1987), Jarke, Jelassi, Shakun (1987), Kersten (1985, 1988), Korhonen, Moskowitz, Wallenius, Zions (1986), DeSanctis, Gallupe (1987), Shakun (1988), Nunamaker, Applegate, Konsynsky (1988), Korhonen, Wallenius, (1989), Nyhart, Samarasan (1989), Vetschera (1990), Teich, Wallenius, Kuula, Zions (1995), Ehtamo, Hamalainen (2001), Heiskanen, Ehtamo, Hamalainen (2001). Rozwijane są idee wspomaganie negocjacji przez internet, w tym z wykorzystaniem systemów wieloagentowych, i zbierane jest doświadczenie stosowania takich systemów, np. (Kersten, Sunil 1999, Kersten i inni 2002, Kersten, Lo 2003, Chen i inni 2005, Vetschera, Kersten, Köszegei 2006, Vetschera 2007, Wachowicz 2006, 2008, Szapiro, Wojewnik 2007, 2008).

Monografia przedstawia specyficzne autorskie podejście do problemu negocjacji przy wielokryterialnych wypłatach decydentów.

Sytuację decyzyjną, w której znajdują się decydenci opisuje się za pomocą gier wielokryterialnych, w szczególności wielokryterialnego problemu targu i wielokryterialnych gier koalicyjnych. Wypłaty w takich grach rozpatrywane są w przestrzeni będącej iloczynem kartezjańskim przestrzeni kryteriów poszczególnych decydentów. W momencie rozpoczęcia badań w latach 80-ych ubiegłego wieku, teoria takich gier nie była jeszcze rozwinięta. Zaproponowano więc i przedstawia się w pracy odpowiednie sformułowania takich gier, koncepcje ich rozwiązań i analizę właściwości. Proponowane koncepcje rozwiązań charakteryzują się tym, że uwzględniają preferencje każdego z decydentów.

Proponuje się konstrukcję wielorundowych procedur wspomagających analizę decyzyjną wykonywaną przez decydentów jak i proces mediacji z wykorzystaniem koncepcji rozwiązań teorii gier. W każdej rundzie takiej procedury każdy decydent przeprowadza

analizę wielokryterialną osiągalnych wypłat w swojej przestrzeni kryteriów, co umożliwi mu wskazanie swoich preferencji. Informacje o tych preferencjach umożliwiają z kolei wyliczenie propozycji mediacyjnej. Propozycja mediacyjna wyznaczana jest na podstawie jednej z proponowanych w pracy koncepcji rozwiązania gry wielokryterialnej. Propozycja mediacyjna uwzględnia preferencje wszystkich decydentów i jest przedmiotem indywidualnej analizy przez decydentów w kolejnej rundzie.

W pracy opisano, jak taka procedura może być zaimplementowana w konstrukcji komputerowego systemu wsparcia decyzyjnego.

Zaproponowane w pracy podejście stanowi uzupełnienie ewentualnie alternatywę do podejść prezentowanych w cytowanej wyżej literaturze.

Układ pracy jest następujący.

W rozdziale 2 przedstawia się podstawowe pojęcia i idee wielokryterialnej optymalizacji. Szczególną uwagę zwrócono na metodę punktu referencyjnego z wykorzystaniem funkcji osiągnięcia A.P. Wierzbickiego, ponieważ metoda ta jest wykorzystywana w proponowanych procedurach wspomagających analizę i proces mediacji, przedstawionych w dalszej części pracy.

Rozdział 3 wprowadza podstawowe pojęcia dotyczące negocjacji i klasycznej teorii gier. Klasyczną jest nazywana teoria gier rozwijana przy założeniu skalarnych wypłat graczy.

Kolejne rozdziały 4 - 9 zawierają oryginalne wyniki w zakresie przedmiotowym monografii uzyskane w trakcie prowadzonych badań.

Rozdział 4 zawiera ogólne sformułowanie wielokryterialnego problemu decyzyjnego w sytuacjach kooperacyjnych. Podaje się

definicję wielokryterialnego problemu targu. Proponuje się kilka koncepcji rozwiązań, stanowiących uogólnienie rozwiązań znanych z literatury. Rozwiązania te są określane z wykorzystaniem wprowadzonej, oryginalnej koncepcji tzw. punktu względnej utopii. Punkt ten uwzględnia preferencje decydentów określone w ich przestrzeniach kryteriów. Analizuje się właściwości tych rozwiązań i ich relacje.

Przedstawia się następnie możliwości wykorzystania tych rozwiązań w interakcyjnych procedurach mediacyjnych (Rozdział 5). Inspiracją do formułowania takich procedur były koncepcje i metody negocjacji (Raiffa 1982) stosowane w praktyce, np. zakończone sukcesem rokowania izraelsko-egipskie w Camp David. Proponuje się oryginalną procedurę, w której wprowadza się i łączy dwa sposoby wspomagania decyzyjnego: tzw. jednostronne i wielostronne. Wspomaganie jednostronne pozwala każdemu z decydentów biorących udział w negocjacjach na niezależną analizę problemu bez uwzględnienia aktualnych decyzji pozostałych decydentów. Wspomagana jest analiza wielokryterialna wykonywana przez każdego z decydentów metodą punktu referencyjnego z użyciem funkcji osiągnięcia. We wspomaganium wielostronnym uwzględnione są aktualne decyzje wszystkich decydentów. Taki sposób wspomagania decyzyjnego umożliwi decydentom lepsze poznanie ich sytuacji przetargowej, wybór propozycji rozwiązań zgodnie z ich preferencjami, a także wspomaga znalezienie konsensusu, jako rozwiązania niezdominowanego, akceptowanego przez wszystkich decydentów.

Powyższa procedura została wykorzystana w konstrukcji komputerowego systemu wsparcia decyzyjnego MCBARG. Strukturę

i funkcje tego systemu omawia się w rozdziale 6. System ten umożliwia budowę modelu problemu decyzyjnego opisywanego jako wielokryterialny problem targu i przeprowadzenie sesji negocjacyjnych z udziałem osób przyjmujących rolę decydentów w tym problemie. System wspomaga proces analizy wielokryterialnej dokonywany w każdej rundzie przez każdego decydenta oraz pełni rolę niezależnego mediatora i ułatwia decydentom znalezienie konsensusu. W rozdziale tym przedstawia się także przykłady dotyczące międzynarodowej współpracy w zakresie kwaśnych deszczów, oraz współpracy gospodarstw rolnych, modelowane jako wielokryterialny problem targu. Modele wielokryterialnego problemu targu dla tych przykładów zostały zbudowane z wykorzystaniem edytora systemu MCBARG a następnie wykorzystane w przeprowadzonych eksperymentalnych sesjach negocjacji.

W Rozdziale 7 rozpatruje się sytuacje decyzyjne opisywane za pomocą wielokryterialnych gier kooperacyjnych, uwzględniających możliwość tworzenia przez graczy koalicji. Przedstawia się rozwinięcie sformułowania klasycznych gier kooperacyjnych podanego przez Aumana (1967), oraz koncepcji rozwiązań na przypadek wielokryterialnych wypłat graczy. W przestrzeniach wielokryterialnych wypłat rozpatruje się różne sformułowania dominacji. Podaje się oryginalną propozycję koncepcji rozwiązania typu nukleolus, uwzględniającego preferencje wszystkich graczy. Przedstawia się także idee interakcyjnej procedury wspomagającej analizę i proces mediacji, w której zaproponowana koncepcja nukleolusa służy do wyznaczania propozycji mediacyjnych.

Rozdział 8 przedstawia rodzinę gier opisujących współpracę graczy zainteresowanych pozyskaniem pewnego zestawu dóbr przez realizację wspólnego projektu. Proponuje się i analizuje procedury alokacji kosztów między graczy, wykorzystujące mechanizm

cenowy oraz różne koncepcje rozwiązań. Przedstawia się także procedurę wspomagającą analizę problemu alokacji kosztów. Problem alokacji kosztów rozpatruje się także w kolejnym rozdziale 9 w klasie tzw. gier kooperacyjnych w postaci funkcji partycji. Gry takie opisują rzeczywiste sytuacje, w których wypłaty każdej koalicji zależą nie tylko od graczy, którzy ją tworzą, ale także od struktury koalicji tworzonych przez graczy pozostałych. W pracy rozwijana jest teoria takich gier. W szczególności formułuje się koncepcje rozwiązań, takich jak rdzeń gry i zbiory stabilne. Analizuje się właściwości tych rozwiązań.

Rozdział 10 zawiera podsumowanie najważniejszych wyników uzyskanych w trakcie dotychczasowych badań i prezentowanych we wcześniejszych rozdziałach oraz propozycje kierunków dalszych badań.

Monografię kończy bibliografia zawierająca 235 pozycji literatury i indeks.

Przedstawiane w pracy wyniki były prezentowane m.in. w niżej wymienionych pracach:

- w zakresie idei wspomagania negocjacji w wielokryterialnych sytuacjach kooperacyjnych: (Fortuna, Kruś 1984, Kruś 1985, Bronisz, Kruś 1987, 1988, 1989a, 1989b, Bronisz, Kruś, Wierzbicki 1989, Kruś 1991, Kruś, Bronisz 1993, Kruś 1996, 2002b, 2004b, Wierzbicki, Kruś, Makowski 1993),

- dotyczących systemu komputerowego MCBARG i przykładów wielokryterialnych problemów targu: (Kruś, Bronisz, Łopuch 1990, Kruś, Łopuch 1989, Kruś, Łopuch, Bronisz 1989, Kruś 1992a),

- dotyczących wielokryterialnych gier koalicyjnych, gier wielopremiotowych w zastosowaniu do alokacji kosztów, gier w postaci funkcji partycji: (Kruś, Bronisz 1995, 1996, 1998, 2000, Kruś 2008, 2009).

## **Lista ważniejszych wyników**

W zakresie sytuacji kooperacyjnych modelowanych jako wielokryterialny problem targu:

- koncepcje indywidualnie niezdominowanych wypłat graczy oraz punktu względnej utopii (Definicje 4.1, 4.2),
- koncepcja uogólnionego rozwiązania Raiffy-Kalaia-Smorodinsky'ego i jego aksjomatyzacja (Twierdzenia 4.1. i 4.2),
- koncepcja uogólnionego rozwiązania leksykograficznego i jego aksjomatyzacja (Twierdzenie 4.3),
- koncepcja rozwiązania iteracyjnego (Twierdzenie 5.1. pokazujące właściwości tego rozwiązania),
- propozycja interakcyjnej procedury wspomagającej analizę i proces mediacji,
- zaprojektowanie i implementacja systemu komputerowego (MCBARG) wspomagającego analizę i proces mediacji w wielokryterialnym problemie targu, w tym algorytmizacja interakcyjnej procedury wymienionej wyżej,
- opracowanie przykładów ilustrujących wielokryterialny problem targu: współpracy gospodarstw rolnych, problemu kwaśnych deszczów.

W zakresie sytuacji kooperacyjnych modelowanych jako wielokryterialne gry koalicyjne bez wypłat ubocznych:

- sformułowanie założeń i koncepcji rozwiązań takiej gry (Definicje 7.1 - 7.4 oraz Twierdzenia 7.1 i 7.2),
- propozycja nukleolusa uwzględniającego preferencje decydentów a także zbadanie jego właściwości (Lematy 7.1 - 7.3, Twierdzenie 7.3),
- idea interakcyjnej procedury wspomagania negocjacji w sytuacjach decyzyjnych opisywanych przez wielokryterialną grę kooperacyjną.

W zakresie zastosowania gier koalicyjnych w problemach alokacji kosztów:

- sformułowanie problemu alokacji kosztów z wykorzystaniem mechanizmu cen, jako wieloprzedmiotowej gry kooperacyjnej (Definicje 8.1-8.5),
- koncepcja rozwiązania wg idei Shapley'a i analiza właściwości (Twierdzenie 8.1),
- koncepcja nukleolusa i analiza jego właściwości (Twierdzenie 8.3),
- idea iteracyjnej procedury wspomagającej analizę wielokryterialną,
- propozycje i zbadanie właściwości rozwiązań gier kooperacyjnych w postaci funkcji partycji, formułowanych przy słabszej relacji dominacji niż przyjmowane w literaturze,
- pokazanie, że nukleolus i rdzeń w takich grach mogą być wyznaczone jako analogiczne koncepcje rozwiązań odpowiednio sformułowanych gier w postaci funkcji charakterystycznej (Twierdzenia 9.2 i 9.5).





