



**Instytut Badań Systemowych  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK**

**Piotr Suchomski**

**SYNTEZA ALGORYTMÓW  
ODPORNEGO STEROWANIA  
W CZASIE DYSKRETNYM**





**Piotr Suchomski**

**SYNTEZA ALGORYTMÓW  
ODPORNEGO STEROWANIA  
W CZASIE DYSKRETNYM**

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH • POLSKIEJ AKADEMII NAUK

**Seria: BADANIA SYSTEMOWE**

**tom 38**

---

**Redaktor naukowy:**

**Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum**

**Warszawa 2004**

**Piotr Suchomski**

**SYNTEZA ALGORYTMÓW  
ODPORNEGO STEROWANIA  
W CZASIE DYSKRETNYM**

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz

Doc. dr hab. inż. Piotr Kulczyki (prof. PK)

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN

Warszawa 2004

Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN

ul. Newelska 6 01-447 Warszawa

Sekcja Informacji Naukowej i Wydawnictw

tel. 837-68-22

email: biblioteka@ibspan.waw.pl

**ISBN 83-85847-94-4**

**ISSN 0208-8029**

# Wprowadzenie

Przedmiotem niniejszej pracy są zagadnienia związane z syntezą liniowych algorytmów odpornego sterowania w czasie dyskretnym. Zakłada się, że poszukiwane rozwiązania (parametry algorytmów o założonej strukturze, nastawy regulatorów) uzyskuje się, stosując komputer w celu wykonania odpowiednich obliczeń wymaganych przez daną metodę syntezy. Jakość takich rozwiązań zależy od trzech podstawowych czynników:

- (1) właściwości realizowanej arytmetyki (numerycznej precyzji oraz zakresu reprezentowanych liczb),
- (2) uwarunkowania problemu syntezy (wrażliwości rozwiązania na zmiany wejściowych danych),
- (3) właściwości algorytmu użytego do rozwiązywania postawionego zadania (numerycznej stabilności metody pozyskiwania rozwiązań).

Wymaga podkreślenia, że w rzetelnej analizie cech danego konkretnego sposobu dochodzenia do pożądaných rozwiązań, nie można zaniedbać żadnego z wyżej wymienionych aspektów. Przykładowo, nawet numerycznie stabilna metoda obliczeniowa implementowana w 'silnej' arytmetyce może, w przypadku źle uwarunkowanego zadania, prowadzić do wyników nieakceptowalnych ze względu na zakładany cel sterowania.

Współcześnie obserwuje się intensywne dążenie do zapewnienia metodom syntezy algorytmów sterowania odpowiednio wysokiej numerycznej jakości. Zabieganie o wymieniony walor dostępnych narzędzi projektowania systemów automatycznego sterowania procesami jest głęboko uzasadnione rolą odgrywaną przez takie systemy we wszystkich dziedzinach techniki. Znaczenie jakie uzyskała omawiana tendencja rozwoju metod projektowania przejawia się w: (i) randze licznych publikacji poświęconych tej tematyce (Datta [78], Higham *et al.* [180], Mehrmann i Xu [288], Patel *et al.* [319], Petkov *et al.* [323], Van Dooren [447], Van Huffel *et al.* [448], Varga [451]), (ii) powodzeniu

oraz żywotności inicjatyw służących promowaniu stosownego oprogramowania – zob. specjalizowane przyborki pakietu MATLAB, projekt NICONET oraz biblioteka SLICOT (Math Works [283], Van Dooren [447], Van Huffel *et al.* [448], <http://www.win.tue.nl/niconet/niconet.html>; por. także biblioteka NETLIB, [http://www.netlib.org/master\\_counts2.html](http://www.netlib.org/master_counts2.html), Eluroth *et al.* [103]).

W niniejszej pracy skupiono się na wybranych algorytmach odpornego sterowania w czasie dyskretnym, wywiedzionych głównie z metod przestrzeni  $\mathcal{H}_\infty$ . Akcentując potrzebę i znaczenie analizy błędów oraz uwarunkowania proponowanych metod syntezy algorytmów sterowania, wskazuje się na sposoby polepszania takiego uwarunkowania. W szczególności, dowodzi się, że cel ten w wielu przypadkach można osiągnąć przez zastosowanie modelowania sterowanych obiektów opartego na operatorze delta ( $\delta$ ).

Merytoryczną treść pracy ujęto w sześciu rozdziałach oraz dodatku.

Wstępny *rozdział 1.* dotyczy modeli z czasem dyskretnym w tym głównie modeli związanych z operatorem  $\delta$ . Podano tu podstawowe definicje oraz pojęcia wykorzystywane w dalszych rozdziałach.

*Rozdział 2.* poświęcono problemom syntezy dyskretnych algorytmów sterowania, w których stosuje się metodę rozmieszczania (pozycjonowania) biegunów odpowiedniej funkcji przenoszenia układu zamkniętego. To klasyczne zadanie rozwiązuje się, rozważając niezbędne równania diofantyczne zdefiniowane dla operatora  $\delta$ . Zbadano właściwości dwóch rodzin par takich równań, przyporządkowanych odpowiednio tylko minimalnofazowym oraz minimalnofazowym i nieminimalnofazowym nominalnym modelom sterowanych obiektów. Pokazano w jaki sposób, modyfikując znaną metodę Youli-Kučery, zapewnić danemu układowi odporną stabilność oraz odporną jakość przy założeniu typowych charakterystyk niepewności nominalnego modelu obiektu. Podano oszacowanie względnego błędu rozwiązania zadania rozmieszczania biegunów dla ściśle strukturalizowalnych zaburzeń danych tego zadania. Rozważono trudności, które pojawiają się przy rozwiązywaniu równań diofantycznych sformułowanych dla nieminimalnych nominalnych modeli sterowanych obiektów. Przedstawiono także stosowne numerycznie stabilne algorytmy upraszczania takich modeli.

*Rozdział 3.* poświęcono algorytmom sterowania predykcyjnego w oparciu o prognozę sterowanego procesu uzyskiwaną na podstawie odpowiedniego modelu tego procesu. Podano analityczne formuły opisujące rodziny charakterystycznych wielomianów tak ukształtowanych optymalnych układów zamkniętych. Omówiono metody parametryzacji takich prototypowych wielomianów przy wykorzystaniu standardowych nastaw regulatorów predykcyj-



nych. Parametryzacja, o której mowa, służy dążeniu do zapewnienia projektowanym układom sterowania założonych cech – a więc wymaganego zapasu stabilności oraz pożądanego charakteru procesów przejściowych. Rozważania tego rozdziału, dotycząc przede wszystkim reguł sterowania w czasie dyskretnym, obejmują także analizę asymptotycznych cech układów zamkniętych odpowiadających predykcynemu sterowaniu na podstawie modeli w czasie ciągłym.

Tematem *rozdziału 4.* są właściwości równań Riccatiego oraz Lapunowa zdefiniowanych dla modeli związanych z operatorem  $\delta$ . Sformułowano tu lematy dotyczące stabilizujących rozwiązań równań Riccatiego, a także omówiono cechy uogólnionych macierzy Hamiltona skojarzonych z takimi równaniami. Rozważając wrażliwość dyskretnych równań Riccatiego oraz Lapunowa na zaburzenia elementów macierzowych pęków definiujących takie równania, pokazano, że przy dostatecznie małym okresie próbkowania rozwiązania równań przyporządkowanych standardowemu operatorowi przesunięcia charakteryzują się znacznie gorszym uwarunkowaniem, a więc i mniejszą odpornością na wpływ zaburzeń, w zestawieniu z odpowiednimi równaniami wywiedzionymi dla operatora  $\delta$ . Pokazano też w jaki sposób, korzystając z rozwiązań pewnych pomocniczych równań Lapunowa, ocenić zakres niestrukturalizowalnych zaburzeń nominalnego modelu sterowanego obiektu, dopuszczalnych ze względu na stabilność układu zamkniętego.

W *rozdziale 5.* postawiono problem syntezy układu zamkniętego, w którym uogólniony obiekt dynamiczny jest reprezentowany przez swoje odpowiednio zdefiniowane modele w czasie dyskretnym, to znaczy standardową macierz rozproszenia oraz łańcuchowe macierze rozproszenia. W następnej kolejności wprowadzono cechę tak zwanej  $J$ –bezstratności operatora opisującego dany obiekt, co stanowi podstawę definicji stosownych  $J$ –bezstratnych faktoryzacji wymienionych modeli. Badano właściwości  $J$ –bezstratnych stabilizujących koniugatorów, a także dokonano pewnego uogólnienia definicji łańcuchowych macierzy rozproszenia.

*Rozdział 6.*, ostatni i najobszerniejszy rozdział pracy, poświęcono problemom syntezy dyskretnych układów sterowania oraz estymacji optymalnych ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$ . Rozważano standardowe zadania formułowane dla różnych modeli (macierzy) rozproszenia danego uogólnionego obiektu, koncentrując się przede wszystkim na zadaniach dotyczących łańcuchowych macierzy rozproszenia. Podstawę rozwiązania omawianych zadań stanowią odpowiednie  $J$ –bezstratne faktoryzacje tych macierzy. Liczne twierdzenia sformułowane w tym rozdziale odnoszą się do problemu istnienia oraz właściwości rozwiązań dwóch 'sprzężonych' dyskretnych równań Riccatiego podanych w postaci stosownej dla operatora  $\delta$ . W przypadku, w którym model

obiektu nie ma zer należących do brzegu obszaru wyznaczonego definicją stabilności liniowych systemów modelowanych za pomocą operatora  $\delta$ . poszukiwane są stabilizujące rozwiązania odpowiednich równań Riccatiego. Gdy model obiektu ma takie zera, interesują nas także rozwiązania niestabilizujące stosownych równań Riccatiego. W omawianym rozdziale dokonano także analizy podstawowych strukturalnych cech tak uzyskiwanych optymalnych regulatorów oraz estymatorów. Wskazano wreszcie na pewien typ osobliwych problemów, które – pomimo stosowania reguł modelowania odwodującego się do operatora  $\delta$  – mogą charakteryzować się złym numerycznym uwarunkowaniem.

W  *dodatku A* zebrano podstawowe informacje dotyczące uwarunkowania, oceny względnych błędów, numerycznej stabilności, a także wstecznych błędów rozwiązań nieosobliwych zadań liniowych oraz nieosobliwych liniowych zadań najmniejszych kwadratów.  *Dodatek B* zawiera spis oznaczeń.

Wszystkie istotne wyniki uzyskane w niniejszej pracy mają analityczne ugruntowanie. Prezentacja materiału zasadza się na układzie  *twierdzeń, lematów* oraz  *uwag*, czyli podziale odwzorowującym merytoryczną wagę odpowiednich sformułowań. Integralną część pracy stanowią numeryczne  *przykłady*, ilustrujące uprzednie teoretyczne wywody. Nie wszystkie twierdzenia oraz lematy są wszakże dowodzone z jednakową szczegółowością. W każdym przypadku podano jednak źródło danej tezy, co umożliwia Czytelnikowi śledzenie wkładu autora niniejszej pracy w rozwój referowanej tematyki.

W pracy umieszczono szereg nowych i nigdzie nie publikowanych elementów. Dotyczy to przede wszystkim: algorytmu wyznaczania minimalnego modelu sterowanego obiektu, zagadnień numerycznego uwarunkowania zadania rozmieszczania biegunów, własności oraz syntezy  $J$ -bezstratnych stabilizujących koniugatorów oraz własności rozszerzonych modeli obiektów opisanych łańcuchowymi macierzami rozproszenia.

## Rozdział 6

# Metody przestrzeni $\mathcal{H}_\infty$

Niniejszy rozdział poświęcono problemom syntezy dyskretnych układów sterowania oraz estymacji w przypadku obiektów modelowanych w dziedzinie operatora  $\delta$ , przy czym norma  $\mathcal{H}_\infty$  występuje tu jako podstawa definicji stosownych wskaźników jakości.

Paradygmat kształtowania charakterystyk liniowych układów ze sprzężeniem zwrotnym, wywiedziony z właściwości przestrzeni  $\mathcal{H}_\infty$  funkcji analitycznych w odpowiednim obszarze oraz zapoczątkowany znaną pracą (Zames [483]), odgrywa wiodącą rolę we współczesnej teorii sterowania, w tym przede wszystkim sterowania odpornego. Wskazując na główne przyczynki do rozwoju metod syntezy odpornych układów sterowania w czasie dyskretnym ( $q$ ), należy wymienić następujące pozycje: Chen [56], Green i Limebeer [153], Gu *et al.* [157], Hung i Chu [187], Iglesias i Glover [190], Ionescu i Weiss [194], Kongprawechnon i Kimura [229, 230], Liu i Mita [276], Paz i Madanić [320], Stoorvogel [386], Takaba i Katayama [429], Tsai *et al.* [436] oraz Yaesh i Shaked [478]. Fundamentalne znaczenie przypisuje się pracy (Stoorvogel [386]), w której pokazano, że (sub)optimalny regulator, realizujący sprzężenie od wyjścia obiektu oraz zapewniający zamkniętemu układowi wewnętrzną stabilność przy ograniczonej wartości normy  $\mathcal{H}_\infty$  stosownej funkcji przenoszenia, uzyskuje się po rozwiązaniu dwóch odpowiednio powiązanych dyskretnych ( $q$ ) równań Riccatiego. Jako standardowy, dyskretny algorytm sterowania optymalnego ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$  przyjmuje się obecnie algorytm, w którym macierz rozproszenia zdefiniowana dla operatora  $q$  jest modelem sterowanego obiektu (Green i Limebeer [153]). Zastosowanie  $J$ -bezstratnych faktoryzacji łańcuchowych modeli do syntezy dyskretnych ( $q$ ) algorytmów sterowania było przedmiotem badań opisanych w (Hung i Chu [187], Kongprawechnon i Kimura [229, 230], Takaba i Katayama [429]).

Rozważania, dotyczące modeli z operatorem  $\delta$ , zaczynamy od prezentacji standardowego zadania syntezy optymalnego regulatora. W zadaniu tym, sformułowanym dla macierzy rozproszenia uogólnionego obiektu  $P$  podlegającego sterowaniu, poszukuje się takiego regulatora  $K$ , który zapewni układowi zamkniętemu dobrą określoność, wewnętrzną stabilność, oraz założone ograniczenie normy  $\mathcal{H}_\infty$  operatora liniowej frakcyjnej transformacji  $LF(P, K)$ . Odpowiednie twierdzenie o optymalnym regulatorze  $K$  opiera się na badaniu istnienia oraz właściwości stabilizujących rozwiązań dwóch 'sprzężonych' dyskretnych ( $\delta$ ) równań Riccatiego.

W kolejnym podrozdziale pokazano, że formułując standardowy problem syntezy regulatora  $K$  dla łańcuchowego  $G$  oraz dualnego łańcuchowego  $H$  modelu rozproszenia danego obiektu, ujawniamy nowe możliwości analizy strukturalnych cech tak uzyskiwanych rozwiązań, a także wynikające stąd systematyczne zasady parametryzacji odpowiednich algorytmów sterowania. Zadanie optymalizacji regulatora  $K$  ma teraz postać żądania ograniczenia normy  $\mathcal{H}_\infty$  operatora homograficznej transformacji  $HM(G, K)$ , lub odpowiednio normy  $\mathcal{H}_\infty$  operatora dualnej homograficznej transformacji  $DHM(H, K)$ . Podstawą rozwiązania takiego zadania jest  $J$ -bezstratna (dualna  $J$ -bezstratna) faktoryzacja stosownego łańcuchowego modelu rozproszenia sterowanego obiektu. Sformułowano szereg twierdzeń odnoszących się do wymaganych faktoryzacji w dziedzinie operatora  $\delta$ . Twierdzenia te mówią o istnieniu oraz właściwościach stabilizujących rozwiązań odpowiednich dyskretnych równań Riccatiego. Analiza czynników wymienionych  $J$ -bezstratnych faktoryzacji stała się podstawą studium struktury algorytmów optymalnego sterowania. Tego zakresu dotyczą w szczególności podane wystarczające warunki istnienia wymiernych regulatorów  $K$  o ściśle właściwej postaci.

Ważne fragmenty niniejszego rozdziału poświęcono syntezie sterowania optymalnego ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$  w przypadku obiektów, których modele mają zera należące do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ . Odpowiednie algorytmy zbudowano w oparciu o uogólnione  $J$ -bezstratne faktoryzacje łańcuchowych macierzy rozproszenia takich obiektów. W sformułowanych twierdzeniach głosi się, że poszukiwanie wymaganych faktoryzacji jest równoważne rozwiązywaniu dwóch dyskretnych równań Riccatiego, przy czym w przypadku pierwszego z tych równań zależy nam na rozwiązaniu, które nie jest rozwiązaniem stabilizującym.

W kolejnym podrozdziale wykazano w jaki sposób  $J$ -bezstratne faktoryzacje łańcuchowych macierzy rozproszenia obiektów dynamicznych wykorzystać przy projektowaniu optymalnych estymatorów stanu. Udowodniono także, iż prosty algorytm tak zwanego centralnego estymatora jest niewystarczający, gdy model (macierz rozproszenia) niestandardowego obiektu ma zera

należące do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ .

Ostatni podrozdział poświęcono zagadnieniom, w których – ze względu na nieregularność modelu będącego podstawą danego problemu optymalizacji – występują osobliwości, sprawiające, że odpowiednie numeryczne zadania syntezy stają się zadaniami źle uwarunkowanymi.

Wszystkie rozważane równania Riccatiego sformułowano w postaci odpowiednich uogólnionych, bądź też, gdy jest to niezbędne – rozszerzonych uogólnionych zagadnień własnych. Druga z wymienionych sytuacji zachodzi w przypadku niestandardowych obiektów z zerami należącymi do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ .

Wywody o teoretycznym charakterze są ilustrowane licznymi obliczeniowymi przykładami. W tym celu rozwiązano proste zadania projektowania regulatorów w oparciu o postulat optymalnego, lecz kompromisowego, kształtowania funkcji wrażliwości układu zamkniętego. Podjęto także próbę syntezy odpornego układu sterowania metodą  $Q$ -parametryzacji nominalnie stabilnego układu zamkniętego, uzyskanego w wyniku zastosowania reguły rozmieszczania biegunów. Wskazano na pewną możliwość uproszczenia (obniżenia rzędu) wymaganego  $Q$ -parametru przez racjonalne modelowanie niepewności dostępnej wiedzy o sterowanym obiekcie. Rozważano zarówno obiekty opisane modelami bez zer należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ , jak też obiekty, których modele charakteryzują się obecnością takich zer. W każdym przypadku badano uwarunkowanie stosownych numerycznych algorytmów wyznaczania poszukiwanych rozwiązań.

## 6.1 Synteza na podstawie modelu rozproszenia

Rozważmy standardowy problem syntezy regulatora  $K$  (sub)optymalnego ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$ , sformułowany dla macierzy rozproszenia uogólnionego obiektu  $P$ :  $\|LF(P, K)\|_\infty < \gamma$ ,  $\gamma > 0$ . Poniżej podajemy konieczny i wystarczający warunek istnienia rozwiązania tego problemu  $\mathcal{H}_\infty$  (Suchomski [397, 406]). Sformułowane twierdzenie o istnieniu oraz lemat o postaci tego rozwiązania stanowią odpowiedniki w dziedzinie operatora  $\delta$  klasycznych wyników znanych z pracy (Green i Limebeer [153]), por. także (Collins *et al.* [68], Collins i Song [69], Song [372], Suchomski i Kowalczyk [414, 419]). Twierdzenie to głosi, że odpowiedź na pytanie o możliwość syntezy poszukiwanego regulatora wymaga badania właściwości stabilizujących rozwiązań dwóch dyskretnych równań Riccatiego o parametrach zapisanych zgodnie z notacją macierzowych pęków (pomijamy łatwe do uzyskania formuły, w których odwołujemy się do notacji rozszerzonych macierzowych pęków).

**Twierdzenie 6.1** (o rozwiązaniu standardowego problemu syntezy regulatora; Suchomski [397, 406]). *Standardowy problem syntezy regulatora  $K$  optymalnego ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$ , sformułowany dla uogólnionego obiektu  $P$  opisanego macierzą rozproszenia  $P(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q) \times (r+p)}$  o minimalnej realizacji  $(A, B, C, D)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , danej wzorem (5.2), ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy:*

(i)  $(U_x, W_x) \in \text{dom}(\delta \text{Ric})$  oraz  $X = \delta \text{Ric}(U_x, W_x) \geq 0$ , gdzie:

$$\begin{aligned} P_x &= A - B\bar{L}^{-1}\bar{D}^T J_{mr}^\gamma \bar{C} \\ Q_x &= \bar{C}^T (I_{m+r} - J_{mr}^\gamma \bar{D} \bar{L}^{-1} \bar{D}^T) J_{mr}^\gamma \bar{C} \\ R_x &= B\bar{L}^{-1} B^T \end{aligned}$$

przy czym:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C_z \\ 0_{r \times n} \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ I_r & 0_{r \times p} \end{bmatrix}, \quad \bar{L} = \bar{D}^T J_{mr}^\gamma \bar{D};$$

(ii)  $\bar{M}_{22\nabla} < 0$  oraz  $\lambda(A - B\bar{M}^{-1}\bar{N}) \subset \mathcal{D}_\Delta$ , gdzie:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \bar{L} + \Delta B^T X B = \begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{12}^T & \bar{M}_{22} \end{bmatrix} \\ \bar{N} &= \bar{D}^T J_{mr}^\gamma \bar{C} + B^T X (I_n + \Delta A) = \begin{bmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

przy czym  $\bar{M}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $\bar{M}_{12} \in \mathbb{R}^{r \times p}$ , zaś  $\bar{M}_{22\nabla} = \bar{M}_{11} - \bar{M}_{12} \bar{M}_{22}^{-1} \bar{M}_{12}^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$  jest dopełnieniem Schura podmacierzy  $\bar{M}_{22} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , a ponadto  $\bar{N}_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$  oraz  $\bar{N}_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ;

(iii)  $(U_z, W_z) \in \text{dom}(\delta \text{Ric})$  oraz  $Z = \delta \text{Ric}(U_z, W_z) \geq 0$ , gdzie:

$$\begin{aligned} P_z &= \hat{A}^T - \hat{C}^T \hat{L}^{-1} \hat{D} J_{rp}^\gamma \hat{B}^T \\ Q_z &= \hat{B} (I_{r+p} - J_{rp}^\gamma \hat{D}^T \hat{L}^{-1} \hat{D}) J_{rp}^\gamma \hat{B}^T \\ R_z &= \hat{C}^T \hat{L}^{-1} \hat{C} \end{aligned}$$

przy czym  $\hat{L} = \hat{D} J_{rp}^\gamma \hat{D}^T$  oraz

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C}_1 & \hat{D} \\ \hat{C}_2 & \hat{D} \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} A - B_w \bar{M}_{22\nabla}^{-1} \bar{N}_\nabla & B_w V_{21}^{-1} \quad 0_{n \times p} \\ \hline V_{12} \bar{M}_{22}^{-1} (\bar{N}_2 - \bar{M}_{12}^T \bar{M}_{22}^{-1} \bar{N}_\nabla) & V_{12} \bar{M}_{22}^{-1} \bar{M}_{12}^T V_{21}^{-1} \quad I_p \\ C_y - D_{yw} \bar{M}_{22\nabla}^{-1} \bar{N}_\nabla & D_{yw} V_{21}^{-1} \quad 0_{q \times p} \end{array} \right] \end{aligned}$$

gdzie  $\hat{C}_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $\hat{C}_2 \in \mathbb{R}^{q \times n}$ , zaś  $V_{12} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  oraz  $V_{21} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  są czynnikami Cholesky'ego odpowiednich podmacierzy  $\hat{M}_{22}$  oraz  $-\gamma^{-2}\hat{M}_{22\nabla}$ , a ponadto  $\hat{N}_\nabla = \hat{N}_1 - \hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\hat{N}_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ;

(iv)  $\hat{M}_{22\nabla} < 0$  oraz  $\lambda(\hat{A} - \hat{N}\hat{M}^{-1}\hat{C}) \subset \mathcal{D}_\Delta$ , gdzie:

$$\begin{aligned}\hat{M} &= \hat{L} + \Delta\hat{C}Z\hat{C}^T = \begin{bmatrix} \hat{M}_{11} & \hat{M}_{12} \\ \hat{M}_{12}^T & \hat{M}_{22} \end{bmatrix} \\ \hat{N} &= \hat{B}J_{rp}^T\hat{D}^T + (I_n + \Delta\hat{A})Z\hat{C}^T\end{aligned}$$

przy czym  $\hat{M}_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\hat{M}_{12} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , zaś  $\hat{M}_{22\nabla} = \hat{M}_{11} - \hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\hat{M}_{12}^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$  jest dopełnieniem Schura podmacierzy  $\hat{M}_{22} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ .  $\square$

Zakładając, że rozwiązanie, o którym mówimy, spełnia założenia twierdzenia 6.1, otrzymujemy następujący lemat.

**Lemat 6.1** (o postaci optymalnego regulatora; Suchomski [406]). *Prosty (tak zwany centralny) regulator  $K$ , optymalny ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$ , opisany jest modelem:*

$$\begin{aligned}\delta\hat{x}(t) &= A_c\hat{x}(t) + B_cy(t) \\ u(t) &= C_c\hat{x}(t) + D_cy(t)\end{aligned}$$

o elementach:

$$\begin{aligned}A_c &= \hat{A} - \hat{N}_2\hat{M}_{22}^{-1}\hat{C}_2 - B_uV_{12}^{-1}(\hat{C}_1 - \hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\hat{C}_2) \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ B_c &= (\hat{N}_2 - B_uV_{12}^{-1}\hat{M}_{12})\hat{M}_{22}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times q} \\ C_c &= -V_{12}^{-1}(\hat{C}_1 - \hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1}\hat{C}_2) \in \mathbb{R}^{p \times n} \\ D_c &= -V_{12}^{-1}\hat{M}_{12}\hat{M}_{22}^{-1} \in \mathbb{R}^{p \times q}\end{aligned}$$

gdzie podmacierze  $\hat{N}_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$  oraz  $\hat{N}_2 \in \mathbb{R}^{n \times q}$  wynikają z podziału  $\hat{N} = [\hat{N}_1 \quad \hat{N}_2] \in \mathbb{R}^{n \times (p+q)}$ .  $\square$

W opisanej metodzie syntezy sterowania optymalnego ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$  wykorzystuje się rozwiązania dwóch dyskretnych równań Riccatiego, których parametry wyznaczane są w toku niezłożonych (co jest zaletą użytej notacji macierzowych pęków), lecz niestety i niezbyt łatwych do interpretacji przekształceń algebraicznych. Utrudnia to dyskusję uzyskanych wyników oraz komplikuje analizę 'struktury' odpowiednich algorytmów sterowania (dotyczy to także najprostszych przypadków algorytmów centralnych). W kolejnych częściach tego rozdziału pokazano, że przyjęcie łańcuchowych modeli rozproszenia sterowanego obiektu oraz ich  $J$ -bezstratnych

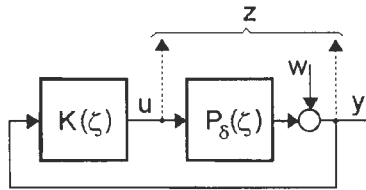
faktoryzacji pozwala na daleko idącą strukturalizację stosownych algorytmów sterowania, ułatwiającą ich analizę oraz parametryzację.

**Przykład 6.1** (wielokryterialna synteza regulatora ( $I$ ); Suchomski [397]). Obiekt o modelu  $P_\delta(\zeta) \in \mathcal{R}_P^{r \times p}$  jest sterowany w układzie zamkniętym (rys. 6.1) za pomocą dyskretnoczasowego regulatora  $K(\zeta) \in \mathcal{R}_P^{p \times r}$ . Wektor kryterialnych zmiennych ma postać  $z = [u^T \ y^T]^T$ . Postawione zadanie, w którym dąży się do ograniczenia wpływu obiektowego zakłócenia  $w$  przy uwzględnieniu wysiłku sterowania  $u$ , sprowadza się zatem do standardowego problemu odpowiedniego kształtowania funkcji wrażliwości projektowanego układu ( $\mathcal{H}_\infty$  *mixed sensitivity*; zob. np. Green i Limebeer [153], Kwakernaak [254], Skogestad i Postlethwaite [363])

$$\|G_{zw}(\zeta)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} G_{uw}(\zeta) \\ G_{yw}(\zeta) \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} K(\zeta) \cdot (I_r - P_\delta(\zeta) \cdot K(\zeta))^{-1} \\ (I_r - P_\delta(\zeta) \cdot K(\zeta))^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma.$$

Model uogólnionego obiektu, w którym  $q = r$  oraz  $m = p + r$ , dany jest wzorem

$$P(\zeta) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{p \times r} \\ I_r \\ I_r \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I_p \\ P_\delta(\zeta) \\ P_\delta(\zeta) \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$



Rys. 6.1. Przykład 6.1. Strukturalny schemat układu sterowania.

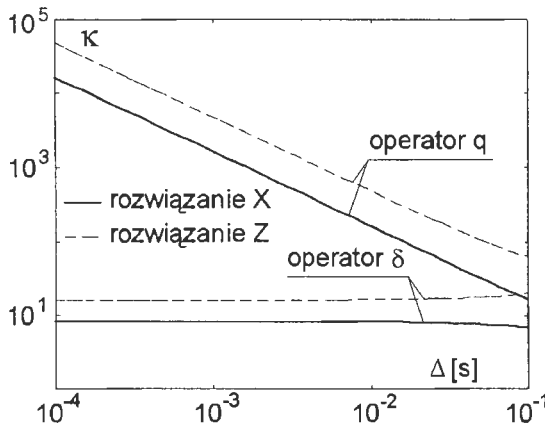
Rozważmy prosty przykład układu z niestabilnym oraz nieminimalnofazowym obiektem *SISO* opisanym następującym modelem czasu ciągłego

$$P_\rho(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ \hline -3 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Na rys. 6.2 przedstawiono wskaźniki uwarunkowania rozwiązań odpowiednich równań Riccatiego, uzyskane dla  $\gamma = 6.5$ . Mamy do czynienia ze standardowym obiektem, zatem dla dostatecznie małych wartości okresu

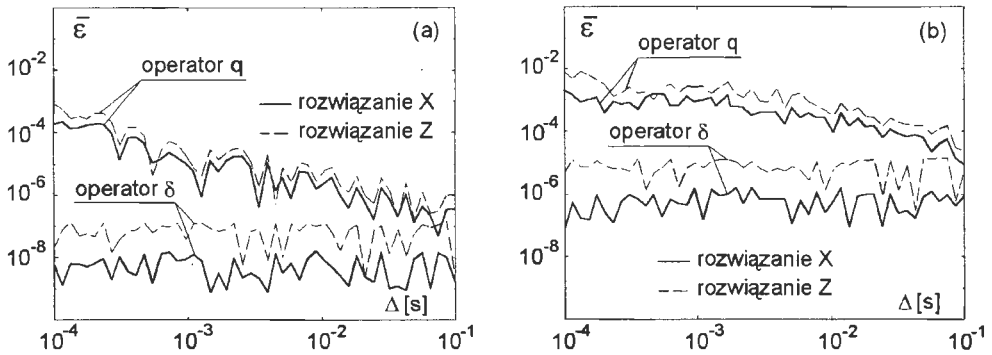


próbkowania uwidacznia się wyraźna przewaga podejścia, w którym wykorzystuje się modele związane z operatorem  $\delta$ . Dodatkową charakterystykę wrażliwości rozważanych równań Riccatiego stanowią wykresy dane na rys. 6.3. Pokazano na nich następująco zdefiniowaną funkcję błędu rozwiązania danego równania Riccatiego:  $\bar{\varepsilon} = \|X - \tilde{X}\|_F / \|X\|_F$ , przy czym  $X$  oznacza 'dokładne' rozwiązanie, zaś  $\tilde{X}$  jest rozwiązaniem przyporządkowanym modelowi o elementach reprezentowanych z mniejszą numeryczną precyzją. Wykresy pokazane na rys. 6.3a dotyczą zmiennoprzecinkowej reprezentacji o ośmiu znaczących cyfrach dziesiętnych, z kolei wykresy przedstawione na rys. 6.3b opisują rozwiązania, które odpowiadają modelom danym z sześciocyfrową precyzją.



Rys. 6.2. Przykład 6.1. Wskaźniki uwarunkowania równań Riccatiego.

Postulat skutecznego tłumienia wpływu zakłóceń  $w$  z reguły nie daje się pogodzić z żądaniem istotnego ograniczenia wysiłku sterowania  $u$  (por. Doyle *et al.* [94], Hassibi *et al.* [169], Helton i Merino [170]). Stosowne zadanie wielokryterialnej optymalizacji regulatora (optymalizacji w sensie *Pareto*) można sformułować dla funkcji celu zdefiniowanej jako odpowiednio sparametryzowana wypukła kombinacja norm obu rozważanych funkcji wrażliwości  $\|G_{uw}(\zeta)\|_\infty$  oraz  $\|G_{yw}(\zeta)\|_\infty$  (Suchomski [395]).  $\square$



Rys. 6.3. Przykład 6.1. Funkcje błędów rozwiązań równań Riccatiego: a) modele o ośmiocyfrowej reprezentacji, b) modele o sześciocyfrowej reprezentacji.

## 6.2 Łańcuchowe macierze rozproszenia jako podstawa syntezy

Podstawą omawianej metody syntezy układów optymalnych ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$  są  $J$ -bezstratne faktoryzacje łańcuchowych macierzy rozproszenia odpowiednich uogólnionych obiektów. Obiekty takie w każdym przypadku zdeterminowane są specyfiką konkretnego problemu sterowania.

Niech funkcja  $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$  będzie łańcuchową, zaś  $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$  dualną łańcuchową macierzą rozproszenia danego uogólnionego obiektu  $P$ . Standardowy problem syntezy regulatora  $K$  optymalnego ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$  formuluje się w postaci żądania, aby  $\|HM(G, K)\|_\infty < \gamma$ , lub odpowiednio  $\|DHM(H, K)\|_\infty < \gamma$ , gdzie  $\gamma > 0$  jest parametrem projektu. Idea przedstawianego podejścia w dziedzinie operatora  $\delta$  jest zgodna z klasycznymi rozwiązaniami, w których stosuje się opis obiektu w postaci łańcuchowych macierzy rozproszenia (Devilde i Dym [87], Genin [130], Green [151], Green *et al.* [152], Kimura [221, 224, 225], Kimura i Okunishi [227], Kongprawehnon i Kimura [229, 230], Lee *et al.* [270], Suchomski [389]-[391], Tsai i Postlethwaite [432], Tsai i Tsai [433]-[435], Tsai *et al.* [436]).

Załóżmy zatem, że dla danej łańcuchowej macierzy rozproszenia  $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$  istnieje jej  $(J_{mr}, J_{pr})$ -bezstratna faktoryzacja  $G(\zeta) = \Theta(\zeta) \cdot \Pi(\zeta)$ . Elementy  $K \in \mathcal{R}_P^{p \times r}$  zbioru wszystkich regulatorów, dla których zachodzi  $\|HM(G, K)\|_\infty < 1$ , mają postać

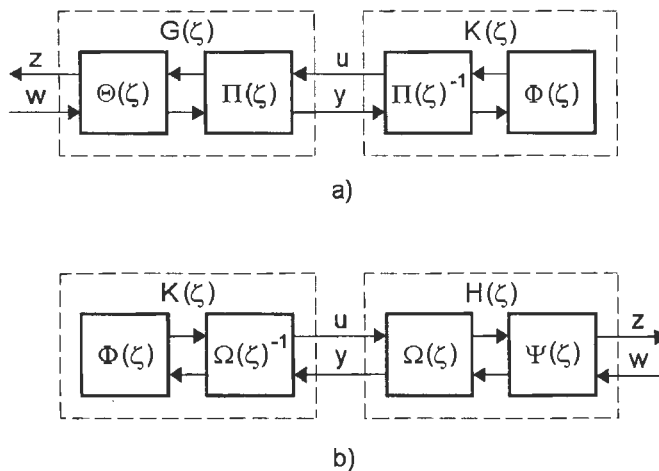
$$K(\zeta) = HM(\Pi(\zeta)^{-1}, \Phi(\zeta))$$

gdzie  $\Phi(\zeta) \in \mathcal{BH}_\infty^{p \times r}$  jest dowolną funkcją (parametrem). W tym przypadku  $HM(G, K) = HM(\Theta\Pi, HM(\Pi^{-1}, \Phi)) = HM(\Theta, \Phi)$  – a zatem wymagamy teraz, aby spełniona była nierówność  $\|HM(\Theta, \Phi)\|_\infty < 1$ . Podobne rozumowanie dotyczy sytuacji, w której dla dualnej łańcuchowej macierzy rozproszenia  $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$  istnieje jej dualna  $(J_{mq}, J_{mr})$ –bezstratna faktoryzacja  $H(\zeta) = \Omega(\zeta) \cdot \Psi(\zeta)$ . Elementy  $K \in \mathcal{R}_P^{m \times q}$  zbioru wszystkich regulatorów, dla których  $\|DHM(H, K)\|_\infty < 1$ , mają postać

$$K(\zeta) = DHM(\Omega(\zeta)^{-1}, \Phi(\zeta))$$

gdzie dowolna funkcja  $\Phi(\zeta) \in \mathcal{BH}_\infty^{m \times q}$  pełni rolę parametru. Zachodzi teraz  $DHM(H, K) = DHM(\Omega\Psi, DHM(\Omega^{-1}, \Phi)) = DHM(\Psi, \Phi)$ , co oznacza, że żądamy, aby obowiązywała nierówność  $\|DHM(\Psi, \Phi)\|_\infty < 1$ . Rozwiązania, w których zakłada się zerową wartość parametru projektu, odpowiednio  $\Phi = 0_{p \times r}$  oraz  $\Phi = 0_{m \times q}$ , nazywane są rozwiązaniami *centralnymi*.

Opisane podejście, w którym stosuje się wymienione  $J$ –bezstratne faktoryzacje odpowiednich łańcuchowych macierzy rozproszenia, pozwala na ujawnienie strukturalnych cech uzyskiwanych rozwiązań (rys. 6.4), a także ułatwia ich parametryzację (dobór czynnika  $\Phi$ ).



Rys. 6.4. Strukturalne cechy układu z uogólnionym obiektem opisanym: a) łańcuchową macierzą rozproszenia, b) dualną łańcuchową macierzą rozproszenia.

### 6.2.1 $J$ –bezstratne względnie pierwsze faktoryzacje

W niniejszym podrozdziale rozważa się podstawowe twierdzenia o względnie pierwszych  $J$ –bezstratnych faktoryzacjach stosownych łańcuchowych macierzy rozproszenia. Twierdzenia te dotyczą rozwiązań odpowiednich dyskretnych równań Riccatiego w dziedzinie operatora  $\delta$  i opierają się na postulatach istnienia stabilizujących rozwiązań, charakteryzujących się pewnymi dodatkowymi właściwościami. W szkicowy sposób dowodzi się tylko pierwszego z czterech kolejnych twierdzeń, dowody pozostałych twierdzeń przebiegają w podobny sposób.

**Twierdzenie 6.2** (o prawostronnej względnie pierwszej faktoryzacji ( $I$ ); Suchomski [400]). *Niech  $(A, B, C, D)$ , gdzie  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , będzie minimalną realizacją funkcji  $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$ . Zakłada się, że realizacja ta nie ma zer należących do  $\partial D_\Delta$ . Prawostronna względnie pierwsza faktoryzacja  $G(\zeta) = N(\zeta) \cdot M(\zeta)^{-1}$  tej funkcji, taka że  $M(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(p+r) \times (p+r)}$ , zaś  $N(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$  jest  $(J_{mr}, J_{pr})$ –bezstratną funkcją, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:*

(i)  $(U_x, W_x) \in \text{dom}(\delta Ric)$  oraz  $X = \delta Ric(U_x, W_x) \geq 0$ , gdzie:

$$\begin{aligned} P_x &= A - BS_x^{-1}D^T J_{mr}C \\ Q_x &= C^T J_{mr}(J_{mr} - DS_x^{-1}D^T)J_{mr}C \\ R_x &= BS_x^{-1}B^T \\ S_x &= D^T J_{mr}D; \end{aligned}$$

(ii) istnieje taka nieosobliwa macierz  $M_x \in \mathbb{R}^{(p+r) \times (p+r)}$ , że

$$M_x^T(S_x + \Delta B^T X B)M_x = J_{pr}.$$

Czynniki tej faktoryzacji opisane są wzorem

$$\begin{bmatrix} M(\zeta) \\ N(\zeta) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} A + BF_x & BM_x \\ \hline F_x & M_x \\ C + DF_x & DM_x \end{array} \right]$$

w którym  $F_x \in \mathbb{R}^{(p+r) \times n}$  oraz:

$$\begin{aligned} A + BF_x &= (I_n + \Delta R_x X)^{-1}(P_x - R_x X) \\ F_x &= -(S_x + \Delta B^T X B)^{-1}(D^T J_{mr}C + B^T X(I_n + \Delta A)). \end{aligned}$$

**Dowód.** Przyjęta realizacja funkcji  $M(\zeta)$  oraz  $N(\zeta)$  jest zgodna z podaną w rozdziale 1. ogólną postacią czynników prawostronnej względnie pierwszej faktoryzacji. Macierze  $F_x$  oraz  $M_x$  należy dobrać w taki sposób, aby czynnik  $N(\zeta)$  był funkcją  $(J_{mr}, J_{pr})$ -bezstratną. Odpowiednie wymagania czerpiemy z lematu 5.3. Macierz  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  spełnia równanie  $(A + BF_x)^T X + X(A + BF_x) + \Delta(A + BF_x)^T X(A + BF_x) + (C + DF_x)^T J_{mr}(C + DF_x) = 0_{n \times n}$ . Równanie to należy przekształcić do formy stosownego równania Riccatiego (zauważmy, że macierz  $F_x$  zależy od  $X$ ). W tym celu bierzemy równość  $A + BF_x = A - B(I_{p+r} + \Delta S_x^{-1} B^T X B)^{-1} S_x^{-1} (D^T J_{mr} C + B^T X (I_n + \Delta A))$ . Korzystając z lematu o odwracaniu macierzy, wyznaczamy odwrotność  $(I_{p+r} + \Delta S_x^{-1} B^T X B)^{-1} = I_{p+r} - \Delta S_x^{-1} B^T X (I_n + \Delta B S_x^{-1} B^T X) B$ , co prowadzi do zależności  $A + BF_x = (I_n + \Delta R_x X)^{-1} (P_x - R_x X)$ . Na tej podstawie, w oparciu o formuły podane w podrozdziale 4.1, otrzymujemy parę macierzy  $(U_x, W_x)$  związanych z badanym równaniem Riccatiego.  $\square$

**Twierdzenie 6.3** (o lewostronnej względnie pierwszej faktoryzacji  $(I)$ ; Suchoński [400]). *Niech  $(A, B, C, D)$ , gdzie  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , będzie minimalną realizacją funkcji  $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_{\infty}^{(m+q) \times (m+r)}$ . Zakłada się, że realizacja ta nie ma zer należących do  $\partial \mathcal{D}_{\Delta}$ . Lewostronna względnie pierwsza faktoryzacja  $H(\zeta) = \tilde{M}(\zeta)^{-1} \cdot \tilde{N}(\zeta)$  tej funkcji, taka że  $\tilde{M}(\zeta) \in \mathcal{RH}_{\infty}^{(m+q) \times (m+q)}$ , zaś  $\tilde{N}(\zeta) \in \mathcal{RH}_{\infty}^{(m+q) \times (m+r)}$  jest dualną  $(J_{mq}, J_{mr})$ -bezstratną funkcją, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:*

(i)  $(U_y, W_y) \in \text{dom}(\delta \text{Ric})$  oraz  $Y = \delta \text{Ric}(U_y, W_y) \geq 0$ , gdzie:

$$\begin{aligned} P_y &= A^T - C^T S_y^{-1} D J_{mr} B^T \\ Q_y &= -B J_{mr} (J_{mr} - D^T S_y^{-1} D) J_{mr} B^T \\ R_y &= -C^T S_y^{-1} C \\ S_y &= D J_{mr} D^T; \end{aligned}$$

(ii) istnieje taka nieosobliwa macierz  $M_y \in \mathbb{R}^{(m+q) \times (m+q)}$ , że

$$M_y (S_y - \Delta C Y C^T) M_y^T = J_{mq}.$$

Czynniki tej faktoryzacji opisane są wzorem

$$\left[ \begin{array}{c|c} \tilde{M}(\zeta) & \tilde{N}(\zeta) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} A + H_y C & H_y & B + H_y D & \\ \hline M_y C & M_y & M_y D & \end{array} \right]$$

w którym  $H_y \in \mathbb{R}^{n \times (m+q)}$  oraz:

$$\begin{aligned} A + H_y C &= (P_y^T - Y R_y)(I_n + \Delta Y R_y)^{-1} \\ H_y &= -(B J_{mr} D^T - (I_n + \Delta A) Y C^T)(S_y - \Delta C Y C^T)^{-1}. \quad \square \end{aligned}$$

**Twierdzenie 6.4** (o prawostronnej względnie pierwszej faktoryzacji (II); Suchomski [400]). *Niech  $(A, B, C, D)$ , gdzie  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , będzie minimalną realizacją funkcji  $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$ . Zakłada się, że realizacja ta nie ma zer należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ . Prawostronna względnie pierwsza faktoryzacja  $H(\zeta) = N(\zeta) \cdot M(\zeta)^{-1}$  tej funkcji, taka że  $N(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$ , zaś  $M(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+r) \times (m+r)}$  jest  $J_{mr}$ -bezstratną funkcją, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:*

(i)  $(U_z, W_z) \in \text{dom}(\delta\text{Ric})$  oraz  $Z = \delta\text{Ric}(U_z, W_z) \geq 0$ , gdzie:

$$P_z = A, \quad Q_z = 0_{n \times n}, \quad R_z = B J_{mr} B^T;$$

(ii) istnieje taka nieosobliwa macierz  $M_z \in \mathbb{R}^{(m+r) \times (m+r)}$ , że

$$M_z^T (J_{mr} + \Delta B^T Z B) M_z = J_{mr}.$$

Czynniki tej faktoryzacji opisane są wzorem

$$\begin{bmatrix} M(\zeta) \\ N(\zeta) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} A + B F_z & B M_z \\ \hline F_z & M_z \\ C + D F_z & D M_z \end{array} \right]$$

w którym  $F_z \in \mathbb{R}^{(m+r) \times n}$  oraz:

$$\begin{aligned} A + B F_z &= (I_n + \Delta R_z Z)^{-1} (P_z - R_z Z) \\ F_z &= -(J_{mr} + \Delta B^T Z B)^{-1} B^T Z (I_n + \Delta A). \quad \square \end{aligned}$$

**Twierdzenie 6.5** (o lewostronnej względnie pierwszej faktoryzacji (II); Suchomski [400]). *Niech  $(A, B, C, D)$ , gdzie  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , będzie minimalną realizacją funkcji  $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$ . Zakłada się, że realizacja ta nie ma zer należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ . Lewostronna względnie pierwsza faktoryzacja  $G(\zeta) = \tilde{M}(\zeta)^{-1} \cdot \tilde{N}(\zeta)$  tej funkcji, taka że  $\tilde{N}(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$ , zaś  $\tilde{M}(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+r) \times (m+r)}$  jest dualną  $J_{mr}$ -bezstratną funkcją, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:*

(i)  $(U_z, W_z) \in \text{dom}(\delta Ric)$  oraz  $Z = \delta Ric(U_z, W_z) \geq 0$ , gdzie:

$$P_z = A^T, \quad Q_z = 0_{n \times n}, \quad R_z = -C^T J_{mr} C;$$

(ii) istnieje taka nieosobliwa macierz  $M_z \in \mathbb{R}^{(m+r) \times (m+r)}$ , że

$$M_z(J_{mr} - \Delta C Z C^T) M_z^T = J_{mr}.$$

Czynniki tej faktoryzacji opisane są wzorem

$$\left[ \begin{array}{c|c} \tilde{M}(\zeta) & \tilde{N}(\zeta) \\ \hline M_z C & M_z D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A + H_z C & H_z \quad B + H_z D \\ \hline M_z C & M_z \quad M_z D \end{array} \right]$$

w którym  $H_z \in \mathbb{R}^{n \times (m+r)}$  oraz:

$$\begin{aligned} A + H_z C &= (P_z^T - Z R_z)(I_n + \Delta Z R_z)^{-1} \\ H_z &= (I_n + \Delta A) Z C^T (J_{mr} - \Delta C Z C^T)^{-1}. \quad \square \end{aligned}$$

**Uwaga 6.1** (Suchomski). Z lematu 5.10 wynika, że w sytuacji, o której mówi twierdzenie 6.4, jako funkcję  $M(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+r) \times (m+r)}$  wystarczy przyjąć stabilizujący  $J_{mr}$ -bezstratny prawostronny koniugator dla pary  $(A, B)$  wyznaczonej realizacją funkcji  $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$ . Rozumując w podobny sposób, na podstawie lematu 5.11 wnioskujemy, że w twierdzeniu 6.5 jako funkcję  $\tilde{M}(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+r) \times (m+r)}$  można wziąć stabilizujący dualny  $J_{mr}$ -bezstratny lewostronny koniugator dla pary  $(A, C)$  odpowiadającej założonej realizacji funkcji  $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$ .  $\square$

Prześledźmy teraz w jaki sposób wykorzystać powyższe twierdzenia do wyznaczania żądanych  $J$ -bezstratnych faktoryzacji danych łańcuchowych macierzy rozproszenia. W tym celu rozważymy dwa podejścia, w których odwołujemy się do odpowiednio zdefiniowanych dwuetapowych względnie pierwszych faktoryzacji (Suchomski [389]-[391], [396, 399, 400]). Pierwsze podejście jest bardziej 'naturalne' i polega na dwuetapowej faktoryzacji wykonywanej w taki sposób, że faktoryzacja stanowiąca treść drugiego etapu dotyczy odwrotności macierzowego czynnika uzyskanego w etapie pierwszym. Drugie z omawianych podejść jest bardziej efektywne, lecz wymaga sformułowania pomocniczych lematów. Podejście takie stanowi podstawę algorytmów syntezy opisanych w dalszych fragmentach tego rozdziału. Istotnym wynikiem prezentowanych rozważań są również końcowe wnioski, odnoszące się do strukturalnych cech odpowiednich układów zamkniętych.

### Metoda $\mathcal{XY}$

Załóżmy, że funkcja  $M(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(p+r) \times (p+r)}$ , pozyskana w wyniku zastosowania *twierdzenia 6.2* o prawostronnej względnie pierwszej faktoryzacji do funkcji  $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$ , ma odpowiednią lewostronną względnie pierwszą faktoryzację opisaną w *twierdzeniu 6.3*. Zgodnie z tym, co głosi to twierdzenie, mamy zatem  $M(\zeta) = \tilde{M}(\zeta)^{-1} \cdot \tilde{N}(\zeta)$ , gdzie  $\tilde{M}(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(p+r) \times (p+r)}$ , zaś  $\tilde{N}(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(p+r) \times (p+r)}$  jest dualną  $J_{pr}$ -bezstratną funkcją. Ponadto

$$\left[ \begin{array}{c|c} \tilde{M}(\zeta) & \tilde{N}(\zeta) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A + (B + H_y)F_x & \begin{array}{c} H_y \quad (B + H_y)M_x \\ M_y \quad M_y M_x \end{array} \end{array} \right]$$

gdzie  $\mathbb{R}^{n \times (p+r)} \ni H_y = (I_n + \Delta A)Y F_x^T (S_y - \Delta F_x Y F_x^T)^{-1} - B$ , zaś nieosobliwa macierz  $M_y \in \mathbb{R}^{(p+r) \times (p+r)}$  spełnia równanie  $M_y (S_y - \Delta F_x Y F_x^T) M_y^T = J_{pr}$ , przy czym  $S_y = M_x J_{pr} M_x^T \in \mathbb{R}^{(p+r) \times (p+r)}$ . Rozwiązanie  $Y = \delta Ric(U_y, W_y)$  odpowiada teraz równaniu Riccatiego skojarzonemu z parą macierzy  $(U_y, W_y) \in \text{dom}(\delta Ric)$  o następujących elementach:  $P_y = A^T$ ,  $Q_y = 0_{n \times n}$  oraz  $R_y = -F_x^T S_y^{-1} F_x$ .

Ze względu na cel, który sobie stawiamy, podstawowe znaczenie mają cechy czynników odwrotności  $M(\zeta)^{-1} = \tilde{N}(\zeta)^{-1} \cdot \tilde{M}(\zeta)$ . Stosując uproszczoną notację, dla  $\tilde{N}$  mamy  $\tilde{N} = F_{dc}(S)$ , gdzie  $S \in \mathcal{R}_P^{(p+r) \times (r+p)}$  jest pewną dualną bezstratną funkcją. Teraz  $\tilde{N}^{-1} = F_c(S) = F_c((S^\sim)^{-1})$ , co oznacza, że  $\tilde{N}^{-1}$  jest  $J_{pr}$ -bezstratną funkcją. Ponieważ iloczyn funkcji  $J$ -bezstratnych jest funkcją  $J$ -bezstratną, zatem czynniki poszukiwanej  $(J_{mr}, J_{pr})$ -bezstratnej faktoryzacji funkcji  $G(\zeta)$  przyjmują postać:  $\Theta(\zeta) = N(\zeta) \cdot \tilde{N}(\zeta)^{-1} \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$  oraz  $\Pi(\zeta) = \tilde{M}(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{p+r}$ . Regulator uzyskany w oparciu o tę faktoryzację opisany jest przeto formułą  $K(\zeta) = HM(\tilde{M}(\zeta)^{-1}, \Phi(\zeta))$ ,  $\Phi(\zeta) \in \mathcal{BH}_\infty^{p \times r}$  (por. rys. 6.5a).

Rozwiązanie  $X \geq 0$ , skojarzone z pierwszą wykonaną faktoryzacją, spełnia równanie Riccatiego  $A^T X + X A + \Delta A^T X A - (C^T J_{mr} D + (I_n + \Delta A^T) X B) (S_x + \Delta B^T X B)^{-1} (D^T J_{mr} C + B^T X (I_n + \Delta A)) + C^T J_{mr} C = 0_{n \times n}$ . Ponieważ  $S_x + \Delta B^T X B = (M_x J_{pr} M_x^T)^{-1} = S_y^{-1}$ , zatem  $R_y = -(A^T X + X A + \Delta A^T X A + C^T J_{mr} C)$ . Powyższe rozumowanie jest podstawą następującego pomocniczego lematu.

**Lemat 6.2** (o lewostronnej względnie pierwszej faktoryzacji w metodzie  $\mathcal{XY}$ ; Suchomski [400]). *Niech  $M(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(p+r) \times (p+r)}$  wynika z twierdzenia 6.2 o prawostronnej względnie pierwszej faktoryzacji zastosowanego do funkcji  $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$ . Lewostronna względnie pierwsza faktoryzacja  $M(\zeta) = \tilde{M}(\zeta)^{-1} \cdot \tilde{N}(\zeta)$ , gdzie  $\tilde{M}(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(p+r) \times (p+r)}$ , zaś  $\tilde{N}(\zeta) \in$*



$\mathcal{RH}_\infty^{(p+r) \times (p+r)}$  jest dualną  $J_{pr}$ -bezstratną funkcją, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i)  $(U_y, W_y) \in \text{dom}(\delta Ric)$  oraz  $Y = \delta Ric(U_y, W_y) \geq 0$ , gdzie:

$$P_y = A^T, \quad Q_y = 0_{n \times n}, \quad R_y = -(A^T X + X A + \Delta A^T X A + C^T J_{mr} C);$$

(ii) istnieje taka nieosobliwa macierz  $M_y \in \mathbb{R}^{(p+r) \times (p+r)}$ , że

$$M_y(S_y - \Delta F_x Y F_x^T) M_y^T = J_{pr}$$

$$\text{gdzie } S_y = M_x J_{pr} M_x^T \in \mathbb{R}^{(p+r) \times (p+r)}.$$

Ponadto obowiązują wzory:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \tilde{M}(\zeta) & \tilde{N}(\zeta) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_y & H_y \quad B_y \\ \hline M_y F_x & M_y \quad M_y M_x \end{array} \right]$$

$$\tilde{M}(\zeta)^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} A + B F_x & H_y M_y^{-1} \\ \hline -F_x & M_y^{-1} \end{array} \right], \quad \tilde{N}(\zeta)^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} A & \bar{S}_y M_y^{-1} \\ \hline -M_x^{-1} F_x & M_x^{-1} M_y^{-1} \end{array} \right]$$

gdzie:

$$A_y = A + \bar{S}_y F_x, \quad B_y = \bar{S}_y M_x, \quad H_y = \bar{S}_y - B$$

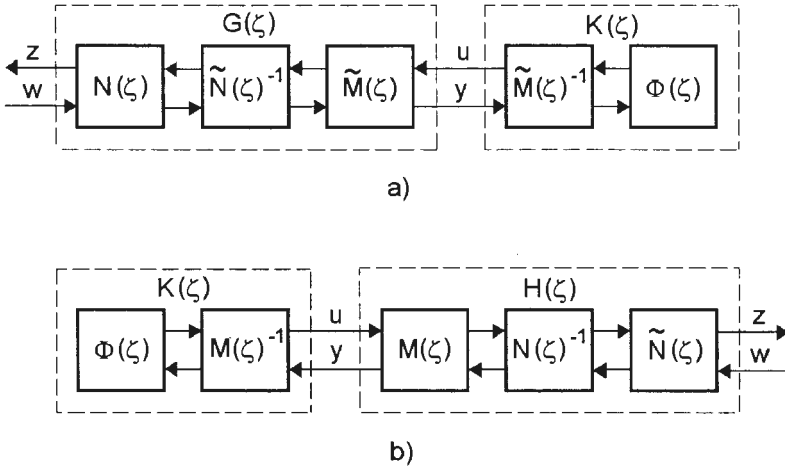
$$\bar{S}_y = (I_n + \Delta A) Y F_x^T (S_y - \Delta F_x Y F_x^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times (p+r)}. \quad \square$$

### Metoda $\mathcal{YX}$

Analogiczne wyniki uzyskuje się, stosując do funkcji  $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$  kolejno twierdzenia 6.3 oraz 6.2. W ten sposób dostajemy prawostronną względnie pierwszą faktoryzację  $\tilde{M}(\zeta) = N(\zeta) \cdot M(\zeta)^{-1}$  funkcji  $\tilde{M}(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q) \times (m+q)}$ , która pochodzi z lewostronnej względnie pierwszej faktoryzacji wykonanej we wstępnym etapie rozważanej metody  $\mathcal{YX}$ , przy czym  $M(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q) \times (m+q)}$ , zaś  $N(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q) \times (m+q)}$  jest  $J_{mq}$ -bezstratną funkcją. Zachodzi przy tym

$$\left[ \begin{array}{c} M(\zeta) \\ N(\zeta) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A + H_y(C + F_x) & H_y M_x \\ \hline F_x & M_x \\ M_y(C + F_x) & M_y M_x \end{array} \right]$$

gdzie  $\mathbb{R}^{n \times (m+q)} \ni F_x = -(S_x + \Delta H_y^T X H_y)^{-1} H_y^T X (I_n + \Delta A) - C$ , zaś nieosobliwa macierz  $M_x \in \mathbb{R}^{(m+q) \times (m+q)}$  spełnia równanie  $M_x^T (S_x + \Delta H_y^T X H_y)$



Rys. 6.5. Struktura układu z uogólnionym obiektem reprezentowanym przez: a) łańcuchową macierz rozproszenia, b) dualną łańcuchową macierz rozproszenia.

$M_x = J_{mq}$ , w którym  $S_x = M_y^T J_{mq} M_y \in \mathbb{R}^{(m+q) \times (m+q)}$ . Rozwiązanie  $X = \delta Ric(U_x, W_x)$  odpowiada teraz równaniu Riccatiego związanemu z parą macierzy  $(U_x, W_x) \in \text{dom}(\delta Ric)$  o następujących elementach:  $P_x = A$ ,  $Q_x = 0_{n \times n}$  oraz  $R_x = H_y S_x^{-1} H_y^T$ . Czynniki poszukiwanej dualnej  $(J_{mq}, J_{mr})$ -bezstratnej faktoryzacji funkcji  $H(\zeta)$  mają postać:  $\Omega(\zeta) = M(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{m+q}$  oraz  $\Psi(\zeta) = N(\zeta)^{-1} \cdot \tilde{N}(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$ . Odpowiedni regulator opisany jest zatem formułą  $K(\zeta) = DHM(M(\zeta)^{-1}, \Phi(\zeta))$ ,  $\Phi(\zeta) \in \mathcal{BH}_\infty^{m \times q}$  (por. rys. 6.5b). Otrzymujemy w ten sposób kolejny pomocniczy lemat.

**Lemat 6.3** (o prawostronnej względnie pierwszej faktoryzacji w metodzie  $\mathcal{YX}$ ; Suchomski [400]). Niech  $\tilde{M}(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q) \times (m+q)}$  wynika z twierdzenia 6.3 o lewostronnej względnie pierwszej faktoryzacji zastosowanego do funkcji  $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$ . Prawostronna względnie pierwsza faktoryzacja  $\tilde{M}(\zeta) = N(\zeta) \cdot M(\zeta)^{-1}$ , gdzie  $M(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q) \times (m+q)}$ , zaś  $N(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q) \times (m+q)}$  jest  $J_{mq}$ -bezstratną funkcją, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i)  $(U_x, W_x) \in \text{dom}(\delta Ric)$  oraz  $X = \delta Ric(U_x, W_x) \geq 0$ , gdzie:

$$P_x = A, \quad Q_x = 0_{n \times n}, \quad R_x = -(AY + YA^T + \Delta AY A^T - BJ_{mr} B^T);$$

(ii) istnieje taka nieosobliwa macierz  $M_x \in \mathbb{R}^{(m+q) \times (m+q)}$ , że

$$M_x^T (S_x + \Delta H_y^T X H_y) M_x = J_{mq}$$

gdzie  $S_x = M_y^T J_{mq} M_y \in \mathbb{R}^{(m+q) \times (m+q)}$ .

Ponadto obowiązują wzory:

$$\begin{bmatrix} M(\zeta) \\ N(\zeta) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} A_x & H_y M_x \\ \hline F_x & M_x \\ C_x & M_y M_x \end{array} \right]$$

$$M(\zeta)^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} A + H_y C & H_y \\ \hline -M_x^{-1} F_x & M_x^{-1} \end{array} \right], \quad N(\zeta)^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} A & H_y M_y^{-1} \\ \hline -M_x^{-1} \bar{S}_x & M_x^{-1} M_y^{-1} \end{array} \right]$$

gdzie:

$$A_x = A + H_y \bar{S}_x, \quad C_x = M_y \bar{S}_x, \quad F_x = \bar{S}_x - C$$

$$\bar{S}_x = -(S_x + \Delta H_y^T X H_y)^{-1} H_y^T X (I_n + \Delta A) \in \mathbb{R}^{(m+q) \times n}. \quad \square$$

Przechodząc do ostatniej części tego podrozdziału, zakładamy, że dla danej funkcji  $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$  istnieje lewostronna względnie pierwsza faktoryzacja  $G(\zeta) = \tilde{M}(\zeta)^{-1} \cdot \tilde{N}(\zeta)$  o cechach opisanych w *twierdzeniu 6.5*. Oznacza to, że  $\tilde{N}(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$ , zaś  $\tilde{M}(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+r) \times (m+r)}$  jest dualną  $J_{mr}$ -bezstratną funkcją (w *uwadze 6.1* wskazano na związek omawianej faktoryzacji z istnieniem odpowiedniego stabilizującego koniugatora). Rozważmy relacje między parą  $(U_y, W_y)$  z drugiego etapu metody  $\mathcal{XY}$  oraz parą  $(U_z, W_z)$  występującą w *twierdzeniu 6.5*. Analizując postać macierzy wymienionych par, stwierdzamy, że obowiązuje równość  $(U_y, W_y) = (M_l U_z M_r, M_l W_z M_r)$ , w której

$$M_l = \begin{bmatrix} I_n & -(I_n + \Delta A^T) X \\ 0_{n \times n} & I_n \end{bmatrix}, \quad M_r = \begin{bmatrix} I_n & X \\ 0_{n \times n} & I_n \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że nieosobliwe macierze  $M_l \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  oraz  $M_r \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  tej relacji uogólnionego podobieństwa ( $M_l \neq M_r^{-1}$  przy  $\Delta > 0$ ) zależą od rozwiązania  $X$  z pierwszego etapu metody  $\mathcal{XY}$ . Ponadto, widoczna jest jawna zależność macierzy  $M_l$  od okresu próbkowania  $\Delta$ . Mamy tu zatem do czynienia z sytuacją znacznie bardziej złożoną w stosunku do tej, która odpowiada analogicznemu zadaniu sformułowanemu dla modeli czasu ciągłego. Relacja

podobieństwa łączy natomiast uogólnione macierze Hamiltona przyporządkowane omawianym parom macierzy:  $W_y^{-1}U_y = M_r^{-1}(W_z^{-1}U_z)M_r$ . Oznacza to, między innymi, że  $\lambda(U_y, W_y) = \lambda(U_z, W_z)$ . Na tej podstawie stwierdzamy, że w przypadku, w którym  $(U_z, W_z) \in \text{dom}(\delta Ric)$ ,  $Z = \delta Ric(U_z, W_z) \geq 0$ ,  $\mathbb{R}^{n \times n} \ni X = X^T \geq 0$  oraz  $I_n - XZ > 0$ , wtedy  $(U_y, W_y) \in \text{dom}(\delta Ric)$ ,  $Y = \delta Ric(U_y, W_y)$  oraz  $Y = Z(I_n - XZ)^{-1}$ .

Nietrudno wywieść analogiczne wnioski o prawostronnej względnie pierwszej faktoryzacji funkcji  $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$  (por. uwaga 6.1). W tym przypadku, zgodnie z twierdzeniem 6.4, mamy  $(U_x, W_x) = (M_l U_z M_r, M_l W_z M_r)$ , gdzie:

$$M_l = \begin{bmatrix} I_n & -(I_n + \Delta A)Y \\ 0_{n \times n} & I_n \end{bmatrix}, \quad M_r = \begin{bmatrix} I_n & Y \\ 0_{n \times n} & I_n \end{bmatrix}$$

przy czym para  $(U_x, W_x)$  obejmuje teraz macierze pojawiające się w drugim etapie metody  $\mathcal{YX}$ . Odpowiednie wymagania mają postać:  $Z = \delta Ric(U_z, W_z) \geq 0$  oraz  $I_n - YZ > 0$ .

Z powyższych ustaleń wynika, że metody  $\mathcal{XY}$  oraz  $\mathcal{YX}$  można sprowadzić do równoważnych odpowiednich metod  $\mathcal{XZ}$  oraz  $\mathcal{YZ}$  (por. Ionescu i Weiss [194], Walker [457]). Właśnie owe (algorytmicznie prostsze) metody uczyniono podstawą 'użytkowych' twierdzeń podanych w następnym podrozdziale.

Pokażemy, że w przypadku metody  $\mathcal{Z}$  spełnienie warunku  $Z = \delta Ric(U_z, W_z) \geq 0$  zapewnia istnienie takiej nieosobliwej macierzy  $M_z \in \mathbb{R}^{(m+r) \times (m+r)}$ , że  $M_z(J_{mr} - \Delta C Z C^T)M_z^T = J_{mr}$ . Zauważmy, że dla metody syntezy odpowiedniego regulatora czasu ciągłego analogiczny problem nie występuje (por. Kimura [225]). Ze wzoru (4.7) wynika, że  $Z$  spełnia równanie  $Z = (I_n + \Delta A)(I_n - \Delta Z C^T J_{mr} C)^{-1} Z (I_n + \Delta A^T)$ . Ponieważ  $Z \geq 0$ , zatem  $(I_n - \Delta Z C^T J_{mr} C)^{-1} Z \geq 0$  (zakładamy, że  $A$  jest macierzą regularną). Symetryczna macierz  $(I_n - \Delta Z C^T J_{mr} C)^{-1}$  musi być macierzą dodatnio określoną. Przypuśćmy bowiem, że  $\lambda < 0$  jest wartością własną tej macierzy, a  $x \in \mathbb{R}^n$  oznacza odpowiedni lewy wektor własny. Wtedy  $x^T (I_n - \Delta Z C^T J_{mr} C)^{-1} Z x = \lambda x^T Z x < 0$ , co jest niezgodne z wcześniejszymi ustaleniami. Równość  $x^T Z x = 0$  odrzucamy bowiem, jako równoważną równości  $Z x = 0_n$  przeczącej przyjętemu założeniu  $\lambda < 0$ . Na tej podstawie wnioskujemy, że  $\Delta C_z^T C_z Z < I_n + \Delta C_w^T C_w Z$ , gdzie  $C_z \in \mathbb{R}^{m \times n}$  oraz  $C_w \in \mathbb{R}^{r \times n}$  są podmacierzami macierzy  $C = \begin{bmatrix} C_z^T & C_w^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+r) \times n}$ . Załóżmy teraz, że macierz  $M_z$  ma blokową trójkątną strukturę

$$M_z = \begin{bmatrix} M_{z11} & M_{z12} \\ 0_{r \times m} & M_{z22} \end{bmatrix}$$

o podziale  $(m+r) \times (m+r)$ . Macierz  $M_{z22} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  spełnia równanie  $M_{z22}(I_r + \Delta C_w Z C_w^T) M_{z22}^T = I_r$ , co przy  $Z \geq 0$  oznacza, że rozwiązanie  $M_{z22} > 0$  zawsze istnieje i może być wyznaczone przez faktoryzację Cholesky'ego. Macierz  $M_{z11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  spełnia równanie  $M_{z11}(I_m - \Delta C_z Z (I_n + \Delta C_w^T C_w Z)^{-1} C_z^T) M_{z11}^T = I_m$ , wynikające z *lematu o odwracaniu macierzy*. Rozwiązanie  $M_{z11} > 0$  istnieje, jeżeli  $\Delta C_z Z (I_n + \Delta C_w^T C_w Z)^{-1} C_z^T < I_m$ , co z kolei jest konsekwencją już poczynionych ustaleń. Po wyznaczeniu metodą Cholesky'ego macierzy  $M_{z11}$ , obliczamy  $M_{z12} = -\Delta M_{z11} C_z Z C_w^T M_{z22}^T M_{z22}$ .

### 6.2.2 Metoda uogólnionego zagadnienia własnego

W niniejszym podrozdziale przedstawiono dwa twierdzenia o  $J$ -bezstratnych faktoryzacjach funkcji przenoszenia obiektów o standardowych modelach. Konieczne i wystarczające warunki takich faktoryzacji, wynikające z rozważań przeprowadzonych w poprzednim podrozdziale, sformułowano w oparciu o odpowiednie uogólnione zagadnienia własne. Twierdzenia te opatrzone komentarzami o postaci stosownych algorytmów sterowania. Teoretyczne rozważania zilustrowano dwoma numerycznymi przykładami. W pierwszym z nich przywołuje się problem wielokryterialnej optymalizacji prostego regulatora. Drugi przykład jest bardziej złożony i dotyczy syntezy odpornego regulatora metodą rozmieszczania biegunów.

**Twierdzenie 6.6** (o  $J$ -bezstratnej faktoryzacji ( $I$ ); Suchomski [406]).  
*Niech  $(A, B, C, D)$ , gdzie  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , będzie minimalną realizacją funkcji  $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_{\infty}^{(m+r) \times (p+r)}$ . Zakłada się, że realizacja ta nie ma zer należących do  $\partial \mathcal{D}_{\Delta}$ .  $(J_{mr}, J_{pr})$ -bezstratna faktoryzacja  $G(\zeta) = \Theta(\zeta) \cdot \Pi(\zeta)$  tej funkcji istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:*

(i)  $(U_x, W_x) \in \text{dom}(\delta Ric)$  oraz  $X = \delta Ric(U_x, W_x) \geq 0$ , gdzie:

$$\begin{aligned} P_x &= A - BS_x^{-1} D^T J_{mr} C \\ Q_x &= C^T J_{mr} (J_{mr} - DS_x^{-1} D^T) J_{mr} C \\ R_x &= BS_x^{-1} B^T \\ S_x &= D^T J_{mr} D; \end{aligned}$$

(ii)  $(U_{\bar{x}}, W_{\bar{x}}) \in \text{dom}(\delta Ric)$  oraz  $\bar{X} = \delta Ric(U_{\bar{x}}, W_{\bar{x}}) \geq 0$ , gdzie:

$$P_{\bar{x}} = A^T, \quad Q_{\bar{x}} = 0_{n \times n}, \quad R_{\bar{x}} = -C^T J_{mr} C;$$

(iii)  $\|X \bar{X}\|_2 < 1$ ;

(iv) istnieje taka nieosobliwa macierz  $M_x \in \mathbb{R}^{(p+r) \times (p+r)}$ , że

$$M_x^T (S_x + \Delta B^T X B) M_x = J_{pr}.$$

Unimodularny czynnik  $\Pi(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{p+r}$  ma postać

$$\Pi(\zeta) = N_{x\bar{x}}^{-1} \left[ \begin{array}{c|c} A + H_{\bar{x}} C & -B_{\bar{x}} \\ \hline F_x (I_n - \bar{X} X)^{-1} & I_{p+r} \end{array} \right]$$

gdzie:

$$\begin{aligned} F_x &= -S_x^{-1} (D^T J_{mr} C + B^T (I_n + \Delta X R_x)^{-1} X (I_n + \Delta P_x)) \\ &= -(S_x + \Delta B^T X B)^{-1} (D^T J_{mr} C + B^T X (I_n + \Delta A)) \\ H_{\bar{x}} &= (I_n + \Delta A) \bar{X} (I_n + \Delta R_{\bar{x}} \bar{X})^{-1} C^T J_{mr} \\ &= (I_n + \Delta A) \bar{X} C^T (J_{mr} - \Delta C \bar{X} C^T)^{-1} \\ B_{\bar{x}} &= B + H_{\bar{x}} D \end{aligned}$$

zaś  $N_{x\bar{x}} \in \mathbb{R}^{(p+r) \times (p+r)}$  jest pewną nieosobliwą macierzą, spełniającą równanie

$$N_{x\bar{x}}^T (D^T (J_{mr} - \Delta C \bar{X} C^T)^{-1} D + \Delta B_{\bar{x}}^T X (I_n - \bar{X} X)^{-1} B_{\bar{x}}) N_{x\bar{x}} = J_{pr}. \quad \square$$

**Twierdzenie 6.7** (o dualnej  $J$ -bezstratnej faktoryzacji ( $I$ ); Suchomski [406]). Niech  $(A, B, C, D)$ , gdzie  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , będzie minimalną realizacją funkcji  $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$ . Zakłada się, że realizacja ta nie ma zer należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ . Dualna  $(J_{mq}, J_{mr})$ -bezstratna faktoryzacja  $H(\zeta) = \Omega(\zeta) \cdot \Psi(\zeta)$  tej funkcji istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i)  $(U_y, W_y) \in \text{dom}(\delta\text{Ric})$  oraz  $Y = \delta\text{Ric}(U_y, W_y) \geq 0$ , gdzie:

$$\begin{aligned} P_y &= A^T - C^T S_y^{-1} D J_{mr} B^T \\ Q_y &= -B J_{mr} (J_{mr} - D^T S_y^{-1} D) J_{mr} B^T \\ R_y &= -C^T S_y^{-1} C \\ S_y &= D J_{mr} D^T; \end{aligned}$$

(ii)  $(U_{\bar{y}}, W_{\bar{y}}) \in \text{dom}(\delta\text{Ric})$  oraz  $\bar{Y} = \delta\text{Ric}(U_{\bar{y}}, W_{\bar{y}}) \geq 0$ , gdzie:

$$P_{\bar{y}} = A, \quad Q_{\bar{y}} = 0_{n \times n}, \quad R_{\bar{y}} = B J_{mr} B^T;$$

(iii)  $\|Y \bar{Y}\|_2 < 1$ ;

(iv) istnieje taka nieosobliwa macierz  $M_y \in \mathbb{R}^{(m+q) \times (m+q)}$ , że

$$M_y(S_y - \Delta CYC^T)M_y^T = J_{mq}.$$

Unimodularny czynnik  $\Omega(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{m+q}$  ma postać

$$\Omega(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} A + BF_{\bar{y}} & (I_n - Y\bar{Y})^{-1}H_y \\ \hline -C_{\bar{y}} & I_{m+q} \end{array} \right] N_{y\bar{y}}^{-1}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} H_y &= -(BJ_{mr}D^T - (I_n + \Delta P_y^T)Y(I_n + \Delta R_y Y)^{-1}C^T)S_y^{-1} \\ &= -(BJ_{mr}D^T - (I_n + \Delta A)YC^T)(S_y - \Delta CYC^T)^{-1} \\ F_{\bar{y}} &= -J_{mr}B^T(I_n + \Delta \bar{Y}R_{\bar{y}})^{-1}\bar{Y}(I_n + \Delta A) \\ &= -(J_{mr} + \Delta B^T\bar{Y}B)^{-1}B^T\bar{Y}(I_n + \Delta A) \\ C_{\bar{y}} &= C + DF_{\bar{y}} \end{aligned}$$

zaś  $N_{y\bar{y}} \in \mathbb{R}^{(m+q) \times (m+q)}$  jest pewną nieosobliwą macierzą, spełniającą równanie

$$N_{y\bar{y}}(D(J_{mr} + \Delta B^T\bar{Y}B)^{-1}D^T - \Delta C_{\bar{y}}(I_n - Y\bar{Y})^{-1}YC_{\bar{y}}^T)N_{y\bar{y}}^T = J_{mq}. \quad \square$$

**Uwaga 6.2** (Suchomski). Niech  $X_q, \bar{X}_q, Y_q$  oraz  $\bar{Y}_q$  oznaczają rozwiązania stosownych dyskretnych równań Riccatiego, sformułowanych dla modeli odwołujących się do standardowego operatora  $q$ . Zachodzi (por. podrozdział 4.1):

$$\begin{aligned} (R1) \quad X &= \Delta \cdot X_q, & \bar{Y} &= \Delta \cdot \bar{Y}_q \\ (R2) \quad \bar{X} &= \Delta^{-1} \cdot \bar{X}_q, & Y &= \Delta^{-1} \cdot Y_q. \end{aligned}$$

Gdy spełnione są założenia twierdzenia 6.6 oraz 6.7, macierze  $F_x \in \mathbb{R}^{(p+r) \times n}$ ,  $H_{\bar{x}} \in \mathbb{R}^{n \times (m+r)}$ ,  $H_y \in \mathbb{R}^{n \times (m+q)}$  oraz  $F_{\bar{y}} \in \mathbb{R}^{(m+r) \times n}$  zapewniają stabilność odpowiednich macierzy:  $A + BF_x$ ,  $A + H_{\bar{x}}C$ ,  $A + H_yC$  oraz  $A + BF_{\bar{y}}$ .