## Gry kooperacyjne w postaci funkcji partycji

Rozpatruje się problem alokacji kosztów w przypadku grupy decydentów, którzy wspólnie chcą uzyskać pewien zestaw dóbr i dzielą między siebie koszty realizacji odpowiedniego projektu lub projektów. Decydenci, traktowani dalej jako gracze, mogą tworzyć różne koalicje i realizować projekt wspólnie. Problem alokacji kosztów dotyczy ich podziału między graczy, ale także między pozyskiwane dobra. W rozdziale poprzednim, a także w pracy (Kruś, Bronisz 2000), w celu opisanie problemu, wprowadzono klasę gier kooperacyjnych w postaci funkcji charakterystycznej, nazwanych grami wieloprzedmiotowymi. Sformułowania tych gier uwzględniają mechanizm cen przyporządkowanych poszczególnym dobrom. Przedstawiono różne koncepcje rozwiązań oraz algorytm umożliwiający ich wyznaczanie. Podobnie jak w innych pracach dotyczących alokacji kosztów z zastosowaniem gier kooperacyjnych w postaci funkcji charakterystycznej (Littlechild, Thompson 1977, Young, Okada, Hashimoto 1980), Seo, Sakawa 1987), Legros 1986), przyjęto że wypłata każdej koalicji zależy tylko od graczy, którzy ją tworzą.

W praktyce występują jednak również sytuacje, w których wypłata koalicji zależy nie tylko od graczy, którzy ją tworzą, ale także

od struktury koalicji graczy pozostałych (ogólniej - od ich partycji). Jest to typowe np. w przypadku firm dzielących między siebie pewien rynek usług lub dóbr. Jeśli kilka firm decyduje się utworzyć koalicję, jej efekty będą zależeć także od pozostałych firm działających na danym rynku i od tego czy te pozostałe firmy będą działać indywidualnie czy też utworzą pewne koalicje.

W rozdziale przedstawia się wyniki aktualnie prowadzonych badań dotyczących wspomaganie decyzji w takich sytuacjach. Zakłada się, że gracze starają się uzyskać określone ilości pewnych dóbr i są gotowi pokryć związane z tym koszty. W celu uzyskania tych dóbr mogą działać niezależnie lub tworzyć koalicje. Związane z tym koszty zależą od tworzonej koalicji, ale także od struktury koalicyjnej graczy pozostałych. Kierunek prowadzonych badań obejmuje:

- sformułowanie gry w postaci funkcji partycji (ang. game in partition function form) w celu analizy problemu alokacji kosztów,
- sformułowanie i analiza koncepcji rozwiązań,
- poszukiwania gry w postaci funkcji charakterystycznej, której koncepcje rozwiązań są koincydentne z odpowiednimi koncepcjami rozwiązań gry w postaci funkcji partycji,
- wykorzystanie koncepcji rozwiązań, wyznaczonych dla gry w postaci funkcji charakterystycznej, w problemach wspomaganie analizy decyzyjnej, analogicznie jak w Rozdziale 8 i w pracy Kruś, Bronisz (2000), ale w odniesieniu do gry w postaci funkcji partycji.

Niżej przedstawia się wyniki tych badań opublikowane także w pracach (Kruś, Bronisz 1998) i (Krus, 2009). Przedstawia się sformułowanie gry kooperacyjnej w postaci funkcji partycji jako model matematyczny opisujący rozważane sytuacje decyzyjne.

Proponuje się także koncepcje rozwiązań określone na podstawie wprowadzonej relacji dominacji. Właściwości tych rozwiązań pokazuje się w postaci udowodnionych twierdzeń. Właściwości te dotyczą w szczególności relacji rozwiązań rozpatrywanej gry w postaci funkcji partycji z rozwiązaniami odpowiednio skonstruowanej gry w postaci funkcji charakterystycznej. Sposób podejścia jest analogiczny jak w pracy (Thrall i Lucas 1963). Proponowane koncepcje rozwiązań są również podobne jak pracy (Thrall i Lucas 1963), ale zostały sformułowane przy słabszej relacji dominacji. Od czasu prac Thralla i Lucasa zostało wprowadzonych kilka koncepcji rdzenia gry w postaci funkcji partycji:  $\gamma$ -core (Chander, Tulkens, 1997),  $r$ -core (Huang, Sjöström, 2003), recursive cores (Kóczy, 2007). W tej ostatniej pracy jest także przegląd różnych koncepcji rdzenia w tym również  $\alpha$ -core (Auman, Peleg, 1960).

## 9.1 Sformułowanie gry

Niech  $N = \{1, \dots, n\}$  będzie skończonym zbiorem graczy. Koalicje są podzbiorem tego zbioru.

Dla dowolnej koalicji  $C \subseteq N$  niech  $P_C = \{P_1, \dots, P_r\}$  będzie jej partycją, tzn.

$$\bigcup_{i=1}^r P_i = C, \quad \forall j P_j \neq \emptyset, \quad \forall k P_j \cap P_k = \emptyset \text{ jeśli } k \neq j, \quad (9.1)$$

i niech  $\Pi_C$  oznacza zbiór wszystkich partycji koalicji  $C$ . Dla uproszczenia notacji, przyjmujemy że  $P$  oznacza partycję koalicji pełnej  $N$ , a  $\Pi$  oznacza  $\Pi_N$ . Niech  $P_I$  będzie partycją składającą się z indywidualnych graczy, tzn.  $P_I = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ .

Dla każdej koalicji  $P_k \subseteq N$  i partycji  $P \in \Pi$ , takiej że  $P_k \in P$ , dane są funkcje opisujące koszt uzyskania dóbr wymaganych przez tę koalicję. Zakłada się, że te funkcje zależą od całkowitej ilości dóbr poszczególnych rodzajów, Funkcje to mogą zależeć od partycji pozostałych graczy. Na podstawie tych funkcji można wyznaczyć korzyści, jakie mogą odnieść gracze działając wspólnie w koalicji  $P_k$  w porównaniu z sytuacją gdyby działali indywidualnie i niezależnie.

### Definicja 9.1

**Gra kooperacyjna w postaci funkcji partycji** jest zdefiniowana przez parę  $(N, F)$ , gdzie  $N$  jest zbiorem graczy,  $F$  jest funkcją, która każdej partycji  $P \in \Pi$ ,  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$  przyporządkowuje  $r$ -wymiarowy wektor liczb rzeczywistych  $F_P = (F_P(P_1), \dots, F_P(P_r))$ .  $\square$

$F_P(P_k)$  dla  $k = 1, 2, \dots, r$  opisuje korzyści jakie gracze mogą odnieść działając wspólnie w koalicji  $P_k$  w porównaniu z działaniami indywidualnymi. Zauważmy, że  $F_P(P_k)$  zależy od partycji  $P$ , tzn. także od struktury koalicyjnej graczy pozostałych.

Dla każdej koalicji  $C \subseteq N$  i każdej partycji  $P_C \in \Pi_C$  formułujemy następujące funkcje:

$$v(C) = \min_{\{P \in \Pi: C \in P\}} F_P(C), \quad v(\emptyset) = 0, \quad (9.2)$$

$$u(P_C) = \min_{\{P \in \Pi: P_C \subset P\}} \sum_{T \in P_C} F_P(T), \quad (9.3)$$

$$\bar{v}(C) = \max_{\{P_C \in \Pi_C\}} u(P_C), \quad \bar{v}(\emptyset) = 0., \quad (9.4)$$

gdzie

$v(C)$  oznacza wartość wypłaty koalicji  $C$ , która jest gwarantowana niezależnie od zachowań graczy,

$u(P_C)$  oznacza gwarantowaną wypłatę graczy zorganizowanych

w postaci  $P_C$ , niezależnie od zachowań graczy pozostałych,  $\bar{v}(C)$  oznacza maksymalną wypłatę gwarantowaną graczom koalicji  $C$  niezależnie od zachowań pozostałych graczy.

### Przykład 1.

W celu zilustrowania tych funkcji rozpatrzmy następującą grę czterech graczy. Przyjmujemy, że funkcje  $F_P(P_k)$  mają postać:

dla każdego różnego  $i, j, k, m \in N$

(i)  $F_P(\{i\}) = a$ , dla dowolnej partycji  $P$ , takiej że  $\{i\} \in P$

(ii)  $F_P(\{i, j\}) = b$ , dla  $P = \{\{i, j\}, \{k\}, \{m\}\}$ ,

(iii)  $F_P(\{i, j\}) = c$ , dla  $P = \{\{i, j\}, \{k, m\}\}$ ,

(iv)  $F_P(\{i, j, k\}) = d$  dla  $P = \{\{i, j, k\}, \{m\}\}$ ,

(v)  $F_P(N) = e$ , for  $P = \{N\}$ .

W tym przypadku, dla dowolnej niepustej koalicji  $C \subseteq N$ , funkcja  $v(C)$  przyjmie wartości:

$$v(\{i\}) = a,$$

$$v(\{i, j\}) = \min(b, c),$$

$$v(\{i, j, k\}) = d,$$

$$v(N) = e$$

z kolei wartości funkcji  $\bar{v}(C)$  będą następujące:

$$\bar{v}(\{i\}) = a,$$

$$\bar{v}(\{i, j\}) = \max(\min(b, c), 2a),$$

$$\bar{v}(\{i, j, k\}) = \max(d, b + a, 3a),$$

$$\bar{v}(N) = \max(e, d + a, 2c, b + 2a, 4a).$$

◇

Można pokazać, że dla dowolnej gry w postaci funkcji partycji  $(N, F)$  zachodzą następujące relacje:

$$\bar{v}(\{i\}) = v(\{i\}) \quad \text{dla każdego } i \in N, \quad (9.5)$$

$$v(C) \leq \bar{v}(C) \quad \text{dla każdego } C \subset N, \quad (9.6)$$

$$u(P_C) + u(P_T) \leq u(P_C \cup P_T) \quad \text{dla każdego } P_C \in \Pi_C, P_T \in \Pi_T, \\ \text{gdzie } C, T \subset N \text{ takie, że } C \cap T = \emptyset, \quad (9.7)$$

$$\bar{v}(C) + \bar{v}(T) \leq \bar{v}(C \cup T) \quad \text{dla każdego } C, T \subset N, \\ \text{takiego że } C \cap T = \emptyset. \quad (9.8)$$

## 9.2 Koncepcje rozwiązań

### Definicja 9.2

Wektor wypłat  $x = (x_1, \dots, x_n)$  jest nazywany **imputacją** jeśli spełnia warunek indywidualnej racjonalności:

$$x_i \geq \bar{v}(\{i\}) \quad \text{dla każdego } i \in N, \quad (9.9)$$

oraz warunek realizowalności:

$$\sum_{i \in N} x_i = \sum_{C \in P} F_P(C) \quad \text{dla pewnego } P \in \Pi. \quad (9.10)$$

□

Indywidualna racjonalność oznacza, że żaden gracz w koalicji nie zgodzi się na wypłatę gorszą niż może osiągnąć działając indywidualnie. Realizowalność oznacza, że istnieje partycja, która może zrealizować tę wypłatę. Niech  $R$  oznacza zbiór wszystkich imputacji, a  $R^P$  zbiór imputacji realizowalnych przez partycję  $P \in \Pi$ .

### Definicja 9.3

Niech  $C$  będzie niepustym podzbiorem  $N$ , a  $x, y \in R$ . Mówimy, że  $x$  **dominuje  $y$  via  $C$**  (oznaczone:  $x \text{ Dom}_C y$ ) jeśli

$$x_i > y_i \quad \text{dla każdego } i \in C, \quad (9.11)$$

i istnieje  $P_C \in \Pi_C$  takie, że

$$\sum_{i \in C} x_i \leq u(P_C), \quad (9.12)$$

$$\sum_{i \in N} x_i = \sum_{T \in P} F_P(T) \quad (9.13)$$

dla pewnej partycji  $P \in \Pi$  takiej, że  $P_C \subset P$ .