Z lematu 4.7 wynika, że w przypadku regularnej macierzy  $A$ :

$$\begin{aligned} H_{\bar{x}} &= \bar{X}I_A C^T J_{mr} \\ F_{\bar{y}} &= -J_{mr}B^T I_A \bar{Y}. \end{aligned}$$

Dla stabilnej macierzy  $A$  mamy  $\bar{X} = \mathbf{0}_{n \times n}$  oraz  $\bar{Y} = \mathbf{0}_{n \times n}$ , co w konsekwencji prowadzi do:  $H_{\bar{x}} = \mathbf{0}_{n \times (m+r)}$ ,  $B_{\bar{x}} = B$ ,  $N_{x\bar{x}} = M_x$ ,  $F_{\bar{y}} = \mathbf{0}_{(m+r) \times n}$ ,  $C_{\bar{y}} = C$

oraz  $N_{y\bar{y}} = M_y$ . Na tej podstawie łatwo jest wyznaczyć uproszczone postacie czynników  $\Pi(\zeta)$  oraz  $\Omega(\zeta)$ , a także ich odwrotności:

$$\Pi(\zeta) = M_x^{-1} \left[ \begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline F_x & I_{p+r} \end{array} \right], \quad \Pi(\zeta)^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} A + BF_x & B \\ \hline F_x & I_{p+r} \end{array} \right] M_x$$

$$\Omega(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} A & H_y \\ \hline -C & I_{m+q} \end{array} \right] M_y^{-1}, \quad \Omega(\zeta)^{-1} = M_y \left[ \begin{array}{c|c} A + H_y C & H_y \\ \hline C & I_{m+q} \end{array} \right].$$

W przypadku  $\Delta > 0$  macierz  $M_x$  zależy od rozwiązania  $X$  pierwszego równania Riccatiego sformułowanego w *twierdzeniu 6.6* (analogiczne spostrzeżenie dotyczy macierzy  $M_y$  oraz rozwiązania  $Y$ , o których mówi *twierdzenie 6.7*). Z kolei, przy  $\Delta > 0$  macierz  $N_{x\bar{x}}$  zależy zarówno od rozwiązania  $X$ , jak też od rozwiązania  $\bar{X}$  drugiego równania Riccatiego sformułowanego w *twierdzeniu 6.6* (w przypadku macierzy  $N_{y\bar{y}}$  mamy zależność od rozwiązań  $Y$  oraz  $\bar{Y}$  wymienionych w *twierdzeniu 6.7*). Powyższe fakty przyczyniają się do istotnego skomplikowania syntezy oraz analizy właściwości regulatorów czasu dyskretnego ( $\delta$ ) w stosunku do ich asymptotycznych odpowiedników czasu ciągłego.  $\square$

### Struktura algorytmu sterowania

Załóżmy, że istnieje optymalny regulator  $K = HM(\Pi^{-1}, \Phi)$ . Zgodnie z *twierdzeniem 6.6* zachodzi

$$\Pi(\zeta)^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} A + H_{\bar{x}}C + B_{\bar{x}}F_x(I_n - \bar{X}X)^{-1} & B_{\bar{x}} \\ \hline F_x(I_n - \bar{X}X)^{-1} & I_{p+r} \end{array} \right] N_{x\bar{x}}$$

oraz  $\Phi(\zeta) \in \mathcal{BH}_\infty^{p \times r}$ . Ponieważ  $A + H_{\bar{x}}C + B_{\bar{x}}F_x(I_n - \bar{X}X)^{-1} = (I_n - \bar{X}X)(A + BF_x)(I_n - \bar{X}X)^{-1}$ , zatem funkcji  $\Pi(\zeta)^{-1}$  można przypisać odpowiedni model podobny

$$\Pi(\zeta)^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} A + BF_x & (I_n - \bar{X}X)^{-1} B_{\bar{x}} \\ \hline F_x & I_{p+r} \end{array} \right] N_{x\bar{x}} = \Pi_x(\zeta) \cdot N_{x\bar{x}}$$

potwierdzający jej unimodularność. Czynniki  $\Pi_x(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{p+r}$  ma postać

$$\Pi_x(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|cc} A + BF_x & U_{\bar{x}x} B_{\bar{x}}^a & U_{\bar{x}x} B_{\bar{x}}^b \\ \hline F_x^u & I_p & 0_{p \times r} \\ F_x^y & 0_{r \times p} & I_r \end{array} \right]$$

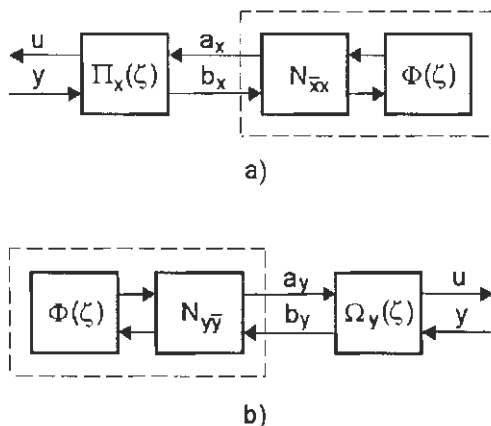


gdzie:

$$\begin{aligned}
 U_{\bar{x}x} &= (I_n - \bar{X}X)^{-1} \\
 B_{\bar{x}} &= [ B_{\bar{x}}^a \quad B_{\bar{x}}^b ], \quad B_{\bar{x}}^a \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad B_{\bar{x}}^b \in \mathbb{R}^{n \times r} \\
 F_x &= \begin{bmatrix} F_x^u \\ F_x^y \end{bmatrix}, \quad F_x^u \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad F_x^y \in \mathbb{R}^{r \times n}.
 \end{aligned}$$

Optymalnemu regulatorowi  $K(\zeta) = HM(\Pi_x(\zeta) \cdot N_{x\bar{x}}, \Phi(\zeta)) = HM(\Pi_x(\zeta), HM(N_{x\bar{x}}, \Phi(\zeta)))$  przyporządkowujemy strukturalny schemat dany na rys. 6.6a, przy czym wyróżnione pomocnicze sygnały  $a_x$  oraz  $b_x$ , związane relacją  $a_x(\zeta) = HM(N_{x\bar{x}}, \Phi(\zeta))b_x(\zeta)$ , mają wymiary odpowiednio  $p$  oraz  $r$ . Warto podkreślić, że w przypadku optymalnego regulatora czasu ciągłego relacja ta ma prostszą postać i nie zależy od rozwiązań  $X$  oraz  $\bar{X}$  stosownych ciągłych równań Riccatiego. Poniższe formuły opisują algorytm rozważanego regulatora (Suchomski [410]):

$$\begin{aligned}
 \delta \hat{x}(t) &= (A + BF_x)\hat{x}(t) + U_{\bar{x}x}(B_{\bar{x}}^a HM(N_{x\bar{x}}, \Phi) + B_{\bar{x}}^b)b_x(t) \\
 b_x(t) &= -F_x^y \hat{x}(t) + y(t) \\
 u(t) &= F_x^u \hat{x}(t) + HM(N_{x\bar{x}}, \Phi)b_x(t).
 \end{aligned}$$



Rys. 6.6. Struktura optymalnego regulatora: a) algorytm wyprowadzony dla łańcuchowej macierzy rozproszenia, b) algorytm wyprowadzony dla dualnej łańcuchowej macierzy rozproszenia.

Analogiczne wnioski obowiązują dla regulatora  $K = DHM(\Omega^{-1}, \Phi)$  wyznaczonego w oparciu o metodę dualnej bezstratnej faktoryzacji. W tym

przypadku, zgodnie z *twierdzeniem 6.7*, mamy

$$\Omega(\zeta)^{-1} = N_{y\bar{y}} \left[ \begin{array}{c|c} A + BF_{\bar{y}} + (I_n - Y\bar{Y})^{-1}H_y C_{\bar{y}} & (I_n - Y\bar{Y})^{-1}H_y \\ \hline C_{\bar{y}} & I_{m+q} \end{array} \right]$$

oraz  $\Phi(\zeta) \in \mathcal{BH}_\infty^{m \times q}$ . Teraz  $A + BF_{\bar{y}} + (I_n - Y\bar{Y})^{-1}H_y C_{\bar{y}} = (I_n - Y\bar{Y})^{-1}(A + H_y C)(I_n - Y\bar{Y})$ , zatem funkcji  $\Omega(\zeta)^{-1}$  odpowiada podobny model

$$\Omega(\zeta)^{-1} = N_{y\bar{y}} \left[ \begin{array}{c|c} A + H_y C & H_y \\ \hline C_{\bar{y}}(I_n - Y\bar{Y})^{-1} & I_{m+q} \end{array} \right] = N_{y\bar{y}} \cdot \Omega_y(\zeta)$$

upewniający nas o jej unimodularności. Czynniki  $\Omega_y(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{m+q}$  ma postać

$$\Omega_y(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|cc} A + H_y C & H_y^u & H_y^y \\ \hline C_{\bar{y}}^a U_{y\bar{y}} & I_m & 0_{m \times q} \\ C_{\bar{y}}^b U_{y\bar{y}} & 0_{q \times m} & I_q \end{array} \right]$$

w której:

$$\begin{aligned} U_{y\bar{y}} &= (I_n - Y\bar{Y})^{-1} \\ H_y &= \begin{bmatrix} H_y^u & H_y^y \end{bmatrix}, \quad H_y^u \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad H_y^y \in \mathbb{R}^{n \times q} \\ C_{\bar{y}} &= \begin{bmatrix} C_{\bar{y}}^a \\ C_{\bar{y}}^b \end{bmatrix}, \quad C_{\bar{y}}^a \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad C_{\bar{y}}^b \in \mathbb{R}^{q \times n}. \end{aligned}$$

Regulatorowi  $K(\zeta) = DHM(N_{y\bar{y}} \cdot \Omega_y(\zeta), \Phi(\zeta)) = DHM(\Omega_y(\zeta), DHM(N_{y\bar{y}}, \Phi(\zeta)))$  przyporządkowany jest strukturalny schemat przedstawiony na rys. 6.6b, przy czym sygnały  $a_y$  oraz  $b_y$ , powiązane relacją  $a_y(\zeta) = DHM(N_{y\bar{y}}, \Phi(\zeta))b_y(\zeta)$ , mają wymiary  $m$  oraz  $q$ , odpowiednio. Analogicznie jak poprzednio, w przypadku optymalnego regulatora czasu ciągłego relacja ta nie zależy od rozwiązań  $Y$  oraz  $\bar{Y}$  stosownych ciągłych równań Riccatiego. Algorytm rozważanego regulatora ma postać (Suchomski [410]):

$$\begin{aligned} \delta \hat{x}(t) &= (A + H_y C)\hat{x}(t) + H_y^u u(t) + H_y^y y(t) \\ b_y(t) &= C_{\bar{y}}^b U_{y\bar{y}} \hat{x}(t) + y(t) \\ u(t) &= -C_{\bar{y}}^a U_{y\bar{y}} \hat{x}(t) + DHM(N_{y\bar{y}}, \Phi)b_y(t). \end{aligned}$$

Sformułujmy warunki, przy których  $K(\zeta)$  jest dogodną do implementacji ściśle właściwą funkcją (por. Mirkin [295], Stoorvogel [386], Stoorvogel *et al.* [388]; a także Kimura [226]). Ponieważ  $\Pi_x(\infty) = I_{p+r}$ , zatem w przypadku regulatora  $K = HM(\Pi_x, HM(N_{x\bar{x}}, \Phi))$  na podstawie *uwagi 5.2b* wnioskujemy, że konieczny i wystarczający warunek, aby funkcja  $K(\zeta)$

była funkcją ściśle właściwą ma postać równości  $HM(N_{x\bar{x}}, \Phi)(\infty) = 0_{p \times r}$ . Z uwagi 5.2d wynika, że pożądaną częstkowy cel osiągniemy, kładąc  $\Phi = HM(N_{x\bar{x}}^{-1}, 0_{p \times r}) \in \mathbb{R}^{p \times r}$ . Uwzględniając podział  $(p+r) \times (p+r)$  macierzy  $N_{x\bar{x}}^{-1} \in \mathbb{R}^{(p+r) \times (p+r)}$

$$N_{x\bar{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{x11} & \bar{N}_{x12} \\ \bar{N}_{x21} & \bar{N}_{x22} \end{bmatrix}$$

stwierdzamy, że  $\Phi = \bar{N}_{x12} \bar{N}_{x22}^{-1}$ . Aby zatem spełnić wymaganie  $\Phi \in \mathcal{BH}_{\infty}^{p \times r}$ , na nieosobliwą macierz  $N_{x\bar{x}}$  musimy nałożyć dodatkowe ograniczenie, mające postać nierówności  $\|\bar{N}_{x12} \bar{N}_{x22}^{-1}\|_2 < 1$ . Odpowiednie równanie z *twierdzenia 6.6* dogodnie jest zapisać w równoważnej postaci  $N_{x\bar{x}}^{-T} J_{pr} N_{x\bar{x}}^{-1} = D^T (J_{mr} - \Delta C \bar{X} C^T)^{-1} D + \Delta B_{\bar{x}}^T X U_{\bar{x}x} B_{\bar{x}}$ , w której odwrotność  $N_{x\bar{x}}^{-1}$  pełni rolę niewiadomej. Zauważmy, iż zakładając dolną blokową trójkątną postać macierzy  $N_{x\bar{x}}^{-1}$ , to znaczy żądając, aby  $\bar{N}_{x12} = 0_{p \times r}$ , uzyskujemy zerowy parametr  $\Phi = 0_{p \times r}$ , który oczywiście spełnia ograniczenie na jego normę (Suchomski [410]).

W przypadku regulatora  $K = DHM(\Omega_y, DHM(N_{y\bar{y}}, \Phi))$  mamy  $\Omega_y(\infty) = I_{m+q}$ . Zatem przyjmując  $\Phi = DHM(N_{y\bar{y}}^{-1}, 0_{m \times q}) \in \mathbb{R}^{m \times q}$ , zapewnimy temu regulatorowi żadaną ściśle właściwą postać. Następnie, biorąc pod uwagę podział  $(m+q) \times (m+q)$  odwrotności  $N_{y\bar{y}}^{-1} \in \mathbb{R}^{(m+q) \times (m+q)}$

$$N_{y\bar{y}}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{y11} & \bar{N}_{y12} \\ \bar{N}_{y21} & \bar{N}_{y22} \end{bmatrix}$$

otrzymujemy równość  $\Phi = -\bar{N}_{y11}^{-1} \bar{N}_{y12}$ , przy czym wymaga się ponadto, aby  $\|\bar{N}_{y11}^{-1} \bar{N}_{y12}\|_2 < 1$  (co wynika z warunku  $\Phi \in \mathcal{BH}_{\infty}^{m \times q}$ ). Obowiązuje przy tym spostrzeżenie analogiczne do poczynionego wyżej, że istnienie nieosobliwego rozwiązania  $N_{y\bar{y}}^{-1}$  o zerowej podmacierzy  $\bar{N}_{y12} = 0_{m \times q}$ , spełniającego równanie  $N_{y\bar{y}}^{-1} J_{mq} N_{y\bar{y}}^{-T} = D (J_{mr} + \Delta B^T \bar{Y} B)^{-1} D^T - \Delta C_{\bar{y}} U_{y\bar{y}} Y C_{\bar{y}}^T$ , pozwala na skuteczne stosowanie zerowego parametru  $\Phi = 0_{m \times q}$  (por. *twierdzenie 6.7*).

Powyższe ustalenia prowadzą do pytania o właściwości *centralnych* regulatorów odpowiadających zerowym parametrom  $\Phi$ . Rozważając regulator  $K = HM(\Pi_x, HM(N_{x\bar{x}}, \Phi))$ , założmy dodatkowo  $\bar{N}_{x12} = 0_{p \times r}$ . Na tej podstawie, biorąc pod uwagę równość  $\Phi = HM(N_{x\bar{x}}^{-1}, HM(N_{x\bar{x}}, \Phi))$ , otrzymujemy  $\Phi = \bar{N}_{x11} HM(N_{x\bar{x}}, \Phi) (\bar{N}_{x21} HM(N_{x\bar{x}}, \Phi) + \bar{N}_{x22})^{-1}$ . Teraz kładąc  $\Phi = 0_{p \times r}$  oraz uwzględniając fakt, że podmacierz  $\bar{N}_{x11}$  jest nieosobliwa, uzyskujemy równość  $HM(N_{x\bar{x}}, \Phi) = 0_{p \times r}$ . Do tego samego wniosku łatwo dochodzi się po stwierdzeniu, że przy  $\bar{N}_{x12} = 0_{p \times r}$  macierz  $N_{x\bar{x}}$  jest macierzą dolną blokową trójkątną (por. Ionescu i Weiss [194]). Oznacza to, że uzyskany w ten sposób centralny regulator ma postać ściśle właściwej

funkcji  $K = HM(\Pi_x, 0_{p \times r})$ , której odpowiada następujący prosty algorytm (Suchomski [410]):

$$\begin{aligned}\delta \hat{x}(t) &= (A + BF_x - U_{\bar{x}x} B_x^b F_x^y) \hat{x}(t) + U_{\bar{x}x} B_x^b y(t) \\ u(t) &= F_x^u \hat{x}(t).\end{aligned}$$

W przypadku regulatora  $K = DHM(\Omega_y, DHM(N_{y\bar{y}}, \Phi))$  oraz nieosobliwej dolnej blokowej trójkątnej macierzy  $N_{y\bar{y}}^{-1}$ , dla której  $\bar{N}_{y12} = 0_{m \times q}$ , przyjmując  $\Phi = 0_{m \times q}$ , otrzymujemy równość  $DHM(N_{y\bar{y}}, \Phi) = 0_{m \times q}$ . Na tej podstawie wnioskujemy, że uzyskany w ten sposób centralny regulator opisany jest ściśle właściwą funkcją  $K = DHM(\Omega_y, 0_{m \times q})$ , której przyporządkowany jest poniższy prosty algorytm:

$$\begin{aligned}\delta \hat{x}(t) &= (A + H_y C - H_y^u C_y^a U_{y\bar{y}}) \hat{x}(t) + H_y^y y(t) \\ u(t) &= -C_y^a U_{y\bar{y}} \hat{x}(t).\end{aligned}$$

**Lemat 6.4** (o ściśle właściwej postaci centralnego regulatora; Suchomski [402, 407, 410]).

- (i) Załóżmy, że spełnione są założenia twierdzenia 6.6. Wystarczającym warunkiem tego, aby centralny regulator  $K = HM(\Pi_x, 0_{p \times r})$  miał postać funkcji ściśle właściwej, jest istnienie dolnej blokowej  $(p+r) \times (p+r)$  trójkątnej macierzy  $N_{x\bar{x}}$ .
- (ii). Załóżmy, że spełnione są założenia twierdzenia 6.7. Wystarczającym warunkiem tego, aby centralny regulator  $K = DHM(\Omega_y, 0_{m \times q})$  miał postać funkcji ściśle właściwej, jest istnienie dolnej blokowej  $(m+q) \times (m+q)$  trójkątnej macierzy  $N_{y\bar{y}}$ .  $\square$

W podrozdziale 6.4 pokazano, że centralne rozwiązania są niedopuszczalne w przypadku niestandardowych obiektów z zerami należącymi do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ .

**Przykład 6.2** (wielokryterialna synteza regulatora (II); Suchomski [400, 406]). Powróćmy do standardowego problemu syntezy regulatora występującego w zamkniętym układzie pokazanym na rys. 6.1 (por. także Suchomski [389, 390]). Sterowany obiekt opisany jest modelem  $P_\delta(\zeta)$  o minimalnej realizacji  $(A_\delta, B_\delta, C_\delta, D_\delta)$ ,  $A_\delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Niech  $z = [u^T \ y^T]^T$ , gdzie  $u \in \mathbb{R}^p$  oraz  $y \in \mathbb{R}^r$ , a ponadto  $w \in \mathbb{R}^r$ . Zachodzi zatem  $m = p + r$ . Wyskalowana

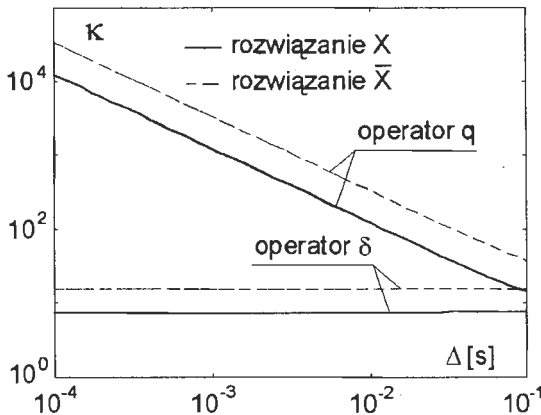
łańcuchowa macierz rozproszenia uogólnionego obiektu przyjmuje postać

$$G_\gamma(\zeta) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{-1} I_p \\ 0_{r \times p} \\ -P_\delta(\zeta) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0_{p \times r} \\ \gamma^{-1} I_r \\ I_r \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} A_\delta \\ 0_{p \times n} \\ 0_{r \times n} \\ -C_\delta \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_\delta & 0_{n \times r} \\ \gamma^{-1} I_p & 0_{p \times r} \\ 0_{r \times p} & \gamma^{-1} I_r \\ -D_\delta & I_r \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Rozważmy prosty model niestabilnego oraz nieminimalnofazowego obiektu

$$P_\rho(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{array} \right].$$

Niech  $\gamma = 7.5$ . Przyjmując różne wartości okresu próbkowania  $\Delta$ , uzyskujemy rozwiązania  $X$  oraz  $\bar{X}$  odpowiednich równań Riccatiego. Wskaźniki uwarunkowania tych rozwiązań przedstawiono na rys. 6.7, konfrontując je ze wskaźnikami charakteryzującymi rozwiązania przyporządkowane standardowym dyskretnym ( $q$ ) modelem.



Rys. 6.7. Przykład 6.2. Wskaźniki uwarunkowania równań Riccatiego.

**Przykład 6.3** (synteza regulatora metodą rozmieszczania biegunów (II); Suchomski [406]). Rozważmy po raz wtóry układ sterowania, którego podstawowy schemat pokazano na rys. 2.1. Zakładamy, że tor sterowania

$P_{yu} : U \rightarrow Y$  obiektu *SISO* opisany jest nominalnym modelem  $\bar{P}_{yu}(\zeta) = B(\zeta)/A(\zeta)$ , gdzie  $A(\zeta)$  oraz  $B(\zeta)$  są wielomianami względnie pierwszymi, przy czym  $A(\zeta)$  to wielomian moniczny stopnia  $\deg A(\zeta) = N_A$  bez zer należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ ; zatem  $\bar{P}_{yu}(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty$ , co wyklucza obiekty całkujące. Charakterystyczny wielomian zamkniętego układu ma postać  $T(\zeta) = A(\zeta) \cdot C(\zeta) + A(\zeta) \cdot L_u(\zeta) + B(\zeta) \cdot L_y(\zeta)$ , gdzie  $L_u(\zeta)$  oraz  $L_y(\zeta)$  są poszukiwanymi wielomianami stopnia  $\deg L_u(\zeta) = \deg L_y(\zeta) = N_A - 1$ , zaś moniczny wielomian  $C(\zeta)$  stopnia  $\deg C(\zeta) = N_A$  jest założonym stabilnym wielomianem obserwatorowym.

Niech  $\mathcal{P}_{yu}$  oznacza zbiór dopuszczalnych (możliwych) operatorowych modeli 'rzeczywistego' obiektu sterowania, zaś  $\bar{\mathcal{P}}_{yu}(\zeta)$  będzie założonym zbiorem nominalnych modeli tego obiektu. Zauważmy, że w ogólności może zachodzić:  $\bar{\mathcal{P}}_{yu} \neq \mathcal{P}_{yu}$ ,  $\bar{\mathcal{P}}_{yu} \not\subset \mathcal{P}_{yu}$ , lub nawet  $\bar{\mathcal{P}}_{yu} \cap \mathcal{P}_{yu} = \emptyset$  (Suchomski [411]).

Kładąc  $T(\zeta) = C(\zeta) \cdot T_0(\zeta)$ , gdzie stabilny moniczny wielomian  $T_0(\zeta)$  stopnia  $\deg T_0(\zeta) = N_A$  wynika z przyjętych specyfikacji, otrzymujemy diofantyczne równanie  $A(\zeta) \cdot L_u(\zeta) + B(\zeta) \cdot L_y(\zeta) = C(\zeta) \cdot (T_0(\zeta) - A(\zeta))$ . Rozwiązując to równanie dla ustalonej pary  $(C(\zeta), T_0(\zeta))$ , nominalnemu modelowi  $\bar{P}_{yu}(\zeta) \in \bar{\mathcal{P}}_{yu}$  przyporządkowujemy parę  $(L_u(\zeta), L_y(\zeta)) = (L_u(\bar{P}_{yu})(\zeta), L_y(\bar{P}_{yu})(\zeta))$  licznikowych wielomianów filtrów  $(M_u(\zeta), M_y(\zeta))$  podstawowej pętli sterowania (rys. 2.1). Wzmocnienie regulatora wyznacza się ze wzoru  $g = T_0(0)/B(0)$ .

Przyjmijmy dogodną multiplikatywną charakterystykę niestrukturalizowalnej niepewności modeli  $\bar{P}_{yu}(\zeta) \in \bar{\mathcal{P}}_{yu}$ , wyrażoną formułą  $P_{yu}(\zeta) = \bar{P}_{yu}(\zeta) \cdot (1 + W_m(\zeta) \cdot W_\delta(\zeta))$ , w której  $W_m(\zeta) = W_m(\bar{\mathcal{P}}_{yu} | \mathcal{P}_{yu})(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$  jest założoną funkcją ważącą, zaś  $W_\delta(\zeta) = W_\delta(\bar{\mathcal{P}}_{yu}, \mathcal{P}_{yu} | \mathcal{P}_{yu})(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$  oznacza odpowiednią funkcję o jednostkowo ograniczonej normie  $\|W_\delta(\zeta)\|_\infty < 1$ . Funkcja  $W_m(\zeta)$  definiowana jest przez projektanta i reprezentuje dostępną (ekspercką) wiedzę na temat niepewności modelowania sterowanego obiektu (por. *podrozdział 2.4*).

Konieczny i wystarczający warunek odpornej stabilności rozważanego układu zamkniętego ma postać nierówności  $\|G_{yn}(\zeta) \cdot W_m(\zeta)\|_\infty \leq 1$ , w której  $G_{yn}(\zeta)$  oznacza nominalną szumową funkcję wrażliwości tego układu.

Syntezę odpornego układu opieramy na metodzie  $Q$ -parametryzacji (por. *podrozdział 2.5*). Niech zatem  $Q(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$  oznacza szukany  $Q$ -parametr. Kładąc  $Q_u(\zeta) = -B(\zeta) \cdot Q(\zeta)$ ,  $Q_y(\zeta) = A(\zeta) \cdot Q(\zeta)$  oraz

$$Q(\zeta) = \frac{M_y(\zeta) \cdot Q_0(\zeta)}{C(\zeta)}$$

gdzie  $Q_0(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$  pełni rolę efektywnie strojonego filtra, otrzymujemy

$$G_{yn}(\zeta) = \frac{-B(\zeta) \cdot M_y(\zeta)}{T_0(\zeta)} \cdot \left( 1 + \frac{A(\zeta)}{C(\zeta)} \cdot Q_0(\zeta) \right).$$

Afiniczna zależność funkcji  $G_{yn}(\zeta)$  od parametru  $Q_0(\zeta)$  pozwala na przekształcenie rozważanego zadania odpornej stabilizacji w standardowy problem dopasowania modelu ( $\mathcal{H}_\infty$  model matching; Francis [116], Hung [185], Kwakernaak [254], Liu i Mita [276], Skogestad i Postlethwaite [363], Zhou *et al.* [487])

$$\|T_1(\zeta) + T_1(\zeta) \cdot T_2(\zeta) \cdot Q_0(\zeta)\|_\infty \leq 1$$

gdzie (Suchomski [406]):

$$T_1(\zeta) = \frac{B(\zeta) \cdot M_y(\zeta) \cdot W_m(\zeta)}{T_0(\zeta)}, \quad T_2(\zeta) = \frac{A(\zeta)}{C(\zeta)}.$$

Odpowiedniemu uogólnionemu obiektowi przyporządkowujemy łańcuchową macierz rozproszenia

$$G(\zeta) = \begin{bmatrix} T_1(\zeta) \cdot T_2(\zeta) & T_1(\zeta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Przyjmując dowolną minimalną realizację tej macierzy oraz stosując opisaną metodologię syntezy wywiedzioną z  $J$ -bezstratnej faktoryzacji, możemy wyznaczyć (o ile istnieje) poszukiwany parametr  $Q_0(\zeta)$ . Niedostatkiem takiego 'bezpośredniego' podejścia do problemu  $Q$ -parametryzacji jest wysoki rząd wypadkowego optymalnego regulatora (por. Anderson [3], Morari i Zafiriou [297], Suchomski [405], Zhou *et al.* [487]; zob. też *podrozdział 2.5*). W celu uproszczenia struktury regulatora zakładamy, że można znaleźć taką właściwą funkcję majoryzującą  $W_M(\zeta) = W_M(\bar{P}_{yu} | \mathcal{P}_{yu})(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$  o dostatecznie niskim rzędzie  $N_W$ , dla której zachodzi

$$\left| \frac{B(\zeta) \cdot L_y(\zeta)}{C(\zeta) \cdot T_0(\zeta)} \cdot \left( \frac{P_{yu}(\zeta)}{\bar{P}_{yu}(\zeta)} - 1 \right) \right| \leq |W_M(\zeta)|, \quad \forall P_{yu}(\zeta) \in \mathcal{P}_{yu}$$

gdzie  $\zeta = (e^{j\omega\Delta} - 1)/\Delta$ ,  $\forall \omega \geq 0$ . Zwraca uwagę postulowany 'subtelny' ( $\leq$ ) sposób dobierania poszukiwanej funkcji majoryzującej (Suchomski [406, 411]). Na tej podstawie otrzymujemy funkcję ważącą

$$W_m(\zeta) = \frac{T_0(\zeta)}{B(\zeta) \cdot M_y(\zeta)} \cdot W_M(\zeta)$$

co pozwala na przyjęcie  $T_1(\zeta) = W_M(\zeta)$ . Zauważmy ponadto, że tak pozyskana funkcja  $W_m(\zeta) = W_m(\bar{P}_{yu} | \mathcal{P}_{yu})(\zeta)$  może okazać się niestabilna, nie jest to jednak groźne, gdyż 'źródłem' owej niestabilności mogą być tylko te zera wielomianów  $B(\zeta)$  oraz  $L_y(\zeta)$ , które leżą poza  $\mathcal{D}_\Delta$ . Ponieważ

$$G_{yn}(\zeta) \cdot W_m(\zeta) = - \left( 1 + \frac{A(\zeta)}{C(\zeta)} \cdot Q_0(\zeta) \right) \cdot W_M(\zeta)$$

zatem rozważany układ sterowania wymaga uodporniającej stabilizacji ( $Q_0(\zeta) \not\equiv 0$ ) tylko wtedy, gdy  $\|W_M(\zeta)\|_\infty \geq 1$ . Pewna możliwość dalszego uproszczenia regulatora pojawia się w przypadku, gdy niektóre zera mianownika nominalnego modelu obiektu należą do  $\mathcal{D}_\Delta$  (przypadek stabilnego obiektu sterowania pomijamy jako trywialny). Załóżmy zatem, że  $A(\zeta) = A^-(\zeta) \cdot A^+(\zeta)$ , gdzie czynnik  $A^-(\zeta)$  jest wielomianem stabilnym, zaś czynnik  $A^+(\zeta)$  jest wielomianem niestabilnym stopnia  $\deg A^+(\zeta) = N_A^+ > 0$ . Teraz, biorąc pod uwagę 'interpolacyjne' własności układów optymalizowanych ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$  (Kondo i Hara [228], Sefton i Glover [356], Suchomski [404, 406]), wyznaczamy następującą ogólną postać poszukiwanego rozwiązania

$$Q_0(\zeta) = \frac{C(\zeta) \cdot Q_{0n}(\zeta)}{A^-(\zeta) \cdot Q_{0d}(\zeta)}$$

gdzie  $Q_{0n}(\zeta)$  oraz  $Q_{0d}(\zeta)$  są wielomianami stopnia  $N_W$  oraz  $N_W + N_A^+$ , odpowiednio. Dokonując faktoryzacji wielomianu obserwatorowego  $C(\zeta) = C^-(\zeta) \cdot C^=(\zeta)$  w taki sposób, że  $\deg C^=(\zeta) = N_A^+$ , uzyskujemy zmodyfikowany problem dopasowania modelu (Suchomski [404, 406])

$$\|T_1(\zeta) + T_1(\zeta) \cdot T_2(\zeta) \cdot Q_0^-(\zeta)\|_\infty < 1$$

gdzie:

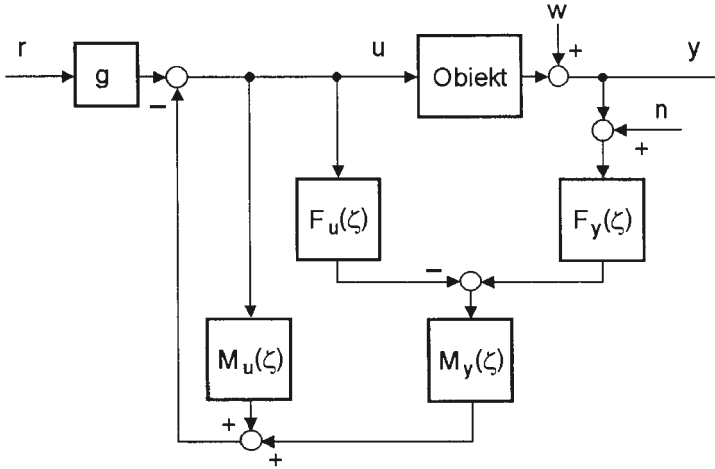
$$\begin{aligned} T_1(\zeta) &= W_M(\zeta), \quad T_2(\zeta) = A^+(\zeta)/C^=(\zeta) \\ Q_0^-(\zeta) &= \frac{Q_{0n}^-(\zeta)}{Q_{0d}(\zeta)} = \frac{C^-(\zeta) \cdot Q_{0n}(\zeta)}{Q_{0d}(\zeta)}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Zauważmy, że postulowana faktoryzacja wielomianu  $C(\zeta)$  nie jest jednoznaczna. Przykładowy schemat (algorytm) rozważanego regulatora pokazano na rys. 6.8, przy czym:

$$F_u(\zeta) = \frac{B(\zeta) \cdot Q_{0n}(\zeta)}{A^-(\zeta) \cdot Q_{0d}(\zeta)}, \quad F_y(\zeta) = 1 + \frac{A^+(\zeta) \cdot Q_{0n}(\zeta)}{Q_{0d}(\zeta)}.$$

W schemacie tym dostrzegamy zewnętrzną pętlę stabilizacji zamkniętego układu dla nominalnego modelu sterowanego obiektu oraz dodatkowe elementy (filtry), które służą zapewnieniu odpornej stabilności (por. rys. 2.3 oraz 2.4).





Rys. 6.8. Przykład 6.3. Strukturalny schemat odpornego układu sterowania.

Część numeryczna przykładu dotyczy syntezy regulatora dla niestabilnego i nieminimalnofazowego obiektu o niepewnym modelu czasu ciągłego

$$P_{\rho y u}(s) = \frac{e^{-sT_0}}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_3)}$$

gdzie  $T_{i \min} \leq T_i \leq T_{i \max}$ ,  $i \in \{0, \dots, 3\}$ . Niech:  $T_{1 \min} = T_{2 \min} = 0.15$  s,  $T_{1 \max} = T_{2 \max} = 0.35$  s,  $T_{3 \min} = -1.5$  s,  $T_{3 \max} = -0.9$  s,  $T_{0 \min} = 0.25$  s,  $T_{0 \max} = 0.35$  s, co prowadzi do przykładowego nominalnego modelu

$$\bar{P}_{\rho y u}(s) = \frac{(1 - s\bar{T}_0/2)}{(1 + s\bar{T}_1)(1 + s\bar{T}_2)(1 + s\bar{T}_3)(1 + s\bar{T}_0/2)}$$

gdzie  $\bar{T}_i = (T_{i \min} + T_{i \max})/2$ ,  $i \in \{0, \dots, 3\}$ . Dla  $\Delta = 0.002$  s wyznaczamy nominalny dyskretnoczasowy model  $\bar{P}_{y u}(\zeta) = B(\zeta)/A(\zeta)$  rzędu  $N_A = 4$ . Mianownik  $A(\zeta)$  ma czynniki  $A^-(\zeta) = 105.11498 + 68.640595\zeta + 14.590504\zeta^2 + \zeta^3$  oraz  $A^+(\zeta) = -0.83402816 + \zeta$ ,  $N_A^+ = 1$ . Niech  $C(\zeta) = 1.6586324 + 6.1435771\zeta + 8.3115904\zeta^2 + 4.8266459\zeta^3 + \zeta^4$ , zatem  $C^-(\zeta) = (1.9960053 + \zeta)(0.99900067 + \zeta)^2 = 1.9920180 + 4.9860236\zeta + 3.9940067\zeta^2 + \zeta^3$  oraz  $C^+(\zeta) = (-0.83402816)^\sim + \zeta = 0.83263927 + \zeta$ . Kładąc  $T_0(\delta) = (6 + \zeta)^4 = 1296 + 864\zeta + 216\zeta^2 + 24\zeta^3 + \zeta^4$ , obliczamy  $g = -14.782901$ , a następnie wielomiany filtrów podstawowej struktury regulatora:  $L_u(\zeta) = 254.64763 + 156.65042\zeta + 68.05538\zeta^2 + 10.243524\zeta^3$  oraz  $L_y(\zeta) = -280.82566 - 171.29820\zeta - 35.149497\zeta^2 - 2.3661318\zeta^3$ .

Dla założonej (parametrycznej) niepewności nominalnego modelu sterowanego obiektu wyznaczono przykładową funkcję wążącą rzędu  $N_W = 2$

$$W_M(\zeta) = 9.3023256 \times 10^{-4} \times \frac{(47.153388 + \zeta)(76.178835 + \zeta)}{(1.0987909 + \zeta)^2}$$

odpowiadającą prostej funkcji  $W_\rho(s) = (60 + s)^2 / (1075(1.1 + s)^2)$  o trzech parametrach ustalonych w oparciu o widmowe charakterystyki niepewności tego modelu (Suchomski [406]). Niech  $(A_1, B_1, C_1, D_1)$  oraz  $(A_2, B_2, C_2, D_2)$  będą minimalnymi realizacjami funkcji  $T_1(\zeta) = W_M(\zeta)$  oraz  $T_2(\zeta) = A^+(\zeta)/C^-(\zeta)$ , odpowiednio. Na tej podstawie otrzymujemy łańcuchowy model stosownego uogólnionego obiektu

$$G(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} A_1 & B_1 C_2 & B_1 D_2 & B_1 \\ \hline 0_{1 \times 2} & A_2 & B_2 & 0 \\ \hline C_1 & D_1 C_2 & D_1 D_2 & D_1 \\ \hline 0_{1 \times 2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Ponieważ  $\lambda(A) = \lambda(A_1) \cup \lambda(A_2) \subset \mathcal{D}_\Delta$ , zatem  $\bar{X} = 0_{3 \times 3}$ . Ponadto:  $D$  jest macierzą nieosobliwą, zaś  $Q_x = 0_{3 \times 3}$  (Suchomski [406]). Widzimy przeto, że synteza filtru  $Q_0(\zeta)$  polega na rozwiązaniu tylko jednego dyskretnego równania Riccatiego. Przyjmując dogodnie kononiczne sterowalne relizacje:

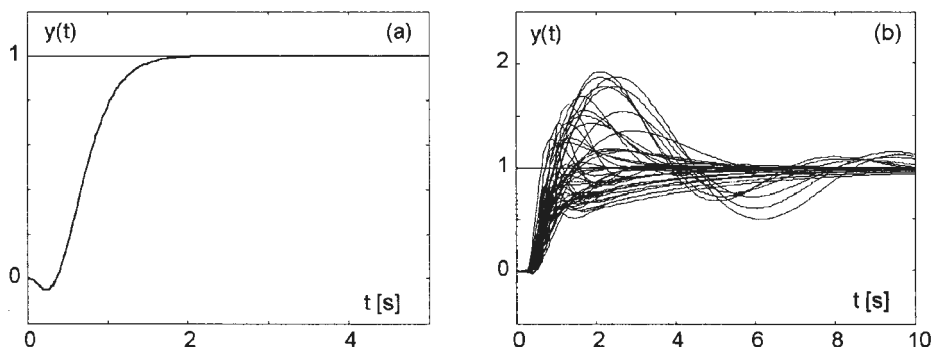
$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.2073414 & -2.19758178 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_1 &= [ 3.3403561 \quad 0.11268339 ], & D_1 &= 9.3023256 \times 10^{-4} \\ A_2 &= -0.83263927, & B_2 &= 1, & C_2 &= -1.6666674, & D_2 &= 1 \end{aligned}$$

uzyskujemy następującą postać elementu  $P_x$  odpowiedniego macierzowego pęku

$$P_x = \begin{bmatrix} A_1 - \alpha B_1 C_1 & 0_{2 \times 1} \\ -\alpha B_2 C_1 & A_2 - B_2 C_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

gdzie  $\alpha = 1/D_1 \in \mathbb{R}$ . Nietrudno zauważyć, że zera funkcji  $T_1(\zeta)$  oraz  $T_2(\zeta)$  są wartościami własnymi macierzy  $P_x$ . Macierz ta jest zatem macierzą niestabilną, co z kolei oznacza, że rozpatrywany problem syntezy odpornego regulatora nie ma trywialnego rozwiązania. Rozwiązując pierwsze równanie Riccatiego podane w *twierdzeniu 6.6*, obliczamy  $X \geq 0$ , co stanowi podstawę do wyznaczenia poszukiwanych wielomianów centralnego filtru  $Q_0(\zeta)$ :  $Q_{0n}(\zeta) = 27923.503 + 10722.575\zeta + 0.019238371\zeta^2$  oraz  $Q_{0d}(\zeta) = 36394.576 + 4875.2296\zeta + 134.61614\zeta^2 + 1.0093410\zeta^3$ . Analiza amplitudowej charakterystyki funkcji  $G_{yn}(\zeta) \cdot W_m(\zeta)$  potwierdza, że uzyskany układ jest odpornie

stabilny (Suchomski [406]). Skokową odpowiedź nominalnego układu zamkniętego przedstawiono na rys. 6.9a. Kolejny rysunek (rys. 6.9b) ilustruje zachowanie się 'rzeczywistego' układu zamkniętego: pokazano tam rodzinę skokowych odpowiedzi dla przykładowych obiektów o niepewnych modelach  $P_{yu}(\zeta) \in \mathcal{P}_{yu}$ .  $\square$



Rys. 6.9. Przykład 6.3. Odpowiedzi skokowe układu sterowania: a) układ z nominalnym modelem obiektu, b) układ odporny z zaburzonym modelem obiektu.

**Uwaga 6.3** (Suchomski [406]). Opisana procedura syntezy odpornego regulatora składa się z dwóch etapów. Pierwszy etap służy zapewnieniu układowi zamkniętemu o podstawowej strukturze (rys. 2.1) nominalnej stabilności oraz jakości w oparciu o metodę rozmieszczania biegunów. W tym celu wykorzystuje się standardowe podejście, polegające na rozwiązaniu odpowiedniego diofantycznego równania. Można tu wykorzystać algorytmy opisane w *rozdziałach 2.* oraz *3.*, w tym także algorytmy syntezy nominalnych optymalnych układów sterowania predykcyjnego. W drugim etapie, po rozbudowaniu podstawowej struktury układu zamkniętego zgodnie z zasadą  $Q$ -parametryzacji, dobiera się nastawy dodatkowych filtrów (rys. 6.8) w taki sposób, aby zapewnić temu układowi odporną stabilność. W przypadku standardowych uogólnionych obiektów odpowiednie zadanie optymalizacji ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$  wymaga rozwiązania tylko jednego równania Riccatiego (przypadek obiektów o niestandardowych modelach omówimy w *podrozdziale 6.3.2*).  $\square$

### 6.2.3 Rozszerzone uogólnione zagadnienie własne

W tym podrozdziale formułuje się dwa podstawowe twierdzenia, odnoszące się do  $J$ -bezsstratnych faktoryzacji modeli w dziedzinie operatora  $\delta$  w oparciu o odpowiednie rozszerzone uogólnione zagadnienia własne. Rozważa się także prosty numeryczny przykład, ilustrujący zastosowanie pierwszego z tych twierdzeń do syntezy regulatora optymalnego ze względu na standardową dwukryterialną funkcję celu.

**Twierdzenie 6.8** (o  $J$ -bezsstratnej faktoryzacji (II); Suchomski [404]). *Niech  $(A, B, C, D)$ , gdzie  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , będzie minimalną realizacją funkcji  $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$ . Zakłada się, że realizacja ta nie ma zer należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ .  $(J_{mr}, J_{pr})$ -bezsstratna faktoryzacja  $G(\zeta) = \Theta(\zeta) \cdot \Pi(\zeta)$  tej funkcji istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:*

(i)  $(U_x, W_x) \in \text{dom}(\delta Ric)$  oraz  $X = \delta Ric(U_x, W_x) \geq 0$ , gdzie:

$$P_x = A, \quad Q_x = B, \quad R_x = C^T J_{mr} C, \quad S_x = C^T J_{mr} D, \quad T_x = D^T J_{mr} D;$$

(ii)  $(U_{\bar{x}}, W_{\bar{x}}) \in \text{dom}(\delta Ric)$  oraz  $\bar{X} = \delta Ric(U_{\bar{x}}, W_{\bar{x}}) \geq 0$ , gdzie:

$$P_{\bar{x}} = A^T, \quad Q_{\bar{x}} = C^T, \quad R_{\bar{x}} = 0_{n \times n}, \quad S_{\bar{x}} = 0_{n \times (m+r)}, \quad T_{\bar{x}} = -J_{mr};$$

(iii)  $\|X\bar{X}\|_2 < 1$ ;

(iv) istnieje taka nieosobliwa macierz  $M_x \in \mathbb{R}^{(p+r) \times (p+r)}$ , że

$$M_x^T (T_x + \Delta Q_x^T X Q_x) M_x = J_{pr}.$$

Unimodularny czynnik  $\Pi(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{p+r}$  ma postać

$$\Pi(\zeta) = N_{x\bar{x}}^{-1} \left[ \begin{array}{c|c} A + H_{\bar{x}}C & -B_{\bar{x}} \\ \hline F_x(I_n - \bar{X}X)^{-1} & I_{p+r} \end{array} \right]$$

w której:

$$\begin{aligned} F_x &= -(T_x + \Delta Q_x^T X Q_x)^{-1} ((I_n + \Delta P_x^T) X Q_x + S_x)^T \\ H_{\bar{x}} &= -(I_n + \Delta P_{\bar{x}}^T) \bar{X} Q_{\bar{x}} (T_{\bar{x}} + \Delta Q_{\bar{x}}^T \bar{X} Q_{\bar{x}})^{-1} \\ B_{\bar{x}} &= B + H_{\bar{x}} D \end{aligned}$$

zaś  $N_{x\bar{x}} \in \mathbb{R}^{(p+r) \times (p+r)}$  jest pewną nieosobliwą macierzą, spełniającą równanie

$$N_{x\bar{x}}^T (D^T (T_{\bar{x}} + \Delta Q_{\bar{x}}^T \bar{X} Q_{\bar{x}})^{-1} D - \Delta B_{\bar{x}}^T X (I_n - \bar{X} X)^{-1} B_{\bar{x}}) N_{x\bar{x}} = -J_{pr}. \quad \square$$

**Twierdzenie 6.9** (o dualnej  $J$ -bezstratnej faktoryzacji (II); Suchomski [404]). *Niech  $(A, B, C, D)$ , gdzie  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , będzie minimalną realizacją funkcji  $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_{\infty}^{(m+q) \times (m+r)}$ . Zakłada się, że realizacja ta nie ma zer należących do  $\partial\mathcal{D}_{\Delta}$ . Dualna  $(J_{mq}, J_{mr})$ -bezstratna faktoryzacja  $H(\zeta) = \Omega(\zeta) \cdot \Psi(\zeta)$  tej funkcji istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:*

(i)  $(U_y, W_y) \in \text{dom}(\delta\text{Ric})$  oraz  $Y = \delta\text{Ric}(U_y, W_y) \geq 0$ , gdzie:

$$\begin{aligned} P_y &= A^T, & Q_y &= C^T, & R_y &= -BJ_{mr}B^T \\ S_y &= -BJ_{mr}D^T, & T_y &= -DJ_{mr}D^T; \end{aligned}$$

(ii)  $(U_{\bar{y}}, W_{\bar{y}}) \in \text{dom}(\delta\text{Ric})$  oraz  $\bar{Y} = \delta\text{Ric}(U_{\bar{y}}, W_{\bar{y}}) \geq 0$ , gdzie:

$$P_{\bar{y}} = A, \quad Q_{\bar{y}} = B, \quad R_{\bar{y}} = 0_{n \times n}, \quad S_{\bar{y}} = 0_{n \times (m+r)}, \quad T_{\bar{y}} = J_{mr};$$

(iii)  $\|Y\bar{Y}\|_2 < 1$ ;

(iv) istnieje taka nieosobliwa macierz  $M_y \in \mathbb{R}^{(m+q) \times (m+q)}$ , że

$$M_y(T_y + \Delta Q_y^T Y Q_y) M_y^T = -J_{mq}.$$

Unimodularny czynnik  $\Omega(\zeta) \in \mathcal{GH}_{\infty}^{m+q}$  ma postać

$$\Omega(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} A + BF_{\bar{y}} & (I_n - Y\bar{Y})^{-1} H_y \\ \hline -C_{\bar{y}} & I_{m+q} \end{array} \right] N_{y\bar{y}}^{-1}$$

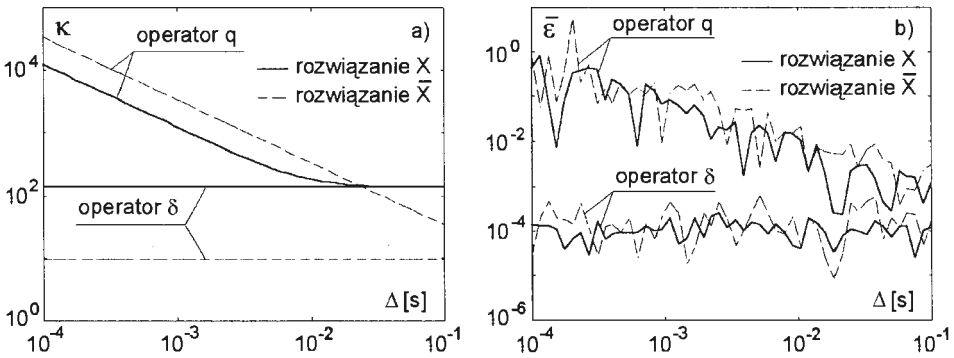
w której:

$$\begin{aligned} H_y &= -((I_n + \Delta P_y^T) Y Q_y + S_y)(T_y + \Delta Q_y^T Y Q_y)^{-1} \\ F_{\bar{y}} &= -(T_{\bar{y}} + \Delta Q_{\bar{y}}^T \bar{Y} Q_{\bar{y}})^{-1} ((I_n + \Delta P_{\bar{y}}^T) \bar{Y} Q_{\bar{y}})^T \\ C_{\bar{y}} &= C + DF_{\bar{y}} \end{aligned}$$

zaś  $N_{y\bar{y}} \in \mathbb{R}^{(m+q) \times (m+q)}$  jest pewną nieosobliwą macierzą, spełniającą równanie

$$N_{y\bar{y}}(D(T_{\bar{y}} + \Delta Q_{\bar{y}}^T \bar{Y} Q_{\bar{y}})^{-1} D^T - \Delta C_{\bar{y}}(I_n - Y\bar{Y})^{-1} Y C_{\bar{y}}^T) N_{y\bar{y}}^T = J_{mq}. \quad \square$$

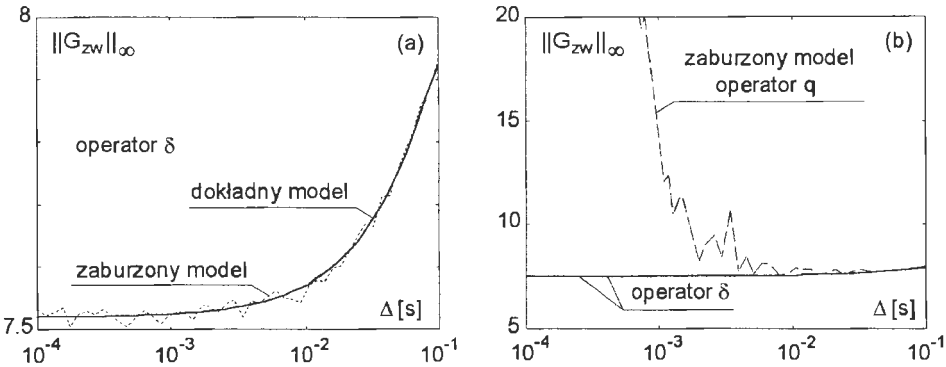
**Przykład 6.4** (wielokryterialna synteza regulatora (III); Suchomski [404]). Rozważmy, raz jeszcze, problem przedstawiony w *przykładzie 6.2*. Stosując opisaną metodologię syntezy optymalnego regulatora, opartą na odpowiednim rozszerzonym uogólnionym zagadnieniu własnym, dla  $\gamma = 8$  uzyskujemy rozwiązania  $X \geq 0$  oraz  $\tilde{X} \geq 0$ , charakteryzujące się wskaźnikami uwarunkowania pokazanymi na rys. 6.10a. Przedstawione wykresy potwierdzają przewagę podejścia, w którym wykorzystuje się modele zdefiniowane dla operatora  $\delta$ . Z kolei, rys. 6.10b dotyczy funkcji błędu rozwiązań badanych równań Riccatiego  $\bar{\varepsilon} = \|X - \tilde{X}\|_F / \|X\|_F$ , przy czym  $X$  oznacza 'dokładne' rozwiązanie, zaś  $\tilde{X}$  reprezentuje rozwiązanie równania sformułowanego dla dyskretnego modelu, w którym nominalne elementy  $\alpha$  macierzy stanu oraz wektora wejść podlegają multiplikatywnym zaburzeniom zgodnie ze wzorem  $\tilde{\alpha} = \alpha(1 \pm \varepsilon)$ . Przyjęto, że  $\varepsilon$  jest zmienną losową o równomiernym rozkładzie na przedziale  $[-\varepsilon_r, \varepsilon_r]$ , gdzie  $\varepsilon_r = 0.0002$ . Centralne regulatory przyporządkowane rozwiązaniom  $X$  oraz  $\tilde{X}$  zastosowano w układzie zamkniętym do sterowania obiektem o nominalnym modelu. Wartości normy  $\|G_{zw}\|_\infty$ , ilustrujące właściwości symulowanych układów, pokazano na rys. 6.11a,b. □



Rys. 6.10. Przykład 6.4. Charakterystyki równań Riccatiego: a) wskaźniki uwarunkowania, b) funkcje błędów rozwiązań.

### 6.3 Synteza w oparciu o uogólnione $J$ -bezstratne faktoryzacje

Niniejszy podrozdział dotyczy syntezy sterowania optymalnego ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$  w przypadku obiektów, których modele mają zera należące



Rys. 6.11. Przykład 6.4. Oceny jakości układu z regulatorem wyznaczonym w oparciu o niedokładny model sterowanego obiektu.

do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ . W tym celu wykorzystuje się wcześniej zdefiniowane (por. *podrozdział 5.3*) uogólnione  $J$ -bezstratne faktoryzacje łańcuchowych macierzy rozproszenia takich obiektów. Podano twierdzenia, z których wynika, że problem wyznaczania wymaganych faktoryzacji jest równoważny poszukiwaniu rozwiązań dwóch dyskretnych ( $\delta$ ) równań Riccatiego oraz badaniu właściwości tych rozwiązań. Pokazano, że w przypadku pierwszego równania Riccatiego zabiegamy o rozwiązanie, które nie jest rozwiązaniem stabilizującym. Teoretyczne rozważania zilustrowano przykładem syntezy odpornego sterowania metodą rozmieszczania biegunów.

### 6.3.1 Uogólnione $J$ -bezstratne faktoryzacje

Z *twierdzeń 6.6 - 6.9* wynika, że koniecznym warunkiem istnienia  $J$ -bezstratnych faktoryzacji  $G(\zeta) = \Theta(\zeta) \cdot \Pi(\zeta)$  oraz  $H(\zeta) = \Omega(\zeta) \cdot \Psi(\zeta)$  odpowiednich łańcuchowych macierzy  $G(\zeta)$  oraz  $H(\zeta)$  jest istnienie stabilizujących rozwiązań  $X$  oraz  $Y$  stosownych równań Riccatiego. Rozwiązania takie istnieją tylko wtedy, gdy macierze te nie mają zer należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ . Problemy syntezy układów czasu ciągłego z obiektami, których modele wykazują obecność zer na osi  $j\omega$ , badano w (Goh i Safonov [136], Goodwin *et al.* [145], Hara i Sugie [167], Hara *et al.* [168], O'Young *et al.* [312], Safonov [350], Scherer [352, 353], Sugie i Hara [420], Xin i Mita [477]).

W niniejszym podrozdziale analizuje się problem kształtowania optymalnego ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$  układu zamkniętego w przypadku, w którym łańcuchowe macierze  $G(\zeta)$  lub  $H(\zeta)$  rozważanego obiektu nie spełniają powyższego koniecznego warunku istnienia  $J$ -bezstratnych faktoryzacji. Z

sytuacją taką spotykamy się wtedy, gdy dla niestandardowego uogólnionego obiektu  $P$  naruszone są wymagania  $a\mathcal{B}$  sformułowane w *założeniu 5.1*. Istotną rolę w naszych poszukiwaniach odgrywa wprowadzona w tym podrozdziale charakteryzacja niestabilizujących rozwiązań odpowiednich dyskretnych równań Riccatiego. W dalszych wywodach stosuje się *definicje 5.7* oraz *5.8* uogólnionych  $J$ -bezstratnych faktoryzacji łańcuchowych macierzy rozproszenia.

Przyjmijmy zatem, że łańcuchowa macierz rozproszenia  $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$  danego obiektu dynamicznego ma  $n_z > 0$  niezmienniczych zer należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ . Uogólnioną  $(J_{mr}, J_{pr})$ -bezstratną faktoryzację tej macierzy (o ile istnieje) można wyznaczyć, posługując się metodą znaną jako 'kompensacja zer' (*zero compensation*; Copeland i Safonov [71]-[73]). Zakładamy przeto, że istnieje taki prawostronny kompensator  $U_r(\zeta)$  o minimalnym rzędzie  $n_z$ , który, będąc stabilnie odwracalnym (czyli  $U_r(\zeta)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty^{(p+r) \times (p+r)}$ ) zapewnia, że funkcja  $\tilde{G}(\zeta) = G(\zeta) \cdot U_r(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$  'pozbawiona' zer należących do brzegu  $\partial\mathcal{D}_\Delta$  ma  $(J_{mr}, J_{pr})$ -bezstratną faktoryzację  $\tilde{G}(\zeta) = \Theta(\zeta) \cdot \tilde{\Pi}(\zeta)$ , gdzie  $\tilde{\Pi}(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{p \times r}$ . Na tej podstawie wnioskujemy, że funkcję  $G(\zeta) = \tilde{G}(\zeta) \cdot U_r(\zeta)^{-1}$  można przedstawić w postaci iloczynu, którego czynniki spełniają warunki narzucone definicją uogólnionej  $(J_{mr}, J_{pr})$ -bezstratnej faktoryzacji:  $G(\zeta) = \Theta(\zeta) \cdot \Pi(\zeta)$ , gdzie  $\Pi(\zeta) = \tilde{\Pi}(\zeta) \cdot U_r(\zeta)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty^{(p+r) \times (p+r)}$ . Z powyższego wynika, że wszystkie bieguny funkcji przenoszenia kompensatora  $U_r(\zeta)$  należą do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ , zaś wszystkie zera tej funkcji należą do  $\mathcal{D}_\Delta$ . Tak 'bezpośrednio' użyta metoda kompensacji zer prowadzi do uogólnionej  $(J_{mr}, J_{pr})$ -bezstratnej faktoryzacji, w której czynnik  $\Pi(\zeta)$  jest reprezentowany przez realizację o wymiarze  $n + n_z$ . Poszukiwania minimalnej  $n$ -wymiarowej realizacji tego czynnika można oprzeć na spostrzeżeniu głoszącym, że ze względu na unimodularność  $\tilde{\Pi}(\zeta)$  jedyną możliwość stosownego uproszczenia modelu  $\Pi(\zeta)$  stwarzają 'stabilne' skreślenia w parach utworzonych przez bieguny funkcji  $U_r(\zeta)^{-1}$  oraz odpowiednie zera funkcji  $\tilde{\Pi}(\zeta)$ . Elementy zbioru regulatorów, dla których spełniona jest nierówność  $\|HM(G, K)\|_\infty < 1$ , opisane są formułą  $K = HM(\Pi^{-1}, \Phi)$ , przy czym parametr  $\Phi(\zeta) \in \mathcal{BH}_\infty^{p \times r}$  tego zbioru należy dobierać w taki sposób, aby  $K(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times r}$ . Jak pokazano niżej, minimalną realizację odwrotności  $\Pi(\zeta)^{-1} = U_r(\zeta) \cdot \tilde{\Pi}(\zeta)^{-1}$  można uzyskać bez wyznaczania jawnej postaci prawostronnego kompensatora  $U_r(\zeta)$ , co znacząco zwiększa efektywność algorytmu syntezy odpowiedniego regulatora (Suchomski [40]).

Analogiczne rozumowanie dotyczy dualnej łańcuchowej macierzy rozproszenia  $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$  o  $n_z > 0$  niezmienniczych zerach należących



do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ . Jeżeli zatem istnieje taki lewostronny kompensator  $U_l(\zeta)$  o minimalnym rzędzie  $n_z$ , że  $U_l(\zeta)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q) \times (m+q)}$  oraz funkcja  $\tilde{H}(\zeta) = U_l(\zeta) \cdot H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$  ma dualną  $(J_{mq}, J_{mr})$ -bezstratną faktoryzację  $\tilde{H}(\zeta) = \tilde{\Omega}(\zeta) \cdot \Psi(\zeta)$ , gdzie  $\tilde{\Omega}(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{m+q}$ , wtedy poszukiwana uogólniona dualna  $(J_{mq}, J_{mr})$ -bezstratna faktoryzacja macierzy  $H(\zeta)$  przyjmuje postać  $H(\zeta) = \Omega(\zeta) \cdot \Psi(\zeta)$ , przy czym  $\Omega(\zeta) = U_l(\zeta)^{-1} \cdot \tilde{\Omega}(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q) \times (m+q)}$ . Elementy zbioru regulatorów, dla których spełniona jest nierówność  $\|DHM(H, K)\|_\infty < 1$  dane są formułą  $K = DHM(\Omega^{-1}, \Phi)$ , przy czym parametr  $\Phi(\zeta) \in \mathcal{BH}_\infty^{m \times q}$  tego zbioru dobiera się w taki sposób, aby  $K(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times q}$ . Racjonalna procedura syntezy regulatora powinna umożliwić uzyskanie minimalnej realizacji  $\Omega(\zeta)^{-1} = \tilde{\Omega}(\zeta)^{-1} \cdot U_l(\zeta)$  bez konieczności wyznaczania jawnej postaci lewostronnego kompensatora  $U_l(\zeta)$  (Suchomski [407, 409]).

### 6.3.2 Rozwiązanie

Założmy, że dana łańcuchowa macierz rozproszenia  $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$  o  $n_z > 0$  niezmienniczych zerach należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$  opisana jest minimalną realizacją  $(A, B, C, D)$ , w której  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Stosując do systemowej macierzy  $S_G(\zeta)$  uogólniony rzeczywisty algorytm Schura transformacji  $QZ$  (Datta [78], Emami-Naeini i Van Dooren [105], Golub i Van Loan [139], Stewart [382]) z odpowiednio dobranymi ortogonalnymi (unitarnymi) macierzami  $Q_z \in \mathbb{R}^{(n+m+r) \times (n+m+r)}$  oraz  $Z_z \in \mathbb{R}^{(n+p+r) \times (n+p+r)}$ , możemy wyznaczyć taki pęk

$$Q_z^T S_G(\zeta) Z_z = \begin{bmatrix} S_z - \zeta T_z & * \\ 0_{(n+m+r-n_z) \times n_z} & * \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

że  $S_z - \zeta T_z$  o macierzach  $S_z, T_z \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  jest regularnym podpękiem odpowiadającym elementarnym dzielnikom skojarzonym ze wszystkimi zerami  $G(\zeta)$  należącymi do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ . Zachodzi zatem  $\lambda(S_z, T_z) = \lambda(T_z^{-1} S_z) \subset \partial\mathcal{D}_\Delta$ . Podzielmy macierze

$$Q_z = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}, \quad Z_z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

w sposób zgodny z podziałem wyznaczonym wzorem (6.3), to znaczy odpowiednio:  $(n + (m + r)) \times (n_z + (n + m + r - n_z))$  oraz  $(n + (p + r)) \times (n_z + (n + p + r - n_z))$ . Mamy  $Q_{11} = Z_{11} T_z^{-1}$  oraz  $Q_{21} = 0_{(m+r) \times n_z}$ , co pozwala na zapisanie równości

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times (p+r)} \\ 0_{(m+r) \times n} & 0_{(m+r) \times (p+r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{21} \end{bmatrix} T_z^{-1} S_z \quad (6.4)$$

z której wynika, że:

$$AZ_{11} + BZ_{21} = Z_{11}T_z^{-1}S_z \quad (6.5)$$

$$CZ_{11} + DZ_{21} = 0_{(m+r) \times n_z}. \quad (6.6)$$

Ponieważ  $Q_z$  jest macierzą ortogonalną, zatem  $Q_{11}^T Q_{11} = I_{n_z}$  oraz  $Q_{11}^T Q_{12} = 0_{n_z \times (n+m+r-n_z)}$ . Stosując definicję odpowiedniego rozszerzonego pęku  $U_x - \zeta W_x$  oraz wzór (6.4), stwierdzamy, że:

$$P_x Z_{11} + Q_x Z_{21} = Q_{11} S_z \quad (6.7)$$

$$R_x Z_{11} + S_x Z_{21} = 0_{n \times n_z} \quad (6.8)$$

$$S_x^T Z_{11} + T_x Z_{21} = 0_{(p+r) \times n_z}. \quad (6.9)$$

Na tej podstawie wnioskujemy, że podmacierze  $Z_{11}$  oraz  $Z_{21}$  mogą służyć do wyznaczenia bazy niezmienniczej podprzestrzeni tego rozszerzonego pęku  $U_x - \zeta W_x$  skojarzonej z wartościami własnymi  $\lambda(T_z^{-1}S_z) \subset \partial\mathcal{D}_\Delta$

$$U_x \begin{bmatrix} Z_{11} \\ 0_{n \times n_z} \\ Z_{21} \end{bmatrix} = W_x \begin{bmatrix} Z_{11} \\ 0_{n \times n_z} \\ Z_{21} \end{bmatrix} T_z^{-1} S_z.$$

**Założenie 6.1.** Załóżmy, że istnieje taka baza

$$[ S_1^T \quad S_2^T \quad S_3^T ]^T \in \mathbb{R}^{(n+n+(p+r)) \times (n-n_z)}$$

stabilnej niezmienniczej podprzestrzeni pęku  $U_x - \zeta W_x$

$$U_x \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = W_x \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \Sigma_{11} \quad (6.10)$$

gdzie  $\Sigma_{11} \in \mathbb{R}^{(n-n_z) \times (n-n_z)}$  oraz  $\lambda(\Sigma_{11}) \subset \mathcal{D}_\Delta$ , że:

(a1)  $[ S_1 \quad Z_{11} ] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  jest macierzą nieosobliwą,

(a2)  $X = [ S_2 \quad 0_{n \times n_z} ] [ S_1 \quad Z_{11} ]^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  jest macierzą dodatnio półokreśloną,  $X \geq 0$ ,

(a3) można znaleźć nieosobliwą macierz  $M_x \in \mathbb{R}^{(p+r) \times (p+r)}$ , spełniającą równanie  $M_x^T (T_x + \Delta Q_x^T X Q_x) M_x = J_{pr}$  (por. *twierdzenie 6.8*).  $\square$

Z definicji pęku  $U_x - \zeta W_x$  oraz ze wzoru (6.10) wynika, że:

$$P_x S_1 + Q_x S_3 = S_1 \Sigma_{11} \quad (6.11)$$

$$-R_x S_1 - P_x^T S_2 - S_x S_3 = S_2 \Sigma_{11} + \Delta P_x^T S_2 \Sigma_{11} \quad (6.12)$$

$$S_x^T S_1 + Q_x^T S_2 + T_x S_3 = -\Delta Q_x^T S_2 \Sigma_{11}. \quad (6.13)$$

Wreszcie, biorąc pod uwagę wzory (6.7)-(6.9), (6.12) oraz (6.13), otrzymujemy formułę

$$(T_z^{-1} S_z)^T (Z_{11}^T S_2) (I_{n-n_z} + \Delta \Sigma_{11}) + (Z_{11}^T S_2) \Sigma_{11} = 0_{n_z \times (n-n_z)}$$

którą w dziedzinie operatora  $\delta$  można interpretować jako równanie Sylwestera ze względu na  $Z_{11}^T S_2$ . Ponieważ  $\lambda(T_z^{-1} S_z) \cap \lambda(\Sigma_{11}) = \emptyset$ , zatem równanie to ma jednoznaczne zerowe rozwiązanie  $Z_{11}^T S_2 = 0_{n_z \times (n-n_z)}$ .

Z założenia o minimalności realizacji  $(A, B, C, D)$  wynika całkowita obserwowalność pary  $(T_z^{-1} S_z, Z_{21})$ . Na tej podstawie wnioskujemy, że wartości własne macierzy  $\Sigma_{22} = T_z^{-1} S_z - T_z^{-1} \tilde{K} Z_{21} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  można kształtować w dowolny sposób, odpowiednio dobierając macierz  $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{n_z \times (p+r)}$ . Niech zatem pomocnicza macierz  $\tilde{K}$  ma taką postać, że  $\Sigma_{22}$  jest pewną macierzą stabilną,  $\lambda(\Sigma_{22}) \subset \mathcal{D}_\Delta$ . Kładąc  $\Sigma_{21} = -T_z^{-1} \tilde{K} S_3 \in \mathbb{R}^{n_z \times (n-n_z)}$ , ze wzorów (6.7)-(6.9) oraz (6.11)-(6.13) uzyskujemy równość

$$\tilde{U}_x \begin{bmatrix} S_1 & Z_{11} \\ S_2 & 0_{n \times n_z} \\ S_3 & Z_{21} \end{bmatrix} = \tilde{W}_x \begin{bmatrix} S_1 & Z_{11} \\ S_2 & 0_{n \times n_z} \\ S_3 & Z_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0_{(n-n_z) \times n_z} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

w której mamy parę  $(\tilde{U}_x, \tilde{W}_x)$  uzyskaną z pary  $(U_x, W_x)$  przez zastąpienie macierzy  $Q_x$  macierzą  $\tilde{Q}_x = Q_x - Q_{11} \tilde{K}$ . Z powyższego wynika, że  $(\tilde{U}_x, \tilde{W}_x) \in \text{dom}(\delta Ric)$  oraz  $X = \delta Ric(\tilde{U}_x, \tilde{W}_x)$ , gdzie  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  jest macierzą określoną przez warunek  $a2$  podany w założeniu 6.1. Zauważmy, że  $X$  nie zależy od macierzy  $\tilde{K}$ .

**Lemat 6.5** (o postaci prawostronnego kompensatora; Suchomski [404]).  
Niech  $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$  ma  $n_z > 0$  zer należących do  $\partial \mathcal{D}_\Delta$ . Funkcję

$$\tilde{G}(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B - Q_{11} \tilde{K} \\ \hline C & D \end{array} \right] \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$$

gdzie  $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{n_z \times (p+r)}$  oznacza dowolną macierz zapewniającą stabilność macierzy  $\Sigma_{22} = T_z^{-1} S_z - T_z^{-1} \tilde{K} Z_{21} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ , można przedstawić w postaci iloczynu  $\tilde{G}(\zeta) = G(\zeta) \cdot U_r(\zeta)$ , w którym

$$U_r(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} T_z^{-1} S_z & T_z^{-1} \tilde{K} \\ \hline Z_{21} & I_{p+r} \end{array} \right], \quad U_r(\zeta)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty^{(p+r) \times (p+r)}$$

jest stabilnie odwracalnym prawostronnym kompensatorem.

**Dowód.** Wykorzystując wcześniej zdefiniowane macierze  $Q_z$  oraz  $Z_z$ , w oparciu o wzory (6.5) oraz (6.6) otrzymujemy

$$Q_z^T S_{\tilde{G}}(\zeta) Z_z = \begin{bmatrix} S_z - \tilde{K} Z_{21} - \zeta T_z & * \\ 0_{(n+m+r-n_z) \times n_z} & * \end{bmatrix}.$$

Ponieważ  $\lambda(S_z - \tilde{K} Z_{21}, T_z) = \lambda(\Sigma_{22}) \subset \mathcal{D}_\Delta$ , zatem funkcja  $\tilde{G}(\zeta)$  ma  $n_z$  odpowiednich stabilnych zer (prawostronny kompensator  $U_r(\zeta)$  musi mieć  $n_z$  biegunów należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ ). Przyjmując, że

$$U_r(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} T_z^{-1} S_z & T_z^{-1} \tilde{K} \\ \hline C_u & I_{p+r} \end{array} \right]$$

gdzie  $C_u \in \mathbb{R}^{(p+r) \times n_z}$ , mamy

$$G(\zeta) \cdot U_r(\zeta) = \left[ \begin{array}{cc|c} A & BC_u & B \\ \hline 0_{n_z \times n} & T_z^{-1} S_z & T_z^{-1} \tilde{K} \\ \hline C & DC_u & D \end{array} \right].$$

Teraz wystarczy pokazać, że istnieje taka macierz  $C_u$ , dla której mody systemu  $G(\zeta) \cdot U_r(\zeta)$  skojarzone z wartościami własnymi  $\lambda(T_z^{-1} S_z)$  są nieobserwowalne, a ponadto  $U_r(\zeta)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty^{(p+r) \times (p+r)}$ . Ze wzoru (6.6) wynika, że kładąc  $C_u = Z_{21}$  oraz rozważając odpowiedni podobny model, otrzymujemy

$$\tilde{G}(\zeta) = G(\zeta) \cdot U_r(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} A & \tilde{B} \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

gdzie  $\tilde{B} = B - Q_{11} \tilde{K} \in \mathbb{R}^{n \times (p+r)}$ . Zobaczymy, że para  $(\tilde{U}_x, \tilde{W}_x)$  odpowiada funkcji  $\tilde{G}(\zeta)$ . Ponadto ze wzoru

$$U_r(\zeta)^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} \Sigma_{22} & T_z^{-1} \tilde{K} \\ \hline -Z_{21} & I_{p+r} \end{array} \right] \quad (6.15)$$

wynika, że funkcja  $U_r(\zeta)^{-1}$  jest stabilna, co oznacza, iż prawostronny kompensator  $U_r(\zeta)$  nie wprowadza żadnych zer należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ .  $\square$

Stosując *twierdzenie 6.8* do systemu opisanego funkcją  $\tilde{G}(\zeta)$ , uzyskujemy macierze:  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{M}_x$ ,  $\tilde{H}_x$  oraz  $\tilde{N}_{x\tilde{x}}$ , przy czym  $\tilde{X} = X$  (zauważmy, że  $\tilde{X}$  nie zależy od  $\tilde{K}$ ). Z warunku *a2* sformułowanego w *założeniu 6.1* wynika równość  $X Z_{11} = 0_{n \times n_z}$ . Na tej podstawie stwierdzamy, że  $\tilde{M}_x = M_x$  oraz

$\tilde{H}_x = H_x$ . Ponadto, ponieważ  $\tilde{B}_{\bar{x}} = \tilde{B} + H_{\bar{x}}D = B_{\bar{x}} - Q_{11}\tilde{K}$ , zatem  $X\tilde{B}_{\bar{x}} = XB_{\bar{x}}$ . Wreszcie, biorąc pod uwagę równość  $X(I_n - \tilde{X}X)^{-1} = (I_n - XX)^{-1}X$ , wnioskujemy, że  $\tilde{N}_{x\bar{x}} = N_{x\bar{x}}$ .

Poniższy lemat przekonuje, że czynnik  $\Pi(\zeta) = \tilde{\Pi}(\zeta) \cdot U_r(\zeta)^{-1}$  o  $n_z$  zerach należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$  można uzyskać bez konieczności wyznaczania jawnej postaci prawostronnego kompensatora.

**Lemat 6.6** (o czynniku uogólnionej  $J$ -bezstratnej faktoryzacji; Suchomski [404]). *Czynnik  $\Pi(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(p+r) \times (p+r)}$  uogólnionej  $(J_{mr}, J_{pr})$ -bezstratnej faktoryzacji  $G(\zeta) = \Theta(\zeta) \cdot \Pi(\zeta)$  funkcji  $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$  o  $n_z > 0$  zerach należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$  ma postać opisaną w twierdzeniu 6.8.*

**Dowód.** Stosując twierdzenie 6.8, mamy

$$\tilde{\Pi}(\zeta) = N_{x\bar{x}}^{-1} \left[ \begin{array}{c|c} A + H_{\bar{x}}C & -B_{\bar{x}} + Q_{11}\tilde{K} \\ \hline F_x(I_n - \tilde{X}X)^{-1} & I_{p+r} \end{array} \right].$$

Następnie, uwzględniając wzór (6.15), uzyskujemy realizację

$$\begin{aligned} & \tilde{\Pi}(\zeta) \cdot U_r(\zeta)^{-1} \\ &= N_{x\bar{x}}^{-1} \left[ \begin{array}{cc|c} A + H_{\bar{x}}C & 0_{n \times n_z} & -B_{\bar{x}} \\ 0_{n_z \times n} & \Sigma_{22} & T_z^{-1}\tilde{K} \\ \hline F_x(I_n - \tilde{X}X)^{-1} & F_x(I_n - \tilde{X}X)^{-1}Z_{11} - Z_{21} & I_{p+r} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Aby wykazać jej nieminimalność, wystarczy zauważyć, że  $F_x(I_n - \tilde{X}X)^{-1} = [S_3 \quad Z_{21}] [S_1 - \tilde{X}S_2 \quad Z_{11}]^{-1}$ , co prowadzi do równości  $F_x(I_n - \tilde{X}X)^{-1}Z_{11} = Z_{21}$ . Na tej podstawie stwierdzamy, że stabilne mody systemu  $\tilde{\Pi}(\zeta) \cdot U_r(\zeta)^{-1}$ , odpowiadające podmacierzy  $\Sigma_{22}$ , są nieobserwowalne. Zatem

$$\Pi(\zeta) = \tilde{\Pi}(\zeta) \cdot U_r(\zeta)^{-1} = N_{x\bar{x}}^{-1} \left[ \begin{array}{c|c} A + H_{\bar{x}}C & -B_{\bar{x}} \\ \hline F_x(I_n - \tilde{X}X)^{-1} & I_{p+r} \end{array} \right]. \quad \square$$

Lematy 6.5 oraz 6.6 stanowią podstawę następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 6.10** (o uogólnionej  $J$ -bezstratnej faktoryzacji; Suchomski [404]). *Niech funkcja  $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r) \times (p+r)}$  o minimalnej realizacji  $(A, B, C, D)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ma  $n_z > 0$  zer należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ , zaś*

$$\left[ S_1^T \quad S_2^T \quad S_3^T \right]^T \in \mathbb{R}^{(n+n+(p+r)) \times (n-n_z)}$$

oznacza bazę stabilnej niezmienniczej  $(n - n_z)$ -wymiarowej podprzestrzeni rozszerzonego pęku danego parą  $(U_x, W_x)$  wymienioną w twierdzeniu 6.8. Uogólniona  $(J_{mr}, J_{pr})$ -bezstratna faktoryzacja  $G(\zeta) = \Theta(\zeta) \cdot \Pi(\zeta)$  tej funkcji istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i) macierz  $\begin{bmatrix} S_1 & Z_{11} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  jest nieosobliwa oraz

$$X = \begin{bmatrix} S_2 & 0_{n \times n_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & Z_{11} \end{bmatrix}^{-1} \geq 0;$$

(ii)  $(U_{\bar{x}}, W_{\bar{x}}) \in \text{dom}(\delta Ric)$  oraz  $\bar{X} = \delta Ric(U_{\bar{x}}, W_{\bar{x}}) \geq 0$  dla pary  $(U_{\bar{x}}, W_{\bar{x}})$  zdefiniowanej w twierdzeniu 6.8;

(iii)  $\|X\bar{X}\|_2 < 1$ ;

(iv) istnieje nieosobliwa macierz  $M_x \in \mathbb{R}^{(p+r) \times (p+r)}$ , która spełnia równanie podane w twierdzeniu 6.8.

Czynnik  $\Pi(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(p+r) \times (p+r)}$  ma postać opisaną w twierdzeniu 6.8.  $\square$

Bez dowodów przytacza się analogiczny lemat oraz twierdzenie odnoszące się do uogólnionej dualnej  $J$ -bezstratnej faktoryzacji (Suchomski [402, 407, 409]). Niech zatem funkcja  $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$  o minimalnej realizacji  $(A, B, C, D)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , będzie dualną łańcuchową macierzą rozproszenia o  $n_z > 0$  niezmienniczych zerach należących do  $\partial \mathcal{D}_\Delta$ . Odpowiednia transformacja  $QZ$  o unitarnych macierzach  $Q_z \in \mathbb{R}^{(n+m+r) \times (n+m+r)}$  oraz  $Z_z \in \mathbb{R}^{(n+m+q) \times (n+m+q)}$ , zastosowana do systemowej macierzy  $S_{HT}(\zeta)$ , prowadzi do takiego pęku

$$Q_z^T S_{HT}(\zeta) Z_z = \begin{bmatrix} S_z - \zeta T_z & * \\ 0_{(n+m+r-n_z) \times n_z} & * \end{bmatrix}$$

że  $\lambda(S_z, T_z) = \lambda(T_z^{-1} S_z) \subset \partial \mathcal{D}_\Delta$ . Podziały macierzy  $Q_z$  oraz  $Z_z$  są zgodne z regułami:  $(n + (m+r)) \times (n_z + (n+m+r-n_z))$  oraz  $(n + (m+q)) \times (n_z + (n+m+q-n_z))$ . Przyjmując, że  $\begin{bmatrix} S_1^T & S_2^T & S_3^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(n+n+(m+q)) \times (n-n_z)}$  oznacza teraz bazę stabilnej niezmienniczej  $(n - n_z)$ -wymiarowej podprzestrzeni rozszerzonego pęku opisanego parą  $(U_y, W_y)$ , możemy podać odpowiednik wzoru (6.14). W tym celu posługujemy się parą macierzy  $(\tilde{U}_y, \tilde{W}_y)$  uzyskaną z pary  $(U_y, W_y)$  przez zastąpienie macierzy  $Q_y$  macierzą  $\tilde{Q}_y = Q_y - Q_{11}\tilde{K}$ , gdzie  $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{n_z \times (m+q)}$ .