□

Pierwszy warunek w tej definicji oznacza, że każdy gracz  $C$  preferuje wypłatę  $x$  w porównaniu z wypłatą  $y$ , drugi - że gracze w  $C$  mogą uformować taką partycję  $P_C \in \Pi_C$ , która pozwoli zrealizować wypłatę  $x_i$ , dla  $i \in C$ , trzeci - że wypłata  $x$  może być realizowana przez pewną partycję  $P$ .

Powiemy, że  $x$  **dominuje**  $y$  (oznaczając  $x \text{ Dom } y$ ) jeśli  $x \text{ Dom}_C y$  dla pewnego zbioru  $C \subset N$ . Relacja  $\text{Dom}$  nie jest przechodnia ani antysymetryczna.

Niech  $X$  będzie podzbiorem  $R$ . Wtedy

$$\text{Dom}_C X = \{y \in R : x \text{ Dom}_C y \text{ dla pewnego } x \in X\},$$

$$\text{Dom } X = \{y \in R : x \text{ Dom } y \text{ dla pewnego } x \in X\}.$$

#### Definicja 9.4

Zbiór imputacji  $K$  jest **zbiorem stabilnym** (ang. stable set) jeśli

$$K \cap \text{Dom } K = \emptyset, \quad (9.14)$$

$$K \cup \text{Dom } K = R. \quad (9.15)$$

□



### Uwagi dotyczące definicji zbioru stabilnego

Pierwszy warunek, zwany warunkiem wewnętrznej stabilności, oznacza, że jeśli imputacje  $x$  i  $y$  należą do  $K$ , wtedy żadna z nich nie dominuje drugiej,

drugi - warunek zewnętrznej stabilności, stwierdza, że jeśli imputacja  $z$  nie należy do  $K$  wtedy istnieje imputacja  $x$  w  $K$ , która dominuje  $z$ .

Zbiór stabilny jest zdefiniowany na podstawie idei, że zamiast jednej imputacji satysfakcjonującej każdą koalicję, istnieje zbiór imputacji takich, że jeśli weźmiemy dla pewnej koalicji dowolną imputację spoza tego zbioru, to w tym zbiorze istnieje imputacja korzystniejsza dla tej koalicji, tak że koalicja ta nie byłaby zainteresowana pozyskaniem imputacji z zewnątrz zbioru. Nie każdy gracz byłby jednak zadowolony z tej nowej imputacji wewnętrznej i pewien podzbiór graczy mógłby chcieć przeforsować zmianę na inną imputację spoza tego zbioru. Ta nowa imputacja jest jednak znowu zdominowana przez jakąś imputację ze zbioru. W rezultacie proces przetargowy ogranicza się do rozpatrywanego zbioru imputacji. Zatem, cały ten zbiór może być rozpatrywany jako rozwiązanie. Wszystkie imputacje ze zbioru stabilnego są równie ważne. Żadna z nich nie dominuje innej w tym zbiorze.

### Definicja 9.5

Zbiór imputacji *Core* jest **rdzeniem** (ang. core) jeśli

$$Core = R \setminus Dom R. \quad (9.16)$$

□

Rdzeń jest zbiorem niezdominowanych imputacji w  $R$ , tzn. dla dowolnej partycji  $P$  nie istnieje koalicja  $C \in P$ , która daje swoim członkom wypłaty lepsze niż w rdzeniu. Oczywiście, rdzeń jest zawarty w każdym zbiorze stabilnym.

Definicje zbioru stabilnego i rdzenia są podane w podobny sposób jak w pracach (Thrall i Lucas 1963), (Lucas 1965), ale przy słabszej relacji dominacji. Thrall i Lucas zakładali, że dana koalicja  $C \in P$  nie może być podzielona. W proponowanym tutaj podejściu, przyjmuje się, że jeśli podział koalicji  $C$  daje lepsze rezultaty dla tej koalicji, to można ją podzielić.

### 9.3 Właściwości rozwiązań

Dla każdej partycji  $P \in \Pi$  w grze  $(N, F)$  niech

$$\|P\| = \sum_{C \in P} F_P(C). \quad (9.17)$$

#### Definicja 9.6

Dowolna imputacja  $x$  jest **grupowo racjonalna** jeśli

$$\sum_{i \in N} x_i = \max_{\{P \in \Pi\}} \|P\|. \quad (9.18)$$

□

Niech  $R^{\max}$  oznacza zbiór wszystkich imputacji grupowo racjonalnych w grze  $(N, F)$ .

Jeśli gracze wybiorą imputację  $x \in R^{\max}$  jako wypłatę gry, to znaczy, że podzielili maksymalny efekt tej gry. Można pokazać, że imputacje należące do koncepcji rozwiązań podanych wyżej spełniają tę własność.

#### Twierdzenie 9.1

*Niech Core oznacza rdzeń gry  $(N, F)$ . Rdzeń Core jest podzbiorem rdzenia zaproponowanego w pracy (Thrall i Lucas 1963).*

*Każda imputacja  $x \in \text{Core}$  jest grupowo racjonalna.* ■

### Dowód

Niech  $x \in Core$  i  $x \notin R^{\max}$ . Wtedy  $\sum_{i \in N} x_i = \max_{\{P \in \Pi\}} \|P\| - M$ , gdzie  $M > 0$ . Jeśli  $y \in R^{\max}$  jest określone przez  $y_i = x_i + M/n$  dla każdego  $i \in N$  to  $y \in Dom_N x$ . Sprzeczność.

Jeśli  $x \in dom_C y$  dla pewnego  $C \subset N$  zgodnie z definicją tej domnacji podanej przez Thrall'a i Lucas'a (1963), wtedy  $x \in Dom_C y$ . Zatem  $Core = R \setminus Dom R \subset R \setminus dom R$ .  $\diamond$

Zgodnie z twierdzeniem, podany tutaj rdzeń jest podzbiorem rdzenia zaproponowanego w pracy (Thrall i Lucas, 1963). Może się zdarzyć, że rdzeń  $Core$  jest pusty, chociaż rdzeń proponowany w pracy (Thrall and Lucas 1963) jest niepusty.

Zgodnie z definicją funkcji  $\bar{v}$  (równanie 9.4) tzn. z warunku  $\bar{v}(\emptyset) = 0$  i z warunku superaddytywności (9.8) wynika, że para  $(N, \bar{v})$  jest dobrze określoną grą kooperacyjną w postaci funkcji charakterystycznej z wypłatami ubocznymi.

Twierdzenie drugie pokazuje relacje między rdzeniami gier w formie funkcji partycji i w formie funkcji charakterystycznej.

### Twierdzenie 9.2

*Rdzeń gry  $(N, F)$  jest koincydentny z rdzeniem gry kooperacyjnej  $(N, \bar{v})$  w postaci funkcji charakterystycznej, tzn. spełnia warunki:*

$$\sum_{i \in C} x_i \geq \bar{v}(C) \quad \text{dla każdego } C \subset N, \quad (9.19)$$

$$\sum_{i \in N} x_i = \bar{v}(N). \quad (9.20)$$

■

### Dowód

Niech  $CR$  oznacza rdzeń gry  $(N, \bar{v})$ . Niech  $x \in Core$  i  $x \notin CR$ . Z (9.5) wynika, że  $x_i = \bar{v}(\{i\})$ , a z twierdzenia 9.1 mamy, że  $\sum_{i \in N} x_i = \bar{v}(N)$ , zatem  $x$  jest imputacją w grze  $(N, \bar{v})$ . Ponieważ  $x \notin CR$ , to istnieje imputacja  $y$  i koalicja  $C$  w grze  $(N, \bar{v})$ ,

taka że  $y_i > x_i$  dla każdego  $i \in C$  i  $\sum_{i \in C} y_i \leq \bar{v}(C)$ . Niech  $P_C$  będzie partycją zbioru  $C$ , taką że  $\bar{v}(C) = u(P_C)$ . Rozpatrzmy partycję zbioru  $N$ , taką że  $P = P_C \cup \{\{i_1\}, \{i_2\}, \dots, \{i_{n-s}\}\}$ , gdzie  $s$  oznacza liczbę graczy w  $C$ ,  $i_j \in N \setminus C$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-s$  i imputację  $z$  w grze  $(N, F)$  określoną przez

$$z_i = \begin{cases} y_i & \text{dla każdego } i \in C, \\ F_P(\{i\}) + M/(n-s) & \text{dla każdego } i \in N \setminus C, \end{cases}$$

gdzie  $M = \sum_{T \in P_C} F_P(T) - \sum_{i \in C} y_i \geq 0$ .

Ponieważ  $z \in \text{Dom}_C x$ , to  $x \notin \text{Core}$ . Sprzeczność.

Niech  $x \in CR$  i  $x \notin \text{Core}$ .  $x$  jest imputacją w grze  $(N, F)$ . Ponieważ  $x \notin \text{Core}$ , to istnieje koalicja  $C \subset N$ , partycja  $P_C \in \Pi_C$  i imputacja  $y$  w grze  $(N, F)$ , taka że  $y_i > x_i$  dla każdego  $i \in C$ ,  $\sum_{i \in C} y_i \leq u(P_C)$  i  $\sum_{i \in N} y_i = \sum_{T \in P} F_P(T)$  dla pewnej partycji  $P \in \Pi$ ,  $P_C \subset P$ .

Rozważmy imputację  $z$  w grze  $\bar{v}$  określoną przez

$$z_i = \begin{cases} y_i & \text{dla każdego } i \in C, \\ y_i + M/(n-s) & \text{dla każdego } i \in N \setminus C \end{cases}$$

gdzie  $M = \bar{v}(N) - \sum_{T \in P} F_P(T) \geq 0$ .

Wynika z tego, że  $z$  dominuje  $x$  via  $C$  w grze  $(N, \bar{v})$ , zatem  $x \notin CR$ .

Sprzeczność. Co dowodzi twierdzenia.  $\diamond$

Następujące twierdzenia pokazują, że zbiory stabilne są określone w racjonalny sposób.

### Twierdzenie 9.3

Jeśli  $K$  jest dowolnym zbiorem stabilnym gry  $(N, F)$ , to każda imputacja  $x \in K$  jest grupowo racjonalna.  $\blacksquare$

### Dowód

Niech  $x \in R \setminus R^{\max}$  i  $y$  będą imputacjami określonymi tak,

jak w dowodzie twierdzenia 9.1. Mamy więc, że  $y \text{ Dom}_N x$ . Jeśli  $y \in K$  to  $x \in \text{Dom } K$ . Jeśli  $y \notin K$  to  $y \in \text{Dom}_C K$  dla pewnej koalicji  $C \subset N$ , istnieje zatem imputacja  $z \in K$  taka, że  $z \text{ Dom}_C y$ . Można jednak łatwo sprawdzić, że jeśli  $z \text{ Dom}_C y$ ,  $y \text{ Dom}_C y$  i  $y \text{ Dom}_N x$  to  $z \text{ Dom}_C x$ . Zatem  $x \in \text{Dom } K$ . Co dowodzi twierdzenia.  $\diamond$

Z twierdzeń 9.1 i 9.3 wynika, że rozpatrując rdzeń i zbiory stabilne, można się ograniczyć, bez straty ogólności, do rozważań imputacji grupowo racjonalnych. Możliwe jest, że dla gry  $(N, F)$  nie ma zbioru stabilnego, jest jeden, lub jest wiele. Można pokazać następujące twierdzenie:

#### Twierdzenie 9.4

*Dla  $n$ -osobowej gry z partycją  $\{N\}$ , takiej że  $\|\{N\}\| > \|P\|$  dla każdego  $P \in \Pi$ ,  $P \neq \{N\}$ , istnieje unikalny zbiór stabilny*

$$K = R^{\{N\}} = R^{\max}.$$

■

#### Dowód

Niech  $x, y \in R^{\max}$  i niech  $x \text{ Dom } y$ . Dominacja może być realizowana tylko przez partycję  $\{N\}$ , więc  $x_i > y_i$  dla każdego  $i \in N$ . Wynika z tego, że  $\sum_{i \in N} x_i > \sum_{i \in N} y_i$ . Sprzeczność.