**Lemat 6.7** (o postaci lewostronnego kompensatora; Suchomski [409]).  
Niech  $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$  ma  $n_z > 0$  zer należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ . Funkcję

$$\tilde{H}(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C - \tilde{K}^T Q_{11}^T & D \end{array} \right] \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q) \times (m+r)} \quad (6.16)$$

gdzie  $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{n_z \times (m+q)}$  oznacza dowolną macierz zapewniającą stabilność macierzy  $\Sigma_{22} = T_z^{-1} S_z - T_z^{-1} \tilde{K} Z_{21} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ , można przedstawić w postaci iloczynu  $\tilde{H}(\zeta) = U_l(\zeta) \cdot H(\zeta)$ , w którym

$$U_l(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} S_z^T T_z^{-T} & Z_{21}^T \\ \hline \tilde{K}^T T_z^{-T} & I_{m+q} \end{array} \right], \quad U_l(\zeta)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q) \times (m+q)}$$

jest stabilnie odwracalnym lewostronnym kompensatorem.  $\square$

Stosując twierdzenie 6.9 do systemu opisanego funkcją  $\tilde{H}(\zeta)$ , otrzymujemy macierze:  $\tilde{Y}$ ,  $\tilde{Y}$ ,  $\tilde{M}_y$ ,  $\tilde{H}_y$  oraz  $\tilde{N}_{y\bar{y}}$ . Zachodzi przy tym  $\tilde{Y} = Y$ , a ponadto  $\tilde{Y}$  nie zależy od  $\tilde{K}$ . Na tej podstawie wnioskujemy, że:  $\tilde{M}_y = M_y$ ,  $\tilde{H}_y = H_y$  oraz  $\tilde{N}_{y\bar{y}} = N_{y\bar{y}}$ .

**Twierdzenie 6.11** (o uogólnionej dualnej  $J$ -bezstratnej faktoryzacji; Suchomski [409]). Niech funkcja  $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$  o minimalnej realizacji  $(A, B, C, D)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ma  $n_z > 0$  zer należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ , zaś

$$\begin{bmatrix} S_1^T & S_2^T & S_3^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(n+n+(m+q)) \times (n-n_z)}$$

oznacza bazę stabilnej niezmienniczej  $(n - n_z)$ -wymiarowej podprzestrzeni rozszerzonego pęku opisanego parą  $(U_y, W_y)$  daną w twierdzeniu 6.9. Uogólniona  $(J_{mq}, J_{mr})$ -bezstratna faktoryzacja  $H(\zeta) = \Omega(\zeta) \cdot \Psi(\zeta)$  tej funkcji istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i) macierz  $\begin{bmatrix} S_1 & Z_{11} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  jest nieosobliwa oraz

$$Y = \begin{bmatrix} S_2 & 0_{n \times n_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & Z_{11} \end{bmatrix}^{-1} \geq 0;$$

(ii)  $(U_{\bar{y}}, W_{\bar{y}}) \in \text{dom}(\delta Ric)$  oraz  $\bar{Y} = \delta Ric(U_{\bar{y}}, W_{\bar{y}}) \geq 0$  dla pary  $(U_{\bar{y}}, W_{\bar{y}})$  zdefiniowanej w twierdzeniu 6.9;

(iii)  $\|Y\bar{Y}\|_2 < 1$ ;

(iv) istnieje nieosobliwa macierz  $M_y \in \mathbb{R}^{(m+q) \times (m+q)}$ , która spełnia równanie podane w twierdzeniu 6.9.

Czynnik  $\Omega(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q) \times (m+q)}$  ma postać opisaną w twierdzeniu 6.9.  $\square$

**Uwaga 6.4** (Suchomski [404, 409]). W przypadku, w którym obowiązują założenia *twierdzenia 6.8*, mamy  $\lambda(A + \tilde{B}F_x) = \lambda(\Sigma_{11}) \cup \lambda(\Sigma_{22}) \subset \mathcal{D}_\Delta$ . Z kolei, gdy spełnione są założenia *twierdzenia 6.9* dla odpowiednich podmacierzy  $\Sigma_{11}$  oraz  $\Sigma_{22}$  zachodzi  $\lambda(A + H_y\tilde{C}) = \lambda(\Sigma_{11}) \cup \lambda(\Sigma_{22}) \subset \mathcal{D}_\Delta$ , gdzie  $\tilde{C} = C - \tilde{K}^T Q_{11}^T \in \mathbb{R}^{(m+q) \times n}$ . Z drugiej strony, rozwiązanie  $X$ , które czyni zadość założeniom *twierdzenia 6.10*, nie jest rozwiązaniem stabilizującym równania Riccatiego odpowiadającego parze  $(U_x, W_x)$ . Czynniki  $\Pi(\zeta)$  ma  $n_z$  zer należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ , zatem macierz  $A + H_{\bar{x}}C + B_{\bar{x}}F_x(I_n - \bar{X}X)^{-1}$  nie może być macierzą stabilną:  $\lambda(T_z^{-1}S_z) \subset \lambda(A + H_{\bar{x}}C + B_{\bar{x}}F_x(I_n - \bar{X}X)^{-1})$ . Podobne spostrzeżenie dotyczy rozwiązania  $Y$ , o którym mówi *twierdzenie 6.11*. Rozwiązanie to nie jest rozwiązaniem stabilizującym równania Riccatiego przyporządkowanego parze  $(U_y, W_y)$ : mamy tu bowiem do czynienia z funkcją  $\Omega(\zeta)$  o  $n_z$  zerach należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ , a zatem  $\lambda(T_z^{-1}S_z) \subset \lambda(A + BF_{\bar{y}} + (I_n - Y\bar{Y})^{-1}H_yC_{\bar{y}})$ , co oznacza, że  $A + BF_{\bar{y}} + (I_n - Y\bar{Y})^{-1}H_yC_{\bar{y}}$  nie jest macierzą stabilną.  $\square$

**Przykład 6.5** (synteza regulatora metodą rozmieszczania biegunów (III); Suchomski [404]). Rozważmy, raz jeszcze, układ o schemacie danym na rys. 6.8. Przyjmujemy, że tor sterowania  $P_{yu} : U \rightarrow Y$  obiektu opisany jest minimalnym nominalnym modelem z wyróżnionym członem całkującym  $\tilde{P}_{yu}(\zeta) = B(\zeta)/(\zeta \cdot A(\zeta))$ , przy czym dla uproszczenia zakładamy, że moniczny wielomian  $A(\zeta)$  stopnia  $\deg A(\zeta) = N_A$  nie ma zer należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ . Podstawowy algorytm sterowania (rys. 2.1) opiera się teraz na wykorzystaniu dwóch filtrów  $M_u(\zeta) = L_u(\zeta)/C(\zeta)$  oraz  $M_y(\zeta) = L_y(\zeta)/C(\zeta)$  o licznikach stopnia  $\deg L_u(\zeta) = \deg L_y(\zeta) = N_A$  oraz monicznym stabilnym mianowniku  $C(\zeta)$  stopnia  $\deg C(\zeta) = N_A + 1$ . Charakterystyczne równanie układu zamkniętego o podstawowej strukturze ma postać  $T(\zeta) = \zeta \cdot A(\zeta) \cdot C(\zeta) + A(\zeta) \cdot L_u(\zeta) + B(\zeta) \cdot L_y(\zeta) = C(\zeta) \cdot T_0(\zeta)$ , przy czym  $T_0(\zeta)$  jest założonym stabilnym monicznym wielomianem stopnia  $\deg T_0(\zeta) = N_A + 1$ . Wielomiany  $L_u(\zeta)$  oraz  $L_y(\zeta)$  spełniają diofantyczne równanie  $\zeta \cdot A(\zeta) \cdot L_u(\zeta) + B(\zeta) \cdot L_y(\zeta) = C(\zeta) \cdot (T_0(\zeta) - \zeta \cdot A(\zeta))$ . Dążąc do zapewnienia układowi zamkniętemu odpornej stabilności, postępujemy zgodnie z procedurą opisaną w *przykładzie 6.3*. Przyjmując  $Q_0(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$  jako efektywny  $Q$ -parametr, otrzymujemy  $Q_u(\zeta) = -B(\zeta) \cdot Q(\zeta)$  oraz  $Q_y(\zeta) = \zeta \cdot A(\zeta) \cdot Q(\zeta)$ , gdzie  $Q(\zeta) = M_y(\zeta) \cdot Q_0(\zeta)/C(\zeta)$ . Szumowa funkcja wrażliwości rozważanego układu zamkniętego (rys. 6.8) dana jest wzorem

$$G_{yn}(\zeta) = \frac{-B(\zeta) \cdot M_y(\zeta)}{T_0(\zeta)} \cdot \left( 1 + \frac{\zeta \cdot A(\zeta)}{C(\zeta)} \cdot Q_0(\zeta) \right)$$



zaś w stosownym sformułowaniu problemu dopasowania modelu ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$  występuje funkcja  $T_2(\zeta) = \zeta \cdot A(\zeta)/C(\zeta)$ . Jak łatwo sprawdzić, łańcuchowa macierz rozproszenia  $G(\zeta)$  odpowiedniego uogólnionego obiektu, dana ogólnym wzorem (6.1), ma pojedyncze zero ( $n_z = 1$ ) w punkcie  $\zeta = 0 \in \partial\mathcal{D}_\Delta$ .

Niech  $C(\zeta) = C^-(\zeta) \cdot C^=(\zeta)$ , gdzie  $\deg C^=(\zeta) = N_N^+ + 1$ . Rozwiązując zmodyfikowany problem dopasowania modelu dla  $T_2(\zeta) = \zeta \cdot A^+(\zeta)/C^=(\zeta)$  oraz wielomianu  $Q_{0d}(\zeta)$  stopnia  $\deg Q_{0d}(\zeta) = N_W + N_A^+ + 1$  (por. przykład 6.3), wyznaczamy uproszczoną postać  $Q_0^=(\zeta)$  parametru  $Q_0(\zeta)$  (wzór (6.2)). Na tej podstawie otrzymujemy poszukiwane filtry algorytmu odpornego sterowania:

$$F_u(\zeta) = \frac{B(\zeta) \cdot Q_{0n}(\zeta)}{A^-(\zeta) \cdot Q_{0d}(\zeta)}, \quad F_y(\zeta) = 1 + \frac{\zeta \cdot A^+(\zeta) \cdot Q_{0n}(\zeta)}{Q_{0d}(\zeta)}.$$

Ilustrację powyższych rozważań stanowi przykład syntezy regulatora dla nieminimalnofazowego obiektu z całkowaniem. Przyjmijmy, że niepewny model obiektu dany jest wzorem

$$P_{\rho y u}(s) = \frac{k e^{-sT_0}}{s(1 + sT_1)}$$

w którym:  $-8 \leq k \leq -6$ ,  $0.5 \text{ s} \leq T_0 \leq 1.5 \text{ s}$  oraz  $-6 \text{ s} \leq T_1 \leq -4 \text{ s}$ . Jako nominalny model w czasie ciągłym tego obiektu przyjmujemy

$$\bar{P}_{\rho y u}(s) = \frac{\bar{k}(1 - s\bar{T}_0/2)}{s(1 + s\bar{T}_1)(1 + s\bar{T}_0/2)}$$

gdzie:  $\bar{k} = -7$ ,  $\bar{T}_0 = 1 \text{ s}$  oraz  $\bar{T}_1 = -5 \text{ s}$  (co odpowiada aproksymacji członu opóźniającego wymiernym filtrem Padé pierwszego rzędu; Baker [17], Baker *et al.* [18]). Dla  $\Delta = 0.002 \text{ s}$  wyznaczamy nominalny model  $\bar{P}_{yu}(\zeta) = B(\zeta)/(\zeta \cdot A(\zeta))$ ,  $\bar{P}_{yu}(\zeta) \notin \mathcal{RL}_\infty$ , w którym  $A^-(\zeta) = 1.996005 + \zeta$ ,  $A^+(\zeta) = -0.200040 + \zeta$ ,  $N_A = 2$  oraz  $N_A^+ = 1$ . Niech  $C(\zeta) = (0.5 + \zeta) \cdot (1 + \zeta)^2$  oraz  $C^=(\zeta) = (1 + \zeta)^2$ . Przykładowemu wielomianowi  $T_0(\delta) = (6 + \zeta)^3$  przyporządkowane jest wzmocnienie  $g = 77.281787$  oraz następujące wielomiany filtrów podstawowej struktury regulatora:  $L_u(\zeta) = 473.161030 + 119.970399\zeta + 16.204035\zeta^2$  oraz  $L_y(\zeta) = 38.640894 + 260.793025\zeta + 116.663745\zeta^2$ . Prosta wążąca funkcja  $W_M(\zeta)$  pierwszego rzędu ( $N_W = 1$ ), opisująca niepewność nominalnego modelu  $\bar{P}_{yu}(\zeta)$ , dana jest wzorem  $W_M(\zeta) = 3.4375(0.099875 + \zeta)/(1.248439 + \zeta)$ . Załóżmy, że  $(A_1, B_1, C_1, D_1)$  oraz  $(A_2, B_2, C_2, D_2)$  są minimalnymi kanonicznymi sterowanymi realizacjami funkcji  $T_1(\zeta) =$

$W_M(\zeta)$  oraz  $T_2(\zeta) = \zeta \cdot A^-(\zeta)/C^-(\zeta)$ , odpowiednio. Na tej podstawie wyznaczamy łańcuchową macierz rozproszenia uogólnionego modelu rzędu  $n = 3$

$$G(\zeta) = \left[ \begin{array}{cc|cc} A_1 & B_1 C_2 & B_1 D_2 & B_1 \\ \hline 0_{2 \times 1} & A_2 & B_2 & 0_{2 \times 1} \\ C_1 & D_1 C_2 & D_1 D_2 & D_1 \\ 0 & 0_{1 \times 2} & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Mamy tu do czynienia z uogólnionym obiektem  $P$  o niestandardowym modelu, dla którego naruszone jest wymaganie  $a\beta'$  podane w założeniu 5.1. Dzięki faktoryzacji  $QZ$  otrzymujemy  $S_z = 0$  oraz  $T_z = 0.707107$ . Następnie obliczamy  $X \geq 0$  oraz wyznaczamy nieosobliwą macierz  $M_x$ . Ponieważ w rozważanym przypadku zachodzi  $\lambda(A_1) \cup \lambda(A_2) \subset \mathcal{D}_\Delta$ , zatem  $\tilde{X} = 0_{3 \times 3}$ . W efekcie stwierdzamy, że

$$\Pi(\zeta)^{-1} = \frac{1}{D_0(\zeta)} \cdot \begin{bmatrix} N_{11}(\zeta) & N_{12}(\zeta) \\ N_{21}(\zeta) & N_{22}(\zeta) \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} N_{11}(\zeta) &= -0.387777 - 0.010230\zeta + 1.142733\zeta^2 + 0.765255\zeta^3 \\ N_{12}(\zeta) &= -0.168945 - 1.563156\zeta - 2.619476\zeta^2 - 1.225265\zeta^3 \\ N_{21}(\zeta) &= 0.016400\zeta + 0.041836\zeta^2 - 1.225265\zeta^3 \\ N_{22}(\zeta) &= 0.025842\zeta + 0.416727\zeta^2 + 1.581801\zeta^3 \\ D_0(\zeta) &= 0.019971\zeta + 0.299835\zeta^2 + \zeta^3. \end{aligned}$$

Zbiór wszystkich  $Q$ -parametrów dany jest formułą  $Q_0^- = HM(\Pi^{-1}, \Phi)$ , przy czym  $\Phi(\zeta) \in \mathcal{BH}_\infty$  jest taką funkcją, dla której  $Q_0^-(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty$ . Zakładając najprostszą postać parametru  $\Phi \in \mathbb{R}$ , otrzymujemy wzór  $Q_0^-(\zeta) = (N_{12}(\zeta) + \Phi N_{11}(\zeta))/(N_{22}(\zeta) + \Phi N_{21}(\zeta))$ , z którego wynika, że dla  $\Phi = -0.435676$  uzyskujemy poszukiwane rozwiązanie

$$Q_0^-(\zeta) = \frac{-0.736743 - 1.473486\zeta - 0.736743\zeta^2}{0.008838 + 0.188361\zeta + \zeta^2}$$

gwarantujące projektowanemu układowi pożądaną odporną stabilność:  $\|G_{yn}(\zeta) \cdot W_m(\zeta)\|_\infty = 0.9050$ .  $\square$

## 6.4 Synteza estymatorów stanu

Podrozdział ten poświęcono omówieniu zastosowania metody dualnej  $J$ -bezstratnej faktoryzacji dualnych łańcuchowych macierzy rozproszenia obiektów dynamicznych jako podstawy syntezy optymalnych estymatorów stanu

o charakterystykach kształtowanych ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$  (Suchomski [402, 407, 409]). Warto w tym miejscu podkreślić, że podobny sposób modelowania dyskretnych procesów, w którym stosuje się wymienione macierze rozproszenia, wykazał swoją skuteczność przy projektowaniu optymalnych filtrów detekcyjnych używanych w systemach diagnostyki technicznej (Suchomski i Kowalczyk [419]).

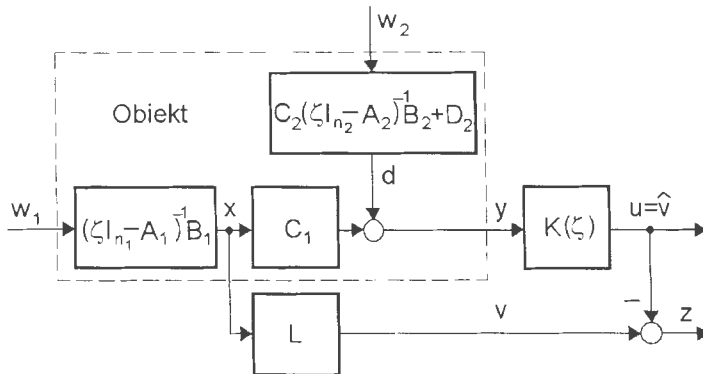
Rozważmy przeto pewien system opisany modelem czasu dyskretnego przedstawionym na rys. 6.12, gdzie  $w_1$  oraz  $w_2$  są sygnałami zewnętrznych zakłóceń o wymiarach  $r_1$  oraz  $r_2$ , odpowiednio, zaś sygnał  $y$  o wymiarze  $q$  oznacza wielkość mierzoną. Niech wektor  $x$  o wymiarze  $n_1$  będzie obserwowanym wektorem stanu podsystemu (obiektu) o realizacji  $(A_1, B_1, C_1, D_1)$ , w której  $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ , zaś  $v = Lx$ , gdzie  $L \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$ , będzie odpowiednim sygnałem odniesienia (ważonym wektorem stanu) o wymiarze  $m$ . Przyjmujemy ponadto, że addytywne zakłócenie  $d$  obecne w sygnale pomiarowym  $y$  jest modelowane za pomocą kształtującego członu  $P_d$  o realizacji  $(A_2, B_2, C_2, D_2)$ , przy czym macierz  $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ . Estymator (filtr) opisany funkcją przenoszenia  $K(\zeta) \in \mathcal{R}_P^{m \times q}$  dostarcza pewnego oszacowania  $\hat{v}$  wektora  $v$ . Definiując kryterialną zmienną w postaci resztowego wektora  $z = v - \hat{v}$ , możemy rozważanemu systemowi przyporządkować model odpowiedniego uogólnionego obiektu dynamicznego (rys. 5.2b). W modelu tym występuje wektor stanu o  $n = n_1 + n_2$  współrzędnych, a także sygnały  $u = \hat{v}$  oraz  $w = [w_1^T \ w_2^T]^T \in \mathbb{R}^r$ , gdzie  $r = r_1 + r_2$  (Suchomski [409]).

Podjmując zadanie syntezy optymalnego estymatora, stajemy w obliczu dwóch pozostających w konflikcie wymagań: funkcja przenoszenia  $K(\zeta)$  o 'małej' wartości normy  $\|K(\zeta)\|_\infty$  zapewnia dobre tłumienie wpływu zakłóceń  $d$  przy jednoczesnej degradacji zdolności tego estymatora do rekonstrukcji sygnału  $v$ .

Standardowy problem estymacji optymalnej ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$  polega na znalezieniu takiej przyczynowej i stabilnej funkcji przenoszenia  $K(\zeta)$ , dla której spełniona jest nierówność  $\|G_{zw}(\zeta)\|_\infty < \gamma$ , gdzie  $G_{zw} : W \rightarrow Z$  oznacza macierzową  $(m \times r)$  funkcję przenoszenia, zaś  $\gamma > 0$  jest parametrem. Szukamy zatem takiego  $K(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times q}$ , aby  $\|DHM(H, K)\|_\infty < 1$ , gdzie  $H(\zeta)$  jest dualną łańcuchową macierzą rozproszenia rozważanego uogólnionego obiektu

$$H(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} A_1 & 0_{n_1 \times n_2} & 0_{n \times m} & \left[ \begin{array}{cc} B_1 & 0_{n_1 \times r_2} \\ 0_{n_2 \times r_1} & B_2 \end{array} \right] \\ 0_{n_2 \times n_1} & A_2 & -\gamma I_m & 0_{m \times r} \\ \hline L & 0_{m \times n_2} & 0_{q \times m} & \left[ \begin{array}{cc} 0_{q \times r_1} & D_2 \end{array} \right] \\ C_1 & C_2 & & \end{array} \right].$$

Ponieważ operator  $DHM(H, K)$  jest w tym przypadku afiniczną funkcją  $K$ ,



Rys. 6.12. Sformułowanie zadania estymacji stanu.

zatem postawione zadanie syntezy estymatora można sformułować jako odpowiedni problem dopasowania modelu ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$ . Podamy warunki istnienia rozwiązania tego problemu. Analizując postać modelu  $H(\zeta)$ , stwierdzamy, że konieczny warunek *a1* sformułowany w założeniu 5.1 jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy macierze  $A_1$  oraz  $A_2$  są macierzami stabilnymi. Dyskusję dotyczącą bardziej ogólnego przypadku znaleźć można w (Suchomski [409]). Z kolei, aby spełnić warunek *a2*, musimy przyjąć, że  $\text{rank } D_2 = q$ . Rozwiążemy także zadanie estymacji stanu sformułowane dla przypadku uproszczonego modelu, w którym zakłócenie  $w_2$  oddziałuje bezpośrednio na sygnał pomiarowy  $y$ . Model  $d = w_2$  odpowiada sytuacji braku wiedzy o 'naturze' pomiarowych zakłóceń. Dualna łańcuchowa macierz rozproszenia odpowiedniego uogólnionego obiektu ma w tym przypadku postać

$$H(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|cc} A_1 & 0_{n_1 \times m} & [ B_1 \quad 0_{n_1 \times r_2} ] \\ L & -\gamma I_m & 0_{m \times r} \\ \hline C_1 & 0_{q \times m} & [ 0_{q \times r_1} \quad I_q ] \end{array} \right]$$

co oznacza, że  $n = n_1$  oraz  $q = r_2$ .

W dalszych rozważaniach wykorzystuje się *lematy* 5.6 oraz 5.7, a także następujący prosty lemat odnoszący się do niezmienniczych zer systemu dynamicznego.

**Lemat 6.8** (o niezmienniczych zerach; Suchomski [409]). *Dana jest funkcja  $H(\zeta)$  o realizacji  $(A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times r}, C \in \mathbb{R}^{q \times n}, D \in \mathbb{R}^{q \times r})$ . Dla systemowej macierzy  $S_H(\zeta)$  o pełnym wierszowym normalnym rzędzie liczba  $\zeta_0$*

jest (lewym) niezmienniczym zerem tej realizacji wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie wektory  $x \neq 0_n \in \mathbb{R}^n$  oraz  $v \in \mathbb{R}^q$ , że  $[x^T \ v^T] S_H(\zeta_0) = 0_{1 \times (n+r)}$ . W przypadku, w którym  $v = 0_q$ , liczbie  $\zeta_0$  odpowiada niesterowalny mod rozważanego systemu.

**Dowód.** Jeżeli  $\zeta_0$  jest niezmienniczym zerem realizacji funkcji  $H(\zeta)$ , to istnieje taki niezerowy wektor  $[x^T \ v^T]^T \in \mathbb{R}^{n+q}$ , że  $[x^T \ v^T] S_H(\zeta_0) = 0_{1 \times (n+r)}$ . Z drugiej strony, ponieważ  $S_H(\zeta)$  ma pełny wierszowy normalny rząd, zatem z faktu istnienia takiego wektora  $[x^T \ v^T]^T \neq 0_{n+q}$ , dla którego obowiązuje równość  $[x^T \ v^T] S_H(\zeta_0) = 0_{1 \times (n+r)}$ , wynika, że  $\zeta_0$  jest niezmienniczym zerem realizacji funkcji  $H(\zeta)$  (Douglas i Athans [91], Weinmann [463]). Musimy przy tym przyjąć, że  $x \neq 0_n$ . Bowiemy w przeciwnym przypadku mielibyśmy  $v^T [C \ D] = 0_{1 \times (n+r)}$ , czyli  $v = 0_q$ , co prowadzi do sprzeczności z założeniem, że  $[x^T \ v^T]^T \neq 0_{(n+q)}$ . Wreszcie, kładąc  $v = 0_q$ , uzyskujemy równość  $x^T [A - \zeta_0 I_n \ B] = 0_{1 \times (n+r)}$ , która zgodnie z kryterium Popowa-Belevitcha-Hautusa świadczy o tym, że  $\zeta_0$  odpowiada niesterowalnemu modowi badanego systemu (zob. Datta [78], Dullerud i Paganini [100], Petkov *et al.* [323]).  $\square$

W przypadku stabilnej macierzy  $A$  zerowe rozwiązanie  $\bar{Y} = 0_{n \times n}$  spełnia wymagania twierdzenia 6.7 oraz 6.9. Co oznacza, że  $F_{\bar{y}} = 0_{(m+r) \times n}$ ,  $C_{\bar{y}} = C$  oraz  $N_{y\bar{y}} = M_y$ . W efekcie uzyskujemy poniższą realizację stabilnego dualnego ( $J_{mq}, J_{mr}$ )-bezstratnego czynnika  $\Psi(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$  odpowiedniej bezstratnej faktoryzacji dualnego łańcuchowego modelu  $H(\zeta)$

$$\Psi(\zeta) = M_y \left[ \begin{array}{c|c} \frac{A + H_y C}{C} & \frac{B + H_y D}{D} \end{array} \right]. \quad (6.17)$$

**Uwaga 6.5** (Suchomski [409]). Mamy

$$S_\Psi(\zeta) = \left[ \begin{array}{cc} I_n & 0_{n \times (m+q)} \\ 0_{(m+q) \times n} & M_y \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} I_n & H_y \\ 0_{(m+q) \times n} & I_{m+q} \end{array} \right] S_H(\zeta).$$

Z lematu 5.7 wynika, że w przypadku, w którym  $\zeta_0 \in \mathcal{D}_\Delta$  jest 'stabilnym' zerem funkcji  $H(\zeta)$ , wtedy  $\zeta_0 \in \lambda(A + H_y C)$ . Oznacza to, że wzór (6.17) opisuje nieminimalną realizację czynnika  $\Psi(\zeta)$ . Dla niestandardowego obiektu o modelu z zerami należącymi do  $\partial \mathcal{D}_\Delta$  macierz  $A + H_y C$  nie jest macierzą stabilną: zbiór zer czynnika  $\Omega(\zeta)$  jest równy zbiorowi  $\lambda(A + H_y C) = \lambda(\Sigma_{11}) \cup \lambda(T_z^{-1} S_z)$ , dla odpowiednich macierzy  $\Sigma_{11}$ ,  $T_z$  oraz  $S_z$ . Funkcja  $\Psi(\zeta)$  pozostaje jednak funkcją stabilną, gdyż jej realizacja dana wzorem (6.17) nie

jest realizacją minimalną ze względu na skreślenia w parach, obejmujących zero oraz biegun należące do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ . Jeżeli  $H(\zeta)$  ma tylko 'niestabilne' zera należące do  $-\bar{\mathcal{D}}_\Delta$ , wówczas zera funkcji  $\Psi(\zeta)$  są równe tym właśnie zerom funkcji  $H(\zeta)$ , zaś ich koniugacje wyznaczają zbiór biegunów funkcji  $\Psi(\zeta)$ , czyli zbiór  $\lambda(\Sigma_{11})$ .  $\square$

Na zakończenie wstępnej części tego podrozdziału rozważmy następujący podział  $(m+q) \times (m+q)$  macierzy  $M_y$ , pojawiającej się jako niewiadoma w odpowiednich równaniach *twierdzeń 6.7* oraz *6.9*

$$M_y = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}.$$

Wymienione równania można interpretować jako uproszczone równania Riccatiego, co stwarza możliwość znalezienia potrzebnych macierzy  $M_y$  w postaci standardowych, symetrycznych rozwiązań tych równań. Z drugiej strony, dla dostatecznie dużych wartości parametru  $\gamma$  można poszukiwać rozwiązań o niestandardowej, niesymetrycznej, dolnej blokowej trójkątnej strukturze (por. *podrozdział 6.2.2*). Przykładowa macierz  $M_y$  o takiej trójkątnej postaci (o ile istnieje) dana jest następującymi wzorami (Suchomski [407, 409]):  $M_{11} = R_{11}^{-T}$ ,  $M_{12} = 0_{m \times q}$ ,  $M_{22} = R_{22}^{-T}$  oraz  $M_{21} = -M_{22} E_{12}^T M_{11}^T M_{11}$ . Przy czym  $E \in \mathbb{R}^{(m+q) \times (m+q)}$  jest macierzą, dla której obowiązuje podział  $(m+q) \times (m+q)$ :

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} \gamma^2 I_m - \Delta \bar{L} Y \bar{L}^T & -\Delta \bar{L} Y \bar{C}^T \\ -\Delta \bar{C} Y \bar{L}^T & -D_2 D_2^T - \Delta \bar{C} Y \bar{C}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{12}^T & E_{22} \end{bmatrix} \\ \bar{L} &= \begin{bmatrix} L & 0_{m \times n_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ \bar{C} &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times n} \end{aligned}$$

zaś  $R_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  jest czynnikiem Cholesky'ego podmacierzy  $E_{11}$ , natomiast  $R_{22} \in \mathbb{R}^{q \times q}$  jest czynnikiem Cholesky'ego macierzy  $-E_{11} \nabla$ , gdzie  $E_{11} \nabla = E_{22} - E_{12}^T E_{11}^{-1} E_{12}$  oznacza dopełnienie Schura podmacierzy  $E_{11}$ . Z powyższego wynika, że konieczny i wystarczający warunek istnienia macierzy  $M_y$  o pożądanej blokowej trójkątnej strukturze ma postać koniunkcji dwóch wymagań:  $E_{11} > 0$  oraz  $E_{11} \nabla < 0$ . Jak pokazano w dalszej części tego podrozdziału, w przypadku obiektów o standardowych modelach odpowiednie centralne algorytmy, w których stosuje się tak zdefiniowane macierze  $M_y$ , charakteryzują się dogodną prostotą implementacji (por. *podrozdział 6.2.2*).

### Obiekty o standardowych modalach

Założmy, że  $H(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$  jest stabilną dualną łańcuchową macierzą rozproszenia, która nie ma zer należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ . Przyjmijmy, że dla tej macierzy spełnione są warunki *i* oraz *iv* sformułowane w *twierdzeniu 6.9*. Stosując podział  $(m+q) \times (m+q)$  odwrotności  $\Omega(\zeta)^{-1} \in \mathcal{GH}_\infty^{m+q}$

$$\Omega(\zeta)^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{11}(\zeta) & \bar{\Omega}_{12}(\zeta) \\ \bar{\Omega}_{21}(\zeta) & \bar{\Omega}_{22}(\zeta) \end{bmatrix}$$

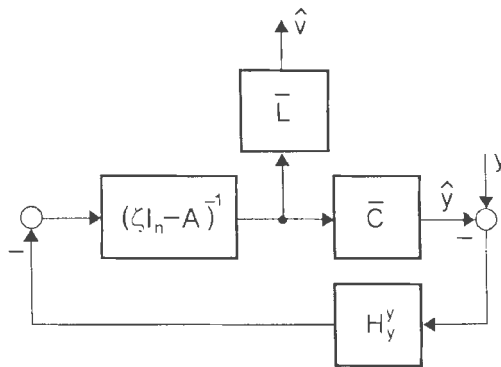
oraz przyjmując zerowy parametr  $\Phi = 0_{m \times q}$ , uzyskujemy poniższą realizację centralnego estymatora  $K(\zeta) = -\bar{\Omega}_{11}(\zeta)^{-1}\bar{\Omega}_{12}(\zeta)$

$$K(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} A + H_y^u \bar{C} - H_y^u M_{11}^{-1} M_{12} \bar{C} & H_y^u M_{11}^{-1} M_{12} - H_y^y \\ \hline \bar{L} + M_{11}^{-1} M_{12} \bar{C} & -M_{11}^{-1} M_{12} \end{array} \right]$$

gdzie  $H_y^u \in \mathbb{R}^{n \times m}$  oraz  $H_y^y \in \mathbb{R}^{n \times q}$  są odpowiednimi podmacierzami macierzy  $H_y = \begin{bmatrix} H_y^u & H_y^y \end{bmatrix}$ . Kolejny lemat dotyczy estymatora  $K(\zeta)$  przyporządkowanego macierzy  $M_y$  o założonej dolnej blokowej trójkątnej strukturze.

**Lemat 6.9** (o ściśle właściwej postaci centralnego estymatora; Suchomski [402, 409]). *Jeżeli istnieje macierz  $M_y$  o dolnej blokowej trójkątnej postaci, wówczas centralny estymator  $K(\zeta)$  jest ściśle właściwą funkcją (rys. 6.13)*

$$K(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} A + H_y^y \bar{C} & -H_y^y \\ \hline \bar{L} & 0_{m \times q} \end{array} \right]. \quad \square$$



Rys. 6.13. Centralny estymator.

### Obiekty o niestandardowych modalach

Przyjmijmy, że  $H(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q) \times (m+r)}$  oznacza stabilną dualną łańcuchową macierz rozproszenia o  $n_z$  niezmienniczych zerach należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ , spełniającą warunki *i* oraz *iv* podane w *twierdzeniu 6.9*. Niech  $Z_{21} = [\bar{Z}_{21}^T \quad \underline{Z}_{21}^T]^T$ , gdzie  $\bar{Z}_{21} \in \mathbb{R}^{n \times n_z}$  oraz  $\underline{Z}_{21} \in \mathbb{R}^{q \times n_z}$ . Na podstawie opisu modelu  $H(\zeta)$  stwierdzamy, że:

$$S_y = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} & 0_{n_1 \times q} \\ & B_2 D_2^T \end{bmatrix}, \quad T_y = \begin{bmatrix} -\gamma^2 I_m & 0_{m \times q} \\ 0_{q \times m} & D_2 D_2^T \end{bmatrix}$$

co prowadzi do wniosku, iż  $\bar{Z}_{21} = 0_{m \times n_z}$ . Z kolei

$$H_y^u = [S_1 \quad Z_{11}]^{-T} \begin{bmatrix} S_3^T \begin{bmatrix} I_m \\ 0_{q \times m} \end{bmatrix} \\ 0_{n_z \times m} \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Rozważając następującą realizację odwrotności  $\Omega(\zeta)^{-1}$  (Suchomski [409])

$$\Omega(\zeta)^{-1} = M_y \left[ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \Sigma_{11} & 0_{(n-n_z) \times n_z} \\ 0_{n_z \times (n-n_z)} & T_z^{-1} S_z \end{matrix} & \begin{matrix} S_3^T \\ [0_{n_z \times m} \quad \underline{Z}_{21}^T] \end{matrix} \\ \hline C [S_1 \quad Z_{11}]^{-T} & I_{m+q} \end{array} \right]$$

wnioskujemy, że wartości własne  $\lambda(T_z^{-1} S_z) \subset \partial\mathcal{D}_\Delta$  podsystemu

$$\begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{11}(\zeta) \\ \bar{\Omega}_{21}(\zeta) \end{bmatrix} = M_y \left[ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} A + H_y C & H_y^u \\ C & \begin{bmatrix} I_m \\ 0_{q \times m} \end{bmatrix} \end{matrix} \end{array} \right] \quad (6.19)$$

są niesterowalne. Niech  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  oznacza lewy wektor własny macierzy  $A + H_y C$  skojarzony z pewną wartością własną  $\zeta_0 \in \lambda(T_z^{-1} S_z)$ . Zdefiniujmy pomocniczy wektor  $[S_1 \quad Z_{11}]^{-1} x_0 = [\bar{x}_0^T \quad \underline{x}_0^T]^T$ , gdzie  $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^{n-n_z}$  oraz  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_z}$ . Ponieważ  $x_0^T (A + H_y C - \zeta_0 I_n) = 0_{1 \times n}$ , zatem  $\bar{x}_0 = 0_{n-n_z}$ . Na tej podstawie otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} x_0^T & 0_{1 \times (m+q)} \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} A + H_y C - \zeta_0 I_n & H_y^u \\ C & \begin{bmatrix} I_m \\ 0_{q \times m} \end{bmatrix} \end{matrix} \end{array} \right] = 0_{1 \times (n+m)}$$

co w oparciu o ustalenia *lematu 6.8* oznacza, że  $\zeta_0$  jest niezmienniczym zerem podsystemu (6.19). Zauważmy, że zerowanie się podmacierzy  $\underline{Z}_{21} \in \mathbb{R}^{q \times n_z}$  musimy wykluczyć. W przeciwnym razie obowiązywałaby bowiem nie tylko równość  $x_0^T H_y^u = 0_{1 \times m}$ , ale także równość  $x_0^T H_y^y = 0_{1 \times q}$ , co oznaczałoby, że liczba  $\zeta_0 \in \partial\mathcal{D}_\Delta$  jest niezmienniczym zerem funkcji  $\Omega(\zeta)^{-1}$ , a to jest sprzeczne z założeniem  $\Omega(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q) \times (m+q)}$ .



**Lemat 6.10** (o niewystarczalności centralnego estymatora stanu; Suchomski [409]). *W przypadku, w którym dualna łańcuchowa macierz rozproszenia  $H(\zeta)$  ma zera należące do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ , w syntezie estymatora optymalnego ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$  nie można stosować rozwiązań centralnych, ponieważ w tak ukształtowanej funkcji  $K(\zeta) = -\bar{\Omega}_{11}(\zeta)^{-1}\bar{\Omega}_{12}(\zeta)$  występowałyby bieguny należące do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ .  $\square$*

Powyższe ustalenia usprawiedliwiają próbę sięgnięcia po bardziej złożoną strukturę estymatora stanu  $K(\zeta) = DHM(\Omega(\zeta)^{-1}, \Phi)$  z niezerowym statycznym parametrem  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times q}$ . W takim przypadku mamy

$$K(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} A + H_y C - H_y^u \hat{D}_1^{-1} \hat{C} & H_y^u \hat{D}_1^{-1} \hat{D}_2 - H_y^y \\ \hline \hat{D}_1^{-1} \hat{C} & -\hat{D}_1^{-1} \hat{D}_2 \end{array} \right] \quad (6.20)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \hat{C} &= M_{11}\bar{L} + M_{12}\bar{C} - \Phi(M_{21}L + M_{22}\bar{C}) \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ \hat{D}_1 &= M_{11} - \Phi M_{21} \in \mathbb{R}^{m \times m} \\ \hat{D}_2 &= M_{12} - \Phi M_{22} \in \mathbb{R}^{m \times q}. \end{aligned}$$

W jaki sposób dobierać  $\Phi$ ? Analizując równoważny model estymatora (6.20), uzyskany w relacji podobieństwa o macierzy  $[S_1 \quad Z_{11}]^T$ , wnioskujemy, że  $\lambda(T_z^{-1}S_z) \subset \lambda(A + H_y C - H_y^u \hat{D}_1^{-1} \hat{C})$ . Widzimy zatem, że konieczny i wystarczający warunek stabilności tego estymatora przyjmuje postać żądania, aby mody odpowiadające wartościom własnym  $\lambda(T_z^{-1}S_z)$  były nieobserwowalne. Ze wzorów (6.18) oraz (6.20) wynika, że przyjmując parametr  $\Phi$  w taki sposób, aby

$$\hat{C} [S_1 \quad Z_{11}]^{-T} = \begin{bmatrix} * & 0_{m \times n_z} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$n - n_z$

zapewniamy realizacji estymatora  $K(\zeta)$  macierz stanu o blokowej diagonalnej postaci oraz macierz wyjścia o stosownej zerowej podmacierzy. W efekcie otrzymujemy liniowe równanie  $\Phi \underline{V} = \bar{V}$  o następująco zdefiniowanych macierzach współczynników  $\bar{V} \in \mathbb{R}^{m \times n_z}$  oraz  $\underline{V} \in \mathbb{R}^{q \times n_z}$  (Suchomski [409])

$$M_y C [S_1 \quad Z_{11}]^{-T} \begin{bmatrix} 0_{(n-n_z) \times n_z} \\ I_{n_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V} \\ \underline{V} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ dopuszczalne są tylko parametry  $\Phi$ , dla których  $\|\Phi\| < 1$ , zatem racjonalnym jest (warunkowe) przyjęcie rozwiązania  $\Phi = \bar{V} \underline{V}^+$  o minimalnej normie, gdzie  $\underline{V}^+ \in \mathbb{R}^{n_z \times q}$  oznacza macierz pseudoodwrotną Moore'a-Penrose'a.

**Lemat 6.11** (o parametryzacji zbioru rozwiązań zadania syntezy estymatora; Suchomski [409]). *Każde rozwiązanie  $\Phi$  o jednostkowo ograniczonej normie  $\|\Phi\| \leq 1$  równania  $\Phi V = \bar{V}$ , wiodące do stabilnej funkcji  $K(\zeta) = DHM(\Omega(\zeta)^{-1}, \Phi) \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times q}$ , jest rozwiązaniem dopuszczalnym. Konieczny warunek istnienia takiego rozwiązania ma postać koniunkcji dwóch wymagań:  $n_z \leq q$  oraz  $\text{Im } \bar{V}^T \subset \text{Im } V^T$ . Poszukiwany estymator  $K(\zeta)$  (o ile istnieje) ma minimalny rząd  $(n - n_z)$ .  $\square$*

W celu uproszczenia modelu (6.20) projektowanego estymatora, przy eliminowaniu podsystemu o nieobserwowalnych modach można użyć następującego prostego algorytmu.

**Algorytm 6.1** (upraszczania modelu estymatora stanu; Suchomski [409]).

- (1) Wyznacza się rozkład według wartości szczególnych  $M_o = U_o \Sigma_o V_o^T$  macierzy obserwowalności  $M_o \in \mathbb{R}^{mn \times n}$  zdefiniowanej dla pary  $(A + H_y C - H_y^u \hat{D}_1^{-1} \hat{C}, \hat{D}_1^{-1} \hat{C})$ .
- (2) Korzystając z unitarnej macierzy podobieństwa  $V_o \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , określa się równoważny model o nieninimalnej realizacji  $(V_o^T (A + H_y C - H_y^u \hat{D}_1^{-1} \hat{C}) V_o, V_o^T (H_y^u \hat{D}_1^{-1} \hat{D}_2 - H_y^y), \hat{D}_1^{-1} \hat{C} V_o, -\hat{D}_1^{-1} \hat{D}_2)$ .
- (3) Wyznacza się poszukiwany model o minimalnej realizacji, odpowiadającej lewej górnej podmacierzy o wymiarach  $(n - n_z) \times (n - n_z)$  macierzy stanu modelu uzyskanego w poprzednim kroku.  $\square$

Dla obiektów modelowanych łańcuchowymi macierzami rozproszenia  $G(\zeta)$  można bez trudu sformułować odpowiedniki *lematu 6.10* oraz *6.11*, a także podać stosowną wersję *algorytmu 6.1*.

Rozważymy dwa przykłady syntezy estymatorów optymalnych ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$ . Pierwszy przykład dotyczy obiektu o standardowym modelu bez zer należących do brzegu  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ . W drugim przykładzie, badając obiekt o niestandardowym modelu, pokażemy w jaki sposób projektować estymator stanu w przypadku, w którym takie zera występują. Szczegółową analizę własności badanych estymatorów można znaleźć w (Suchomski [402, 407, 409]).

Załóżmy przeto, że sygnałowy tor  $P_{yw_1} : W_1 \rightarrow Y$  obiektu opisany jest stabilnym modelem czasu ciągłego

$$P_c(s) = \left[ \begin{array}{ccc|c} -2.3 & -0.4 & -1.3 & 12 \\ -1 & -2 & -1.15 & 12 \\ -1.7 & 0.4 & -2.7 & 4 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Przyjmując  $\Delta = 0.02$  s, otrzymujemy odpowiedni model czasu dyskretnego  $P(\zeta)$ . Modele w czasie ciągłym torów zakłóceń pomiarowych mają postać:

$$P_{dc_1}(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc} -0.04 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.02 & 0 & 1 \\ \hline 0.04 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.005 & 0 & -0.1 \end{array} \right]$$

$$P_{dc_2}(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc} -0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.03 & 0 & 1 \\ \hline -0.05 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & -0.018 & 0 & 0.6 \end{array} \right].$$

Zauważmy, że w drugim (niestandardowym) przypadku mamy do czynienia z filtrami kształtującymi o znacząco różnych stałych czasowych. Ponadto przyjmujemy  $L = \begin{bmatrix} 1.25 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ . Na podstawie tych ustaleń mamy:  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 2$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$ ,  $q = 2$ ,  $m = 1$ ,  $n = 5$  oraz  $r = 3$ .

**Przykład 6.6** (estymacja stanu: obiekt o standardowym modelu; Suchomski [409]). W tym przypadku mamy

$$P_d(\zeta) = \left[ \begin{array}{cc|cc} P_{d1}(\zeta) & 0 \\ 0 & P_{d2}(\zeta) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} -0.0400 & 0 & 0.9996 & 0 \\ 0 & -0.0200 & 0 & 0.9998 \\ \hline 0.04 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.005 & 0 & -0.1 \end{array} \right].$$

Zadanej dopuszczalnej wartości parametru  $\gamma = 1.4$  odpowiada rozwiązanie  $Y \geq 0$  stosownego równania Riccatiego oraz pewna nieosobliwa dolna trójkątna macierz  $M_\gamma$ , którym przyporządkowujemy następujący algorytm estymatora

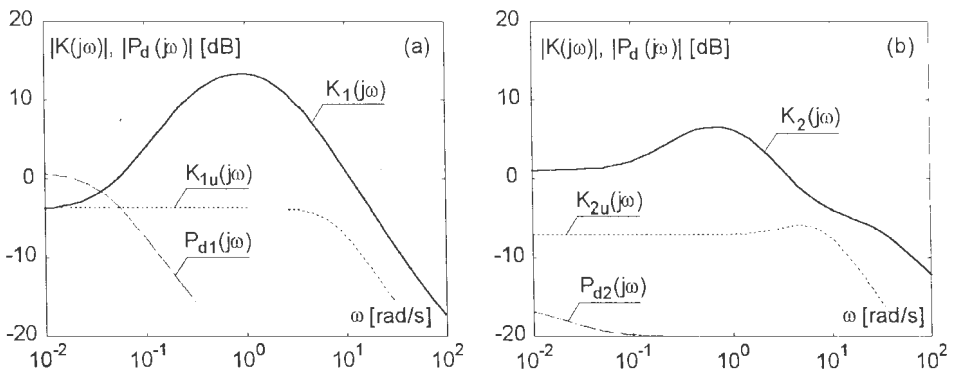
$$K(\zeta) = \begin{bmatrix} K_1(\zeta) & K_2(\zeta) \end{bmatrix}$$

$$= \left[ \begin{array}{ccccc|cc} -33.2145 & 30.6033 & -66.7237 & -1.2397 & -0.3275 & 30.9915 & 65.4913 \\ -28.5148 & 25.6143 & -66.7052 & -1.1030 & -0.3281 & 27.5754 & 65.6203 \\ -0.5421 & -0.6909 & -23.8620 & 0.0432 & -0.1063 & -1.0790 & 21.2502 \\ 7.4814 & -7.4814 & -5.3961 & 0.2593 & -0.0270 & -7.4814 & 5.3961 \\ 0.1917 & -0.1917 & -0.0103 & 0.0077 & -0.0200 & -0.1917 & 0.0103 \\ \hline 1.25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Postępując w podobny sposób, dla uproszczonego modelu toru zakłóceń pomiarowych otrzymujemy poniższy algorytm estymacji

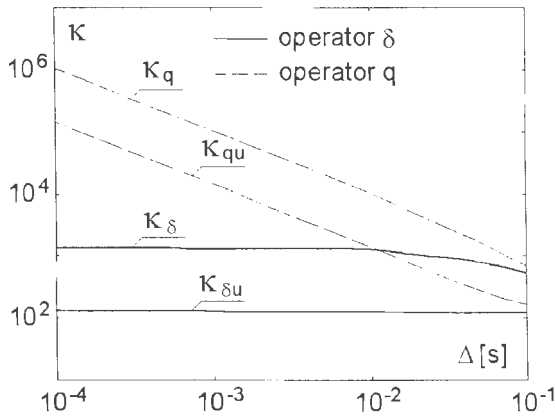
$$K(\zeta) = \left[ \begin{array}{ccc|cc} K_{1u}(\zeta) & K_{2u}(\zeta) & & & \\ \hline -12.5355 & 9.9243 & 7.6279 & 10.3125 & -8.8603 \\ -9.1044 & 6.2039 & 5.1292 & 8.1650 & -6.2141 \\ 1.1858 & -2.4188 & -7.1685 & -2.8069 & 4.5567 \\ \hline 1.25 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Amplitudowe charakterystyki funkcji  $K(\zeta)$  oraz  $P_d(\zeta)$  pokazano na rys. 6.14. Jak można zauważyć, dysponując dodatkową wiedzą o modelu zakłóceń pomiarowych, możemy poprawić jakość estymacji. W przypadku, w którym wzmocnienie toru modelowania tych zakłóceń osiąga względnie duże wartości (rys. 6.14a – niskie pulsacje) rozważane estymatory  $K_1(\zeta)$  oraz  $K_{1u}(\zeta)$  mają podobne charakterystyki. Z drugiej strony, gdy wzmocnienie torów zakłóceń jest względnie niskie (rys. 6.14a – górne pulsacje oraz rys. 6.14b) estymatory  $K_1(\zeta)$  oraz  $K_2(\zeta)$  charakteryzują się 'większą aktywnością'. Symulacyjne badania przejściowych procesów estymacji potwierdzają powyższe obserwacje (Suchomski [409]).



Rys. 6.14. Przykład 6.6. Amplitudowe charakterystyki estymatorów stanu oraz torów zakłóceń pomiarowych.

Porównajmy wskaźniki uwarunkowania odpowiadających sobie dyskretnych równań Riccatiego, rozwiązywanych w celu syntezy badanych estymatorów: w przypadku 'pełnego' modelu toru zakłóceń pomiarowych mamy  $\kappa_\delta = 991.5$  oraz  $\kappa_q = 4582.6$ , zaś w przypadku uproszczonego modelu tego toru otrzymujemy  $\kappa_{\delta u} = 123.4$  oraz  $\kappa_{qu} = 683.0$ . Przewagę algorytmów wyprowadzonych dla operatora  $\delta$  potwierdzają także wykresy pokazane na rys. 6.15.  $\square$



Rys. 6.15. Przykład 6.6. Wskaźniki uwarunkowania równań Riccatiego.

Znana jest ogólna metoda obliczania zer wymiernych modeli wielowymiarowych obiektów, polegająca na wyznaczeniu kanonicznej struktury Kroneckera takich modeli (Boley [37], Emami-Naeini i Van Dooren [105], Van Dooren [443, 445], Varga [450]). W przypadku, w którym rozważana funkcja  $H(\zeta)$  ma tylko pojedyncze zero  $\zeta_0 = 0 \in \partial\mathcal{D}_\Delta$ , można zaproponować prostszy algorytm obliczania macierzy  $Q_z$ ,  $Z_z$  oraz  $T_z$ , w którym nie jest wymagana znajomość struktury Kroneckera pęku  $S_{HT}(\zeta)$  (zauważmy, że teraz  $S_z = 0$ ). Odpowiedni algorytm składa się z trzech głównych kroków.

**Algorytm 6.2** (obliczania macierzy transformacji  $QZ$ ; Suchomski [409]).

(1) Wyznacza się rozkład według wartości szczególnych

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = U\Sigma V^T$$

gdzie  $U \in \mathbb{R}^{(n+m+q) \times (n+m+q)}$  oraz  $V \in \mathbb{R}^{(n+m+r) \times (n+m+r)}$  są unitarnymi macierzami, zaś  $\Sigma \in \mathbb{R}^{(n+m+q) \times (n+m+q)}$  jest diagonalną macierzą o nieujemnych diagonalnych elementach uporządkowanych rosnąco (Datta [78], Golub i Van Loan [139], Meyer [290]).

- (2) Wyznacza się macierz Householdera  $H_1 \in \mathbb{R}^{(n+m+r) \times (n+m+r)}$  (Demmel [84], Golub i Van Loan [139], Meyer [290]) skojarzoną z pierwszą kolumną macierzy  $V^T \bar{I}_n U \in \mathbb{R}^{(n+m+r) \times (n+m+q)}$ , gdzie

$$\bar{I}_n = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times (m+q)} \\ 0_{(m+r) \times n} & 0_{(m+r) \times (m+q)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m+r) \times (n+m+q)}.$$

- (3) Oblicza się macierze:

$$Q_z = V H_1^T, \quad Z_z = U, \quad \begin{bmatrix} T_z & * \\ * & * \end{bmatrix} = H_1 V^T \bar{I}_n U. \quad \square$$

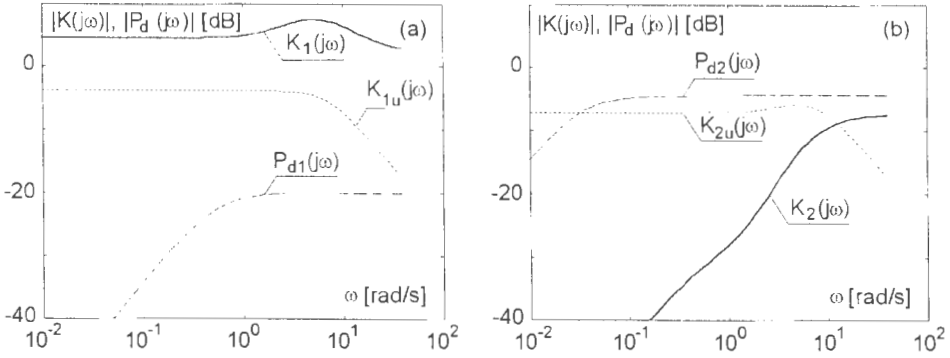
**Przykład 6.7** (estymacja stanu: obiekt o niestandardowym modelu; Suchomski [409]). W tym przypadku mamy

$$P_d(\zeta) = \begin{bmatrix} P_{d1}(\zeta) & 0 \\ 0 & P_{d2}(\zeta) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc} -0.4975 & 0 & 0.9950 & 0 \\ 0 & -0.0300 & 0 & 0.9997 \\ \hline -0.05 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & -0.018 & 0 & 0.6 \end{array} \right].$$

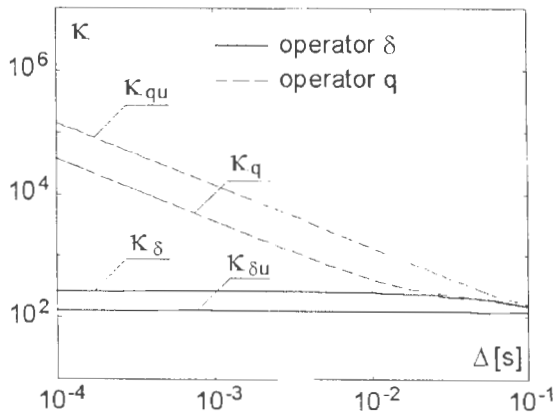
Stosując *algorytm 6.2*, dla  $\gamma = 1.4$  uzyskano  $T_z = -0.5660$ . Następnie wyznaczono  $Y \geq 0$  oraz nieosobliwą dolną trójkątną macierz  $M_y$ . Parametr  $\Phi$  spełnia równanie  $[0.0473 \quad -0.0780] \Phi^T = 0.0187$ . Rozwiązaniu o minimalnej normie  $\Phi = [0.1062 \quad -0.1752]$  przyporządkowany jest estymator

$$K(\zeta) = [K_1(\zeta) \quad K_2(\zeta)] \\ = \left[ \begin{array}{cccc|cc} -6.9157 & -0.0286 & 0.0020 & -0.0004 & -3.5963 & -0.7224 \\ 42.6596 & -2.9973 & 0.1853 & -0.0351 & 28.3369 & 8.0911 \\ -68.3104 & -3.8323 & -3.2145 & 0.5815 & -48.1174 & -8.8409 \\ 37.7983 & 1.6674 & 1.3342 & -0.7745 & 26.4595 & 5.1847 \\ \hline 0.3276 & 0.4954 & 0.0976 & 0.0543 & 1.4192 & -0.3947 \end{array} \right]^T.$$

Wykresy dane na rys. 6.16 ilustrują właściwości powyższych estymatorów. Na tym samym rysunku pokazano także amplitudowe charakterystyki modeli  $K(\zeta)$  oraz  $P_d(\zeta)$ . Rys. 6.17 dotyczy z kolei oceny uwarunkowania odpowiednich równań Riccatiego.



Rys. 6.16. Przykład 6.7. Amplitudowe charakterystyki estymatorów stanu oraz torów zakłóceń pomiarowych.



Rys. 6.17. Przykład 6.7. Wskaźniki uwarunkowania równań Riccatiego.

## 6.5 Zadania o nieregularnych macierzowych pękach

Podrozdział ten poświęcono zadaniom syntezy, w których ze względu na nieregularność modelu użytego do sformułowania problemu optymalizacji stosownego wskaźnika odwołującego się do normy  $\mathcal{H}_\infty$  występują osobliwości, manifestujące się między innymi pogorszeniem numerycznego uwarunkowania danego zadania.

Rozważmy parę macierzy  $(U, W)$  daną wzorem (4.3), w której podmacierz  $P$  jest macierzą regularną, zaś podmacierz  $T$  jest macierzą osobliwą. Niech  $-\Delta^{-1} \in \lambda(U, W)$ , zaś  $x = [x_1^T \ x_2^T \ x_3^T]^T \in \mathbb{R}^{n+n+m}$  oznacza odpowiedni wektor własny takiego nieregularnego rozszerzonego pęku  $U - \lambda W$ . Mamy zatem

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P + \Delta^{-1}I_n)^{-1} & 0_{n \times n} \\ \Delta R(P + \Delta^{-1}I_n)^{-1} & \Delta I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Q \\ S \end{bmatrix} x_3$$

oraz  $(-S^T(P + \Delta^{-1}I_n)^{-1}Q + T)x_3 = 0_m$ . Na tej podstawie otrzymujemy dogodną reprezentację wektora własnego  $x$  (Suchomski [408])

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_n + \Delta P)^{-1}Q \\ \Delta R(I_n + \Delta P)^{-1}Q - S \\ -\Delta^{-1}I_m \end{bmatrix} \tilde{x}$$

gdzie  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^m$  jest dowolnym niezerowym wektorem należącym do podprzestrzeni  $\text{Ker}(-\Delta S^T(I_n + \Delta P)^{-1}Q + T)$ . Zauważmy, iż taki wektor istnieje, ponieważ założenie  $-\Delta^{-1} \in \lambda(U, W)$  implikuje, że  $\dim \text{Ker}(-\Delta S^T(I_n + \Delta P)^{-1}Q + T) > 0$ . Należy tu podkreślić, że  $-\Delta^{-1}$  może być wielokrotną wartością własną rozważanego pęku.

Niech  $(U, W) \in \text{dom}(\delta Ric)$  oraz  $\mathbb{R}^{n \times n} \ni X = \delta Ric(U, W)$ . Przyjmijmy podziały (por. podrozdział 4.1):

$$\begin{aligned} X_1^{-1} &= \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{X}_1 \end{bmatrix}^T \\ X_3 &= \begin{bmatrix} x_3 & \tilde{X}_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

w których  $\tilde{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{X}_1 \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ , zaś  $\tilde{X}_3 \in \mathbb{R}^{m \times (n-1)}$ . Na podstawie lematu 4.3 wnioskujemy, że obowiązuje następujące skalowanie:

$$F_\delta = \Delta^{-1}\tilde{F}_\delta, \quad G_\delta = \Delta^{-1}\tilde{G}_\delta, \quad H_\delta = \Delta^{-1}\tilde{H}_\delta$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\delta &= -\tilde{x}\tilde{x}_1^T + \Delta\tilde{X}_3\tilde{X}_1^T \\ \tilde{G}_\delta &= Q\tilde{F}_\delta + \Delta P \\ \tilde{H}_\delta &= \tilde{G}_\delta^T \otimes I_n + I_n \otimes \tilde{G}_\delta^T + \tilde{G}_\delta^T \otimes \tilde{G}_\delta^T \end{aligned}$$



przy czym:  $\tilde{F}_\delta \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\tilde{G}_\delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  oraz  $\tilde{H}_\delta \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ . Nieregularność pęku  $U - \lambda W$  może być zatem przyczyną osobliwości badanego równania Riccatiego, która sprawia, że odpowiednie elementy macierzy  $F_\delta$ ,  $G_\delta$  oraz  $H_\delta$  będą przyjmowały nieograniczone wartości przy  $\Delta \rightarrow 0$ . W efekcie również macierze  $F$  zdefiniowane w *lemacie 4.4* mogą być macierzami o nieograniczonych elementach – dotyczy to zwłaszcza macierzy  $F_T$ , która w 'kwadratowy' sposób zależy od  $F_\delta$ . Z drugiej strony, macierz  $F_\delta$  pełni zwykle rolę efektywnego rozwiązania danego szczegółowego problemu (na rzecz którego sformułowano rozważane równanie Riccatiego) i jest najczęściej utożsamiana ze wzmocnieniem toru sprzężenia zwrotnego stosownego układu zamkniętego (por. *lemat 4.3*, a także Suchomski [400, 404]). Problem, przed którym stoimy, można zatem scharakteryzować jako analizę numerycznej wrażliwości metod syntezy pewnych osobliwych (*high-gain*) układów optymalizowanych ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$ . Podkreślenia wymaga fakt, że  $\Delta$  wpływa nie tylko na wektor własny skojarzony z wartością własną równą  $-\Delta^{-1}$ , lecz na całą strukturę własną rozważanego macierzowego pęku  $U - \lambda W$ . Oznacza to, że zależność  $\tilde{F}_\delta$  od  $\Delta$  nie wyczerpuje się w podanej prostej afinicznej formule. Należy także przestrzec przed wnioskowaniem, iż z równości  $H_\delta^{-1} = \Delta \tilde{H}_\delta^{-1}$  musi wynikać, że  $H_\delta^{-1}$  dąży do macierzy zerowej przy  $\Delta \rightarrow 0$ . W dalszej kolejności zbadamy wszystkie powyższe relacje, pokazując na przykładzie syntezy obserwatora stanu, że takiej nieograniczonej macierzy  $F_T$  może towarzyszyć niekorzystnie duża wrażliwość rozwiązania  $X$  badanego równania Riccatiego formułowanego w dziedzinie operatora  $\delta$  (Suchomski [408]).

Powróćmy zatem do problemu estymacji przedstawionego na rys. 6.12, przyjmując następujący model (macierz rozproszenia) estymowanego procesu (por. *podrozdział 6.4*)

$$P_\delta(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_w & B_u \\ \hline C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{array} \right]$$

$$= \left[ \begin{array}{cc|cc} A_1 & 0_{n_1 \times n_2} & \left[ \begin{array}{cc} B_1 & 0_{n_1 \times r_2} \\ 0_{n_2 \times r_1} & B_2 \end{array} \right] & 0_{n \times m} \\ 0_{n_2 \times n_1} & A_2 & & \\ \hline L & 0_{m \times n_2} & 0_{m \times r} & -I_m \\ C_1 & C_2 & \left[ \begin{array}{cc} 0_{q \times r_1} & D_2 \end{array} \right] & 0_{q \times m} \end{array} \right].$$

Jak widzimy, warunki  $a2'$  oraz  $a4$  podane w *założeniu 5.1* są spełnione. Kładąc  $\lambda(A) \subset \mathcal{D}_\Delta$ , czynimy zadość warunkowi  $a1$ . Rozwiązując zadanie syntezy  $\|LF(P_\delta, K)\|_\infty = \|G_{zw}\|_\infty < \gamma$  sformułowane dla macierzy rozproszenia  $P_\delta(\zeta)$ , skupimy się zatem na warunku  $a2''$  tego założenia.

**Lemat 6.12** (o istnieniu rozwiązania zadania estymacji stanu; Suchomski [408]). Niech  $(A, B, C, D)$ , gdzie  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , będzie minimalną realizacją stabilnego systemu  $P_\delta(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q) \times (r+m)}$ . Zakłada się, że realizacja ta nie ma zer należących do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ . Filtr  $K(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times q}$ , stanowiący rozwiązanie standardowego problemu  $\|G_{zw}(\zeta)\|_\infty < \gamma$ , istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i)  $(U, W) \in \text{dom}(\delta Ric)$  oraz  $X = \delta Ric(U, W) \geq 0$ , przy czym:

$$P = A^T, \quad Q = C^T$$

$$R = \begin{bmatrix} B_1 B_1^T & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & B_2 B_2^T \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} & 0_{n_1 \times q} \\ 0_{n_2 \times m} & B_2 D_2^T \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} -\gamma^2 I_m & 0_{m \times q} \\ 0_{q \times m} & D_2 D_2^T \end{bmatrix};$$

(ii) istnieje nieosobliwa macierz  $M \in \mathbb{R}^{(m+q) \times (m+q)}$ , spełniająca równanie  $M(T + \Delta Q^T X Q)M^T = -J_{mq}$ .  $\square$

**Przykład 6.8** (estymacja stanu (III); Suchomski [408]). Rozważmy prosty system o wymiarach  $n_1 = n_2 = m = q = r_1 = r_2 = 1$ ,  $n = n_1 + n_2 = 2$ , w którym tory  $P_{yw_1} : W_1 \rightarrow Y$  oraz  $P_{yw_2} : W_2 \rightarrow Y$  opisane są modelem czasu ciągłego

$$P_\rho(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc} -1/T_1 & 0 & 1/T_1 & 0 \\ 0 & -1/T_2 & 0 & 1/T_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & d \end{array} \right] \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{array}$$

gdzie  $T_1$  oraz  $T_2$  oznaczają odpowiednie stałe czasowe. W stosownym modelu czasu dyskretnego ( $\delta$ ) występują zatem następujące parametry:  $A_1 = -\alpha$ ,  $B_1 = \alpha$ ,  $A_2 = -\beta$ ,  $B_2 = \beta$ , gdzie  $\alpha = (1 - e^{-\Delta/T_1})/\Delta$  oraz  $\beta = (1 - e^{-\Delta/T_2})/\Delta$ . Mamy przeto do czynienia z obiektem o regularnej macierzy stanu. Należy podkreślić, iż celowo wybrano tak prosty system, aby ułatwić analityczne studium jego własności.

W dalszych rozważaniach istotną rolę odgrywa parametr  $d$ . Kładąc  $d = 0$ , zerujemy macierz  $S = 0_{2 \times 2}$  oraz czynimy osobliwą macierz  $T = \text{diag}(-\gamma^2, 0)$ , co narusza wymaganie  $a2''$  sformułowane w założeniu 5.1 oraz odpowiada warunkowi  $v$  podanemu w lemacie 4.2. Ponadto zbadamy także standardowy przypadek regularnego pęku przyporządkowanego niezerowemu parametrowi  $d = 0.2$ .

Przyjmując dogodną postać wektora  $\hat{x} = [0 \ 1]^T$ , otrzymujemy (Suchomski [408]):

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{bmatrix} (1 - \Delta\alpha)^{-1} & \alpha^{-2}(\alpha - \lambda_0(1 - \Delta\alpha)) \\ (1 - \Delta\beta)^{-1} & -\beta^{-2}(\beta - \lambda_0(1 - \Delta\beta)) \end{bmatrix} \\ X_2 &= \begin{bmatrix} \Delta\alpha^2(1 - \Delta\alpha)^{-1} & 1 \\ \Delta\beta^2(1 - \Delta\beta)^{-1} & -1 \end{bmatrix} \\ X_3 &= \begin{bmatrix} 0 & \gamma^{-2}(1 + \Delta\lambda_0) \\ -\Delta^{-1} & -\beta^{-2}(\beta + \lambda_0)(\beta - \lambda_0(1 - \Delta\beta)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gdzie  $\lambda_0 \in (-2\Delta^{-1}, 0) \setminus \{-\Delta^{-1}\}$  oznacza pewną stabilną (o ile istnieje) wartość własną odpowiedniego rozszerzonego pęku  $U - \lambda W$ . Dla  $\Delta \ll T_1, T_2$  mamy

$$\lambda_0 \approx \bar{\lambda} = \frac{-\sqrt{2\gamma^2 - 1}}{\gamma} \cdot \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

co świadczy o tym, że przy odpowiednio małym okresie próbkowania  $\Delta$  oraz dopuszczalnej wartości parametru  $\gamma > 1/\sqrt{2}$  zachodzi

$$X \approx X_0 = \begin{bmatrix} \bar{x} & -\bar{x} \\ -\bar{x} & \bar{x} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\bar{x} = \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2(\beta - \bar{\lambda}) + \beta^2(\alpha - \bar{\lambda})} = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha + \beta)\gamma + \sqrt{(2\gamma^2 - 1)(\alpha^2 + \beta^2)}} > 0.$$

Uzyskano zatem ograniczone (skończone) rozwiązanie  $X_0$  badanego równania Riccatiego. Ponieważ  $\lambda(X_0) = \{0, 2\bar{x}\}$ , przeto  $X_0 \geq 0$ . Zauważmy także, że dla dowolnej wartości  $\Delta > 0$  macierz  $T + \Delta Q^T X Q$  jest macierzą odwracalną. Centralny estymator istnieje (por. *podrozdział 6.2.2* oraz *6.4*) i dany jest wzorem

$$K(\zeta) = \left[ \begin{array}{c|c} A + H_x^y C_y & -H_x^y \\ \hline C_z & 0_{m \times q} \end{array} \right]$$

w którym  $H_x^y \in \mathbb{R}^{n \times q}$  jest prawą podmacierzą macierzy  $\begin{bmatrix} H_x^u & H_x^y \end{bmatrix} = F_\delta^T = -((I_n + \Delta P^T)XQ + S)(T + \Delta Q^T XQ)^{-1}$ . Ponadto (Suchomski [408]):

$$\begin{aligned} (I_n + \Delta G_\delta^T)X &\approx (1 + \Delta\bar{\lambda}) \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & -\tilde{X}_1 \end{bmatrix} \\ X_1^{-1} &\approx \bar{x} \begin{bmatrix} \beta^{-2}(\beta - \bar{\lambda}) & \alpha^{-2}(\alpha - \bar{\lambda}) \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

oraz

$$F_\delta \approx -\frac{\bar{x}}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta^{-2}(\beta - \bar{\lambda}) & \alpha^{-2}(\alpha - \bar{\lambda}) \end{bmatrix} + \bar{x} \begin{bmatrix} \gamma^{-2} & -\gamma^{-2} \\ 1 - \beta^{-2}\bar{\lambda}^2 & -1 + \beta^{-2}\bar{\lambda}^2 \end{bmatrix}$$

$$G_\delta \approx -\frac{\bar{x}}{\Delta} \begin{bmatrix} \beta^{-2}(\beta - \bar{\lambda}) & \alpha^{-2}(\alpha - \bar{\lambda}) \\ \beta^{-2}(\beta - \bar{\lambda}) & \alpha^{-2}(\alpha - \bar{\lambda}) \end{bmatrix} + \bar{\lambda}\bar{x} \begin{bmatrix} \alpha^{-2}(\alpha - \bar{\lambda}) & -\alpha^{-2}(\alpha - \bar{\lambda}) \\ -\beta^{-2}(\beta - \bar{\lambda}) & \beta^{-2}(\beta - \bar{\lambda}) \end{bmatrix}.$$

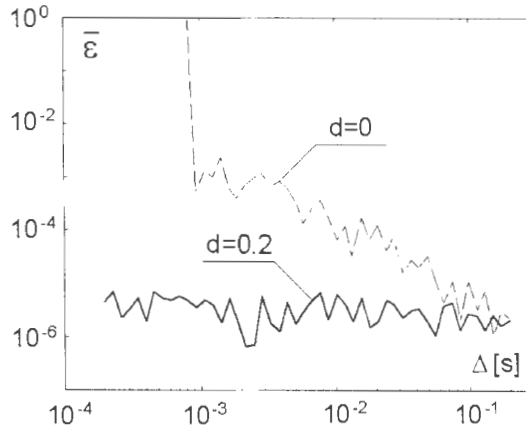
Na tej podstawie wnioskujemy, że parametr  $H_x^y$  (wzmocnienie) estymatora  $K(\zeta)$  ma postać

$$H_x^y \approx -\frac{\bar{x}}{\Delta} \begin{bmatrix} \beta^{-2}(\beta - \bar{\lambda}) \\ \alpha^{-2}(\alpha - \bar{\lambda}) \end{bmatrix}$$

potwierdzającą tezę o osobliwości rozważanego zadania syntezy estymatora. Okazuje się ponadto, że dla  $\Delta \rightarrow 0$  wszystkie elementy macierzy  $F_P$ ,  $F_Q$ ,  $F_R$  oraz  $F_S$  mają ograniczone wartości, zaś elementy ostatniej kolumny macierzy  $F_T$ , zależne od  $\Delta^{-1}$ , przyjmują wartości nieograniczone (Suchomski [408]). Zgodnie z *lematem 4.4* oznacza to, że dla dostatecznie szybkiego próbkowania rozwiązania uzyskane w oparciu o modele, w których stosuje się operator  $\delta$ , jak też rozwiązania przyporządkowane modelom związanym z operatorem  $q$ , charakteryzują się równoważną i niekorzystnie dużą wrażliwością na addytywne niestrukturalizowalne zaburzenia elementów macierzy  $T$  odpowiednich równań Riccatiego. W przypadku zadań, których osobliwość jest konsekwencją nieregularności modeli użytych do ich sformułowania, należy się zatem liczyć (dla określonego typu zaburzeń wejściowych danych) z utratą przewagi podejścia odwołującego się do operatora  $\delta$ . Można tu nawet mówić o pewnej implementacyjnej dogodności stosowania klasycznego operatora  $q$ : realizacja odpowiedniego estymatora nie zawiera w tym przypadku elementów o nieograniczonej wartości (nie wymaga się skalowania zgodnego z  $\Delta^{-1}$ ). Warto jednak podkreślić, że w każdym – a więc także i osobliwym – przypadku, 'dokładne' rozwiązanie  $K$  (o ile istnieje) zapewnia wymagane ograniczenie normy  $\|LF(P, K)\|_\infty < \gamma$ . Z drugiej strony, przyjmując multiplikatywny model zaburzeń macierzy  $T$  pęku  $U - \lambda W$ , mamy  $E_T = \text{diag}(-\gamma^2, 0, 0, 0)$ , co czyni macierz  $F_T E_T$  ograniczoną. W efekcie, dla tego typu do pewnego stopnia ustrukturalizowanych zaburzeń elementów macierzy równania Riccatiego, podejście związane z operatorem  $\delta$  'odzyskuje' swoją przewagę – jeśli idzie o uwarunkowanie typowych zadań optymalizacji ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$ .

Rozważania niniejszego podrozdziału zilustrowano wynikami dwóch prostych numerycznych eksperymentów. Pierwszy z nich dotyczy wrażliwości rozwiązań  $X$  równań Riccatiego formułowanych dla modeli związanych z operatorem  $\delta$ . Badano wpływ addytywnych zaburzeń wszystkich macierzy

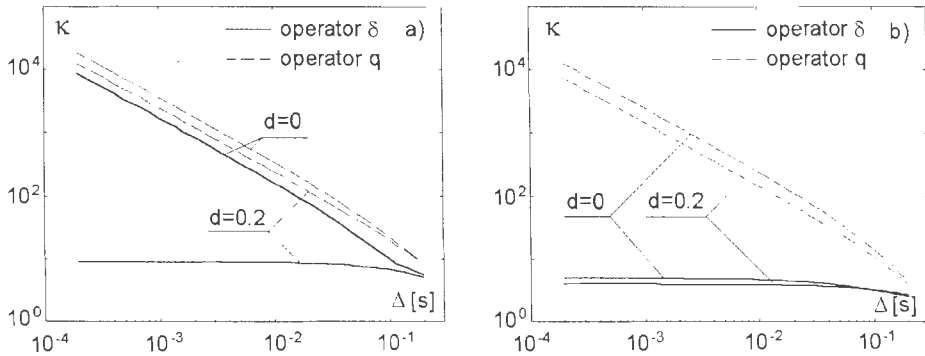
( $P, Q, R, S, T$ ) odpowiednich macierzowych pęków, przyjmując zaburzenia o równomiernym rozkładzie na przedziale  $[-\varepsilon_r, \varepsilon_r]$ , gdzie  $\varepsilon_r = 10^{-6}$ . Wyniki symulacyjnych obliczeń przedstawiono na rys. 6.18, obrazującym przebieg funkcji błędu rozwiązania danego równania Riccatiego  $\bar{\varepsilon} = \|X - \tilde{X}\|_F / \|X\|_F$ , gdzie  $X$  oznacza 'dokładne' rozwiązanie, zaś  $\tilde{X}$  jest rozwiązaniem uzyskanym dla równania o zaburzonych elementach.



Rys. 6.18. Przykład 6.8. Funkcje błędów rozwiązań dyskretnych ( $\delta$ ) równań Riccatiego przy addytywnych zaburzeniach.

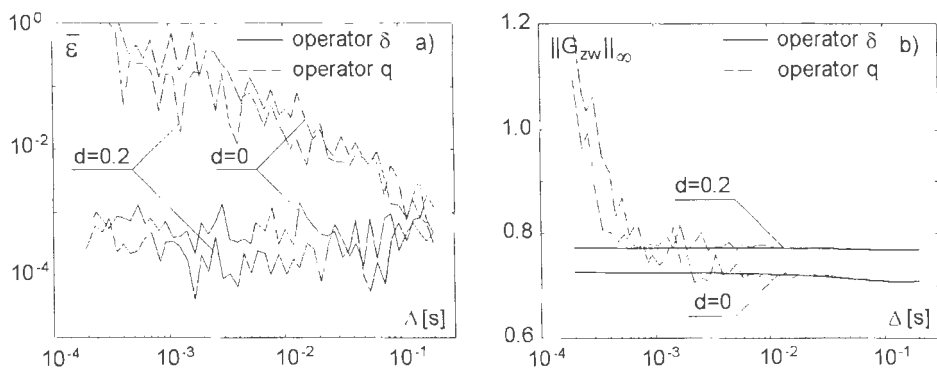
Zgodnie z oczekiwaniem, dla małych wartości okresu próbkowania  $\Delta$  rozwiązania osobliwego problemu ( $d = 0$ ) charakteryzują się dużą wrażliwością na ten typ zaburzeń. W przypadku nieosobliwego problemu ( $d = 0.2$ ) modelowanie z zastosowaniem operatora  $\delta$  zapewnia rozwiązaniom odpowiednich równań Riccatiego pożądaną małą numeryczną wrażliwość. Należy przy tym podkreślić, że w obu tu rozważanych przypadkach – to znaczy zarówno dla osobliwego, jak i nieosobliwego problemu – rozwiązania uzyskane w oparciu o standardowe modele zdefiniowane dla operatora  $q$  charakteryzują się złym uwarunkowaniem przy  $\Delta \rightarrow 0$  (rys. 6.19a). Też o przewadze podejścia, w którym modele z operatorem  $\delta$  stosuje się przy rozwiązywaniu badanych równań Riccatiego o elementach zaburzonych zgodnie ze schematem multiplikatywnym, ilustrują wykresy pokazane na rys. 6.19b.

Drugi z wykonanych numerycznych eksperymentów dotyczył odmiennego i zapewne bardziej realistycznego modelu zaburzeń niektórych danych, służących jako podstawa do sformułowania rozwiązywanych równań Riccatiego. Założono bowiem, że nominalne elementy  $a$  macierzy stanu oraz macierzy wejść modelu obiektu podlegają multiplikatywnym zaburzeniom zgodnie ze



Rys. 6.19. Przykład 6.8. Wskaźniki uwarunkowania równań Riccatiego: a) addytywne zaburzenia, b) multiplikatywne zaburzenia.

wzorem  $\tilde{a} = a(1 \pm \varepsilon)$ , gdzie  $\varepsilon$  jest zmienną losową o równomiernym rozkładzie na przedziale  $[-\varepsilon_r, \varepsilon_r]$ , przy czym  $\varepsilon_r = 5 \cdot 10^{-4}$ . Funkcje błędów rozwiązań badanych równań Riccatiego pokazano na rys. 6.20a. Przeprowadzono też numeryczny test, polegający na tym, że centralne estymatory odpowiadające zaburzonym rozwiązaniom  $\tilde{X}$  zastosowano w układzie estymacji stanu obiektu o nominalnym modelu. Wartości normy  $\|G_{zw}\|_\infty$ , charakteryzujące istotne właściwości badanych układów, pokazano na rys. 6.20b. Widzimy, że podejście odwołujące się do metody operatora  $\delta$  jest odporne na wpływ zaburzeń o analizowanej postaci. Dyskusję innych przypadków osobliwych zadań syntezy układów optymalnych ze względu wymagania formułowane z wykorzystaniem normy  $\mathcal{H}_\infty$  znajdziemy w (Suchomski [408]).



Rys. 6.20. Przykład 6.8. Ocena jakości układu estymacji: a) funkcje błędów rozwiązań równań Riccatiego, b) ocena jakości układu z estymatorem wyznaczonym w oparciu o niedokładny model obiektu.





# Zakończenie

Praca dotyczyła problemów syntezy algorytmów odpornego sterowania w czasie dyskretnym. Próbując wskazać najważniejsze przyczynki, które zdaniem autora wnosi niniejsza praca, należałoby – konsekwentnie wiążąc poniższe sformułowania z przyjętym sposobem modelowania sterowanych obiektów opartym na operatorze  $\delta$  – wymienić co następuje.