Niech  $x \in R \setminus R^{\max}$  i niech  $y$  będzie imputacją zdefiniowaną tak, jak w dowodzie twierdzenia 9.1. Mamy  $y \text{ Dom}_N x$ , więc  $x \in \text{Dom } R^{\max}$ . Oznacza to, że  $R^{\max}$  jest rozwiązaniem. Rozwiązanie to jest jednoznaczne, co wynika z twierdzenia 9.3.  $\diamond$

Nie ma problemu ze znalezieniem rozwiązania dla  $n$ -osobowych gier, w których wypłata dla partycji  $\{N\}$  jest większa od sumy

wypłat każdej innej partycji. Takie jednoznaczne rozwiązanie jest tożsame z rozwiązaniem w pracy (Thrall and Lucas 1963).

Następujące twierdzenie pokazuje relacje między zbiorami stabilnymi gier w postaci funkcji partycji i w postaci funkcji charakterystycznej.

### Twierdzenie 9.5

Jeśli  $\hat{P} = \{\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_r\}$  jest partycją zbioru  $N$  taką, że  $\|\hat{P}\| > \|P\|$  dla każdego  $P \in \Pi$ ,  $P \neq \hat{P}$  to gra  $(N, F)$  ma takie same zbiory stabilne, jak gra w postaci funkcji charakterystycznej  $(N, \hat{v})$  określona przez

$$\begin{aligned} \hat{v}(C) &= \bar{v}(T) + \sum_{i \in C \setminus T} \bar{v}(\{i\}) \\ &\text{dla każdego } C \subset N, \quad \hat{v}(\emptyset) = 0, \end{aligned} \tag{9.21}$$

gdzie:  $T \subset C$ ,  $T = \bigcup_{i=1}^r \{\hat{P}_i : \hat{P}_i \subset C\}$ .

■

### Dowód

Na podstawie warunku addytywności (9.8) łatwo sprawdzić, że gra  $(N, \hat{v})$  jest dobrze określona.  $x$  jest imputacją w grze  $(N, \hat{v})$  jeśli  $x_i \geq \hat{v}(\{i\}) = v(\{i\})$  i  $\sum_{i \in N} x_i = \hat{v}(N) = \|\hat{P}\|$ . W takim przypadku zbiór imputacji w grze  $(N, \hat{v})$  jest równy zbiorowi  $R^{\max}$ . Ponadto z twierdzenia 9.3 wynika, że imputacje, które nie należą do  $R^{\max}$ , nie mają znaczenia w grze  $(N, F)$ , możemy więc rozpatrywać tylko zbiór  $R^{\max}$ .

Niech  $x, y \in R^{\max}$  i niech  $y$  dominuje  $x$  w grze  $(N, \hat{v})$ . Istnieje zatem koalicja  $C \subset N$ , taka że  $y_i > x_i$  dla każdego  $i \in C$  i  $\sum_{i \in C} y_i \leq \hat{v}(C)$ . Wynika z tego, że  $y_i > x_i$  dla każdego  $i \in T \subset C$  i

$\sum_{i \in T} y_i \leq \bar{v}(T) + \sum_{i \in C \setminus T} (v(\{i\}) - y_i) \leq \bar{v}(T)$ , a zatem  $y \text{ Dom } x$ .

Niech  $x, y \in R^{\max}$  i niech  $y \text{ Dom } x$ . Wtedy istnieje koalicja  $C = T$ ,

taka że  $y_i > x_i$  dla każdego  $i \in C$  i  $\sum_{i \in C} y_i \leq \hat{v}(C)$ , a zatem  $y$  dominuje  $x$  w grze  $(N, \hat{v})$ . Co dowodzi twierdzenia.  $\diamond$

## 9.4 Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono sformułowanie gry kooperacyjnej w postaci funkcji partycji, umożliwiającą analizę problemu alokacji kosztów. Gra ta opisuje rzeczywiste sytuacje, w których wypłata każdej z koalicji zależy nie tylko od graczy, którzy ją tworzą, ale także od struktury koalicji tworzonych przez graczy pozostałych. Formułując odpowiednią relację dominacji, zaproponowano koncepcje rozwiązań, takie jak zbiory stabilne i rdzeń gry. Dokonano analizy właściwości tych koncepcji rozwiązań. Koncepcje rozwiązań są podobne do koncepcji zaproponowanych w pracy (Thrall i Lucas 1963), ale sformułowane dla słabszej relacji dominacji, która wydaje się być bardziej adekwatna do sytuacji rzeczywistych. Rozwijane podejście jest podobne do podejścia w pracach (Kóczy 2007, 2008).

Pokazano relacje między rozwiązaniami gry kooperacyjnej w postaci funkcji partycji z odpowiednio formułowanymi grami w postaci funkcji charakterystycznej, dotyczące zbiorów stabilnych i rdzenia gry. Pokazano w szczególności (Twierdzenie 9.2), że rdzeń gry w postaci funkcji partycji jest koincydentny z rdzeniem odpowiednio zdefiniowanej gry w postaci funkcji charakterystycznej. Jest to ważny wynik teoretyczny z punktu widzenia konstrukcji systemów wspomagania decyzji. Ogólna idea wspomagania decyzji i konstrukcji systemów komputerowych w sytuacjach kooperacyjnych była rozważana w poprzednich rozdziałach, a wcześniej między innymi w pracach (Wierzbicki, Kruś, Makowski 1993), (Kruś

1996, 2004, 2008). Na podstawie wyników omówionych w tym rozdziale można sformułować odpowiednią grę w postaci funkcji charakterystycznej, a następnie wyznaczyć rdzeń gry. Rdzeń ten może być przedstawiony graczom, jako zbiór określający ramy ich negocjacji. Można wówczas zastosować podejście zaproponowane w pracy (Kruś, Bronisz 2000) i prezentowane w rozdziale 8. Można wyznaczać różne rodzaje nukleolusa rozwiązując zestaw problemów programowania liniowego, a następnie przedstawiać je graczom jako propozycje mediacyjne.





## Uwagi końcowe

W pracy rozpatruje się sytuacje decyzyjne, w których decydenci mogą odnosić korzyści w wyniku wzajemnej współpracy. Korzyści te określane są w porównaniu z sytuacją, gdyby dany decydent nie przystąpił do współpracy, zgodnie z koncepcją BATNA. Każdy decydent podejmuje niezależne decyzje oraz ma swój niezależny wektor kryteriów określający wyniki tych decyzji i swoje preferencje wyboru. Wartości kryteriów danego decydenta zależą od decyzji wszystkich decydentów.

Zakłada się, że dany jest model matematyczny pozwalający wyznaczyć wartości kryteriów każdego decydenta w zależności od decyzji wszystkich decydentów. Model nie opisuje preferencji decydentów. Nie zakłada się istnienia określonych funkcji użyteczności decydentów. Zaproponowano metody wspomagające analizę decyzyjną w wielokryterialnej przestrzeni wypłat stanowiącej iloczyn kartezjański przestrzeni kryteriów poszczególnych decydentów oraz procedury umożliwiające znalezienie zgodnych decyzji. Przedstawiono ogólny opis matematyczny rozważanych sytuacji decyzyjnych i na tej podstawie sformułowano model wielokryterialnego problemu targu (rozdział 4) rozpatrywany dalej w pracy, a także sformułowano model wielokryterialnej gry kooperacyjnej,

w której uwzględnia się wpływ możliwych koalicji na rozwiązania i wypłaty graczy.

W przypadku wielkryterialnego problemu targu zaproponowano uogólnione rozwiązanie Raiffy-Kalaia-Smorodinsky'ego (R-K-S) oraz jego aksjomatyczną charakteryzację. Założono, że każdy gracz ma możliwość analizy niezdominowanych wypłat w swojej przestrzeni kryteriów. Na podstawie wskazanych przez graczy wypłat, wybranych zgodnie z ich preferencjami, konstruuje się tzw. punkt względnej utopii. Punkt ten uwzględniający preferencje wszystkich graczy jest podstawą konstrukcji proponowanego rozwiązania. Rozwiązanie to, w przypadku jednokryterialnych wypłat, sprowadza się do rozwiązania R-K-S. Nie jest natomiast prostym rozszerzeniem klasycznego rozwiązania R-K-S konstruowanym z wykorzystaniem punktu idealnego w przestrzeni wielokryterialnych wypłat. Pokazano, że w szczególnych przypadkach rozwiązanie to może być tylko słabo niezdominowane w zbiorze wypłat. Kolejna propozycja dotyczy, uogólnionego na przypadek wielokryterialnych wypłat, rozwiązania Imai, wykorzystującego porządek leksykograficzny. Podano idee algorytmu umożliwiającego poprawę słabo niezdominowanych rozwiązań R-K-S do rozwiązań niezdominowanych. Przedstawiono również konstrukcje umożliwiające uogólnienie na przypadek wielokryterialnych wypłat klasycznych rozwiązania Nasha i Rozwiązania Egalitarnego. Przeprowadzono analizę własności tych rozwiązań.

Przedstawiane w pracach (Kruś, Bronisz 1993, Kruś 2002) sformułowania wielokryterialnego problemu targu i koncepcje rozwiązań były następnie przedmiotem badań innych autorów np. (Hinojosa i inni 2005), (Marmol i inni 2007).

Koncepcje uogólnionych rozwiązań R-K-S oraz Imai zostały zastosowane w konstrukcji interakcyjnych procedur wspomagan

analizy decyzyjnej decydentów i wyznaczania propozycji mediacyjnych. Wielostronna analiza decyzyjna poprzedzona jest etapem analizy jednostronnej, w trakcie której każdy decydent niezależnie bada zbiór swoich niezdominowanych wypłat w swojej przestrzeni kryteriów, wykorzystując podejście punktu referencyjnego. Wskazane przez każdego decydenta wypłaty, wybrane zgodnie z jego preferencjami, są podstawą wyznaczenia propozycji mediacyjnej. Propozycja ta uwzględnia preferencje wszystkich decydentów i jest przedmiotem analizy wielostronnej. W kolejnych rundach powtarzane są oba etapy analizy. Sformułowano w tym celu koncepcję rozwiązania iteracyjnego i pokazano jego zbieżność do rozwiązania Pareto optymalnego.

Przedstawiono koncepcje ogólnej konstrukcji komputerowych systemów wspomaganie decyzji w rozpatrywanych sytuacjach przetargowych. Procedura wykorzystująca rozwiązanie iteracyjne została zaimplementowana w systemie komputerowym MCBARG. Zamieszczono dwa przykłady ilustrujące wielokryterialny problem targu: przykład dotyczący zagadnienia kwaśnych deszczów oraz przykład dotyczący współpracy gospodarstw rolnych. Przykłady te zostały wprowadzone do systemu i pozwalają prześledzić jego działanie.

W rozdziale 7 rozpatrzono sytuacje kooperacyjne opisywane przez modele wielokryterialnych gier koalicyjnych bez wypłat ubocznych. Podano sformułowanie matematyczne takiej gry, a następnie zbadano jej własności i sformułowano koncepcje rozwiązań takie jak rdzeń i nukleolus gry. Zaproponowano oryginalny sposób określania funkcji nadwyżki uwzględniającej preferencje graczy oraz generowaną przez tę funkcję postać nukleolusa. Nucleolus ten, w przypadku klasycznych gier targu, sprowadza się do koncepcji podanej przez Schmeidlera (1969), natomiast w przypadku gier

targu sprowadza się do uogólnionego rozwiązania Raiffy-Kalaia-Smorodinsky'ego podanego w pracy (Kruś, Bronisz 1993) i rozpatrywanego w pracy (Kruś 2002) oraz omówionego w rozdziale 4. Podano również ideę iteracyjnej procedury wspomagającej analizę i wyznaczenie rozwiązania mediacyjnego. Przedstawiane problemy były wcześniej przedmiotem prac (Kruś, Bronisz 1995), (Kruś 2008). Podane propozycje korespondują z ideą zastosowania punktów referencyjnych do wyznaczania propozycji mediacyjnych w grach koalicyjnych przedstawioną w pracy (Wierzbiński 2005).

W rozdziale 8 rozpatrzono problem decyzyjny, w którym podmioty decyzyjne negocjują realizację wspólnego lub wspólnych przedsięwzięć w celu pozyskania wiązki dóbr. Mogą działać indywidualnie lub tworzyć koalicje. Problem dotyczy podziału pozyskanej wiązki dóbr i udziału w kosztach przedsięwzięć. Zaproponowano model rodziny gier kooperacyjnych opisującej ten problem alokacji kosztów z uwzględnieniem mechanizmu cenowego i wypłat ubocznych. Zagadnienie to przedstawiono na podstawie wcześniejszej pracy (Kruś, Bronisz 2000). Zbadano różne koncepcje rozwiązań tych gier. Zaimplementowano algorytm wyznaczania różnych koncepcji nukleolusa traktowanego jako podstawę do wyznaczania propozycji mediacyjnych. Przedstawiono przykład numeryczny ilustrujący proponowane analizy. Zaproponowano również procedurę wspomagającą analizę wielokryterialną i proces mediacji. Problem alokacji i kosztów jest również rozpatrywany w sytuacji, gdy wypłata danej koalicji zależy nie tylko od graczy, którzy ją tworzą, ale także od struktury koalicyjnej graczy pozostałych (rozdział 9). Sytuację taką opisano jako grę kooperacyjną w postaci funkcji partycji. Uzyskane wyniki dotyczą koncepcji rozwiązań w tych grach i ich analizy. Istotne jest w szczególności pokazanie koincydencji rdzenia takiej gry z rdzeniem odpowiednio skonstruowanej gry w postaci funkcji charakterystycznej. Rdzeń

taki określa ramy, w których decydenci mogą prowadzić negocjacje. Można również wtedy zastosować podejście prezentowane w rozdziale 8. Nowe zagadnienia badań w tym kierunku mogą dotyczyć koncepcji rdzeni optymistycznych i pesymistycznych rozpatrywanych w pracach Koczy'ego (2007, 2008).

Uzyskane wyniki teoretyczne mogą mieć zastosowanie nie tylko w omawianym problemie kooperacji, opisywanym jako modele targu lub modele gier kooperacyjnych z wektorowymi wypłatami graczy, ale także w szerszej klasie zagadnień dotyczących także sytuacji niekooperacyjnych. Przykładowo, algorytm interakcyjnej procedury mediacyjnej, wykorzystującej idee rozwiązania iteracyjnego oraz metodę punktu referencyjnego i funkcji osiągnięcia, został zastosowany dla przypadku wielokryterialnej, niekooperacyjnej gry dynamicznej dotyczącej tzw. „wojny rybnej” (prace magisterskie: Cichoń (1989), Kaniewski (1990)), w eksperymentalnym systemie komputerowym. Wielokryterialne rozwiązania w grach niekooperacyjnych były rozpatrywane między innymi w pracach (Wierzbicki 1990, Kruś, Bronisz 1994).

Równolegle z badaniami, których wyniki przedstawia się w tej pracy, prowadzonych z zastosowaniem analizy wielokryterialnej i podejścia punktu referencyjnego, prowadzono prace z zastosowaniem idei funkcji użyteczności. Wykorzystywano koncepcje funkcji użyteczności R. Kulikowskiego (1998, 2002, 2003) inspirowane pracami Savage (1954), Tverskiego i Kahnemana (Tversky 1967, Tversky, Kahneman 1981). Uzyskane wyniki (Kruś 2002a, 2004a), (Kulikowski, Kruś 2003) dotyczą między innymi konstrukcji systemów komputerowych wspomagania analizy decyzyjnej, analizy wspólnych przedsięwzięć innowacyjnych, analizy problemu kooperacji na przykładzie szkoły wyższej. W przypadku stosowania koncepcji funkcji użyteczności decydentów, szczególnie istotny jest problem

identyfikacji jej postaci na podstawie interakcji z decydentami. Interesujące ze względu na zastosowania w praktyce i jako przedmiot dalszych badań są procedury budowy modelu preferencji decydentów prezentowane w pracach (Greco, Mousseau, Słowiński 2008), (Figueira, Greco, Mousseau, Słowiński 2008), oraz zastosowanie teorii zbiorów przybliżonych (Greco, Matarazzo, Słowiński 2001, 2008).

Bieżące i planowane badania dotyczą również zastosowania metod proponowanych w pracy do analizy motywacyjnie zgodnych wielokryterialnych mechanizmów rynkowych z wykorzystaniem systemów wieloagentowych. Zagadnienie zgodności motywacji w mechanizmach rynkowych rozwijane jest w pracach E. Toczyłowskiego (por. Toczyłowski 2003, 2009). Dotyczy ono badania i konstrukcji takich mechanizmów rynkowych, w których harmonizowane są interesy uczestników tak, że występowałaby zgodność ich motywacji i uczestnicy ci byłoby skłonni do przekazywania niezafałszowanych informacji, umożliwiającą efektywne funkcjonowanie danego systemu. W pracy (Kruś, Skorupiński, Toczyłowski 2010) zagadnienie to jest badane jest na przykładzie problemu producenta i jego klientów.

Przedstawiane w tej pracy metody są zgodne z ideami dotyczącymi zaufania i uczciwości w systemach rozproszonych (A. Wierzbicki 2010), stanowiącymi kolejny interesujący kierunek dalszych badań.

---

## Bibliografia

- Alcamo J., Shaw R., Hordijk L. (1990) The RAINS Model of Acidification, Science and Strategies in Europe. Kluwer Ac. Publ., Dordrecht.
- Ameliańczyk, A. (1979) Multicriterial optimization of international economic cooperation control. Prace Naukowe ICT Polit. Wrocław. Nr 39.
- Aumann, R. J. (1961) The Core of Cooperative Games without Side Payments. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 98, 539-552.
- Aumann, R. J. (1967) A Survey of Games without Sidepayments. In: *Essays in Mathematical Economics*, M. Shubik, ed., Princeton University Press, 3-27.
- Aumann, R.J., Maschler, M. (1964) The Bargaining Set for Cooperative Games. In: *Advances in Game Theory* (M. Dresher, L. S. Shapley and A. W. Tucker, eds.), *Annals of Mathematics Studies*, No. 52, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.



- Auman, R.J., Peleg, B. (1960) Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments, *Bull. of the American Mathematical Society*. 66, 173-179.
- Axelrod R., (1985), *The Evolution of Cooperation*. Basic Books, New York.
- Barclay S., Peterson C (1976) Multi-attribute Models for Negotiations. Technical Report 76-1, Decisions and Designs, Inc. McLean, VA.
- Bednarczuk E. (2005) Parametryczne problemy optymalizacji wielokryterialnej, warunki stabilności rozwiązań. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT. Warszawa.
- Bednarczuk E. (2006) Stability analysis for parametric vector optimization problems. *Dissertationes Mathematicae*. Warszawa.
- Benayoun R., de Montgolfier J., Laritchev O. (1971) Linear programming with multiple objective functions: Step Method (STEM). *Mathematical Programming*, 1, 366-375.
- Bergstresser, K., P.L. Yu (1977) Domination Structures and Multicriteria Problems in N-person Games. *Theory and Decision*, Vol. 8, 5-48.
- Bergman L., H. Cesar, G. Klaassen (1990) A Scheme for Sharing the Costs of Reducing Sulfur Emissions in Europe. WP-90-005.IIASA, Laxenburg, Austria.
- Billera L.,J., Heath D. C. (1982) Allocation of Shared Costs: A Set of Axioms Yielding a Unique Procedure, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 7, No. 1, 32-39.

- Blass A., Raiffa H. (1986) Copmuter Program for Investigating the Efficient Solutions of Two-party, multiple-issue Negotiations, Unpublished Manuscript, Harvard University.
- Bouyssou D., Marchant T., Pirlot M., Tsoukias A., Vincke P. (2006) Evaluation and Decision Models with Multiple Criteria. Springer.
- Branke, J., Deb, K., Miettinen, K., Słowiński, R. (Eds.) (2008) Multiobjective Optimization, LNCS 5252, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Bronisz P., L. Krus (1986a), Interactive System Aiding Decision Making in Multiobjective Cooperative Games. Mathematical Background, *Syst. Anal. Model. Simul.*, vol.3, 387-394.
- Bronisz P., L. Krus (1986b) Supporting of Negotiation in Bargaining Problem with Multiple Payoffs. W: Proceedings of the 1986 IFAC Workshop on Modeling, Decision and Game with Application to Social Phenomena, Vol II, Beijing, China, 496-502.
- Bronisz P., L. Kruś (1987) A Mathematical Basis for System Supporting Multicriteria Bargaining, *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, vol. 4, Warsaw, Poland, 331-337.
- Bronisz P., L. Kruś, B. Lopuch (1987) An Experimental System Supporting Multiobjective Bargaining Problem. A Methodological Guide, W: Theory, Software and Testing Examples for Decision Support Systems, ed. A. Lewandowski, A.P.Wierzbicki, IIASA, Laxenburg.

- Bronisz P., L. Kruś, (1988a) Application of Generalized Raiffa Solution to Multicriteria Bargaining Support. W: System Modeling and Optimization, M. Iri, K. Yajima (eds), Lecture Notes in Control and Information Sciences 113, Springer-Verlag, 207-211.
- Bronisz P., L. Kruś, (1988b) Interactive Procedures for Multicriteria Decision Support in Bargaining Problem. W: System Analysis and Simulation, A. Sydow, S.G. Tzafestas, R. Vichnevetsky (eds), Band 46, Akademie-Verlag, Berlin, 59-62.
- Bronisz P., L. Kruś, A. Wierzbicki (1989) Towards Interactive Solutions in a Bargaining Problem, W: Aspiration Based Decision Support Systems, ed.: A.Lewandowski, A.P.Wierzbicki, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 331, Springer Verlag, Berlin, 251-268.
- Bronisz P., H. Bury, L. Kruś (1989) Interaktywny system wspomagający analizę strategii rozwojowych. W: Materiały 1-szej Krajowej Konferencji BOiS, IBS PAN, Warszawa.
- Bronisz P., L. Kruś (1989a) Dynamic Solution of Two-Person Bargaining Games. in: Processes of International Negotiations, F. Mautner-Markhof (ed.), Westview Press, Boulder, 449-456.
- Bronisz P., L. Kruś (1989b) An Experimental System Supporting Negotiation on Joint Development Program. in: Processes of International Negotiations, F. Mautner-Markhof (ed.), Westview Press, Boulder, 519-529.
- Bui T. (1987) Co-oP - A Group Decision Support System for Cooperative Multiple Criteria Group Decision Making. Lecture Notes in Computer Science 290, Springer Verlag, Berlin.

- Bury H., L. Kruś, R. Kulikowski (1988) Supporting Planning Decisions by Experiments with Complex Development Model. W: Methodology and Applications of Decision Support Systems, Third Polish Finnish Conference, Sobieszewo 1988. IBS PAN. Warszawa.
- Chander, P., Tulkens, H. (1997) The core and economy with multilateral environmental externalities, *International Journal of Game Theory* 26(3), 379-401.
- Chankong, V., Haimes, Y.Y.(1983) Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology. Elsevier Science Publishing, New York.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Ferguson, R.O. (1955) Optimal estimation of executive compensation by linear programming. *Management Science* 1(2), 138-151.
- Charnes, A., Cooper, W.W. (1961) Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, John Wiley and Sons, New York.
- Charnes, A., Cooper, W.W.(1977) Goal programming and multiple objective optimization; part 1. *European Journal of Operational Research* 1(1), 39-54.
- Chen E., Vahidov R., Gregory E. Kersten G.E.(2005) Agent-supported negotiations in the e-marketplace. *International Journal of Electronic Business*, 3 (1), 28-49 .
- Cichoń T. (1989) Narzędzia softwerowe do symulacji i wspomaganie decyzji w przypadku wielokryterialnej gry dynamicznej. Praca magisterska, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki, Instytut Automatyki.

- Cruijssen F., Cools M. and Dullaert W. (2007) Horizontal cooperation in logistics: Opportunities and impedimenta. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 43(2), 129-142.
- Davis M., Maschler M. (1965), The Kernel of a Cooperative Game, *Naval Research Logistic Quarterly*, Vol. 12.
- Deb K. (2008), Introduction to Evolutionary Multiobjective Optimization. W: Multiobjective Optimization, Branke, J., Deb, K., Miettinen, K., Slowiński, R. (Eds.), LNCS 5252, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 57-95.
- Deb K., Chaudhuri S., Miettinen K.(2006) Towards estimating nadir objective vector using evolutionary approaches. W: Keijzer, M., i inni (red) Proceedings of the 8th Annual Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO-2006), Seattle, vol. 1, 643-650. ACM Press, New York.
- Dell R. F., Karwan M. H. (1990) An Interactive MCD Weight Space Reduction Method Utilizing a Tchebysheff Utility Function. *Naval Research Logistics*, 37, 263-277.
- Dreyfus S. (1985) Beyond Rationality, W: M. Grauer, M. Thompson, A. P. Wierzbicki (eds): Plural Rationality and Interactive Decision Processes, Proceedings Sopron 1984, Springer-Verlag, Heidelberg.
- Ehtamo H., Hamalainen R.P. (2001) Interactive multiple-criteria methods for reaching pareto optimal agreements in negotiations. *Group Decision and Negotiation*, 10(6):475-491.
- Fandel G., (1979) Optimale Entscheidungen in Organisationen, Springer-Verlag, Heidelberg.

- Fandel G., A.P. Wierzbicki, (1985) A Procedural Selection of Equilibria for Supergames, (private unpublished communication).
- Fandel G., Gal T. (red)(1997): Multiple Criteria Decision Making. LNEMS 448, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Figueira J., Greco S., Ehrgott M. (red)(2005) Multiple Criteria Analysis State of the Art Surveys. Springer + Business Media Inc.
- Figueira J., Greco S., Mousseau V., Słowiński R. (2008) Interactive Multiobjective Optimization Using a Set of Additive Value Functions. W: J. Branke i inni (red.) Multiobjective Optmization. LNCS 5252, 97-119. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Fernández F.R., Hinojosa M.A., Puerto J. (2004) Multi-criteria minimum cost spanning tree games. *European Journal of Operational Research*, 158 (2), 399-408.
- Fisher R., Ury W., (1981) Getting to Yes, Houghton Mifflin, Boston.
- Fortuna Z., Kruś L. (1984) Simulation of an Interactive Metod Supporting Collectiva Decision Making using a Regional Development Model. In: Interactive Decision Analysis, M. Grauer, A. P. Wierzbicki eds., Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, 201-209.
- Galas Z., Nykowski I., Żółkiewski Z, (1987) Programowanie wielokryterialne. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa.
- Gass, S., Saaty, T.(1955) The computational algorithm for the parametric objective function. *Naval Research Logistics Quarterly* 2, 39-45. Springer-Verlag, Heidelberg.

- Gately D. (1974) Sharing the Gains from Regional Cooperation: A Game Theoretic Application to Planning Investment in Electric Power, *International Economic Review*, Vol. 15.
- Gembicki, F., Y. Y. Haimes (1975) Approach to Performance and Multiojective Sensitive Optimization: the Goal Attainment Method. *IEEE Automatic Control* AC-20, No. 6.
- Geoffrion, A.M.(1968) Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 22(3), 618-630.
- Gillies D. B. (1959) Solution to General Nonzero Sum Games, *Annals of Mathematics Studies*, Vol. 40.
- Goeltner C. (1987) The Copmuter as a Third Party: Decision Support System for Two Party Single-issue and Two Party multiple-issue Negotiations. Working Paper 1958-87, Alfred P. Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA.
- Gondzio J., Makowski M. (1995) HOPDM - Modular Solver for LP Problems: Users Guide to version 2.12. Working Paper WP-95-50, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg.
- Granat J., Makowski M. (2000) Interactive specification and analysis of aspiration-based preferences. *EJOR*, 122 (2) 469-485.
- Grauer M., M. Thompson, A.P. Wierzbicki (eds), (1985) Plural Rationality and Interactive Decision Processes, Proceedings Sopron 1984, Springer-Verlag, Heidelberg.
- Greco S., Matarazzo B., Słowiński R. (2001) Rough Sets Theory for Multicriteria Decision Analysis. *EJOR*, 129, 1-47.

- Greco S., Matarazzo B., Słowiński R. (2008) Dominance-Based Rough Set Approach to Interactive Multiobjective Optimization. W: J. Branke i inni (red.) *Multibjective Optmization*. LNCS 5252, 121-155. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Greco S., Mousseau V., Słowiński R. (2008) Ordinal Regression Revisited: Multiple criteria ranking with a set of Additive Value Functions. *EJOR*. 191 (2) 416-436).
- Harsanyi J.C., R. Selten, (1972) A Generalized Nash Solution for Two-Person Bargaining Games with Incomplete Information, *Management Sciences*, Vol. 18, 80-106.
- Heiskanen P., Ehtamo H., Hamalainen R.P. (2001) Constraint proposal method for computing Pareto solutions in multi-party negotiations. *European Journal of Operational Research*, 133(1), 44-61.
- Hordijk L. (1991) Use of the RAINS Model in Acid Rains Negotiations in Europe. *Environmental Science Technology*, 25 (4).
- Huang, C.Y., Sjöström, T. (2003) Consistent solutions for cooperative games with externalities, *Games and Economic Behavior* 43, 196-213.
- Hwang C., Masud A. S. M., Paidy S. R., Yoon K. (1979) *Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications, A state-of-the-art survey*. Springer Verlag.
- Ignizio, J.P.(1985) *Introduction to Linear Goal Programming*. Sage Publications, Beverly Hills.
- Imai H., (1983) Individual Monotonicity and Lexicographical Maxmin Solution, *Econometrica*, Vol.51, 389-401.
- Jahn, J.(2004) *Vector Optimization*. Springer, Berlin.



- Jacket-Lagreze E., Siskos J. (1982) Assessing a set of Additive Utility Functions for Multicriteria Decision Making: The UTA Method. *EJOR*, 10:151-164.
- Jacket-Lagreze E. (1990) Interactive Assessment of Preferences Using Holistic Judgements. The PREFCALC system. W: Readings in Multiple Criteria Decision aid, (C. A. Bana e Costa Ed.). Springer Verlag, Berlin, 335-350.
- James L.D., R.R. Lee, (1971) Economics of Water Resources Planning. New York, McGraw-Hill.
- Jaszkiewicz A., Słowiński R. (1995) The light-beam search – outranking based interactive procedure for multiple -objective mathematical programming. W: Advances in Multicriteria Analysis (Pardalos P. M., Siskos Y., Zopoundis C. red.), Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, 129-146.
- Jarke M., Jelassi M. T., Shakun M. F. (1987) Mediator: Towards a negotiation support system. *European Journal of Operation Research* 31, 314-334.
- Kalai, E. (1975) Excess Functions for Cooperative Games without Sidepayments. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol.29, No. 1, 60-71.
- Kalai E., Smorodinsky M. (1975) Other Solutions to Nash's Bargaining Problem, *Econometrica*, Vol. 43, 513-518.
- Kaliszewski, I.(1994) Quantitative Pareto Analysis by Cone Separation Technique. Kluwer, Dordrecht.
- Kaliszewski I., Zionts S. (2004) Generalization of the Zionts-Wallenius Multicriteria Decision Making Algorithm. *Control and Cybernetics* 3, 477-500.

- Kaliszewski, I. (2006) *Soft Computing for Complex Multiple Criteria Decision Making*, Springer.
- Kaniewski M., (1990) *Wspomaganie decyzji w wielokryterialnych grach dynamicznych na przykładzie modelu gry połowowej*. Praca magisterska, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki, Instytut Automatyki.
- Keeney, R.L., Raiffa, H. (1976) *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*. Wiley, Chichester.
- Kersten G. E. (1985) *NEGO - Group Decision Support System*. *Information and Management*. Vol. 8., 237-386.
- Kersten G. E. (1988) *A Procedure for Negotiating Efficient and Non-Efficient Compromises*. *Decision Support Systems* 4, 167-177, North-Holland.
- Kersten, G. E.; Koszegi, S.T.; Vetschera, R. (2002) *The effects of culture in anonymous negotiations: experiment in four countries*. System Sciences, System Sciences, 2002. HICSS. Proceedings of the 35th Annual Hawaii International Conference, 7-10 Jan. 2002 , 418 - 427.
- Kersten G., Lo G. (2003) *Aspire: an integrated negotiation support system and software agents for e-business negotiation*. *International Journal of Internet and Enterprise Management*, 1 (3), 293 - 315.
- Kersten G. E., Michalowsky W., Matwin S., Szpakowicz S. (1988) *Rule-based Modelling of Negotiation Strategies*. *Theory and Decision*, Vol. 25., 225-257.

- Kersten G. E., Michalowski W., Szpakowicz S., Koperczak Z. (1991) Restructurable Representations of Negotiations. *Management Science*, 37 (10).
- Kersten G.E., Sunil J. (1999) WWW-based negotiation support: design, implementation, and use. *Decision Support Systems* 25, (2), 135-154.
- Kersten G. E., Szapiro T. (1986) Generalized Approach to Modeling Negotiations, *European Journal of Operational Research*, Vol. 26, 1, 142-149.
- Khorram E., Zarepisheh M., Ghaznavi-ghosoni B.A.(2010) Sensitivity analysis on the priority of the objective functions in lexicographic multiple objective linear programs *EJOR*, 207, 1162-1168.
- Kóczy L.Á. (2007) A Recursive Core for Partition Function Form Games. *Theory and Decision* 63, 41-51.
- Kóczy L.Á. (2008) Sequential Coalition Formation and the Core in the Presence of Externalities. *Games and Economic Behavior*
- Konarzewska-Gubała E. (1980) Programowanie przy wielorakości celów. Warszawa. PWE.
- Konarzewska-Gubała E. (1991) Wspomaganie decyzji wielokryterialnych: system „Bipolar”. *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu. Seria Monografie i Opracowania*, 76.
- Kopelowitz A. (1967) Computation of the Kernels of Simple Games and the Nucleolus of N-Person Games. RM No. 31, Research Program in Game Theory and Math. Economics, Department of Mathematics, Hebrew University of Jerusalem.

- Korhonen P., Laakso J. (1986) A Visual Interactive Method for Solving the Multiple Criteria Problem. *EJOR*, 24, 227-287.
- Korhonen P., Salo S., Steuer, R.E.(1997) A heuristic for estimating nadir criterion values in multiple objective linear programming. *Operations Research* 45(5), 751-757.
- Korhonen P., Moskowitz H., Wallenius J., Zionts S. (1986) An Interactive Approach to Multiple Criteria Optimization with Multiple Decision-Makers. *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 33, 589-602, John Wiley & Sons.
- Korhonen P., Wallenius J. (1989) Supporting Individuals in Group Decision-making. Helsinki School Of Economics, Finland.
- Kostreva M.M., Ogryczak W., Wierzbicki A. (2004) Equitable Aggregation and Multiple Criteria Analysis. *EJOR*, 158, 362-367.
- Krajewska M.A., Kopfer H. (2006) Collaborating freight forwarding enterprises. *OR Spectrum*, 28 (3), 301-317.
- Kreglewski T., Paczynski J., Granat J., Wierzbicki A. P. (1988) IAC-DIDAS-N A Dynamic Interactive Decision Analysis and Support System for Multicriteria Analysis of Nonlinear Models with Nonlinear Model Generator supporting model analysis, IIASA working paper, IIASA, Laxenburg , Austria.
- Kreglewski T., (1984) private communication.
- Kruś L. (1985) An Interactive Method for Decision Support in a Two-person Game with an Example from Regional Planning. In: Plural Rationality and Interactive Decision Processes, M. Grauer, M. Thompson, A. P. Wierzbicki eds., Lecture Notes in

Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, 336-343.

Kruś L., Lopuch B., Bronisz P., (1989) Application of interactive solutions for decision support in bargaining problem, an illustrative example. In: Methodology and Applications of Decision Support Systems, R. Kulikowski (ed.), Proceeding of the 3-rd Polish-Finnish Symposium, Gdansk, 1988, 121-140.

Kruś L., Bronisz P., Lopuch B., (1990) MCBARG - Enhanced, A System Supporting Multicriteria Bargaining, IIASA Collaborative Paper, CP-90-006, IIASA, Laxenburg, Austria.

Kruś, L., Lopuch B. (1989) Wielokryterialny problem targu w przypadku modeli liniowych i jego rozwiązanie przy użyciu systemu MCBARG. Przykład modeli gospodarstwa rolnego. Opracowanie ZTSW 16/17/89, IBS PAN, Warszawa.

Kruś L., Bronisz P. (1990). Decision Support on Joint Development Program, Opracowanie, ZTSW, IBS PAN, Warszawa.

Kruś L., (1991) Some Models and Procedures for Decision Support in Bargaining, W: Multiple Criteria Decision Support. Korhonen, Lewandowski, Wallenius (ed.), Lecture notes in Economics and Math. Systems, Vol. 356, Springer Verlag, Berlin 350-359.

Kruś, L. (1992a) Interactive Approach to multicriteria bargaining on an example of acid rains problem. W: Systems and Control (Han-Fu Chen Ed.) International Acad. Publ., Beijing, China.

Kruś, L. (1992b) Computer Based Mediation Support. W: Preprints of the IFAC Workshop on "Support Systems for Decision and Negotiation Processes", June, 24-26, 1992, Warsaw, Poland.

- Kruś L., Bronisz P. (1993) Some New Results in Interactive Approach to Multicriteria Bargaining. W: User Oriented Methodology and Techniques of Decision Analysis, Wierzbicki i inni (red.), Lecture Notes in Econ. and Math. Systems, Springer Verlag, Berlin, str 21-34.
- Kruś L., Bronisz P. (1994) On n-person Noncooperative Multicriteria Games Described in Strategic Form. *Annals of Operation Research*. Vol. 51 (1994), 83-97. J. C. Balzer AG, Sci. Publ.
- Kruś L., Nahorski Z., Owsinski J. W. (eds.) (1994). Decision Support in Negotiations and Policy Determination. Special issue of *Control and Cybernetics*. Vol. 22, No.4, 1993 (appeared in 1994).
- Kruś L. (1994) Wspomaganie negocjacji w wielokryterialnym zagadnieniu targu. Biuletyn Instytutu Badań Systemowych PAN. Nr 2, 14-26.
- Kruś L., Bronisz P. (1995) Solution Concepts in Multicriteria Cooperative Games without Side Payments. W: System Modelling and Optimization, J. Dolezal (ed.), Chapman and Hall Publ.
- Kruś L., Bronisz P. (1996) Cooperative Game Model for a Cost Allocation Problem. In: S. Bańka, S. Domek, Z. Emirsajłow (eds) Methods and Models in Automation and Robotics. Proc of the Third Int. Symposium. 10-13 September, Międzyzdroje Poland. Technical Univ. of Szczecin, Vol. 1, 275-280.
- Kruś L., (1996) Multicriteria Decision Support in Negotiations, *Control and Cybernetics*, Vol. 25 , No. 6, 1245-1260.
- Kruś L., Bronisz P. (1998) Cooperative game in partition function form for a cost allocation problem. In: S. Bańka, S. Domek, Z. Emirsajłow (eds) Methods and Models in Automation

and Robotics. Proc.of the Fifth Int. Symposium. 25-29 August, Międzyzdroje, Poland. Technical Univ. of Szczecin, 279-284.

Kruś L., Bronisz, P., (2000) Cooperative game solution concepts to a cost allocation problem, *European Journal of Operational Research*. Vol. 122 , No. 2, 258-271.

Kruś L. (2002a) A System Supporting Financial Analysis of an Innovation Project in the Case of Two Negotiating Parties, *Bull. of Polish Academy of Sci., Ser. Techn.*, Vol. 50, No. 1, 93-108.

Kruś L. (2002b) Multicriteria Decision Support in Bargaining, a Problem of Players Manipulations, in: T. Trzaskalik, J. Michnik, (eds), *Multiple Objective and Goal Programming*, Physica Verlag, Springer, Berlin.

Kruś L., (2004a), A Computer Based System Supporting Analysis of Cooperative Strategies, in: L. Rutkowski, J. Siekmann, R. Tadeusiewicz, L. Zadeh, (eds), *Artificial Intelligence and Soft Computing - ICAISC 2004*, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin.

Kruś L. (2004b) A multicriteria approach to cooperation in the case of innovative activity, *Control and Cybernetics*, Vol. 33 , No. 3.

Kruś L. (2008) On Some Procedures Supporting Multicriteria Cooperative Decisions. *Foundations of Computing and Decision Science*, 33 (3), 257-270.

Kruś L. (2009) Cost Allocation in Partition Function Form Games. *Operation Research and Decisions*, No. 2, 39-49.

- Kruś L. Skorupiński J., Toczyłowski E. (2010) Analiza motywacyjnie zgodnych decyzji wielokryterialnych na przykładzie problemu producenta i klientów. *Badania Operacyjne i Systemowe*.
- Kulikowski R. (1998) Portfolio optimization: two factors utility approach, *Control & Cybernetics*, 3.
- Kulikowski R.(2002) URS methodology - a tool for stimulation of economic growth by innovations, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Sci. Tech.*, Vol. 50 , No. 1.
- Kulikowski R.(2003) On general theory of risk management and decision support systems, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Sci. Tech.*, Vol. 51 No. 3.
- Kulikowski R. , L. Kruś (2003) Support of education decisions. In: *Group Decisions and Voting* (J. Kacprzyk, D. Wagner eds), Akad. Oficyna Wyd. EXIT, Warszawa.
- Lax D. A., Sebenius J. K. (1985) The Power of Alternatives and the Limits to Negotiations, *Negotiation J.* Vol. 1, 163-179.
- Legros P.(1986) Allocating Joint Costs by Means of Nucleolus, *Int. Journal of Game Theory*, Vol. 15, Issue 2, 109-119.
- Lewandowski A., A.P. Wierzbicki A.P. (1989) *Aspiration Based Decision Support Systems*. Springer, Berlin.
- Lewandowski A., T. Kreglewski, T. Rogowski, A. P. Wierzbicki (1989) Decision Support Systems of DIDAS Family. In: *Aspiration Based Decision Support Systems*, (A. Lewandowski, A.P. Wierzbicki eds.) *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Vol. 331, Springer-Verlag, 21-47.



- Littlechild S.C. (1974) A Simple Expression for the Nucleolus in a Special Case, *Int. Journal of Game Theory*, Vol. 3, Issue 1, 21-29.
- Littlechild, S.C., Thompson, G.F. (1977) Aircraft landing fees: a game theory approach. *The Bell Journal of Economics*. Vol. 8, 186-204.
- Littlechild S.C., Vaidya K.G. (1976) The Propensity to Disrupt and the Disruption Nucleolus of a Characteristic Function Game, *Int. Journal of Game Theory*, Vol. 5, 151-161.
- Lucas, W.F., (1965) Solution for Four-Person Games in Partition Function Form, *SIAM Review*. Vol. 13, 118-128.
- Lucas, W.F. (1968) A game with no solutions. *Bull. of the American Mathematical Society* Vol. 74, 237-239.
- Lucas, W.F. (1969) The proof that a game may not have a solution. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol.137, 219-229.
- Luce R.D., H. Raiffa, (1957) *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey*, New York: Wiley.
- Makowski M. (2005) A structured modeling technology. *EJOR*, Vol. 166 (3), 615-648.
- Makowski, M., Somlyódy, L. and Watkins, D. (1996), Multiple Criteria Analysis for Water Quality Management in the Nitra Basin. *JAWRA Journal of the American Water Resources Association*, Vol. 32: 937-951.
- Makowski, M. (2000) Modeling paradigms applied to the analysis of European air quality. *EJOR*, Vol. 122 (2), 219-241.

- Maschler M, Peleg B, Shapley L.S. (1979) Geometric Properties of the Kernel, Nucleolus and Related Solution Concepts, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 4, 303-338.
- Matsubayashi N., Umezawa M., Masuda Y. and Nishino H. (2005) A cost allocation problem arising in hub-spoke network systems. *European Journal of Operational Research*, Vol. 160 (3), 821-838.
- Matwin S., Szpakowicz S., Koperczak Z., Kersten G.E., Michalowski W.(1989) Negoplan: An Expert System Shell for Negotiation Support, *IEEE Intelligent Systems*, Vol. 4 (4), 50-62.
- Matwin, S., Szapiro T., Haigh K. (1991) Genetic Algorithms Approach to a Negotiation Support System. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* Vol. 21 (1), 102-114.
- Michalowski W., Szapiro T. (1989) A procedure for worst outcomes displacement in multiple criteria decision making . *Computers and Operations Research*, Vol. 16, (3), 195-206.
- Michalowski W., Szapiro T. (1992) A Bi-reference Procedure for Interactive Multiple Criteria Programming. *Operations Research*, Vol. 40, No. 2
- Miettinen, K. (2008) Introduction to Multiobjective Optimization: Noninteractive Approaches. In: Multiobjective Optimization, J. Branke, K. Deb, K. Miettinen, R. Słowiński (Eds.), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Moulin H. (1988) Axioms of Cooperative Decision Making. Cambridge University Press, Cambridge.

- Nakayama H. (1985) Aspiration Level Approach to Interactive Multi-objective Programming and its Applications. W: *Advances in Multicriteria Analysis* (Pardalos P. M., Siskos Y., Zopounidis C. red.), Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, 147-174.
- Narula S.C., Kirilov L., Vassilev V. (1994) Reference Direction Approach for Solving Multiple Objective Nonlinear Programming Problems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 24, 804-806.
- Nash J.F., (1950) The Bargaining Problem, *Econometrica*, Vol. 18, 155-162.
- Nash J.F., (1953) Two-Person Cooperative Games, *Econometrica*, Vol. 21, 129-140.
- von Neumann, J., O. Morgenstern (1953) *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press.
- Nunamaker J., F., Applegate L., M., Konsynsky B., R. (1988) Computer-aided deliberation: Model Management and Group Decision Support. *Operations Research*, Vol. 36., 826-848.
- Nyhart J., Samarasan D. (1989) The Elements of Negotiation Management: Using Computers to Help Resolve Conflict. *Negotiation Journal*, 43-62.
- Nykowski I., Żółkiewski Z.(1985) A compromise procedure for the multiple objective linear fractional programming problem. *European J. Oper. Res.* 19, 91-97.

- Ogryczak W., (1997) Wielokryterialna optymalizacja liniowa i dyskretna. Modele preferencji i zastosowania do wspomaganie decyzji. Warszawa, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego.
- Ogryczak W., (2002) Multiple criteria optimization and decisions under risk, *Control and Cybernetics*, Vol. 31 , No. 4.
- Ogryczak W., Śliwiński T. (2007) On Optimization of the Importance Weighted OWA Aggregation of Multiple Criteria. LNCS **4705**, 804-817.
- Ogryczak W., (2008) Reference Point Method with Lexicographic Min-ordering of Individual Achievements. W: Multiple Criteria Decision Making 07, T. Trzaskalik red.. Publisher of The Karol Adamiecki University of Economics in Katowice, Katowice, 155-174.
- Pawlak Z.(1982) Rough sets. *International Journal of Computer and Information Sciences*, 11, 341-356.
- Pawlak Z.(1991) Rough Sets. Kluwer, Dordrecht.
- Peleg, B. (1963) Solutions to Cooperative Games without Side Payments. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 106, 280-292.
- Piasecki, St., J. Hołubiec, A. Ameliańczyk (1982). Międzynarodowa kooperacja gospodarcza, modelowanie i optymalizacja. PWN, Warszawa.
- Raiffa H., (1953) Arbitration Schemes for Generalized Two-Person Games, *Annals of Mathematics Studies*, No. 28 361-387, Princeton.
- Raiffa H. (1982) The Art and Science of Negotiations. Harvard Univ. Press, Cambridge.

- Ransmeier J. S. (1942) The Tennessee Valley Authority: A Case Study in the Economics of Multiple Purpose Stream Planning, The Vanderbilt University Press, Nashvill.
- Rogowski, J. Sobczyk, A. P. Wierzbicki (1988) IAC-DIDAS-L A Dynamic Interactive Decision Analysis and Support System, Linear Version. WP-88-110, IIASA, Laxenburg, Austria.
- Roth A.E., (1979a) An Impossibility Result Concerning n-Person Bargaining Games, *International Journal of Game Theory*, Vol. 8, 129-132.
- Roth A.E., (1979b) Axiomatic Model of Bargaining, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 170, Springer-Verlag, Berlin.
- Roth A.E. , M.W.K. Malouf , (1979) Game-Theoretical Models and the Role of Information in Bargaining, *Psychological Review*, Vol. 86, 1163-1170.
- Roy B. (1990) Wielokryterialne wspomaganie decyzji. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa.
- Savage L. J., The foundations of statistics. New York, Wiley, 1954
- Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T. (1985) Theory of Multiobjective Optimization. Academic Press, New York.
- DeSanctis G., Gallupe R., B. (1987) A Foundation for the Study of Group Decision Support Systems. *Management Science*, Vol. 33, No. 5., 589-609.
- Schmeidler D. (1969) The Nucleolus of a Characteristic Function Game, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 17, No. 3, 1163-1169.

- Sebenius J. K. (1992) Negotiation Analysis: A Characterization and Review *Management Science*, Vol. 38, No. 1, 18-38.
- Sebenius J. K. (2007) Negotiation Analysis: Between Decisions and Games. W: W. Edwards, R. Miles, D. von Winterfeldt (eds.), *Advances in Decision Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Seo F. (1988) Utilization of Mathematical Programming in Group Decision Making: An Application to Effective Formation of Integrated Regional Information Networks. Discussion Paper No. 254, Kyoto Institute of Economic Research, Kyoto University.
- Seo F. Sakawa M. (1987) Multiple Criteria Decision Analysis in Regional Planning, D. Reidel Publishing Co.
- Shakun M. (1988) *Evolutionary Systems Design*. HoldenDay, Oakland, CA.
- Shapley L. S. (1953) A Value for n-Person Game, *Annals of Mathematics Studies*, Vol. 28,
- Shapley L. S., Schubik M. (1966) Quasi-cores in Monetary Economy with Nonconvex Preferences, *Econometrica*, Vol. 34, 805-827.
- Skulimowski A. (1996) *Decision Support Systems Based on Reference Sets Theory Multiobjective Optimization*. AGH-Press, Kraków.
- Skwarczyło M. (1988) Opis użytkowy programu SCONVEX. Opracowanie ZTSW-24-17/88, IBS PAN, Warszawa.
- Stam A., H. Cesar, M. Kuula (1989) Transboundary Air Pollution in Europe: An Interactive Multicriteria Tradeoff Analysis, WP-89-61, IIASA, Laxenburg, Austria.

- Stearns R. (1964) On the Axioms for a Cooperative Game without Side Payments. *Proc. Amer. Math. Soc.* Vol. 15, 82-86.
- Steuer R.E.(1986) Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application. Wiley, New York.
- Szapiro T. (1991) Podejście interaktywne we wspomaganii podejmowania decyzji. SGH. Warszawa.
- Szapiro T. (1993) Co decyduje o decyzji. PWN, Warszawa.
- Szapiro T.(red.) (2000) Decyzje menadżerskie z Excelem. PWE, Warszawa.
- Szapiro T., Wojewnik P. (2007) Negotiating an Investment Strategy with Fuzzy Redescriptions. W: G. Kersten, j. Rios, E. Chen (red.) *Proc. Group Decisions and Negotiations 2007*, Vol. II, Concordia Univ., Montreal, Canada.
- Szapiro T., Wojewnik P. (2008) Universal Software Platform for Construction of Web-based Negotiation Support Systems. W: J. Climaco, G. Kersten, J. P. Costa (red.) *Group Decisions and Negotiation, Proceedings*, 203-204.
- Teich J. E., Wallenius H., Kuula M., Zionts S. (1995) A Decision Support Approach for Negotiation with an Application to Agricultural Income Policy Negotiations. *European Journal of Operational Research*, Vol. 81, 76-87.
- Thomson W., (1980) Two Characterization of the Raiffa Solution, *Economic Letters*, Vol. 6, 225-231.
- Thrall, R.M., Lucas W.F. (1963) n-Person Games in Partition Function Form, *Naval Research Logistics Quarterly*, 10, 281-298.

- Toczyłowski E.(2003) Optymalizacja procesów rynkowych przy ograniczeniach. AOW EXIT, Warszawa.
- Toczyłowski E. (2009) Zgodność motywacji w mechanizmach rynku energii. Rynek Energii, II(IV) , 88-95.
- Trzaskalik T. (1990) Wielokryterialne dyskretne programowanie dynamiczne. Teoria i zastosowania w praktyce gospodarczej. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach.
- Trzaskalik T. (1997) Multiple Criteria Discrete Dynamic Programming. W: Multiple Criteria Decision Making. Fandel G., Gal T. (eds), LNEMS 448, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 202-211.
- Trzaskalik T. (1998) Multiobjective analysis in dynamic environment. Karol Adamiecki University of Economics in Katowice (Katowice).
- Trzaskalik T., Michnik J. (red.) (2002) Multiple objective and goal programming : Recent developments. Physica-Verlag, Springer.
- Trzaskalik T., Sitarz S. (2007) Discrete dynamic programming with outcomes in random variable structures. *European Journal of Operational Research*, 177, (3), 1535-1548.
- Trzaskalik T. (red.) (2006) Metody wielokryterialne na polskim rynku finansowym. PWE, Warszawa.
- Tversky A., Kahneman O., (1981) The framing of decisions and the psychology of choice, *Science*, Vol. 211, 453-480.
- Tversky A. (1967) Utility theory and additivity analysis of risky choices, *Experimental Psychology*, Vol. 75, 27-37.



- Vetschera, R. (1990) Group Decisions and Negotiation Support - a Methodological Survey. *OR Spectrum*, Vol. 17, 67-77.
- Vetschera R., Kersten G., Köszegi S. (2006) User Assessment of Internet-Based Negotiation Support Systems: An Exploratory Study. *Journal of Organizational Computing and Electronic Commerce* Vol. 16 (2), 123-148.
- Vetschera, R. (2007) Preference structures and negotiator behavior in electronic negotiations. *Decision Support Systems* Vol. 44 (1), 135-146.
- Wachowicz T. (2006) Application of Multiple Attribute Stochastic Dominance to Selection of Negotiation Strategies in E-negotiations. W: Multiple Decision Making 05, T. Trzaskalik (red). The Karol Adamiecki University of Economic Press, Katowice.
- Wachowicz T. (2008) Negotiation and Arbitration Support with Analytic Hierarchical Process. W: Multiple Decision Making 07, T. Trzaskalik (red). The Karol Adamiecki University of Economic Press, Katowice.
- Wierzbicki A. (2010) Trust and Fairness in Open, Distributed Systems. Springer
- Wierzbicki A.P., (1982) A Mathematical Basis for Satisficing Decision Making, *Mathematical Modelling*, 3, 391-405.
- Wierzbicki A.P., (1983) Negotiation and Mediation in Conflicts I: The Role of Mathematical Approaches and Methods, Working Paper WP-83-106, IIASA, Laxenburg; także w: H. Chestnat i inni, (ed): Supplemental Ways to Increase International Stability, Pergamon Press, Oxford, 1983.

- Wierzbicki A.P., (1985) Negotiation and Mediation in Conflicts II: Plural Rationality and Interactive Decision Processes, W: M.Grauer, M.Thompson, A.P.Wierzbicki (ed): Plural Rationality and Interactive Decision Processes, Proceedings Sopron 1984, Springer-Verlag, Heidelberg.
- Wierzbicki A.P.,(1986) On the Completeness and Constructiveness of Parametric Characterizations to Vector Optimization Problems, *OR Spectrum* 8:73-87, Springer Verlag.
- Wierzbicki A.P., (1990) Multiple Criteria Solutions in Noncooperative Game Theory, Part III. Discussion Paper 288, Kyoto Institute of Economic Research, Kyoto University, Kyoto.
- Wierzbicki A.P., (1987) Towards Interactive Procedures in Simulation and Gaming: Implications for Multiperson Decision Support, W: Methodology and Software for Interactive Decision Support, Proceedings of International Workshop, Albena, Springer Verlag.
- Wierzbicki, A. P., L. Krus, M. Makowski (1993) The Role of Multi-Objective Optimization in Negotiation and Mediation Support” in: Theory and Decision, special issue on “International Negotiation Support Systems: Theory, Methods, and Practice, Vol. 34 (3), 201-214.
- Wierzbicki A. P., M. Makowski, J. Wessels, (2000) Model-based Decision Support Methodology with Environmental Applications, Kluwer Academic Press, Dordrecht, Boston.
- Wierzbicki A. P. (2005) A Reference Point Approach to Coalition Games. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* Vol. 13 (2-3), 81-89.

- Young H. P., Okada N., Hashimoto T. (1980) Cost Allocation in Water Resources Development - A Case Study of Sweden. RR 80-32, IIASA, Laxenburg, Austria.
- Young P. (1982) Cost allocation. Prentice Hall. New York.
- Young P. (1985) Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory*, Vol. 14 (2),65-72.
- Young P. (1992) Negotiation Analysis. The University of Michigan Press.
- Zeleny, M.(1973) Compromise programming. In: Cochrane, J.L., Zeleny,M. (eds.) Multiple Criteria Decision Making, 262-301. University of South Carolina, Columbia, SC.
- Zionts S., Wallenius J. (1976) An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem. *Management Science* 22, 652-663.
- Zionts S., Wallenius J. (1983) An Interactive Multiple Objective Linear Programming Method for a Class of Underlying Utility Functions. *Management Science* 29, 519-529.

Rozpatruje się sytuacje decyzyjne, w których występuje kilku decydentów, negocjujących warunki współpracy. Problem dotyczy podziału efektów współpracy, przy czym każdy decydent ma swój odrębny, wielokryterialny zestaw celów, które chciałby osiągnąć i kieruje się swoimi preferencjami.

W pracy przedstawia się podstawy teoretyczne i metody wspomaganie procesu decyzyjnego w takich sytuacjach z wykorzystaniem odpowiednio zbudowanego systemu komputerowego. Rozpatrywane sytuacje opisywane są formalnie jako modele wielokryterialnego problemu targu i wielokryterialnych gier koalicyjnych. Proponowane są koncepcje rozwiązań w tych grach uwzględniające preferencje decydentów, a następnie wielorundowe procedury negocjacyjne wspomagające proces znajdowania zgodnego rozwiązania. W poszczególnych rundach takiej procedury stosowana jest jednostronna i wielostronna analiza wielokryterialna możliwych wypłat, przy czym system komputerowy generuje propozycje mediacyjne. Przedstawia się konstrukcję zbudowanego systemu komputerowego MCBARG, w którym taka procedura została zaimplementowana oraz przykłady problemów kooperacji.

**ISSN 0208-8029**  
**ISBN 9788389475381**

---

**SYSTEMS RESEARCH INSTITUTE**  
**POLISH ACADEMY OF SCIENCES**  
**Phone: (+48) 22 3810246 / 22 3810277 / 22 3810241 / 22 3810273**  
**email: biblioteka@ibspan.waw.pl**