- (1) Opracowano analityczne formuły nastawiania korektorów Youli–Kučery o niskim rzędzie, służące zapewnieniu odpornej stabilności oraz odpornego zachowania się nominalnie stabilnych układów sterowania wyznaczonych zgodnie z metodą rozmieszczania biegunów oraz układów sterowania predykcyjnego. Zdefiniowano dwie rodziny diofantycznych równań niezbędnych przy rozwiązywaniu zadań syntezy algorytmów sterowania na podstawie zasady rozmieszczania biegunów.
- (2) Podano oszacowanie wstecznego oraz względnego błędu rozwiązania problemu rozmieszczania biegunów dla ściśle strukturalizowalnych zaburzeń liniowego zadania wynikającego z odpowiednich równań diofantycznych.
- (3) Przedstawiono numerycznie stabilną metodę oceny stopnia największego wspólnego dzielnika wielomianów dyskretnego modelu sterowanego obiektu.
- (4) Opracowano metodę strojenia algorytmów predykcyjnego sterowania, mającą postać analitycznych formuł wywiedzionych z właściwości odpowiednio sparametryzowanych rodzin prototypowych wielomianów.
- (5) Badając wrażliwość rozwiązań dyskretnych równań Riccatiego oraz dyskretnych równań Lapunowa na zaburzenia odpowiednich macierzowych pęków, wykazano, że w przypadku nieosobliwych zadań przy dostatecznie małej wartości okresu próbkowania równania przyporządkowane standardowemu operatorowi przesunięcia  $q$  charakteryzują się istotnie

gorszym uwarunkowaniem w stosunku do równań wynikających z zastosowania operatora  $\delta$ . Ujawniono także istnienie klasy osobliwych zadań, dla których taka przewaga modeli związanych z operatorem  $\delta$  nie występuje.

- (6) Dla typowych struktur algorytmów optymalnego sterowania pokazano w jaki sposób, wykorzystując odpowiednio zdefiniowane równania Lapunowa, wyznaczyć zakres niestrukturalizowalnych zaburzeń nominalnego modelu sterowanego obiektu, dopuszczalnych ze względu na stabilność układu zamkniętego.
- (7) Zbadano właściwości  $J$ –bezstratnych stabilizujących koniugatorów.
- (8) Sformułowano konieczne i wystarczające warunki istnienia różnych  $J$ –bezstratnych faktoryzacji modeli (macierzy) rozproszenia, w tym także uogólnionych  $J$ –bezstratnych faktoryzacji macierzy, które mają zera należące do  $\partial\mathcal{D}_\Delta$ . Szczegółowo przeanalizowano właściwości czynników takich faktoryzacji.
- (9) Ukazano podstawowe strukturalne cechy szerokiej klasy optymalnych algorytmów sterowania, które uzyskuje się, biorąc pod uwagę zalecenia wynikające z teorii przestrzeni  $\mathcal{H}_\infty$ . Podano wystarczające warunki istnienia wymiernych rozwiązań o ściśle właściwej postaci, a także zwrócono uwagę na ograniczony zakres ich stosowalności.
- (10) Omówiono szereg algorytmów odpornego sterowania oraz estymacji stanu, w tym ogólną postać algorytmu wyprowadzonego z metody rozmieszczania biegunów.

*Rozdział 6.*, poświęcony problemom syntezy liniowych układów optymalnych ze względu na normę  $\mathcal{H}_\infty$ , stanowi merytorycznie najistotniejszą część pracy. Łatwo wszakże zauważyć, że motyw kształtowania charakterystyk układów dynamicznych (sterowania oraz estymacji) w oparciu o wskazania formułowane z wykorzystaniem normy  $\mathcal{H}_\infty$  wielokrotnie pojawiał się także w innych miejscach tej pracy.

Problemy oraz zadania tu podjęte nie wypełniają całości obszaru zasługującego na penetrację. Jeden z rozpoczętych i interesujących wątków wiąże się z pytaniem o możliwość zbudowania numerycznie stabilnego algorytmu syntezy regulatora według normy  $\mathcal{H}_\infty$  na podstawie rozszerzonego modelu danego obiektu. Okazuje się, że w przypadku takich modeli, badając konieczne i wystarczające warunki istnienia odpowiednich  $J$ –bezstratnych faktoryzacji, a także definiując dodatkowe strukturalne wymagania nakładane

na unimodularne czynniki tych faktoryzacji, po raz kolejny przekonujemy się o korzyściach, jakie daje reprezentacja rozważanych równań Riccatiego w postaci stosownych macierzowych pęków (Suchomski [412]). Inny problem, o którym tylko wspomniano w toku prowadzonych rozważań, dotyczy algorytmów syntezy odpornych adaptacyjnych układów sterowania z  $Q$ -parametrami zmieniającymi się w czasie (Suchomski [411]).

Na zakończenie warto jeszcze wymienić dwa tematy, które będąc rozwinięciem problematyki poruszonej w niniejszej pracy, stanowią o aktualnych fascynacjach jej autora. Są to problemy syntezy numerycznie odpornych algorytmów sterowania nieliniowymi obiektami o nieskończeniowym wymiarowym modelach oraz zagadnienia związane z adekwatnym modelowaniem w czasie dyskretnym niepewności charakterystyk obiektów opisanych różniczkowymi inkluzjami.



# Literatura

- [1] J. Abels, P. Benner: CAREX (DAREX) - a collection of benchmark examples for continuous-time (discrete-time) Riccati equations, *SLICOT Working Note*, 1999, 14 (16), Katholieke Univ., Leuven, Belgium.
- [2] A. Albert: Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudo inverses, *SIAM Journ. Applied Math.*, 1969, 17 (2), 434-440.
- [3] B.D.O. Anderson: From Youla-Kučera to identification, adaptive and nonlinear control, *Automatica*, 1998, 34 (12), 1485-1506.
- [4] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammerling, A. McKenny, D. Sorensen: *LAPACK users' guide*, SIAM, Philadelphia, PA, 1999.
- [5] B.D.O. Anderson, J.B. Moore: *Optimal control. Linear quadratic methods*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1990.
- [6] P. Ansay, V. Wertz: Model uncertainties in GPC: a systematic two-step design, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, FR-A-B-3.
- [7] P. Ansay, M. Gevers, V. Wertz: Enhancing the robustness of GPC via a simple choice of the Youla parameter, *European Journ. Control*, 1998, 4 (1), 64-70.
- [8] K. Arent, I.M.Y. Mareels, J.W. Polderman: The pole-zero cancellation problem in adaptive control: a solution for minimum phase systems by approximate models, *European Journ. Control*, 1998, 4 (3), 320-332.
- [9] L. Arnold: *Stochastic differential equations. Theory and Applications*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1974.
- [10] W.F. Arnold, A.J. Laub: Generalized eigenproblem algorithms and software for algebraic Riccati equations, *Proc. IEEE*, 1984, 72 (12), 1746-1754.
- [11] K.J. Åström: Limitations on control system performance, *European Journ. Control*, 2000, 6 (1), 2-20.
- [12] K.J. Åström, P. Hagander, J. Sternby: Zeros of sampled systems, *Automatica*, 1984, 20 (1), 31-38.

- [13] K.J. Åström, B. Wittenmark: *Adaptive control*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA., 1989.
- [14] K.J. Åström, B. Wittenmark: *Computer-controlled systems*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ., 1997.
- [15] E.W. Bai, Z. Ding: Zeros of sampled data systems represented by FIR models, *Automatica*, 2000, 36 (1), 121-123.
- [16] E.W. Bai, Y.Q. Wu: Limiting zero distribution of sampled systems, *Automatica*, 2002, 38 (5), 843-851.
- [17] G.A. Baker: *Essentials of Padé approximants*, Academic Press, New York, San Fransisco, 1975.
- [18] G.A. Baker, P. Graves-Morris, P.A. Carruthers: *Padé approximants*, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1981.
- [19] S. Barnett: *Matrices in control theory*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1971.
- [20] A.Y. Barraud: A numerical algorithm to solve  $A^T X A - X = Q$ , *IEEE Trans. Automatic Control*, 1977, AC-22 (5), 883-885.
- [21] R.H. Bartels, A.R. Conn, C. Charalambous: On Cline's direct method for solving overdetermined linear systems in the  $l_\infty$  sense, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1978, 15 (2), 255-270.
- [22] H. Bartels, G.W. Stewart: Algorithm 432. Solution of the matrix equation  $AX + XB = C$ , *Comm. Assoc. Computing Mach.*, 1972, 15 (9), 820-826.
- [23] F.L. Bauer: Optimally scaled matrices, *Numer. Math.*, 1963, 5 (1), 73-87.
- [24] F.L. Bauer: Remarks on optimally scaled matrices, *Numer. Math.*, 1969, 13 (1), 1-3.
- [25] B. Beckermann, G. Labahn: A fast and numerically stable Euclidean-like algorithm for detecting relatively prime numerical polynomials, *Journ. Symbolic Comput.*, 1998, 26 (6), 691-714.
- [26] B. Benhammouda: Rank-revealing 'top-down' *ULV* factorizations, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1997, SFB393/97-02, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.
- [27] P. Benner, A.J. Laub, V. Mehrmann: A collection of benchmark examples for the numerical solution of algebraic Riccati equations. I: continuous-time case, II: discrete-time case, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1995, 95-22, 95-23, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.
- [28] P. Benner, A.J. Laub, V. Mehrmann: Benchmarks for the numerical solution of algebraic Riccati equations, *IEEE Control Systems Magazine*, 1997, 17 (5), 18-28.

- [29] A. Berman, R.J. Plemmons: *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [30] R.R. Bitmead, M. Gevers: Riccati difference and differential equations: convergence, monotonicity and stability, w S. Bittani, A.J. Laub, J.C. Willems (Eds.): *The Riccati equation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [31] R.R. Bitmead, H. Weiss: On the solution of discrete-time Lyapunov matrix equation in controllable canonical form, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1979, AC-24 (3), 481-482.
- [32] Å. Björck: *Numerical methods for least squares problems*, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.
- [33] Å. Björck: Component-wise perturbation analysis and error bounds, *BIT*, 1991, 31, 238-244.
- [34] T. Bleile, P. Boucher, D. Dumur: Delta-operator generalized predictive cascade control, *Proc. 3rd European Control Conf ECC'95*, Rome, Italy, 4, 1995, 2857-2862.
- [35] M.J. Błachuta: On zeros of pulse transfer functions, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1999, AC-44 (6), 1229-1234.
- [36] J. Bognar: *Indefinite inner product spaces*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1974.
- [37] D.L. Boley: Computing rank-deficiency of rectangular matrix pencils, *Systems and Control Letters*, 1987, 9, 207-214.
- [38] D.L. Boley, W.S. Lu: Measuring how far a controllable system is from an uncontrollable one, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1986, AC-31 (3), 249-251.
- [39] P. Boucher, D. Dumur, R. Neumann: Control axis using delta-operator generalized-predictive control, *Proc. 2nd European Control Conf. ECC'93*, Groningen, The Netherlands, 1993 2, 937-940.
- [40] T.L. Boullion, P.L. Odell: *Generalized inverse matrices*, Wiley-Interscience, John Wiley and Sons, New York, 1971.
- [41] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in system and control theory*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [42] R.D. Braatz: Internal model control, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [43] G.E. Bredon: *Topology and geometry*, Springer Verlag, New York, 1993.
- [44] W.S. Brown: On Euclid's algorithm and the computation of polynomial greatest common divisors, *Journ. Assoc. Computing Mach.*, 1971, 18 (4), 476-504.
- [45] R.G. Brown, P.Y.C. Hwang: *Introduction to random signals and applied Kalman filtering*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1992.

- [46] J.R. Bunch: The weak and strong stability of algorithms in numerical linear algebra, *Linear Algebra Appl.*, 1987, 88/89, 49-66.
- [47] J.R. Bunch, C.P. Nielsen: Updating the singular value decomposition, *Numer. Math.*, 1978, 31 (2), 111-129.
- [48] A. Bunse-Gerstner, R. Byers, V. Mehrmann: A chart of numerical methods for structured eigenvalue problems, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1992, 13 (2), 419-453.
- [49] P.A. Businger: Matrices which can be optimally scaled, *Numer. Math.*, 1968, 12, 346-348.
- [50] P.A. Businger, G.H. Golub: Linear least squares solutions by Householder transformations, *Numer. Math.*, 1965, 7 (3), 269-276.
- [51] M. Busłowicz: *Odporna stabilność układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami*, Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk, Politechnika Białostocka, Warszawa, Białystok, 2000.
- [52] R. Byers: A LINPACK-style condition estimator for the equation  $AX - XB^T = C$ , *IEEE Trans. Automatic Control*, 1984, AC-29 (10), 926-928.
- [53] E.F. Camacho, C. Bordons: *Model predictive control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [54] T.F. Chan, D.E. Foulser: Effectively well-conditioned linear systems, *SIAM Journ. Sci. Statist. Comput.*, 1988, 9 (6), 963-969.
- [55] S. Chandrasekaran, I.C.F. Ipsen: On the sensitivity of solution components in linear systems of equations, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1995, 16 (1), 93-112.
- [56] B.M. Chen: *Robust and  $H_\infty$  control*, Springer Verlag, London, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [57] C.T. Chen: *Analog and digital control system design: transfer-function, state-space, and algebraic methods*, Saunders College Publishing, Philadelphia, San Diego, 1993.
- [58] B.S. Chen, T.Y. Dong: LQG Optimal control system design under plant perturbation and noise uncertainty: a state-space approach, *Automatica*, 1989, 25 (3), 431-436.
- [59] S. Chen, J. Wu, R.H. Istepanian, J. Chu, J.F. Whidborne: Optimising stability bounds of finite-precision controller structures for sampled-data systems in the  $\delta$ -operator domain, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1999, 146 (6), 517-526.
- [60] H.W. Cheng, S.S.T. Yau: More explicit formulas for the matrix exponential, *Linear Algebra Appl.*, 1997, 262, 131-163.



- [61] P. Chin, R.M. Corless: Optimization strategies for the approximate GCD problem, *Proc. Int. Symp. Symbolic and Algebraic Computation ISSAC*, Rostock, Germany, 1998, 228-235.
- [62] A. Chotai, P. Young, P. McKenna, W. Tych: Proportional-integral-plus (PIP) design for delta ( $\delta$ ) operator systems. Part 2: MIMO systems, *Int. Journ. Control*, 1998, 70 (1), 149-168.
- [63] C.K. Chui, G. Chen: *Kalman filtering with real-time applications*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [64] D.W. Clarke: Self-tuning control, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [65] D.W. Clarke, C. Mohtadi: Properties of generalized predictive control, *Automatica*, 1989, 25 (6), 859-876.
- [66] D.W. Clarke, C. Mohtadi, P.S. Tuffs: Generalized predictive control - Part I. The basic algorithm, *Automatica*, 1987, 23 (1), 137-148.
- [67] T.F. Coleman, Y. Li: A global and quadratically convergent method for linear  $l_\infty$  problems, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1992, 29 (4), 1166-1186.
- [68] E.G. Collins Jr., W.M. Haddad, V. Challeboina: Robustness analysis in the delta-domain using fixed-structure multipliers, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 3286-3291.
- [69] E.G. Collins Jr., T. Song: A delta operator approach to discrete-time  $\mathcal{H}_\infty$  control, *Int. Journ. Control*, 1999, 72 (4), 315-320.
- [70] J.B. Conway: *Functions of one complex variable*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, 1978.
- [71] R.B. Copeland, M.G. Safonov: A generalized eigenproblem solution for singular  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  problems, *Control and Dynamic Systems*, 1992 50 (2), 331-394.
- [72] R.B. Copeland, M.G. Safonov: Zero cancelling compensation for singular control problems and their application to the inner-outer factorization problem, *Int. Journ. Robust and Nonlinear Control*, 1992, 2 (2), 139-164.
- [73] R.B. Copeland, M.G. Safonov: A zero compensation approach to singular  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$ , *Int. Journ. Robust and Nonlinear Control*, 1995, 5 (2), 71-106.
- [74] C.L. Cox, W.F. Moss: Backward error analysis for a pole assignment algorithm, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1989, 10 (4), 446-456.
- [75] S. Cristea, C. De Prada: Predictive control system with slow and fast dynamics using the delta operator, *Proc. CIDIC Seminar. Theory and Applic. Model-based Predictive Control*, Brussel, Belgium, 1996.
- [76] C.G. Cullen, C.A. Hall: On determining whether two polynomials are relatively prime, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1971, AC-16 (4), 369-370.

- [77] P.F. Curran: Lyapunov's matrix equation with system matrix in companion form, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (6), 1509-1516.
- [78] B.N. Datta: *Numerical methods for linear control systems*, Elsevier Academic Press, Amsterdam, Boston, 2004.
- [79] E.J. Davison, I.J. Ferguson: The design of controllers for the multivariable robust servomechanism problem using parameter optimization methods, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, AC-26 (1), 93-110.
- [80] H. Demircioglu: Constrained continuous-time generalised predictive control, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1999, 146 (5), 470-476.
- [81] H. Demircioglu, D.W. Clarke: CGPC with guaranteed stability properties, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1992, 139 (4), 371-380.
- [82] H. Demircioglu, P.J. Gawthrop: Continuous-time generalised predictive control (CGPC), *Automatica*, 1991, 27 (1), 55-74.
- [83] H. Demircioglu, P.J. Gawthrop: Multivariable continuous-time generalised predictive control (MCGPC), *Automatica*, 1992, 28 (4), 697-713.
- [84] J.W. Demmel: *Applied numerical linear algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, 1997.
- [85] J.W. Demmel, M. Gu, S. Eisenstat, Slapničar, K. Veselič, Z. Drmač: Computing the singular value decomposition with relative accuracy, *LAPACK working note*, 1997, 119, CS-97-348. SIAM, Philadelphia, PA, 1997.
- [86] M.C.F. de Oliveira, P.J. Fleming: Effective mapping of continuous-time controllers to their equivalents, *Electronics Letters*, 1990, 26 (9), 562-564.
- [87] P. Devilde, H. Dym: Lossless chain scattering matrices and optimum linear prediction: the vector case, *Circuit Theory Appl.*, 1981, 9 (2), 135-175.
- [88] I.S. Dhillon: Reliable computation of the condition number of a tridiagonal matrix in  $\mathcal{O}(n)$  time, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 19 (3), 776-796.
- [89] C. De Prada, S. Cristea, A.G. Kuznetsov: Stability guarantee in predictive control delta domain, *Proc. 14th World Congress of IFAC*, Beijing, China, 1999, 3b-07-3, I, 397-402.
- [90] C.A. Desoer, M. Vidyasagar: *Feedback systems: input-output properties*, Academic Press, New York, 1975.
- [91] J. Douglas, M. Athans: Multivariable poles, zeros, and pole-zero cancellations, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [92] J.C. Doyle: Guaranteed margins for LQG regulators, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1978, AC-23 (4), 756-757.
- [93] J.C. Doyle: Analysis of feedback systems with structured uncertainties, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1982, 129 (6), 242-250.

- [94] C.J. Doyle, B.A. Francis, A.R. Tannenbaum: *Feedback control theory*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- [95] J.C. Doyle, A. Packard, K. Zhou: Review of LFTs, LMIs and  $\mu$ , *Proc. 30th IEEE Conf. Decision and Control*, Brighton, England, 1991, 1227-1232.
- [96] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis: State-space solutions to standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, 34 (8), 831-847.
- [97] J. Dugundji: *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.
- [98] D. Dumur, P. Boucher: New predictive techniques: control axis solutions, *Proc. 3rd Conf. on Control Applications*, Glasgow, Scotland, UK, 1994, 1663-1668.
- [99] D. Dumur, P. Boucher, E. Pope, C. Holtan: PREDATOR: a delta identification and autotuned predictive control software toolbox, *Proc. 3rd European Control Conf. ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 2845-2850.
- [100] G.E. Dullerud, F. Paganini: *A course in robust control theory*, Springer Verlag, New York, Berlin, 2000.
- [101] W. Ebert: Optimal filtered predictive control - a delta operator approach, *Systems and Control Letters*, 2001, 42, 69-80.
- [102] M. El-Khoury, O.D. Crisalle: Relative zero location for second-order sampled systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, AC-37 (10), 1551-1552.
- [103] E. Elmroth, F. Gustavson, I. Jonsson, B. Kågström: Recursive blocked algorithms and hybrid data structures for dense matrix library software, *SIAM Review*, 2004, 46 (1), 3-45.
- [104] L. Elsner, C. He: An algorithm for computing the distance to uncontrollability, *Systems and Control Letters*, 1991, 17, 453-464.
- [105] A. Emami-Nacini, P. Van Dooren: Computation of zeros of linear multivariable systems, *Automatica*, 1982, 18 (4), 415-430.
- [106] I.Z. Emiris, A. Galligo, H. Lombardi: Numerical univariate polynomial GCD, w J. Renegar, M. Shub, S. Smale (Eds.): *The mathematics of numerical analysis, Lect. appl. math.*, 32, Amer. Math. Soc., 1996.
- [107] I.Z. Emiris, A. Galligo, H. Lombardi: Certified approximate univariate GCDs, *Journ. Pure Appl. Algebra*, 1997, 117/118, 229-251.
- [108] F.W. Fairman: *Linear control theory, the state space approach*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, New York, 1998.
- [109] G. Favier, D. Dubois: A review of  $k$ -step-ahead predictors, *Automatica*, 1990, 26 (1), 75-84.
- [110] A. Feintuch: *Robust control theory in Hilbert space*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1998.

- [111] V. Feliu, J.A. Cerrada: Analysis and design of minimum-phase zeros of sampled systems, *Int. Journ. Control*, 1997, 68 (6), 1397-1416.
- [112] A. Feuer, R.H. Middleton: Conditioning of LMS algorithms with fast sampling, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995, AC-43 (8), 1978-1981.
- [113] R.D. Fierro, P.C. Hansen, P.S.K. Hansen: UTV tools: MATLAB templates for rank-revealing UTV decompositions, *Numer. Algorithms*, 199, 20 (1), 165-194.
- [114] M. Fikar, S. Engell: Receding horizon predictive control based upon the Youla-Kučera parameterisation, *European Journ. Control*, 1997, 3 (2), 304-316.
- [115] M. Fikar, M. Morari, J. Mikleš: On Youla-Kučera parameterisation approach to predictive control, *Proc. 5th European Control Conf. ECC'99*, Karlsruhe, Germany, 1999, CP-12-5.
- [116] B.A. Francis: *A course in  $\mathcal{H}_\infty$  control theory*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.
- [117] J.S. Freudenberg, D.P. Looze: Right half plane poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985, AC-30 (6), 555-565.
- [118] J.S. Freudenberg, D.P. Looze: A sensitivity tradeoffs for plants with time delay, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (2), 99-104.
- [119] J.S. Freudenberg, R.H. Middleton, J.H. Braslavsky: Inherent design limitations for linear sampled-data feedback systems, *Int. Journ. Control*, 1995, 61 (6), 1387-1421.
- [120] Y. Fu, G.A. Dumont: Choice of sampling to ensure minimum-phase behaviour, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (5), 560-563.
- [121] P.A. Fuhrmann: *A polynomial approach to linear algebra*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1996.
- [122] Z. Gajic, M. Qureshi: *Lyapunov matrix equation in system stability and control*, Academic Press, New York, 1995.
- [123] P.M. Gahinet, A.J. Laub: Computable bounds for the sensitivity for the algebraic Riccati equation, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1990, 28 (6), 1461-1480.
- [124] P.M. Gahinet, A.J. Laub, C.S. Kenney, G.A. Hower: Sensitivity of the stable discrete-time Lyapunov equation, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1990, AC-35 (11), 1209-1217.
- [125] F.R. Gantmacher: *The theory of matrices*, Chelsea Publishing Co., New York, 1959.

- [126] P.J. Gawthrop: *Continuous-time self-tuning control; vol. 1: design*, Research Studies Press, Letchworth, U.K., 1987.
- [127] C.E. Garcia, M. Morari: Internal model control. A unifying review and some new results, *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 1982, 21 (2), 308-323.
- [128] P.J. Gawthrop, H. Demircioglu, I.I. Siller-Alcala: Multivariable continuous-time generalised predictive control: a state-space approach to linear and non-linear systems, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1998, 145 (3), 241-250.
- [129] P.J. Gawthrop, R.W. Jones, D.G. Sbarbaro: Emulator-based control and internal model control: complementary approaches to robust control design, *Automatica*, 1996, 32 (8), 1223-1227.
- [130] Y. Genin, P. Van Dooren, T. Kailath, J. Delosme, M. Morf: On  $\Sigma$ -lossless transfer functions and related questions. *Linear Algebra Appl.*, 1983, 50, 251-275.
- [131] R. Gessing: About some properties of discrete-time transfer functions for small sampling periods, *Proc. 2nd European Control Conf. ECC'93*, Groningen, The Netherlands, 1993,3, 1699-1702.
- [132] R. Gessing: Whether the delta operator models are really better for small sampling periods, *Proc. 15th Trien. World Congress of the IFAC*, Barcelona, Spain, 2002, T-We-M21 .
- [133] M. Gevers, G. Li: *Parametrizations in control, estimation and filtering problems*, Springer Verlag, London, 1993.
- [134] A.R. Ghavimi, A.J. Laub: Residual bounds for discrete-time Lyapunov equations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995, AC-40 (7), 1244-1249.
- [135] A.R. Ghavimi, A.J. Laub: Backward error, sensitivity and refinement of computed solutions of algebraic Riccati equations, *Numer. Algebra Appl.*, 1995, 2 (1), 29-49.
- [136] K.C. Goh, M.G. Safonov: The extended  $j\omega$ -axis eigenstructure of a Hamiltonian matrix pencil, *Proc. 31st Conf. Decision and Control*, Tucson, Arizona, 1992, 1897-1902.
- [137] G.H. Golub, V. Klema, G.W. Stewart: Rank degeneracy and least squares problems, *Stanford Univ. Tech. Report*, 1976, STAN-CS-76-559, Computer Sci. Depart., Stanford, CA.
- [138] G.H. Golub, S. Nash, C.F. Van Loan: A Hessenberg-Schur method for the problem  $AX + XB = C$ , *IEEE Trans. Automatic Control*, 1974, AC-24 (6), 909-913.
- [139] G.H. Golub, C.F. Van Loan: *Matrix computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, London, 1996.
- [140] R.M. Goodall, B.J. Donoghue: Very high sample rate digital filters using the  $\delta$  operator realisation, *IEE Proc., Circuit Device Syst.*, 1993, 140 (3), 199-206.

- [141] G.C. Goodwin, R. Lozano Leal, D.Q. Mayne, R.H. Middleton: Rapprochement between continuous and discrete model reference adaptive control, *Automatica*, 1986, 22 (2), 199-207.
- [142] G.C. Goodwin, R.H. Middleton, H.V. Poor: High-speed digital signal processing and control, *Proc. IEEE*, 1992, 80 (2), 240-259.
- [143] G.C. Goodwin, M. Salgado: Frequency domain sensitivity functions for continuous time systems under sampled data control, *Automatica*, 1994, 30 (8), 1263-1270.
- [144] G.C. Goodwin, M.M. Seron: Fundamental design tradeoffs in filtering, prediction, and smoothing, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1997, AC-42 (9), 1240-1251.
- [145] G.C. Goodwin, A.R. Woodyatt, R.H. Middleton, J. Shim: Fundamental limitations due to  $j\omega$ -axis zeros in SISO systems, *Automatica*, 1999, 35 (5), 857-863.
- [146] R. Gorcz, V. Wertz, K.Y. Zhu: On a generalised predictive control algorithm, *Systems and Control Letters*, 1987, 9 (5), 369-377.
- [147] H. Górecki: *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem*, WNT, Warszawa, 1971.
- [148] H. Górecki: *Optymalizacja systemów dynamicznych*, PWN, Warszawa, 1993.
- [149] A. Graham: *Kronecker products and matrix calculus with applications*, John Wiley and Sons, New York, 1981.
- [150] J. F. Garcia: Optimal sensitivity analysis of linear least squares, *Lawrence Berkeley National Laboratory Techn. Report*, 2002, LBNL-52434.
- [151] M. Green:  $\mathcal{H}_\infty$  controller synthesis by  $J$ -lossless coprime factorisation, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (3), 522-547.
- [152] M. Green, K. Glover, D.J.N. Limebeer, J.C. Doyle: A spectral factorization approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1990, 28 (6), 1350-1371.
- [153] M. Green, D.J.N. Limebeer: *Linear robust control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.
- [154] M.J. Grimble: *Robust industrial control*, Prentice Hall International, New York, London, 1994.
- [155] M.J. Grimble: Generalised predictive control: an introduction to the advantages and limitations, *Int. Journ. Systems Science*, 1992, 23 (1), 85-98.
- [156] M. Gu: Backward perturbation bounds for linear least squares problems, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 20 (2), 363-372.

- [157] D.W. Gu, M.C. Tsai, S.D. O'Young, I. Postlethwaite: State-space formulae for discrete-time  $\mathcal{H}_\infty$  optimization, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (5), 1683-1723.
- [158] T. Gudmundsson, C. Kenney, A.J. Laub: Scaling of the discrete-time algebraic Riccati equation to enhance stability of the Schur solution method, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, AC-37 (4), 513-518.
- [159] C.H. Guo, A.J. Laub: On a Newton-like method for solving algebraic Riccati equations, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2000, 21 (2), 694-698.
- [160] T. Hagiwara: Analytic study of the intrinsic zeros of sampled data systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1996, AC-41 (2), 261-263.
- [161] T. Hagiwara, T. Yuasa, M. Araki: Stability of the limiting zeros of sampled-data systems with zero- and first-order holds, *Int. Journ. Control*, 1993, 58 (6), 1325-1346.
- [162] M.E. Halpern: Modified pole-assignment controller for plant models with exact or near pole-zero cancellation, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1988, 135 (3), 189-195.
- [163] S.J. Hammarling: Numerical solution of the stable, nonnegative definite Lyapunov equation, *IMA Journ. Numer. Anal.* 1982, 2, 303-323.
- [164] P.C. Hansen, P.Y. Yalamov: Computing symmetric rank-revealing decompositions via triangular factorization, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2002, 23 (2), 443-458.
- [165] S. Hara, H. Katori, R. Kondo: The relationship between real poles and real zeros in SISO sampled data systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (5), 632-635.
- [166] S. Hara, R. Kondo, H. Katori: Properties of zeros in digital control systems with computational time delay, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (2), 493-511.
- [167] S. Hara, T. Sugie: Inner-outer factorization for strictly proper functions with  $j\omega$ -axis zeros, *Systems Control Letters*, 1991, 16 (2), 179-185.
- [168] S. Hara, T. Sugie, R. Kondo:  $\mathcal{H}_\infty$  control problem with  $j\omega$ -axis zeros, *Automatica*, 1992, 28 (1), 55-70.
- [169] B. Hassibi, A.H. Sayed, T. Kailath: *Indefinite-quadratic estimation and control. A unified approach to  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  theories*, SIAM, Philadelphia, PA, 1999.
- [170] J.W. Helton, O. Merino: *Classical control using  $\mathcal{H}_\infty$  methods*, SIAM, Philadelphia, PA, 1998.
- [171] H.V. Henderson, S.S. Searle: The vec-permutation matrix, the vec operator and Kronecker products: a review, *Linear and Multilinear Algebra*, 1981, 9, 271-288.

- [172] M.A. Hersh: The zeros and poles of delta operator systems, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (3), 557-575.
- [173] G.A. Hewer, C.S. Kenney: The sensitivity of the stable Lyapunov equation, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1988, 26 (2), 321-344.
- [174] N.J. Higham: Computing error bounds for regression problems, *Contemporary Math.*, 1990, 112, 195-210.
- [175] N.J. Higham: Perturbation theory and backward error for  $AX - XB = C$ , *BIT*, 1993, 33 (1), 124-136.
- [176] N.J. Higham: A survey of componentwise perturbation theory in numerical linear algebra, Proc. Symposia in Applied Math., American Math. Soc., 1994, 48, 49-77.
- [177] N.J. Higham: *Accuracy and stability of numerical algorithms*, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.
- [178] N.J. Higham: Notes on accuracy and stability of algorithms in numerical linear algebra, *Numer. Anal. Report*, 1998, 333, The Univ. of Manchester.
- [179] D.J. Higham, N.J. Higham: Backward error and condition of structured linear systems, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1992, 13 (1), 162-175.
- [180] N.J. Higham, M. Konstantinov, V. Mehrmann, P. Petkov: The sensitivity of computational control problems, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 28-43.
- [181] R.D. Hocken, S.V. Salehi, J.F. Marshall: Time-delay mismatch and the performance of predictor control schemes, *Int. Journ. Control*, 1983, 38 (2), 433-447.
- [182] A.S. Hodel: Recent applications of the Lyapunov equation in control theory, w R. Beauvencs, P. de Groen (Eds.): *Iterative methods in linear algebra*, Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [183] R.A. Horn, C.R. Johnson: *Topics in matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1991.
- [184] M. Hou, A.C. Pugh, G.E. Hayton: Generalized transfer functions and input-output equivalence, *Int. Journ. Control*, 1997, 68 (5), 1163-1178.
- [185] Y.S. Hung:  $\mathcal{H}_\infty$  optimal control. Part 1. Model matching, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (4), 1291-1330.
- [186] Y.S. Hung, D. Chu: A simple and unified approach for analyzing discrete-time algebraic Riccati equation and spectral factorisation related to discrete-time  $\mathcal{H}_\infty$  control problem, *Technical Report*, 1995, University of Hong Kong.
- [187] Y.S. Hung, D. Chu:  $(J, J')$ -lossless factorisation for discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1998, 71 (3), 517-533.



- [188] Y.S. Hung, D. Chu: Relationships between discrete-time and continuous-time algebraic Riccati inequalities, *Linear Algebra Appl.*, 1998, 270, 287-313.
- [189] Y.S. Hung, D. Chu: On extended  $(J, J')$ -lossless factorisation, *Linear Algebra Appl.*, 1998, 271, 117-138.
- [190] P. A. Iglesias, K. Glover: State-space approach to discrete-time  $\mathcal{H}_\infty$  control, *Int. Journ. Control*, 1991, 54 (5), 1031-1073.
- [191] V. Ionescu, C. Oară, M. Weiss: General matrix pencil techniques for the solution of algebraic Riccati equations: a unified approach, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1997, AC-42 (8), 1085-1097.
- [192] P.A. Ioannou, J. Sun: *Robust adaptive control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1996.
- [193] V. Ionescu, M. Weiss: On computing the stabilizing solution of the discrete-time Riccati equation, *Linear Algebra Appl.*, 1992, 174, 229-238.
- [194] V. Ionescu, M. Weiss: Two-Riccati formulae for the discrete-time  $\mathcal{H}_\infty$  control problem, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (1), 141-195.
- [195] R. Isermann: *Digital control systems*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.
- [196] R. Isermann: *Digital control systems. Vol. 1: fundamentals, deterministic control*, Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [197] M. Ishitobi: Conditions for stable zeros of sampled systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, AC-37 (10), 1558-1561.
- [198] M. Ishitobi: Stable zeros of sampled low-pass systems, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (6), 1485-1498.
- [199] M. Ishitobi: Criteria for stability of zeros of sampled systems, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1994, 141(6), 396-402.
- [200] M. Ishitobi: Stable zeros of a discrete systems obtained by sampling a continuous-time plant with a time delay, *Int. Journ. Control*, 1994, 59 (4), 1053-1062.
- [201] A.H. Jazwinski: *Stochastic processes and filtering theory*, Academic Press, New York, 1970.
- [202] J. Ježek: Polynomial equations, conjugacy and symmetry, w K.J. Hunt (Ed.): *Polynomial methods in optimal control and filtering*, Peter Peregrinus Ltd, London, 1993.
- [203] J.C. Johnson, C.L. Phillips: An algorithm for the computation of the integral of the state transition matrix, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1971, AC-16 (2), 204-205.
- [204] P.T. Kabamba: Control of linear systems using generalized sampled-data hold functions, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (9), 772-783.

- [205] T. Kaczorek: *Teoria sterowania i systemów*, PWN, Warszawa, 1996.
- [206] T. Kailath: *Linear systems*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1980.
- [207] T. Kailath, A.H. Sayed, B. Hassibi: *Linear estimation*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 2000.
- [208] B. Kågström, P. Poromaa: LAPACK-style algorithms and software for solving the generalized Sylvester equation and estimating the separation between regular matrix pairs, *Report UMINF*, 1993, 93.23, Institute of Information processing, University of Umeå, Umeå, Sweden.
- [209] B. Kågström, P. Poromaa: Computing eigenspaces with specified eigenvalues of a regular matrix pair  $(A, B)$  and condition estimation: Theory, algorithms and software, *Report UMINF*, 1994, 94.04, Institute of Information processing, University of Umeå, Umeå, Sweden.
- [210] B. Kågström, L. Westin: Generalized Schur methods with condition estimators for solving the generalized Sylvester equation, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (7), 745-751.
- [211] R.E. Kalman, P.L. Falb, M.A. Arbib: *Topics in mathematical system theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.
- [212] N. Karcaniias, M. Mitrouli: A matrix pencil based numerical method for the computation of GCD of polynomials, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, AC-39 (5), 977-981.
- [213] R. Karlson, B. Waldén: Estimation of optimal backward perturbation bounds for the linear least squares, *BIT*, 1997, 37 (4), 862-869.
- [214] T. Kato: *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.
- [215] J. Kautsky, N.K. Nichols, P. Van Dooren: Robust pole assignment in linear state feedback, *Int. Journ. Control*, 1985, 41 (5), 1129-1155.
- [216] C. Kenney, G. Hoyer: The sensitivity of the algebraic and differential Riccati equations, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1990, 28 (1), 50-69.
- [217] C. Kenney, A.J. Laub: Condition estimates for matrix functions, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1989, 10 (1), 191-209.
- [218] C. Kenney, A.J. Laub, M. Wette: A stability-enhancing scaling procedure for Schur-Riccati solvers, *Systems Control Letters*, 1989, 12 (2), 241-250.
- [219] A. Kiełbasiński, H. Schwetlick: *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, Warszawa, 1992.
- [220] H. Kimura: Conjugation, interpolation and model matching in  $\mathcal{H}_\infty$ , *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (1), 269-307.

- [221] H. Kimura: Generalized chain-scattering approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control problems, *w* S.P. Bhattacharyya, L.H. Keel (Eds.): *Control of uncertain dynamic systems*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1991, 21-38.
- [222] H. Kimura:  $(J, J')$ -lossless factorisation using conjugations of zero and pole extractions, *w* S. Hosoe (Ed.): *Robust control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [223] H. Kimura:  $(J, J')$ -lossless factorization based on conjugation, *Systems Control Letters*, 1992, 19 (1) 95-109.
- [224] H. Kimura: Chain scattering representation,  $J$ -lossless factorization and  $\mathcal{H}_\infty$  control, *Journ. Math. Systems Estimation Control*, 1995, 5 (2), 203-255.
- [225] H. Kimura: *Chain-scattering approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control*, Birkhäuser, Boston, Basel, 1997.
- [226] H. Kimura, Y. Lu, R. Kawatani: On the structure of  $\mathcal{H}_\infty$  control systems and related extensions, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, AC-36 (6), 653-667.
- [227] H. Kimura, F. Okunishi: Chain-scattering approach to control system design, *w* A. Isidori (Ed.): *Trends in control. A European perspective*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995, 151-171.
- [228] R. Kondo, S. Hara: On cancellation in  $\mathcal{H}_\infty$  optimal controllers, *Systems and Control Letters*, 1989 13 (2), 205-210.
- [229] W. Kongprawechnon, H. Kimura:  $J$ -lossless conjugation and factorization for discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1996, 65 (5), 867-884.
- [230] W. Kongprawechnon, H. Kimura:  $J$ -lossless factorization and  $\mathcal{H}_\infty$  control for discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1998, 70 (3), 423-446.
- [231] M. Konstantinov, D.W. Gu, V. Mehrmann, P. Petkov: *Perturbation theory for matrix equations*, Elsevier Press, Amsterdam, 2003.
- [232] B. Kouvaritakis, M. Cannon, J.A. Rossiter: Recent developments in generalized predictive control for continuous-time systems, *Int. Journ. Control*, 1999, 72 (2), 164-173.
- [233] B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter, A.O.T. Chang: Stable generalised predictive control: an algorithm with guaranteed stability, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1992, 139 (2), 349-362.
- [234] Z. Kowalczyk, P. Suchomski, A. Marcińczyk: Discrete-time and continuous-time generalised predictive controllers with anticipated filtration: tuning rules, *Int. Journ. Applied Math. and Computer Science*, 1996, 6 (4), 707-732.
- [235] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Anticipated filtering approach to generalised predictive control, *Proc. 3rd European Control Conf. ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 3591-3596.

- [236] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Discrete-time generalised predictive control with anticipated filtration, *Proc. 13th IFAC World Congress*, San Francisco, USA, June-July 1996, K, 301-306.
- [237] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Numerically robust computer aided Markov-equivalent CGPC design, *Proc. IFAC Symp. Comp. Aided Contr. Syst. Design*, Gent, Belgium, April 1997, 365-370.
- [238] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Robust predictive control based on overparameterised delay models, *Proc. 2nd IFAC Symp. Robust Control Design*, Budapest, Hungary, 1997, 525-530.
- [239] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Dyskretne uogólnione sterowanie predykcyjne z filtracją antycypacyjną, *Studia z Automatyki i Informatyki*, Poznań, 1997, 22, 41-52.
- [240] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Two-degree-of-freedom stable GPC design, *Proc. IFAC Workshop Adaptive Control and Signal Processing*, Glasgow, Scotland, 1998, 243-248.
- [241] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Continuous-time generalised predictive control of delay systems, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1999, 146 (1), 65-75.
- [242] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Control of delay plants via continuous-time GPC principle, *Control and Cybernetics*, 1999, 28 (2), 291-314.
- [243] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Analytical design of stable continuous-time generalised predictive control, *Int. Journ. Applied Math. and Computer Science*, 1999, 9 (1), 53-100.
- [244] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Robust CGPC design via simple Youla parameterisation, *Proc. 5th European Control Conf. ECC'99*, Karlsruhe, Germany, 1999, CA-12-2.
- [245] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Simple stable discrete-time generalised predictive control with anticipated filtration of control error, *Control and Cybernetics*, 2002, 31 (1), 17-41.
- [246] E. Kreindler, A. Jameson: Conditions for nonnegativeness of partitioned matrices, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1972, AC-17 (1), 147-148.
- [247] D. Kresner, V. Mehrmann, T. Penzl: CTLEX (DTLEX) - a collection of benchmark examples for continuous-time (discrete-time) Lyapunov equations, *SLICOT Working Note*, 1999, 6 (7), Katholieke Univ., Leuven, Belgium.
- [248] V. Kučera: Stability of discrete linear feedback system, *Proc. 6th IFAC World Congress*, Boston, 1975, 44.1.
- [249] V. Kučera: Diophantine equations in control - a survey, *Automatica*, 1993, 29 (6), 1361-1375.

- [250] V. Kučera: A tutorial on  $\mathcal{H}_2$  control theory: the continuous time case, w M.J. Grimble, V. Kučera: *Polynomial methods for control systems design*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [251] B.C. Kuo: *Digital control systems*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1980.
- [252] H. Kushner: *Introduction to stochastic control*, Holt, Rinehart, Winston, Inc., New York, 1971.
- [253] A.G. Kuznetsov, R.O. Bowyer, D.W. Clark: Estimation of multiple order models in the  $\delta$  domain, *Int. Journ. Control*, 1999, 72 (7/8), 629-642.
- [254] H. Kwakernaak: Robust control and  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization, *Automatica*, 1993, 29 (2), 255-273.
- [255] H. Kwakernaak: Symmetries in control system design, w A. Isidori (Ed.): *Trends in control. A European perspective*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995, 17-51.
- [256] P. Lancaster, L. Rodman: *Algebraic Riccati equations*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [257] I.D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad: *Adaptive control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [258] A.J. Laub: A Schur method for solving algebraic Riccati equations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1979, AC-24 (6), 913-921.
- [259] A.J. Laub: Invariant subspace methods for the numerical solution of Riccati equations, in S. Bittani, A.J. Laub, J.C. Willems (Eds.): *The Riccati equation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [260] A.J. Laub, R.V. Patel, P.M. Van Dooren: Numerical and computational issues in linear control and system theory, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [261] D.L. Laughlin, K.G. Jordan, M. Morari: Internal model control and process uncertainty: mapping uncertainty regions for SISO controller design, *Int. Journ. Control*, 1986, 44 (6), 1675-1698.
- [262] D.L. Laughlin, D.E. Rivera, M. Morari: Smith predictor design for robust performance, *Int. Journ. Control*, 1987, 46 (2), 477-504.
- [263] M.B. Lauritsen: Delta-domain predictive control and identification for control, *Ph.D. Thesis (Lyngby: Technical University of Denmark, Institute of Mathematical Modelling*, 1997.
- [264] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard: Delta-operator predictive control, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 884-889.

- [265] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: Emulator-based GPC in the delta-domain, *Technical University Denmark Techn. Report*. 1994, IMM-Rep-1994-24, Inst. Math. Modelling, Lyngby, Danmark.
- [266] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: Optimal prediction in the delta-domain, *Proc. 3rd European Control Conf. ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 2851-2856.
- [267] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: Generalized predictive control in the delta-domain, *Proc. the American Control Conf.*, Seattle, WA, 1995, 5, 3709-3713.
- [268] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: GPC using a delta-domain emulator-based approach, *Int. Journ. Control*, 1997, 68 (1), 219-232.
- [269] C.L. Lawson, R.J. Hanson: *Solving least squares problems*, SIAM, Philadelphia, PA, 1995.
- [270] P.H. Lee, H. Kimura, Y.C. Soh: On the lossless and  $J$ -lossless embedding theorems in  $\mathcal{H}_\infty$ , *Systems and Control Letters*, 1996, 29 (1), 1-7.
- [271] M.A. Lelić, M.B. Zarrop: Generalized pole-placement self-tuning controller, part I, basic algorithms, *Int. Journ. Control*, 1987, 46 (2), 547-568.
- [272] F.L. Lewis: *Optimal estimation*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1986.
- [273] Q. Li, H.H. Fan: On properties of information matrices of delta-operator based adaptive signal processing algorithms, *IEEE Trans. Signal Processing*, 1997, SP-45 (10), 2454-2467.
- [274] G. Li, M. Gevers: Roundoff noise minimization using delta-operator realizations, *IEEE Trans. Signal Processing*, 1993, SP-41 (2), 629-637.
- [275] G. Li, M. Gevers: Comparative study of finite wordlength effects in shift and delta operator parameterizations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1993, AC-38 (5), 803-807.
- [276] K.Z. Liu, T. Mita: Conjugation and  $\mathcal{H}_\infty$  control of discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1989, 50 (4), 1435-1460.
- [277] G.P. Liu, R.J. Patton: *Eigenstructure assignment for control system design*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, New York, 1998.
- [278] D.P. Looze, J.S. Freudenberg: Limitations of feedback properties imposed by open-loop right half plane poles, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, AC-36 (6), 736-739.
- [279] D.H. Luecking, L.A. Rubel: *Complex analysis, a functional analysis approach*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1984.
- [280] J.M. Maciejowski: *Multivariable feedback design*, Addison-Wesley Publishing Company, Wokingham, Reading, MA., 1989.

- [281] A.N. Malyshev, M. Sadkane: Computation of optimal backward perturbation bounds for large sparse linear least squares problems, *BIT*, 2002, 41 (4), 739-747.
- [282] A.A. Marouf, S.A.K. Al-Assadi: Computer-aided discretization of continuous data control systems, *Computer Aided Design*, 1985, 17 (4), 169-178.
- [283] Math Works: *Using MATLAB*, The Math Works Inc., Natick, MA, 2002.
- [284] A.R. McIntosh, S.L. Shah, D.G. Fisher: Analysis and tuning of adaptive generalized predictive control, *Canadian Journ Chem. Eng.*, 1991, 69, 97-110.
- [285] V. Mehrmann: A step toward a unified treatment of continuous and discrete time control problems, *Linear Algebra Appl.*, 1996, 241-243, 749-779.
- [286] V. Mehrmann, H. Xu: An analysis of the pole placement problem. I. The single-input case, *Electr. Trans. Numer. Anal.*, 1996, 4, 89-105.
- [287] V. Mehrmann, H. Xu: Choosing poles so that the single-input pole placement problem is well-conditioned, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 19 (3), 664-681.
- [288] V. Mehrmann, H. Xu: Numerical methods in control: from pole assignment via linear quadratic to  $\mathcal{H}_\infty$  control, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1999, SFB393/99-12. Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.
- [289] D. Megias, J. Serrano, C. De Prada: Uncertainty treatment in GPC: design of  $T$  polynomial, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, Fr-A-B-1.
- [290] C.D. Meyer: *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [291] R.H. Middleton: Trade-offs in linear control system design, *Automatica*, 1991, 27 (2), 281-192.
- [292] R.H. Middleton: Trade-offs in linear filter design, *Automatica*, 1991, 31 (10), 1367-1376.
- [293] R.H. Middleton, G.C. Goodwin: Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1986, AC-31 (11), 1015-1021.
- [294] R.H. Middleton, G.C. Goodwin: *Digital control and estimation*, Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1990.
- [295] L. Mirkin: On discrete-time  $\mathcal{H}_\infty$  problem with a strictly proper controller, *Int. Journ. Control*, 1997, 66 (6), 747-765.
- [296] C. Moler, C.F. Van Loan: Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, *SIAM Review*, 1978, 20 (4), 801-836.

- [297] M. Morari, E. Zafriou: *Robust process control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1989.
- [298] K.S. Narandra, A.M. Annaswamy: *Stable adaptive systems*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1989.
- [299] C.P. Neuman: Transformations between delta and forward shift operator transfer function models, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, 1993, SMC-23 (1), 295-296.
- [300] C.P. Neuman: Properties of the delta operator model of dynamic physical systems, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, 1993, SMC-23 (1), 296-301.
- [301] R. Neumann, D. Dumur, P. Boucher: Delta-operator generalized predictive control (DGPC), *Proc. 31st Conf. Decision and Control*, Tucson, Arizona, 1992, 2224-2225.
- [302] R. Neumann, D. Dumur, P. Boucher: Application of delta-operator generalised predictive control (DGPC) *Proc. 32th Conf. Decision and Control*, San Antonio, TX, 1993, 2499-2504.
- [303] B.M. Ninness, G.C. Goodwin: The relationship between discrete time and continuous time linear estimation, w N.K. Sinha, G.P. Rao (Eds.): *Identification of continuous-time systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [304] M.T. Noda, T. Sasaki: Approximate GCD and its application to ill-conditioned algebraic equations, *Journ. Comput. Appl. Math.*, 1991, 38, 335-351.
- [305] J. Nowakowski, P. Suchomski: O specyfikacji dyskretnej transmitancji wzorcowej układu regulacji cyfrowej, *Pomiary, Automatyka, Kontrola*, 1990, 36 (4), 71-73.
- [306] J. Nowakowski, P. Suchomski: On a method of mapping of continuous-time control SISO systems to their discrete equivalents, *Archives of Control Sciences*, 1992, 37 (3-4), 269-283.
- [307] J. Nowakowski, P. Suchomski: Mapping of continuous-time control SISO systems to their equivalents with stable discrete controllers, *Int. Journ. Systems Science*, 1994, 25 (1), 193-200.
- [308] W. Oettli, W. Prager: Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides, *Numer. Math.*, 1964, 6, 405-409.
- [309] K. Ogata: *Discrete-time control systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.
- [310] M.L. Overton: *Numerical computing with IEEE floating point arithmetic*, SIAM, Philadelphia, PA, 2001.



- [311] S.D. O'Young, B.A. Francis: Sensitivity tradeoffs for multivariable plants, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985, AC-30 (7), 625-632.
- [312] S.D. O'Young, I. Postlethwaite, D.W. Gu: A treatment of  $j\omega$ -axis model-matching transformation zeros in the optimal  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control design, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (5), 551-553.
- [313] A. Packard, J.C. Doyle: The complex structured singular value, *Automatica*, 1993, 29 (1) 71-109.
- [314] Z.J. Palmor: Time-delay compensation - Smith predictor and its modifications, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [315] V.J. Pan: Numerical computation of a polynomial GCD and extensions, *INRIA Techn. Report*, 1996, Sophia-Antipolis, France.
- [316] P. Pandey: On scaling an algebraic Riccati equation, *Proc. of the American Control Conf.*, San Francisco, CA, 1993, 1583-1587.
- [317] T. Pappas, A.J. Laub, N.R. Sandell: On the numerical solution of the discrete-time algebraic Riccati equations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1980, AC-25 (4), 631-641.
- [318] K.M. Passino, P.J. Antsaklis: Inverse stable low-pass systems, *Int. Journ. Control*, 1988, 47 (6), 1905-1913.
- [319] R.V. Patel, A.J. Laub, P.M. Van Dooren (Eds.): *Numerical linear algebra techniques for systems and control*, IEEE Press, Piscataway, NJ, 1993.
- [320] R.A. Paz, J.V. Madanić:  $\mathcal{H}_\infty$  control in discrete time: state feedback control and norm bounds, *Int. Journ. Control*, 1992, 55 (2), 1405-1424.
- [321] J.M. Peña: On the Skeel condition number, growth factor and pivoting strategies for Gaussian elimination, *Proc. SIAM Conf. Applied Linear Algebra*, Williamsburg, VA, 2003, CP2, <http://www.siam.org/meetings/la03/proceedings/penaj.pdf>.
- [322] P.H. Petkov, N.D. Christov, M.M. Konstantinov: On the numerical properties of the Schur approach for solving the matrix Riccati equation, *Systems and Control Letters*, 1987, 9 (2) 197-201.
- [323] P.H. Petkov, N.D. Christov, M.M. Konstantinov: *Computational methods for linear control systems*, Prentice Hall International, New York, London, 1991.
- [324] P.H. Petkov, D.W. Gu, M.M. Konstantinov, V. Mehrmann: Condition and error estimates in the solution of Lyapunov and Riccati equations, *NICONET Report*, 2000, 1, Katholieke Univ., Leuven, Belgium.
- [325] P.H. Petkov, M.M. Konstantinov, V. Mehrmann: DGRSVX and DMSRIC: Fortran 77 subroutines for solving continuous-time matrix algebraic Riccati equations with condition and accuracy estimates, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1998, SFB393/98-16, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.

- [326] A.W. Pike, M.J. Grimble, M.A. Johnson, A.W. Ordys, S. Shakoor: Predictive control, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [327] H.V. Poor: Delta-operator based signal processing: fast algorithms for rapidly sampled data, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 872-877.
- [328] K. Premaratne, R. Salvi, N.R. Habib, J.P. LeGall: Delta-operator formulated discrete-time approximations of continuous-time systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, AC-39 (3), 581-585.
- [329] A.C. Pugh, L. Tan: A generalized chain-scattering representation and its algebraic system properties, *IEEE Trans. Autom. Control*, 2000, AC-45 (5), 1002-1007.
- [330] K.R. Ralev, P.H. Bauer: Limit cycles elimination in delta-operator systems, *IEEE Trans. Circuits Systems, I*, 2000, CAS-47 (5), 769-772.
- [331] A.C.M. Ran, R. Vreugdenhill: Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations for continuous- and discrete-time systems, *Linear Algebra Appl.*, 1988, 99, 63-83.
- [332] G. P. Rao, N.K. Sinha: Continuous-time models and approaches, w N.K. Sinha, G.P. Rao (Eds.): *Identification of continuous-time systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [333] K.S. Rattan: Digitalization of existing continuous control systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1984, AC-29 (3), 282-285.
- [334] K.S. Rattan: Compensating for computational delay in digital equivalent of continuous control systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, AC-34 (8), 895-899.
- [335] J. Rice: A theory of condition, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1966, 3 (2), 287-310.
- [336] J.L. Rigal, J.Gaches: On the compatibility of a given solution with the data of a linear system, *Journ. Assoc. Computing Mach.*, 1967, 14 (3), 543-548.
- [337] B.D. Robinson, D.W. Clarke: Robustness effects of a prefilter in generalized predictive control, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1991, 138 (1) 2-8.
- [338] J.A. Romagnoli, M.N. Karim, O.E. Agamennoni, A. Desages: Controller design for model-plant parameter mismatch, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1988, 135 (2), 157-164.
- [339] E. Ronco, T. Arsan, P.J. Gawthrop: Open-loop intermittent feedback control: Practical continuous-time GPC, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1999, 146 (5), 426-434.

- [340] J.A. Rossiter, L. Chisci, A. Lombardi: Stabilizing predictive control algorithms in the presence of common factors, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, Th-E-B-5.
- [341] M. Rostgaard, M.B. Lauritsen, N.K. Poulsen: A state-space approach to the emulator-based GPC design, *Systems and Control Letters*, 1996, 28, 291-301.
- [342] M. Rostgaard, M.B. Lauritsen, N.K. Poulsen, O. Ravn: ML estimation using delta based state space models, *Proc. of the 1994 SYSID Conference*, Copenhagen, Denmark, 1994, 3, 655-661.
- [343] M. Rostgaard, N.K. Poulsen, O. Ravn: General predictive control using the delta operator, *Proc. 32nd Conf. Decision and Control*, San Antonio, TX, 1993, 2, 1769-1774.
- [344] M. Rostgaard, N.K. Poulsen, O. Ravn: A rapprochement between discrete-time operators, *Proc. 2nd European Control Conf. ECC'93*, Groningen, The Netherlands, 1993, 1, 426-431.
- [345] S.M. Rump: Structured perturbations. Part I: normwise distances, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2004, 25 (1), 1-30.
- [346] S.M. Rump: Structured perturbations. Part II: componentwise distances, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2004, 25 (1), 31-56.
- [347] A. Saberi, B.M. Chen, P. Sannuti: *Loop Transfer Recovery: analysis and design*, Springer Verlag, London, Berlin, 1993.
- [348] A. Saberi, P. Sannuti, B.M. Chen:  *$\mathcal{H}_2$  optimal control*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.
- [349] A. Sage, J. Melsa: *Estimation theory with applications to communications and control*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1971.
- [350] M.G. Safonov: Imaginary-axis zeros in multivariable  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal control, w R.F. Curtain (Ed.): *Modelling, robustness and sensitivity reduction in control systems*, NATO ASI Series, 34, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.
- [351] M. Salgado, R. Middleton, G.C. Goodwin: Connection between continuous and discrete Riccati equations with applications to Kalman filtering, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1988, 135 (1), 28-34.
- [352] C. Scherer:  $\mathcal{H}_\infty$ -control by state-feedback for plants with zeros on the imaginary axis, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (1), 123-142.
- [353] C. Scherer:  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization without assumption on finite or infinite zeros, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (1), 143-166.
- [354] A. Schönhage: Quasi-GCD computations, *Journ. Complexity*, 1985, 1, 118-137.
- [355] Z. Schuss: *Theory and applications of stochastic differential equations*, John Wiley and Sons Ltd, New York, 1980.

- [356] J. Sefton, K. Glover: Pole/zero cancellations in the general  $\mathcal{H}_\infty$  problem with reference to a two-block design, *Systems and Control Letters*, 1990, 14 (3), 295-306.
- [357] M.M. Seron, J.H. Braslavsky, G.C. Goodwin: *Fundamental limitations in filtering and control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
- [358] A. Shapiro: Optimally scaled matrices, necessary and sufficient conditions, *Numer. Math.*, 1982, 39 (2), 239-245.
- [359] A. Shapiro: Optimal block diagonal  $l_2$ -scaling of matrices, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1985, 22 (1), 81-94.
- [360] J. Shi, M.J. Gibbard: Discrete systems' models based on simple performance specifications in the time, frequency or complex  $z$ -domains, *Int. Journ. Control*, 1985, 42 (2), 517-527.
- [361] V. Sima, P. Petkov, S. Van Huffel: Efficient and reliable algorithms for condition estimation of Lyapunov and Riccati equations, *Proc. Symp. Math. Theory of Networks and Systems, MTNS-2000*, Perpignan, France, June 19-23, 2000, (CD-ROM).
- [362] R.D. Skeel: Scaling for numerical stability in Gaussian elimination, *Journ. Assoc. Computing Mach.*, 1979, 26 (3), 493-526.
- [363] S. Skogestad, I. Postlethwaite: *Multivariable feedback control*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, New York, 1996.
- [364] O.J.M. Smith: A controller to overcome dead time, *ISA Journ.* 1959, 6 (2), 28-33.
- [365] K. Sobczyk: *Stochastic differential equations with applications to physics and engineering*, Kluwer Academic Publishers Group, London, Dordrecht, 1991.
- [366] T. Söderström: Convergence properties of the generalized least squares identification method, *Automatica*, 1974, 10 (6), 617-626.
- [367] T. Söderström: Test of pole-zero cancellation in estimated models, *Automatica*, 1975, 11 (5), 537-541.
- [368] T. Söderström: On zero locations for sampled stochastic systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1990, AC-35 (11), 1249-1253.
- [369] T. Söderström, H. Fan, B. Carlson, M. Mossberg: Some approaches on how to use the delta operator when identifying continuous-time processes, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 890-895.
- [370] T. Söderström, P. Stoica: *System identification*, Prentice Hall International, Hemel Hemstead, U.K., 1989.
- [371] R. Soeterboek: *Predictive control, a unified approach*, Prentice Hall International, New York, London, 1992.

- [372] T. Song: Robust control and estimation for discrete-time systems with applications to finite word length design and robust detection, *Ph.D. Thesis*, FAMU-FSU College of Engineering, The Florida State University, 1999.
- [373] E. Soroka, U. Shaked: On the robustness of LQ regulators, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1984, AC-29 (7), 664-665.
- [374] E. Soroka, U. Shaked: On the stability robustness of the continuous-time LQG optimal control, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985, AC-30 (10), 1039-1043.
- [375] V. Sreeram, P. Agathoklis: Solution of Lyapunov equation with system matrix in companion form, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1991, 138 (6), 529-534.
- [376] W. Stadler: A survey of multicriteria optimization of the vector maximum problem, *Journ. Optimization Theory Appl.*, 1979, 29 (1), 1-52.
- [377] G. Stein, M. Athans: The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (2), 105-114.
- [378] G.W. Stewart: Perturbation theory for the singular value decomposition, *UMIACS - Techn. Report*, 1990, TR-90-124.
- [379] G.W. Stewart: Updating a rank revealing ULV decomposition, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1993, 14 (2), 494-499.
- [380] G.W. Stewart: Determining rank in the presence of error, w M.S. Moonen, G.H. Golub, B.L.R. DeMoor (Eds.): *Linear algebra for large scale and real-time applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [381] G.W. Stewart: *Matrix algorithms, vol. I: basic decompositions*, SIAM, Philadelphia, PA, 1998.
- [382] G.W. Stewart: *Matrix algorithms, vol. II: eigensystems*, SIAM, Philadelphia, PA, 2001.
- [383] G.W. Stewart, J. Sun: *Matrix perturbation theory*, Academic Press, London, 1990.
- [384] P. Stoica, T. Söderström: Common factor detection and estimation, *Uppsala Univ. Techn. Report*, Systems Control Group, Dept. Technology, Uppsala, Sweden, 1996.
- [385] A. Stoorvogel: *The  $\mathcal{H}_\infty$  control problem. A state space approach*, Prentice Hall, Inc., New York, 1992.
- [386] A. Stoorvogel: The discrete time  $\mathcal{H}_\infty$  control problem with measurement feedback, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (1), 182-202.
- [387] A. Stoorvogel, A. Saberi: The discrete algebraic Riccati equation and linear matrix inequality, *Linear Algebra Appl.*, 1998, 274, 317-365.

- [388] A. Stoorvogel, A. Saberi, B.M. Chen: The discrete-time  $\mathcal{H}_\infty$  control problem with strictly proper measurement feedback, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, 39 (9), 1936-1939.
- [389] P. Suchomski: Weighted mixed sensitivity synthesis in  $\mathcal{H}_\infty$  by  $J$ -lossless coprime factorisation, *Proc. XVII-th National Conf. Circuit Theory and Electronic Circuits*, Polanica-Zdrój, Poland, 1994, 131-136.
- [390] P. Suchomski:  $J$ -lossless coprime factorisation approach to weighted mixed sensitivity suboptimal synthesis in  $\mathcal{H}_\infty$ , *Proc. 2nd Int. Symp. Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'95*, Międzyzdroje, Poland, 1995, 1, 211-216.
- [391] P. Suchomski: An approach to suboptimal  $\mathcal{H}_\infty$  control via  $J$ -lossless coprime factorisation, *Proc. 3rd Int. Symp. Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'96*, Międzyzdroje, Poland, 1996, 2, 401-406.
- [392] P. Suchomski: A recursive method for model order reduction of discrete-time systems via  $q$ -Markov covariance equivalent realisations, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 1996, 23 (1/2), 127-135.
- [393] P. Suchomski: Structural properties of solutions of continuous-time and discrete-time matrix Lyapunov equations in controllable form, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1999, 146 (5), 477-483.
- [394] P. Suchomski: Stability robustness bounds for LQG continuous-time control systems with unstructured uncertainties, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2000, 36 (3), 401-440.
- [395] P. Suchomski: Robust PI and PID controller design in delta domain, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 2001, 148 (5), 350-354.
- [396] P. Suchomski: A  $J$ -lossless factorisation approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control in delta domain, *Proc. 6th European Control Conf. ECC'01*, Porto, Portugal, 2001, FR-IS01-18, 3422-3427.
- [397] P. Suchomski: Numerical conditioning of delta-domain Lyapunov and Riccati equations, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 2001, 148 (6), 497-501.
- [398] P. Suchomski: Robust design in delta domain for SISO plants: phase advance and phase lag controllers, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2001, 41 (3), 503-549.
- [399] P. Suchomski: Conditioning of  $J$ -lossless factorisations for  $\mathcal{H}_\infty$ -control in delta domain, *Proc. 7th Int. Conf. Methods and Models in Automation and Robotics MMAR-2001*, Międzyzdroje, 2001, 211-216.
- [400] P. Suchomski: A  $J$ -lossless coprime factorisation approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control in delta domain, *Automatica*, 2002, 38 (10), 1807-1814.
- [401] P. Suchomski: Robust design in delta domain for SISO plants: PI and PID controllers, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2002, 42 (1), 49-69.

- [402] P. Suchomski: A dual  $J$ -lossless factorisations for suboptimal  $\mathcal{H}_\infty$  estimation in delta domain, *Proc. 15th Trien. World Congress of the IFAC*, Barcelona, Spain, 2002, T-Fr-M05-4.
- [403] P. Suchomski: Numerically robust delta-domain solutions to discrete-time Lyapunov equations, *Systems and Control Letters*, 2002, 47 (4), 319-326.
- [404] P. Suchomski:  $J$ -lossless and extended  $J$ -lossless factorisations approach for  $\delta$ -domain  $\mathcal{H}_\infty$  control, *Int. Journ. Control*, 2003, 76 (8), 794-809.
- [405] P. Suchomski: Robust pole placement in delta domain for SISO plants, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2003, 43 (4), 483-512.
- [406] P. Suchomski:  $J$ -lossless factorisations for robust  $\mathcal{H}_\infty$ -control in delta-domain, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2003, 43 (4), 525-555.
- [407] P. Suchomski: Numerically reliable  $\mathcal{H}_\infty$ -synthesis of estimators based on  $J$ -lossless factorisations, *Proc. 13th IFAC Symp. System Identification SYSID*, Rotterdam, the Netherlands, 2003, 1072-1077.
- [408] P. Suchomski: Remarks about numerical conditioning of discrete-time Riccati equations, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 2003, 149 (5), 449-456.
- [409] P. Suchomski: Numerically robust synthesis of discrete-time  $\mathcal{H}_\infty$  estimators based on  $J$ -lossless factorisations, *Control and Cybernetics*, 2003, 32 (4), 761-802.
- [410] P. Suchomski: Structural properties of discrete-time  $\mathcal{H}_\infty$  solutions based on  $J$ -lossless factorisations, artykuł zgłoszony do *Systems and Control Letters*, 2004.
- [411] P. Suchomski: Robust adaptive pole placement in  $\mathcal{H}_\infty$ , *Proc. Symp. Math. Theory of Networks and Systems*, Katholieke Univ., Leuven, Belgium, MA4.5, July 5-9, 2004, (CD-ROM).
- [412] P. Suchomski: Numerically robust solutions to  $\mathcal{H}_\infty$  control problems for augmented plants, artykuł zgłoszony do *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2004.
- [413] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Markov-equivalent continuous-time GPC design, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, Fr-M-B-1.
- [414] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Robust performance and stability of control systems - A unifying survey, *Proc. 4th Int. Symp. on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'97*, Międzyzdroje, 1997, 1, 187-194.
- [415] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: GPC tuning conditioning, *Proc. IFAC Workshop Adaptive Control and Signal Processing*, Glasgow, Scotland, 1998, 249-254.
- [416] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Analytical stable CGPC design for minimum-phase systems, *Int. Journ. Control*, 2000, 73 (17), 1605-1620.

- [417] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Analytical design of stable delta-domain generalized predictive control, *Int. Journ. Optimal Control Appl. and Methods*, 2002, 23, 239-273.
- [418] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Pre-arrangement of solvability, complexity, stability and quality of GPC systems, *Int. Journ. Adaptive Control and Signal Processing*, 2002, 16, 177-191.
- [419] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Robust  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal synthesis of FDI systems, w J. Korbicz, J.M. Kościelny, Z Kowalczyk, W. Cholewa (Eds.): *Fault diagnosis. Models, artificial intelligence, applications*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004, 261-298.
- [420] T. Sugie, S. Hara:  $\mathcal{H}_\infty$ -suboptimal control problem with boundary constraints, *Systems and Control Letters*, 1989, 13 (1), 93-99.
- [421] J.G. Sun: Optimal backward perturbation bounds for the linear LS problem with multiple right-hand sides, *IMA Journ. Numer. Anal.*, 1996, 16 (1), 1-11.
- [422] J.G. Sun: Perturbation theory for algebraic Riccati equations, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 19 (1), 39-65.
- [423] J.G. Sun: Condition numbers of algebraic Riccati equations in the Frobenius norm, *Linear Algebra Appl.*, 2002, 350, 237-261.
- [424] H.K. Sung, S. Hara: Properties of sensitivity and complementary sensitivity functions in single-input single-output digital control systems, *Int. Journ. Control*, 1988, 48 (6), 2429-2439.
- [425] Y. Sung, M. Kung: Lower finite word-length effect on state space digital filter by  $\delta$  operator realisation, *Int. Journ. Electron.*, 1993, 75 (6), 1135-1141.
- [426] Z. Świder: *Realizacje cyfrowe algorytmów sterowania i filtracji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 2003.
- [427] D. Tabak: Digitalization of control systems, *Computer Aided Design*, 1971, 3 (2), 13-18.
- [428] M. Tahk, J.L. Speyer: Modeling of parameter variations and asymptotic LQG synthesis, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (9), 793-801.
- [429] K. Takaba, T. Katayama: Discrete-time  $\mathcal{H}_\infty$  algebraic Riccati equation and parametrization of  $\mathcal{H}_\infty$  filters, *Int. Journ. Control*, 1996, 64 (6), 1129-1149.
- [430] L. Tan, A.C. Pugh: Non-standard  $\mathcal{H}_\infty$  control problem: a generalized chain-scattering representation approach, *Int. Journ. Control*, 2002, 75 (11), 775-783.
- [431] A. Tesfaye, M. Tomizuka: Zeros of discretized continuous systems expressed in the Euler operator - an asymptotic analysis, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995, AC-40 (4), 743-747.



- [432] M.C. Tsai, I. Postlethwaite: On  $J$ -lossless co-prime factorizations and  $\mathcal{H}_\infty$  control, *Int. Journ. Robust Nonlin. Control*, 1991, 1 (1), 47-68.
- [433] M.C. Tsai, C.S. Tsai: Formulation of the  $\mathcal{H}_\infty$  control problem by using chain scattering matrix description, *Proc. of the American Control Conf.*, Chicago, 1992, 1870-1871.
- [434] M.C. Tsai, C.S. Tsai: A chain scattering-matrix description approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1993, AC-38 (9), 1416-1421.
- [435] M.C. Tsai, C.S. Tsai: A transfer matrix framework approach to the synthesis of  $\mathcal{H}_\infty$  controllers, *Int. Journ. Robust Nonlin. Control*, 1995, 5 (2), 155-173.
- [436] M.C. Tsai, C.S. Tsai, Y.Y. Sun: On discrete-time  $\mathcal{H}_\infty$  control: a  $J$ -lossless coprime factorization approach, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1993, AC-38 (7), 1143-1147.
- [437] H. Unbehauen, B. Göhring: Tests for determining model order in parameter estimation, *Automatica*, 1974, 10 (3), 233-244.
- [438] T.J.J. Van den Boom, R.A.J. De Vries: Constrained predictive control using a time varying Youla parameter: a state space approach, *Proc. 3rd European Control Conf., ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 3235-3240.
- [439] T.J.J. Van den Boom, R.A.J. De Vries: Robust predictive control using a time varying Youla parameter, *Int. Journ. Applied Math. and Computer Science*, 1999, 9 (1), 101-128.
- [440] Van der Sluis: Condition numbers and equilibration of matrices, *Numer. Math.*, 1969, 14 (1), 14-23.
- [441] Van der Sluis: Condition, equilibration and pivoting in linear algebraic systems, *Numer. Math.*, 1970, 15 (1), 74-86.
- [442] Van der Sluis: Stability of the solutions of linear least squares problems, *Numer. Math.*, 1975, 23 (3), 241-254.
- [443] P.M. Van Dooren: The computation of Kronecker's canonical form of a singular pencil, *Linear Algebra Appl.*, 1979, 27, 103-141.
- [444] P.M. Van Dooren: A generalized eigenvalue approach for solving Riccati equations, *SIAM Journ. Sci. Stat. Comput.*, 1981, 2 (2), 121-135.
- [445] P.M. Van Dooren: The generalized eigenstructure problem in linear system theory, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, AC-26, 1, 111-129.
- [446] P.M. Van Dooren: Structured linear algebra problems in digital signal processing, w G.H. Golub, P.M. Van Dooren (Eds.): *Numerical linear algebra, digital signal processing and parallel algorithms*, NATO ASI Series, 70, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [447] P.M. Van Dooren: The basic developing numerical algorithms, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 18-27.

- [448] S. Van Huffel, V. Sima, A. Varga, S. Hammarling, F. Delebecque: High-performance numerical software for control, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 60-76.
- [449] C.F. Van Loan: Computing integrals involving the matrix exponential, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1978, AC-23 (3), 395-404.
- [450] A. Varga: Computation of Kronecker-like forms of a system pencil: applications, algorithms and software, *Proc. IEEE Int. Symp. on Computer Aided Control System Design, CACSD96*, Dearborn, MI, 1996, 77-82.
- [451] A. Varga: Numerical awareness in control, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 14-17.
- [452] M. Vidyasagar: *Control system synthesis - A Factorisation approach*, MIT Press, Cambridge, MA., 1985.
- [453] M. Vidyasagar, H. Schneider, B.A. Francis: Algebraic and topological aspects of feedback stabilization, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1982, AC-27 (4), 880-894.
- [454] B. Waldén, R. Karlson, J. Sun: Optimal backward perturbation bounds for the linear least squares problem, *Numer. Linear Algebra Appl.*, 1996, 2 (3), 271-286.
- [455] B. Wahlberg: Limit results for sampled systems, *Int. Journ. Control*, 1988, 48 (3), 1267-1283.
- [456] B. Wahlberg: The effects of rapid sampling in system identification, *Automatica*, 1990, 26 (1), 167-170.
- [457] D.J. Walker: Relationship between three discrete-time  $\mathcal{H}_\infty$  algebraic Riccati equation solutions, *Int. Journ. Control*, 1990, 52 (4), 801-809.
- [458] Z.Q. Wang, S. Skogestad: Robust control of time-delay systems using the Smith predictor, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (6), 1405-1420.
- [459] R.C. Ward: Numerical computation of the matrix exponential with accuracy estimate, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1977, 14 (3), 600-610.
- [460] G.A. Watson: An algorithm for optimal  $l_2$  scaling of matrices, *IMA Journ. Numer. Anal.*, 1991, 11 (4), 481-492.
- [461] P. Wedin: Perturbation theory for pseudo-inverses, *BIT*, 1973, 13 (2), 217-232.
- [462] M. Wei; Perturbation of the least squares problem, *Linear Algebra Appl.*, 1990, 141, 177-182.
- [463] A. Weinmann: *Uncertain models and robust control*, Springer Verlag, Wien, 1991.

- [464] S.R. Weller: Comments on 'Zeros of discretized continuous systems expressed in the Euler operator - an asymptotic analysis', *IEEE Trans. Automatic Control*, 1998, AC-43 (9), 1308-1310.
- [465] S.R. Weller, R.H. Middleton: On the role of sampling zeros in robust sampled-data control design, *Techn. Report Dept. Electrical and Computer Eng.*, EE9807, University of Newcastle, Australia, 1998.
- [466] P.E. Wellstead, M.B. Zarrop: *Self-tuning systems*, John Wiley and Sons, Chichester, New York, 1991.
- [467] O.P. Whittle: *Optimal control*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, 1996.
- [468] M. Wicks, R.A. DeCarlo: Computing the distance to an uncontrollable system, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, AC-36 (1), 39-49.
- [469] J.H. Wilkinson: *Rounding errors in algebraic processes*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963.
- [470] J.H. Wilkinson: *The algebraic eigenvalue problem*, Oxford University Press, Oxford, 1965.
- [471] D. Williamson: *Digital control and implementation, finite wordlength considerations*, Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1991.
- [472] J.L. Willems, F.M. Gallier: The infinite horizon and the receding horizon LQ-problems with partial stabilization constraints, w S. Bittani, A.J. Laub, J.C. Willems (Eds.): *The Riccati equation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [473] J. Wu, S. Chen, G. Li, R.H. Istepanian, J. Chu: Shift and delta operator realisations for digital controllers with finite word length considerations, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 2000, 147 (6), 664-672.
- [474] J. Wu, S. Chen, G. Li, R.H. Istepanian, J. Chu: An improved closed-loop stability measures for finite-precision digital controller realizations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 2001, AC-46 (7), 1162-1166.
- [475] J. Wu, R.H. Istepanian, J. Chu, J.F. Whidborne, S. Chen, J. Hu: Stability issues of finite precision controller structures using the delta operator for sampled data systems, *Proc. 14th World Congress of IFAC*, Beijing, China, 1999, 9d-02-3, Q, 417-422.
- [476] C.S. Xiao, Z.M. Feng, X.M. Shan: On the solution of the continuous-time Lyapunov matrix equation in two canonical forms, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1992, 139 (3), 286-290
- [477] X. Xin, T. Mita: Inner-outer factorization for non-square proper functions with infinite and finite  $j\omega$ -axis zeros, *Int. Journ. Control*, 1998, 71 (1), 145-161.

- [478] I. Yaesh, U. Shaked: A transfer function approach to the problems of discrete-time systems:  $H_\infty$ -linear control and filtering, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, 36 (11), 1264-1271.
- [479] T.W. Yoon, D.W. Clarke: Observer design in receding-horizon control, *Int. Journ. Control*, 1985, 61 (1), 171-191.
- [480] D.C. Youla, J.J. Bongiorno, H.A. Jabr: Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers; part I: the single-input case, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1976, AC-21 (1), 3-14.
- [481] D.C. Youla, H.A. Jabr, J.J. Bongiorno: Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers; part II: the multivariable case, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1976, AC-21 (2), 319-338.
- [482] E. Zafriou, M. Morari: Digital controllers for SISO systems: a review and a new algorithm, *Int. Journ. Control*, 1985, 42 (4), 855-876.
- [483] G. Zames: Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximation inverses, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, AC-26 (2) 301-320.
- [484] G. Zames, B.A. Francis: Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1983, AC-28 (5), 585-601.
- [485] J. Zhang: Property analysis of GPC based coefficient mapping, *Proc. 13th IFAC World Congress*, San Francisco, USA, June-July 1996, C, 457-462.
- [486] K. Zhou, J.C. Doyle: *Essentials of robust control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1998.
- [487] K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover: *Robust and optimal control*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 1996.



Sterowanie odporne polega na zapewnieniu układowi sterowania wymaganej stabilności oraz jakości w warunkach występowania niepewności w modelu sterowanego obiektu dynamicznego. Przedmiotem pracy są zagadnienia związane z syntezą liniowych algorytmów odpornego sterowania w czasie dyskretnym obiektami czasu ciągłego. Skupiono się na algorytmach wynikających z metod przestrzeni  $H_\infty$ . Wskazano na znaczenie analizy uwarunkowania zadania syntezy (optymalizacji) sterowania oraz na rolę oceny numerycznych błędów proponowanych algorytmów. Omówiono sposoby polepszania uwarunkowania poprzez zastosowanie modelowania opartego na operatorze *delta*.

W pracy wykazano przydatność łańcuchowych macierzy rozproszenia modelowanego obiektu, udowodniono szereg twierdzeń odnoszących się do  $J$ -bezstratnych faktoryzacji takich macierzy, a także omówiono strukturę algorytmów sterowania optymalnych ze względu na normę  $H_\infty$ .

Teoretyczne rozważania zilustrowano numerycznymi przykładami dotyczącymi zadań odpornego sterowania oraz estymacji stanu. Przykłady te obejmują między innymi: metodę rozmieszczania biegunów, sterowanie predykcyjne, a także sterowanie optymalne ze względu na kwadratowy wskaźnik jakości oraz ze względu na normę  $H_\infty$ .

**ISSN 0208-8029**

**ISBN 83-85847-94-4**

---

---

**W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN  
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa  
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl**