



Instytut Badań Systemowych
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Piotr Suchomski

SYNTEZA ALGORYTMÓW
ODPORNEGO STEROWANIA
W CZASIE DYSKRETNYM



Piotr Suchomski

**SYNTEZA ALGORYTMÓW
ODPORNEGO STEROWANIA
W CZASIE DYSKRETNYM**

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH • POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Seria: BADANIA SYSTEMOWE

tom 38

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2004

Piotr Suchomski

**SYNTEZA ALGORYTMÓW
ODPORNEGO STEROWANIA
W CZASIE DYSKRETNYM**

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz

Doc. dr hab. inż. Piotr Kulczyki (prof. PK)

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN

Warszawa 2004

Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN

ul. Newelska 6 01-447 Warszawa

Sekcja Informacji Naukowej i Wydawnictw

tel. 837-68-22

email: biblioteka@ibspan.waw.pl

ISBN 83-85847-94-4

ISSN 0208-8029

Wprowadzenie

Przedmiotem niniejszej pracy są zagadnienia związane z syntezą liniowych algorytmów odpornego sterowania w czasie dyskretnym. Zakłada się, że poszukiwane rozwiązania (parametry algorytmów o założonej strukturze, nastawy regulatorów) uzyskuje się, stosując komputer w celu wykonania odpowiednich obliczeń wymaganych przez daną metodę syntezy. Jakość takich rozwiązań zależy od trzech podstawowych czynników:

- (1) właściwości realizowanej arytmetyki (numerycznej precyzji oraz zakresu reprezentowanych liczb),
- (2) uwarunkowania problemu syntezy (wrażliwości rozwiązania na zmiany wejściowych danych),
- (3) właściwości algorytmu użytego do rozwiązywania postawionego zadania (numerycznej stabilności metody pozyskiwania rozwiązań).

Wymaga podkreślenia, że w rzetelnej analizie cech danego konkretnego sposobu dochodzenia do pożądaných rozwiązań, nie można zaniedbać żadnego z wyżej wymienionych aspektów. Przykładowo, nawet numerycznie stabilna metoda obliczeniowa implementowana w 'silnej' arytmetyce może, w przypadku źle uwarunkowanego zadania, prowadzić do wyników nieakceptowalnych ze względu na zakładany cel sterowania.

Współcześnie obserwuje się intensywne dążenie do zapewnienia metodom syntezy algorytmów sterowania odpowiednio wysokiej numerycznej jakości. Zabieganie o wymieniony walor dostępnych narzędzi projektowania systemów automatycznego sterowania procesami jest głęboko uzasadnione rolą odgrywaną przez takie systemy we wszystkich dziedzinach techniki. Znaczenie jakie uzyskała omawiana tendencja rozwoju metod projektowania przejawia się w: (i) randze licznych publikacji poświęconych tej tematyce (Datta [78], Higham *et al.* [180], Mehrmann i Xu [288], Patel *et al.* [319], Petkov *et al.* [323], Van Dooren [447], Van Huffel *et al.* [448], Varga [451]), (ii) powodzeniu

oraz żywotności inicjatyw służących promowaniu stosownego oprogramowania – zob. specjalizowane przybory pakietu MATLAB, projekt NICONET oraz biblioteka SLICOT (Math Works [283], Van Dooren [447], Van Huffel *et al.* [448], <http://www.win.tue.nl/niconet/niconet.html>; por. także biblioteka NETLIB, http://www.netlib.org/master_counts2.html, Eluroth *et al.* [103]).

W niniejszej pracy skupiono się na wybranych algorytmach odpornego sterowania w czasie dyskretnym, wywiedzionych głównie z metod przestrzeni \mathcal{H}_∞ . Akcentując potrzebę i znaczenie analizy błędów oraz uwarunkowania proponowanych metod syntezy algorytmów sterowania, wskazuje się na sposoby polepszania takiego uwarunkowania. W szczególności, dowodzi się, że cel ten w wielu przypadkach można osiągnąć przez zastosowanie modelowania sterowanych obiektów opartego na operatorze delta (δ).

Merytoryczną treść pracy ujęto w sześciu rozdziałach oraz dodatku.

Wstępny *rozdział 1.* dotyczy modeli z czasem dyskretnym w tym głównie modeli związanych z operatorem δ . Podano tu podstawowe definicje oraz pojęcia wykorzystywane w dalszych rozdziałach.

Rozdział 2. poświęcono problemom syntezy dyskretnych algorytmów sterowania, w których stosuje się metodę rozmieszczania (pozycjonowania) biegunów odpowiedniej funkcji przenoszenia układu zamkniętego. To klasyczne zadanie rozwiązuje się, rozważając niezbędne równania diofantyczne zdefiniowane dla operatora δ . Zbadano właściwości dwóch rodzin par takich równań, przyporządkowanych odpowiednio tylko minimalnofazowym oraz minimalnofazowym i nieminimalnofazowym nominalnym modelom sterowanych obiektów. Pokazano w jaki sposób, modyfikując znaną metodę Youli-Kučery, zapewnić danemu układowi odporną stabilność oraz odporną jakość przy założeniu typowych charakterystyk niepewności nominalnego modelu obiektu. Podano oszacowanie względnego błędu rozwiązania zadania rozmieszczania biegunów dla ściśle strukturalizowalnych zaburzeń danych tego zadania. Rozważono trudności, które pojawiają się przy rozwiązywaniu równań diofantycznych sformułowanych dla nieminimalnych nominalnych modeli sterowanych obiektów. Przedstawiono także stosowne numerycznie stabilne algorytmy upraszczania takich modeli.

Rozdział 3. poświęcono algorytmom sterowania predykcyjnego w oparciu o prognozę sterowanego procesu uzyskiwaną na podstawie odpowiedniego modelu tego procesu. Podano analityczne formuły opisujące rodziny charakterystycznych wielomianów tak ukształtowanych optymalnych układów zamkniętych. Omówiono metody parametryzacji takich prototypowych wielomianów przy wykorzystaniu standardowych nastaw regulatorów predykcyj-

nych. Parametryzacja, o której mowa, służy dążeniu do zapewnienia projektowanym układom sterowania założonych cech – a więc wymaganego zapasu stabilności oraz pożądanego charakteru procesów przejściowych. Rozważania tego rozdziału, dotycząc przede wszystkim reguł sterowania w czasie dyskretnym, obejmują także analizę asymptotycznych cech układów zamkniętych odpowiadających predykcynemu sterowaniu na podstawie modeli w czasie ciągłym.

Tematem *rozdziału 4.* są właściwości równań Riccatiego oraz Lapunowa zdefiniowanych dla modeli związanych z operatorem δ . Sformułowano tu lematy dotyczące stabilizujących rozwiązań równań Riccatiego, a także omówiono cechy uogólnionych macierzy Hamiltona skojarzonych z takimi równaniami. Rozważając wrażliwość dyskretnych równań Riccatiego oraz Lapunowa na zaburzenia elementów macierzowych pęków definiujących takie równania, pokazano, że przy dostatecznie małym okresie próbkowania rozwiązania równań przyporządkowanych standardowemu operatorowi przesunięcia charakteryzują się znacznie gorszym uwarunkowaniem, a więc i mniejszą odpornością na wpływ zaburzeń, w zestawieniu z odpowiednimi równaniami wywiedzionymi dla operatora δ . Pokazano też w jaki sposób, korzystając z rozwiązań pewnych pomocniczych równań Lapunowa, ocenić zakres niestrukturalizowalnych zaburzeń nominalnego modelu sterowanego obiektu, dopuszczalnych ze względu na stabilność układu zamkniętego.

W *rozdziale 5.* postawiono problem syntezy układu zamkniętego, w którym uogólniony obiekt dynamiczny jest reprezentowany przez swoje odpowiednio zdefiniowane modele w czasie dyskretnym, to znaczy standardową macierz rozproszenia oraz łańcuchowe macierze rozproszenia. W następnej kolejności wprowadzono cechę tak zwanej J –bezstratności operatora opisującego dany obiekt, co stanowi podstawę definicji stosownych J –bezstratnych faktoryzacji wymienionych modeli. Badano właściwości J –bezstratnych stabilizujących koniugatorów, a także dokonano pewnego uogólnienia definicji łańcuchowych macierzy rozproszenia.

Rozdział 6., ostatni i najobszerniejszy rozdział pracy, poświęcono problemom syntezy dyskretnych układów sterowania oraz estymacji optymalnych ze względu na normę \mathcal{H}_∞ . Rozważano standardowe zadania formułowane dla różnych modeli (macierzy) rozproszenia danego uogólnionego obiektu, koncentrując się przede wszystkim na zadaniach dotyczących łańcuchowych macierzy rozproszenia. Podstawę rozwiązania omawianych zadań stanowią odpowiednie J –bezstratne faktoryzacje tych macierzy. Liczne twierdzenia sformułowane w tym rozdziale odnoszą się do problemu istnienia oraz właściwości rozwiązań dwóch 'sprzężonych' dyskretnych równań Riccatiego podanych w postaci stosownej dla operatora δ . W przypadku, w którym model

obiektu nie ma zer należących do brzegu obszaru wyznaczonego definicją stabilności liniowych systemów modelowanych za pomocą operatora δ . poszukiwane są stabilizujące rozwiązania odpowiednich równań Riccatiego. Gdy model obiektu ma takie zera, interesują nas także rozwiązania niestabilizujące stosownych równań Riccatiego. W omawianym rozdziale dokonano także analizy podstawowych strukturalnych cech tak uzyskiwanych optymalnych regulatorów oraz estymatorów. Wskazano wreszcie na pewien typ osobliwych problemów, które – pomimo stosowania reguł modelowania odwodującego się do operatora δ – mogą charakteryzować się złym numerycznym uwarunkowaniem.

W *dodatku A* zebrano podstawowe informacje dotyczące uwarunkowania, oceny względnych błędów, numerycznej stabilności, a także wstecznych błędów rozwiązań nieosobliwych zadań liniowych oraz nieosobliwych liniowych zadań najmnijszych kwadratów. *Dodatek B* zawiera spis oznaczeń.

Wszystkie istotne wyniki uzyskane w niniejszej pracy mają analityczne ugruntowanie. Prezentacja materiału zasadza się na układzie *twierdzeń, lematów* oraz *uwag*, czyli podziale odwzorowującym merytoryczną wagkość odpowiednich sformułowań. Integralną część pracy stanowią numeryczne *przykłady*, ilustrujące uprzednie teoretyczne wywody. Nie wszystkie twierdzenia oraz lematy są wszakże dowodzone z jednakową szczegółowością. W każdym przypadku podano jednak źródło danej tezy, co umożliwia Czytelnikowi śledzenie wkładu autora niniejszej pracy w rozwój referowanej tematyki.

W pracy umieszczono szereg nowych i nigdzie nie publikowanych elementów. Dotyczy to przede wszystkim: algorytmu wyznaczania minimalnego modelu sterowanego obiektu, zagadnień numerycznego uwarunkowania zadania rozmieszczania biegunów, własności oraz syntezy J -bezstratnych stabilizujących koniugatorów oraz własności rozszerzonych modeli obiektów opisanych łańcuchowymi macierzami rozproszenia.

Rozdział 3

Sterowanie predykcyjne

W niniejszym rozdziale, posługując się ustaleniami *rozdziału 2.*, stawiamy zadanie syntezy dyskretnych algorytmów sterowania obiektami czasu ciągłego według odpowiednio zmodyfikowanej strategii uogólnionego sterowania predykcyjnego (*Generalised Predictive Control, GPC*) dostosowanej do założonej metody opisu takich obiektów, odwołującej się do operatora δ .

Jak wiadomo, dowolnemu algorytmowi dyskretnego sterowania sformułowanemu dla operatora przesunięcia q – w tym także algorytmom sterowania predykcyjnego – można w jednoznaczny sposób przyporządkować odpowiedni algorytm wykorzystujący operator δ . Istotę podejścia do syntezy sterowania z zastosowaniem tego operatora odkrywamy jednak dopiero wtedy, gdy przedmiotem analizy uczynimy przyjęty w danym algorytmie sposób modelowania sterowanych procesów, sposób definiowania kryterium celu sterowania, a także szczegóły (w tym numeryczne) metody wyznaczania odpowiedniego sterowania optymalnego. W przypadku omawianych algorytmów sterowania predykcyjnego na podstawie modelu obiektu w dziedzinie operatora δ najważniejszym elementem – odróżniającym proponowaną metodę od odpowiedniego 'źródłowego' podejścia *GPC* – jest założony sposób prognozowania wyjścia tego obiektu oraz przyjęte kryterium (funkcjonał) błędu sterowania wraz z definicją horyzontów obserwacji owego błędu. W tym rozdziale rozważono także niektóre właściwości sterowania predykcyjnego w czasie ciągłym (*Continuous-time Generalised Predictive Control, CGPC*).

Prognozowanie (zarówno w przypadku dyskretnym, jak i ciągłym) dotyczy przebiegu przyszłego wyjścia (modele minimalnofazowe) oraz przebiegu przyszłego filtrowanego wyjścia sterowanego obiektu (modele minimalnofazowe oraz nieminimalnofazowe). Postawione zadanie optymalizacji sterowania sprowadza się do stosownego problemu liniowego, dla którego podano

analityczne rozwiązanie. Właściwości tak uzyskanego układu sterowania – w tym przede wszystkim zapas stabilności, a także charakter procesów przejściowych – można kształtować przez formowanie wielomianu charakterystycznego funkcji przenoszenia tego układu. W wielomianie tym decydującą rolę odgrywa odpowiedni prototypowy wielomian czynnikowy. Podano analityczne formuły opisujące rodziny takich wielomianów sparametryzowane wartościami standardowych nastaw regulatorów predykcyjnych. Na podstawie analizy położenia zer tych wielomianów sformułowano konieczne i wystarczające warunki stabilności układu zamkniętego. Rozważono także zadanie sterowania predykcyjnego obiektami z transportowym opóźnieniem. Analityczne formuły syntezy regulatorów predykcyjnych pozwalają uniknąć trudności związanych ze złym uwarunkowaniem odpowiedniego zadania obliczeniowego.

Trzy numeryczne przykłady syntezy nominalnie stabilnych układów sterowania predykcyjnego stanowią ilustrację teoretycznych rozważań tego rozdziału.

3.1 Predykcja na podstawie modelu obiektu

W klasycznej wersji algorytmu *GPC* (Clarke i Mohtadi [65], Clarke *et al.* [66], Gorez *et al.* [146], Grimble [155], Pike *et al.* [326]) dyskretny (wydzielony) model sterowanego obiektu, sformułowany dla operatora q^{-1} , służy do wyznaczania ciągu przewidywanych wartości przyszłej odpowiedzi tego obiektu (optymalnych w sensie minimalnowariancyjnym; Åström i Wittenmark [13], Favier i Dubois [109]). Następnie – postępując zgodnie z podstawową zasadą sterowania predykcyjnego – rozważa się kwadratowy funkcjonal kosztów, w którym prognozowany przebieg przyszłego wyjścia obiektu porównywany jest (w skończonym horyzoncie obserwacji) z zakładaną trajektorią odniesienia. Dzięki zastosowaniu ruchomego horyzontu obserwacji, przesuwającego się wraz z bieżącą chwilą czasu, optymalne rozwiązania (uzyskane w liniowym postępowaniu) przyjmują postać stacjonarnych regulatorów o standardowych obserwatorowych strukturach (Kowalczyk *et al.* [234], Kowalczyk i Suchomski [239]). Problem parametrycznej syntezy stabilizującego regulatora *GPC* dla obiektów z transportowym opóźnieniem rozwiązano w (Suchomski i Kowalczyk [418]), gdzie badaniom poddano czynnikową postać wielomianu charakterystycznego układu zamkniętego. Wskazując na ograniczenia standardowej strategii sterowania minimalnoczasowego (*Dead-Beat*, *DB*; Isermann [195, 196], Kuo [251]) pokazano, że wprowadzenie do omawianego wielomianu charakterystycznego odpowiedniego prototypowego

czynnika (o niezerowych i 'kontrolowanych' zerach) pozwala na uzyskanie wymaganego zapasu stabilności oraz zapewnia racjonalne ukształtowanie sygnałów sterujących kosztem tylko niewielkiej degradacji szybkości sterowania (por. Kowalczyk i Suchomski [245], Zhang [485]).

We wczesnych próbach rozwiązywania zadania sterowania predykcyjnego na podstawie modelu związanego z operatorem δ - znanych jako metody *DQGPC* oraz *DGPC* zakładano, że ten operator jest używany tylko przy wyznaczaniu odpowiednich oszacowań wartości pochodnych wyjścia obiektu na podstawie dyskretnych danych tego sygnału. Przyjmowano przy tym, że prognoza przyszłego wyjścia zdefiniowana jest wyłącznie dla dyskretnych chwil czasu odpowiadających momentom próbkowania, zaś minimalizowana funkcja kosztu ma postać skończonej sumy kwadratów ocen przyszłych błędów sterowania (Bleile *et al.* [34], Boucher *et al.* [39] Dumur i Boucher [98], Dumur *et al.* [99], Lauritsen i Rostgaard [264], Lauritsen *et al.* [265]-[268], Neumann *et al.* [301, 302]). Dopiero w podejściu określanym jako *DCGPC* stopniowo wprowadzono 'emulację' sygnału wyjścia sterowanego obiektu dla dowolnej przyszłej chwili czasu ciągłego oraz zastosowano całkowanie kwadratu oszacowania przyszłego błędu sterowania, jako podstawę definicji odpowiedniej funkcji celu (Lauritsen [263], Lauritsen i Rostgaard [264], Lauritsen *et al.* [265]-[268], Rostgaard *et al.* [343]). W ten sposób uzyskano adekwatną dyskretnoczasową reprezentację podstawowego algorytmu *CGPC*, zapewniającą względną niezależność nastaw dyskretnego regulatora predykcyjnego od wartości okresu próbkowania stosowanego przy implementacji tego regulatora. Kończąc ten krótki opis rozwoju metody predykcyjnego sterowania z zastosowaniem operatora δ , warto wymienić znane rozszerzenia oraz modyfikacje algorytmu *DCGPC*: w (Rostgaard *et al.* [341]) do uzyskania prognozy wyjścia obiektu wykorzystuje się model w przestrzeni stanu, w (Cristea i De Prada [75], De Prada *et al.* [89]) uwzględniono ograniczenia wynikające z wymagań nałożonych na sygnał sterujący (opracowane algorytmy *CDGPC* oparte na numerycznych procedurach kwadratowego programowania nie mają jednak postaci zwartych analitycznych formuł), wreszcie w (Ebert [101]) zastosowano filtrację Kalmana do ograniczenia wpływu zakłóceń oddziałujących na sterowany obiekt.

Idea metody *CGPC* syntezy układów sterowania w czasie ciągłym zaproponowana w (Demircioglu i Gawthrop [82]), zaś rozwinięta w (Demircioglu [80], Demircioglu i Clarke [81], Gawthrop [126], Gawthrop *et al.* [128], Kouvaritakis [232], Kowalczyk i Suchomski [241]-[244], Ronco [339], Suchomski i Kowalczyk [416]) - polega na tym, aby wykorzystać model sterowanego obiektu (wielomianowy, wymierny lub dany w przestrzeni stanu) w celu oceny

('emulacji') wartości pochodnych jego wyjścia. Znajomość takich oszacowań umożliwia prognozę przyszłego przebiegu wyjścia obiektu, co stanowi podstawę do sformułowania kwadratowego funkcjonału kosztów oraz odpowiedniego liniowego algorytmu optymalnego sterowania.

Uproszczona metoda nastawiania Q -parametru, znana z poprzedniego rozdziału, może być bez żadnych ograniczeń stosowana w przypadku syntezy predykcyjnego regulatora. Standardowa korekcja Youli-Kučery okazała się bardzo przydatna przy zwiększaniu odporności dyskretnych (q) (Ansay i Wertz [6], Ansay *et al.* [7], Kouvaritakis *et al.* [233], Yoon i Clarke [479]) oraz ciągłych (Kowalczyk i Suchomski [244]) algorytmów sterowania predykcyjnego. W (Ansay i Wertz [6]) pokazano, że strojąc odpowiedni Q -parametr, można zapewnić racjonalny kompromis między wymaganą nominalną jakością regulowanego procesu (mierzoną na przykład jego niewrażliwością na wpływ zakłóceń) a niezbędną odpornością zamkniętego układu realizującego odpowiednie sterowanie.

Założmy następujący nominalny model sterowanego obiektu (por. (2.1))

$$y(t) = \frac{B(\delta)}{A(\delta)}u(t) + \frac{C(\delta)}{A(\delta)}v(t) \quad (3.1)$$

gdzie u oznacza sygnał sterowania, y jest sygnałem odpowiedzi tego obiektu, v modeluje obiektowe zakłócenie, $A(\delta) = \sum_{i=0}^{N_A} a_i \delta^i$, $B(\delta) = \sum_{i=0}^{N_B} b_i \delta^i$ oraz $C(\delta) = \sum_{i=0}^{N_C} c_i \delta^i$. Przyjmuje się, że wielomiany $A(\delta)$ oraz $B(\delta)$ są względnie pierwsze, $A(\delta)$ jest wielomianem monicznym ($a_{N_A} = 1$), $N_A \geq 2$, $N_C = N_A - 1$ oraz $d = N_A - N_B > 0$. Niech $s \in \mathbb{C}$ oznacza zespoloną zmienną transformacji Laplace'a. Kładąc $z = e^{s\Delta}$ w wyrażeniu $\zeta = (z - 1)/\Delta$, otrzymujemy następującą reprezentację tej zmiennej (Suchomski i Kowalczyk [417])

$$s = \frac{\ln(1 + \zeta\Delta)}{\Delta} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} \Delta^{j-1} \zeta^j}{j}.$$

Na tej podstawie uzyskujemy szereg

$$s^i = \sum_{j=i}^{\infty} v_{i,j} \zeta^j, \quad i \geq 0 \quad (3.2)$$

w którym $v_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta^{j-i} \tilde{v}_{i,j}$ oraz:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{i,i} &= 1 && \text{dla } i \geq 0, \\ \tilde{v}_{i,j} &= 0 && \text{dla } i \geq 1, 0 \leq j < i, \\ \tilde{v}_{0,j} &= 0, \tilde{v}_{1,j} = 1/j && \text{dla } j \geq 1, \\ \tilde{v}_{i,j} &= \sum_{k_1=1}^{j-i+1} \cdots \sum_{k_{i-1}=1}^{j-k_1-\cdots-k_{i-2}-1} \frac{1}{k_1 \cdots k_{i-1} (j-k_1-\cdots-k_{i-1})} && \text{dla } j \geq i \geq 2. \end{aligned}$$

Obowiązuje przy tym rekursywna reguła $\tilde{v}_{i,j} = \sum_{k=1}^{j-i+1} \tilde{v}_{i-1,j-k}/k$, $j > i \geq 1$. Wzór (3.2) ma prostą interpretację, zgodnie z którą operator wielokrotnego różniczkowania d^i/dt^i , $\forall i \geq 0$, można przybliżyć skończoną liniową kombinacją odpowiednich operatorów różnicowania: $d^i/dt^i \approx \sum_{j=i}^{N_{\delta,i}} v_{i,j} \delta^j$, gdzie $N_{\delta,i} \geq i$ jest parametrem takiej aproksymacji.

Wyznaczanie pochodnych odpowiedzi obiektu

Niech \hat{t} oznacza zmienną czasu przyszłego, zaś $\tau \in [0, T]$, $T \geq 0$, będzie względną (przyrostową) zmienną czasu przyszłego, zdefiniowaną jako $\tau = \hat{t} - t$, gdzie t jest bieżącą, chociaż ustaloną, chwilą czasu. Prognoza przyszłej odpowiedzi obiektu (3.1) ma postać (Suchomski i Kowalczuk [417])

$$y(\hat{t})|_{\hat{t}=t+\tau} \approx \sum_{i=0}^{N_y} \frac{\tau^i}{i!} y_i(t)$$

gdzie $y_i(t) = d^i y(t)/dt^i$, $\forall i \geq 0$, zaś parametr $N_y \geq 0$ nazywany jest rzędem predykcji wyjścia. Pochodną $y_i(t)$, $\forall i \geq 0$, przybliża się liniową kombinacją $y_i(t) \approx y_{i,N_{\delta}}(t) = \sum_{j=i}^{N_{\delta}} v_{i,j} y_{\delta,j}(t)$, w której $y_{\delta,j}(t) = \delta^j y(t)$ oznacza wartość j -krotnej różnicy dzielonej (j -tej δ -pochodnej) sygnału y w chwili t , zaś parametr N_{δ} , czyli rząd aproksymacji pochodnych, spełnia nierówność $N_{\delta} \geq N_y$. Zauważmy, że dla uproszczenia zakłada się tu, iż $N_{\delta,i} = N_{\delta}$, $\forall i$. Ponieważ δ nie jest operatorem przyczynowym, zatem wartości δ -pochodnych $\delta^j y(t)$, $\forall j > 0$, nie są znane w chwili t . Realizowalny (przyczynowy) algorytm szacowania wartości tych pochodnych – analogiczny do odpowiedniego mechanizmu czasu ciągłego (Kowalczuk i Suchomski [243], Suchomski i Kowalczuk [417]) – wyprowadzimy, korzystając z pierwszej diofantycznej bazy. Przewidywalny składnik $y_{\delta,i}^*(t)$ i -tej δ -pochodnej $y_{\delta,i}(t)$ sygnału wyjścia obiektu ma postać sumy $y_{\delta,i}^*(t) = y_{\delta,i}^-(t) + y_{\delta,i}^+(t)$, gdzie $y_{\delta,i}^-(t)$ jest 'obserwatorowym' składnikiem

$$y_{\delta,i}^-(t) = \frac{G_i(\delta)}{C(\delta)} \cdot u(t) + \frac{F_i(\delta)}{C(\delta)} \cdot y(t)$$

którego wyznaczenie wymaga przetwarzania sygnału sterowania za pomocą filtru o ściśle właściwej funkcji przenoszenia $G_i(\delta)/C(\delta)$ oraz przetwarzania sygnału wyjścia obiektu za pomocą filtru o właściwej funkcji przenoszenia $F_i(\delta)/C(\delta)$, zaś 'predyktorowy' składnik $y_{\delta,i}^+(t) = H_i(\delta) \cdot u(t)$ jest jednoznacznie określony przez bieżące i przyszłe (projektowane) sterowanie oraz przez ilorazowy wielomian $H_i(\delta)$, $\forall i \geq 0$. Nieprzewidywalna część sygnału $y_{\delta,i}(t)$ ma postać $E_i(\delta) \cdot v(t)$, zależną od aktualnych i przyszłych obiektowych zakłóceń oraz od drugiego ilorazowego wielomianu $E_i(\delta)$ pierwszej bazy diofantycznej, $\forall i \geq 0$.

Wyznaczanie pochodnych filtrowanej odpowiedzi

Oszacujmy kolejne δ -pochodne następująco zdefiniowanego sygnału filtrowanego wyjścia sterowanego obiektu (Suchomski i Kowalczuk [417])

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{B(\delta)} \cdot y(t).$$

Podstawę syntezy odpowiedniego algorytmu dla nietrywialnego przypadku $N_B \geq 1$ stanowi druga diofantyczna baza. Niech zatem $\bar{y}_{\delta,i}^*(t)$ oznacza przewidywalną część i -tej δ -pochodnej $\bar{y}_{\delta,i}(t) = \delta^i \bar{y}(t)$ sygnału $y(t)$. Formuła (równanie emulacji) opisująca tę wielkość ma postać sumy $\bar{y}_{\delta,i}^*(t) = \bar{y}_{\delta,i}^-(t) + \bar{y}_{\delta,i}^+(t)$, gdzie $\bar{y}_{\delta,i}^-(t)$ oznacza 'obserwatorowy' składnik

$$\bar{y}_{\delta,i}^-(t) = \frac{\bar{G}_i(\delta)}{C(\delta)} \cdot u(t) + \frac{\bar{F}_i(\delta)}{C(\delta)} \cdot y(t)$$

którego pozyskiwanie sprowadza się do filtracji sygnału sterowania za pomocą ściśle właściwej funkcji $\bar{G}_i(\delta)/C(\delta)$ oraz filtracji sygnału wyjścia danego obiektu za pomocą właściwej funkcji $\bar{F}_i(\delta)/C(\delta)$, zaś 'predyktorowy' składnik $\bar{y}_{\delta,i}^+(t) = \bar{H}_i(\delta) \cdot u(t)$ jest jednoznacznie wyznaczony przez bieżący i przyszły sygnał sterowania oraz przez ilorazowy wielomian $\bar{H}_i(\delta)$, $\forall i \geq 0$. Nieprzewidywalna część sygnału $\bar{y}_{\delta,i}(t)$ ma postać $\bar{E}_i(\delta) \cdot \bar{v}(t)$ zależną od filtrowanych zakłóceń $\bar{v}(t) = v(t)/B(\delta)$, $\forall i \geq 0$. Podkreślenia wymaga fakt, że 'filtracja' taka ma fikcyjny (pomocniczy) charakter i służy wyłącznie wyprowadzeniu reguł sterowania.

Estymacja przyszłej odpowiedzi obiektu

Przyszłą odpowiedź $y(\hat{t})|_{\hat{t}=t+\tau}$ oraz przyszłą filtrowaną odpowiedź $\bar{y}(\hat{t})|_{\hat{t}=t+\tau}$ obiektu można przybliżyć skończonymi potęgowymi szeregami zmiennej τ :

$$\hat{y}(\hat{t})|_{\hat{t}=t+\tau} = t_{0,N_y}^T(\tau) V_{N_y,N_\delta} H_{N_\delta,N_u} u_{N_u}(t) + t_{0,N_y}^T(\tau) V_{N_y,N_\delta} y_{N_\delta}^-(t)$$

$$\hat{\bar{y}}(t)|_{t=t+\tau} = t_{0,N_y}^T(\tau)V_{N_y,N_\delta}\bar{H}_{N_\delta,N_u}u_{N_u}(t) + t_{0,N_y}^T(\tau)V_{N_y,N_\delta}\bar{y}_{N_\delta}^-(t)$$

gdzie $N_u \geq 0$ jest rzędem predykcji sterowania, zaś:

$$\begin{aligned} t_{m,n}(\tau) &= [\tau^m/m! \quad \cdots \quad \tau^n/n!]^T \\ y_i^-(t) &= [y_{\delta,0}^-(t) \quad \cdots \quad y_{\delta,i}^-(t)]^T \\ \bar{y}_i^-(t) &= [\bar{y}_{\delta,0}^-(t) \quad \cdots \quad \bar{y}_{\delta,i}^-(t)]^T \\ u_i(t) &= [u_{\delta,0}(t) \quad \cdots \quad u_{\delta,i}(t)]^T \end{aligned}$$

przy czym $u_{\delta,i}(t) = \delta^i u(t)$, $\forall i \geq 0$, oraz:

$$\begin{aligned} H_{N_\delta,m} &= \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & h_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{N_\delta} & h_{N_\delta-1} & \cdots & h_{N_\delta-m} \end{bmatrix} \\ \bar{H}_{N_\delta,m} &= \begin{bmatrix} \bar{h}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{h}_{N_\delta} & \bar{h}_{N_\delta-1} & \cdots & \bar{h}_{N_\delta-m} \end{bmatrix} \\ V_{N_y,N_\delta} &= \begin{bmatrix} v_{0,0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,N_\delta} \\ 0 & 0 & v_{2,2} & \cdots & v_{2,N_\delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & v_{N_y,N_\delta} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

W przypadku macierzy $H_{N_\delta,m}$ oraz $\bar{H}_{N_\delta,m}$ zakłada się, że $0 \leq m \leq N_\delta$. Na N_y , N_δ oraz N_u nałożone są nierównościowe ograniczenia: ($N_y \geq d$, $N_\delta \geq N_y$, $N_u \leq N_y - d$) – dla obiektów o minimalnofazowych modelach oraz ($N_y \geq N_A$, $N_\delta \geq N_y$, $N_u \leq N_y - N_A$) – dla obiektów o dowolnych, w tym nieminimalnofazowych, modelach. Projektowane sterowanie jest procesem czasu dyskretnego, a zatem poszukiwanie ciągłoczasowej reprezentacji tego procesu nie jest tu potrzebne. Gdyby taka reprezentacja była jednak z jakichś powodów niezbędna, 'naturalną' wydaje się postać skończonego szeregu zmiennej τ : $u(t)|_{t=t+\tau} \approx t_{0,N_u}^T(\tau)V_{N_u,N_u}u_{N_u}(t)$. Bieżące oraz przyszłe sterowanie reprezentowane jest przez wektor δ -pochodnych tego sygnału $u_{N_u}(t)$, zatem rzędu predykcji N_u nie należy utożsamiać z horyzontem oceny kosztu przyszłego sterowania.

3.2 Algorytmy sterowania predykcyjnego

Rozważymy dwa warianty metody syntezy układów sterowania predykcyjnego. W wariantcie pierwszym, dostosowanym do obiektów sterowania o minimalnofazowych nominalnych modelach, wykorzystuje się prognozę przyszłej odpowiedzi obiektu. Wariant drugi, obejmujący obiekty o zarówno minimalnofazowych, jak i nieminimalnofazowych nominalnych modelach, jest bardziej uniwersalny i opiera się na estymacji filtrowanej przyszłej odpowiedzi danego obiektu. Po szczegółowej analizie właściwości prototypowych charakterystycznych wielomianów optymalnych zamkniętych układów sterowania formułujemy wnioski dotyczące stabilności tych układów. Podano także prostą regułę strojenia predykcyjnych regulatorów, w której rolę nastaw odgrywają standardowe dla tego typu sterowania parametry: rząd predykcji wyjścia, rząd predykcji sterowania oraz odpowiednie horyzonty obserwacji przeszłego uchybu sterowania. Wartości tych nastaw dobierane są w zależności od specyfikacji zdefiniowanych w dziedzinie czasu dla nominalnej skokowej odpowiedzi układu zamkniętego oraz w zależności od nierównościowych ograniczeń nakładanych na początkowy fragment nominalnego sygnału sterującego.

3.2.1 Zasada sterowania predykcyjnego

Niech $r(t)$ oznacza wartość sygnału odniesienia w bieżącej chwili t . Załóżmy, że przyszłą wartość tego sygnału można modelować jako $\hat{r}(\hat{t})|_{\hat{t}=t+\tau} = \hat{r}r(t)$, gdzie $\hat{r} \in \mathbb{R}$ jest odpowiednim współczynnikiem skalującym. Przyjmijmy ponadto dwie postacie (funkcje) przyszłego błędu sterowania: $e(\hat{t}) = \hat{r}(\hat{t}) - \hat{y}(\hat{t})$ oraz $\bar{e}(\hat{t}) = \hat{r}(\hat{t}) - \hat{y}(\hat{t})$. Na tej podstawie wyznaczamy następujące kwadratowe wskaźniki kosztu zdefiniowane dla odpowiednich funkcji błędu sterowania na zadanym skończonym przedziale obserwacji $[T_1, T_2] \subset \mathbb{R}$ tego błędu:

$$J(u_{N_u}(t)) = \int_{T_1}^{T_2} e^2(t + \tau) d\tau, \quad \bar{J}(u_{N_u}(t)) = \int_{T_1}^{T_2} \bar{e}^2(t + \tau) d\tau.$$

Warto podkreślić, że funkcjonały te zdefiniowano w dziedzinie czasu ciągłego: oszacowania odpowiednich δ -pochodnych, otrzymywane na podstawie bieżąco pozyskiwanych dyskretnych danych pomiarowych oraz dyskretnych wartości sterowania, umożliwiają prognozę przyszłych wartości uchybu dla dowolnej chwili czasu należącej do przedziału określonego przez bliższy T_1 oraz dalszy T_2 horyzont obserwacji. Horyzonty te odnoszą się do czasu ciągłego

i nie zależą od okresu próbkowania przyjętego w realizowanym algorytmie regulacji.

Biorąc pod uwagę afiniczną zależność funkcji błędu $e(\hat{t})$ oraz odpowiednio $\bar{e}(\hat{t})$ od przyszłego sterowania reprezentowanego przez $u_{N_u}(t)$, stwierdzamy, że minimalizacja wskaźników $J(u_{N_u}(t))$ oraz $\bar{J}(u_{N_u}(t))$ prowadzi do liniowych reguł sterowania:

$$\begin{aligned} u_{N_u}^*(t) &= -K_{N_u, N_\delta, N_y} y_{w, N_\delta}^0(t) \\ \bar{u}_{N_u}^*(t) &= -\bar{K}_{N_u, N_\delta, N_y} \bar{y}_{w, N_\delta}^0(t). \end{aligned}$$

Macierze wzmocnień odpowiednich regulatorów mają postać:

$$\begin{aligned} K_{N_u, N_\delta, N_y} &= (H_{N_\delta, N_u}^T V_{N_y, N_\delta}^T T_{N_y} V_{N_y, N_\delta} H_{N_\delta, N_u})^{-1} H_{N_\delta, N_u}^T V_{N_y, N_\delta}^T T_{N_y} V_{N_y, N_\delta} \\ \bar{K}_{N_u, N_\delta, N_y} &= (\bar{H}_{N_\delta, N_u}^T V_{N_y, N_\delta}^T T_{N_y} V_{N_y, N_\delta} \bar{H}_{N_\delta, N_u})^{-1} \bar{H}_{N_\delta, N_u}^T V_{N_y, N_\delta}^T T_{N_y} V_{N_y, N_\delta} \end{aligned}$$

gdzie

$$T_m = T_{0,m}^{0,m}(T_1, T_2), \quad T_{k,l}^{m,n}(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} t_{k,l}(\tau) t_{m,n}^T(\tau) d\tau$$

zaś sygnały sprzężenia zwrotnego dane są wzorami:

$$\begin{aligned} y_{w, N_\delta}^0(t) &= \left[y_{\delta,0}^-(t) - \tilde{r}r(t) \quad y_{\delta,1}^-(t) \quad \cdots \quad y_{\delta, N_\delta}^-(t) \right]^T \\ \bar{y}_{w, N_\delta}^0(t) &= \left[\bar{y}_{\delta,0}^-(t) - \tilde{r}r(t) \quad \bar{y}_{\delta,1}^-(t) \quad \cdots \quad \bar{y}_{\delta, N_\delta}^-(t) \right]^T. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $y_{\delta,0}^-(t) = y(t)$. Zgodnie z podstawową zasadą sterowania predykcyjnego – to znaczy zasadą ruchomego horyzontu (*receding horizon*; Camacho i Bordons [53], Clarke i Mohtadi [65], Clarke *et al.* [66], Soeterboek [371]) – początkowe współrzędne wektorów $u_{N_u}^*(t)$ oraz $\bar{u}_{N_u}^*(t)$ determinują bieżącą wartość optymalnego sygnału sterującego: $u(t) = -k_{N_\delta}^T y_{w, N_\delta}^0(t)$ oraz $\bar{u}(t) = -\bar{k}_{N_\delta}^T \bar{y}_{w, N_\delta}^0(t)$, gdzie $k_{N_\delta}^T = [k_0 \quad \cdots \quad k_{N_\delta}]$ oraz odpowiednio $\bar{k}_{N_\delta}^T = [\bar{k}_0 \quad \cdots \quad \bar{k}_{N_\delta}]$ są pierwszymi wierszami stosownych macierzy K_{N_u, N_δ, N_y} oraz $\bar{K}_{N_u, N_\delta, N_y}$.

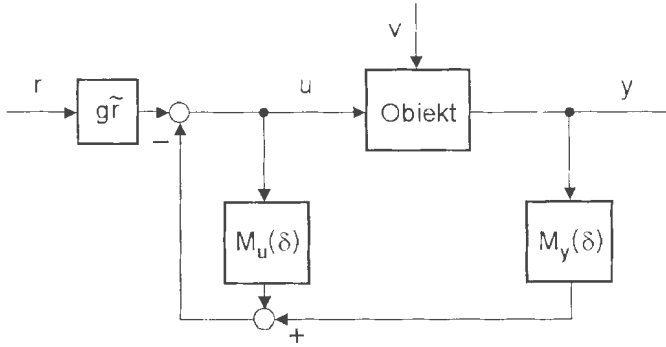
Prawo sterowania podporządkowane jest zatem regule

$$u(t) = g\tilde{r}r(t) - M_u(\delta)u(t) - M_y(\delta)y(t)$$

w której g jest statycznym wzmocnieniem, zaś $M_u(\delta)$ oraz $M_y(\delta)$ oznaczają funkcje przenoszenia odpowiednich filtrów:

$$\begin{aligned} g &= k_0, \quad M_u(\delta) = \frac{G(\delta)}{C(\delta)}, \quad M_y(\delta) = \frac{F(\delta)}{C(\delta)} \\ g &= \bar{k}_0, \quad M_u(\delta) = \frac{\bar{G}(\delta)}{C(\delta)}, \quad M_y(\delta) = \frac{\bar{F}(\delta)}{C(\delta)}. \end{aligned}$$

Schemat rozważanego układu sterowania pokazano na rys. 3.1 (por. rys. 2.1).



Rys. 3.1. Schemat układu sterowania predykcyjnego.

Zastosowanie wielomianu $C(q^{-1})$ jako dodatkowego stopnia swobody algorytmu syntezy dyskretnego (q) sterowania predykcyjnego *GPC* rozważano w (Ansay i Wertz [6], Ansay *et al.* [7], Clarke i Mohtadi [65], Kowalczuk i Suchomski [240], McIntosh *et al.* [284], Megias *et al.* [289], Robinson i Clarke [337], Soeterboek [371], Yoon i Clarke [479]). Przykładowo, w (Robinson i Clarke [337]) przyjmuje się jeden stopień swobody, wyróżniając w $C(q^{-1})$ czynnik $1 - \gamma q^{-1}$ z parametrem $\gamma \in \mathbb{R}$ ustalonym przez projektanta. Podobne podejście znajdujemy w (Soeterboek [371]), gdzie $C(q^{-1}) = A(q^{-1}) \cdot (1 - \gamma q^{-1})$, zaś $A(q^{-1})$ jest mianownikiem nominalnego modelu stabilnego obiektu. Praca (Kowalczuk i Suchomski [240]) dotyczy dyskretnego sterowania predykcyjnego obiektami opisanych modelami (niekoniecznie minimalnymi) typu *CARIMA*. Zasadę syntezy odpornego regulatora *GPC* wyprowadzono ze spostrzeżenia, że nominalną stabilność oraz nominalne właściwości układu zamkniętego w zakresie śledzenia wielkości zadanej można kształtować do pewnego stopnia niezależnie od dążenia do zapewnienia temu układowi odpornej stabilności. Pierwsze zadanie rozwiązuje się przez stosowny wybór rzędów predykcji wyjścia oraz sterowania, a także horyzontów obserwacji - w tym celu można użyć metody stabilizacji układów *GPC* opisanej w (Suchomski i Kowalczuk [415, 418]). W drugim etapie syntezy regulatora zabiega się o zapewnienie układowi zamkniętemu niezbędnej odporności przez formowanie wielomianu $C(q^{-1})$, pamiętając wszakże o istotnym ograniczeniu, jakie stwarza wymaganie od projektowanego układu zdolności skutecznego przeciwstawiania się wpływowi obiektowych zakłóceń.

Sterowanie obiektami minimalnofazowymi

W dalszych rozważaniach obowiązuje upraszczające założenie $N_\delta = N_y$. Przyjmujemy ponadto, że przy ustalonej wartości rzędu predykcji sterowania $N_u \geq 0$, traktowanego tu jako swobodny parametr projektu, wybieramy minimalną dopuszczalną wartość rzędu predykcji wyjścia: $N_y = d + N_u$. W takim przypadku mamy (Suchomski i Kowalczyk [417])

$$\begin{aligned} K_{N_u, d+N_u, d+N_u} &\equiv K_{N_u, d+N_u} \\ &= (H_{d+N_u, N_u}^T X_{d+N_u} H_{d+N_u, N_u})^{-1} H_{d+N_u, N_u}^T X_{d+N_u} \end{aligned}$$

przy czym $X_m = V_{m,m}^T T_m V_{m,m}$, $m \geq 0$. Uwzględniając, że

$$H_{d+N_u, N_u} = \begin{bmatrix} 0_{d \times (N_u+1)} \\ H_{N_u}^d \end{bmatrix}$$

gdzie $H_{N_u}^d = \text{Toep1}(h_d, \dots, h_{d+N_u})$ jest nieosobliwą dolną trójkątną macierzą Toeplitza, macierz wzmocnień wyznaczamy zgodnie ze wzorem

$$K_{N_u, d+N_u} = (H_{N_u}^d)^{-1} \left[(X_{d, N_u}^{22})^{-1} X_{d, N_u}^{21} \quad I_{N_u+1} \right]$$

w którym $X_{d, N_u}^{22} \in \mathbb{R}^{(N_u+1) \times (N_u+1)}$ oraz $X_{d, N_u}^{21} \in \mathbb{R}^{(N_u+1) \times d}$ są podmacierzami wynikającymi z następującego podziału

$$X_{d+N_u} = \begin{bmatrix} X_{d, N_u}^{11} & X_{d, N_u}^{12} \\ X_{d, N_u}^{21} & X_{d, N_u}^{22} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Wektor wzmocnień predykcyjnego regulatora ma zatem postać

$$k_{d+N_u}^T = h_d^{-1} \cdot \underbrace{[v_{d, N_u}^T \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]}_{N_u+1} \quad (3.4)$$

gdzie $h_d = b_{N_B}/a_{N_A} = b_{N_B}$ oraz

$$v_{d, N_u}^T = \underbrace{[1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]}_{N_u+1} (X_{d, N_u}^{22})^{-1} X_{d, N_u}^{21}.$$

Oznaczając $T_{m,n}(T) = \text{diag}\{T^k\}_{k=m}^n$, $T \in \mathbb{R}$, oraz $P_{m,n} = \text{diag}\{1/k!\}_{k=m}^n$, $0 \leq m \leq n$, mamy

$$T_{0,m}^{0,m}(0, T) = T \cdot T_{0,m}(T) P_{0,m} H_{0,m}^{0,m} P_{0,m} T_{0,m}(T), \quad T \geq 0, \quad m \geq 0$$

gdzie $II_{k,l}^{m,n} \in \mathbb{R}^{(l-k+1) \times (n-m-1)}$ jest odpowiednią podmacierzą macierzy Hilberta

$$II_{k,l}^{m,n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k+m+1} & \cdots & \frac{1}{k+n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{l-m+1} & \cdots & \frac{1}{l+n+1} \end{bmatrix}.$$

Z kolei $V_{m,m} = \tilde{T}_{0,m}^{-1} \tilde{V}_m \tilde{T}_{0,m}$, gdzie $\tilde{T}_{m,n} = \text{diag} \{(-\Delta)^k\}_{k=m}^n$ oraz

$$\tilde{V}_m = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{0,0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{v}_{1,1} & \tilde{v}_{1,2} & \cdots & \tilde{v}_{1,m} \\ 0 & 0 & \tilde{v}_{2,2} & \cdots & \tilde{v}_{2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{v}_{m,m} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Elementy macierzy \tilde{V}_m oraz \tilde{V}_m^{-1} można zatem wyznaczyć analitycznie (Suchomski i Kowalczyk [417]). Z powyższych rozważań wynika, że $X_m = \Delta \cdot \tilde{T}_{0,m} \tilde{X}_m \tilde{T}_{0,m}$, gdzie

$$\tilde{X}_m = \tilde{V}_m^T (\eta_2 N_{0,m}(\eta_2) II_{0,m}^{0,m} N_{0,m}(\eta_2) - \eta_1 N_{0,m}(\eta_1) II_{0,m}^{0,m} N_{0,m}(\eta_1)) \tilde{V}_m$$

jest funkcją dolnego oraz górnego końca unormowanego przedziału obserwacji (to znaczy względnych horyzontów obserwacji: bliższego $\eta_1 = T_1/\Delta$ oraz dalszego $\eta_2 = T_2/\Delta$), zaś $N_{m,u}(\eta) = \text{diag} \{(-\eta)^k/k!\}_{k=m}^n$, $\eta \in \mathbb{R}$. W efekcie uzyskujemy zależność

$$(X_{d,N_u}^{22})^{-1} X_{d,N_u}^{21} = \tilde{T}_{d,d-N_u}^{-1} (\tilde{X}_{d,N_u}^{22})^{-1} \tilde{X}_{d,N_u}^{21} \tilde{T}_{0,d-1}$$

w której występują podmacierze podziału

$$\tilde{X}_{d-N_u} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_{d,N_u}^{11} & \tilde{X}_{d,N_u}^{12} \\ \tilde{X}_{d,N_u}^{21} & \tilde{X}_{d,N_u}^{22} \end{bmatrix}$$

takiego jak podział (3.3) macierzy X_{d+N_u} . Zachodzi zatem:

$$v_{d,N_u} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{d,N_u}^0 & \tilde{v}_{d,N_u}^1 & \cdots & \tilde{v}_{d,N_u}^{d-1} \\ (\Delta)^d & (-\Delta)^{d-1} & \cdots & -\Delta \end{bmatrix}^T$$

$$\tilde{v}_{d,N_u}^T = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{d,N_u}^0 & \tilde{v}_{d,N_u}^1 & \cdots & \tilde{v}_{d,N_u}^{d-1} \end{bmatrix} = \underbrace{[1 \ 0 \ \cdots \ 0]}_{N_u+1} (\tilde{X}_{d,N_u}^{22})^{-1} \tilde{X}_{d,N_u}^{21}.$$

Macierz $K_{N_u, d+N_u}$ spełnia równanie $K_{N_u, d+N_u} II_{d+N_u, N_u} = I_{N_u+1}$. Przyjmując $n_p = d$ oraz $K(\delta) = K_{d, N_u}(\delta)$, gdzie $K_{d, N_u}(\delta)$ oznacza wielomian stopnia $\deg K_{d, N_u}(\delta) = d$ o współczynnikach równych kolejnym współrzędnym wektora k_{d+N_u} , otrzymujemy odpowiednik lematu 2.6.

Lemat 3.1 (o syntezie dyskretnego regulatora predykcyjnego w oparciu o prognozę wyjścia; Suchomski i Kowalczyk [417]). *W przypadku regulatora predykcyjnego optymalizowanego ze względu na kryterium $J(u_{N_u}(t))$ formuły $N_u \geq 0$ oraz $N_y = d + N_u$ dopuszczalne są jedynie dla obiektów o minimalnofazowych nominalnych modelach.* \square

3.2.2 Prototypowe wielomiany charakterystyczne

Definiując nienormalizowany operator $\bar{\delta} = \Delta\delta$, uzyskujemy możliwość parametryzacji zbioru prototypowych wielomianów $\tilde{K}_{d,N_u}(\bar{\delta}) = \sum_{i=0}^d \tilde{k}_{d,N_u}^i \bar{\delta}^i$ o współczynnikach $\tilde{k}_{d,N_u}^d = 1$ oraz $\tilde{k}_{d,N_u}^i = (-1)^{d-i} \tilde{v}_{d,N_u}^i$, $0 \leq i \leq d-1$, zależnych od: (i) względnego rzędu d nominalnego modelu sterowanego obiektu, (ii) założonego rzędu predykcji sterowania N_u , (iii) założonych względnych horyzontów obserwacji η_1 oraz η_2 . Ustaliwszy wartości owych parametrów na podstawie specyfikacji projektu, otrzymujemy poszukiwany prototypowy wielomian

$$K_{d,N_u}(\delta) = h_d^{-1} \Delta^{-d} \cdot \tilde{K}_{d,N_u}(\bar{\delta}) \Big|_{\bar{\delta}=\Delta\delta}$$

gdzie $k_i = h_d^{-1} \Delta^{-(d-i)} \tilde{k}_{d,N_u}^i$, $0 \leq i \leq d$, występujący jako czynnik wielomianu charakterystycznego zamkniętego układu sterowania: $T_0(\delta) = B(\delta) \cdot K_{d,N_u}(\delta)$ (por. *podrozdział 2.3*). Wzmocnienie regulatora ma wartość $g = h_d^{-1} \tilde{k}_{d,N_u}^0 / \Delta^d$, zaś $\tilde{r} = 1$.

W dalszej części tego podrozdziału wyróżnimy dwie rodziny prototypowych wielomianów. Elementami pierwszej rodziny są zbiory wielomianów odpowiadających bliższemu względnemu horyzontowi obserwacji $\eta_1 = 0$, zaś drugą rodzinę tworzą zbiory wielomianów, które uzyskuje się dla $\eta_1 = d$. W pierwszym przypadku współczynniki rozważanych wielomianów są łatwiejsze do obliczenia, z kolei w drugim przypadku – za cenę większej złożoności obliczeniowej algorytmu syntezy – otrzymuje się rozwiązania (regulatory) o lepszych ‘użytkowych’ cechach.

Przyjmijmy notacyjną konwencję: w oznaczeniach T_2 oraz η_2 pomijamy dolny indeks, zastępując te symbole odpowiednio przez T oraz η . W ten sposób wyróżniamy dalszy horyzont obserwacji – to znaczy górną granicę całkowania w definicji wskaźników $J(u_{N_u}(t))$ oraz $\bar{J}(u_{N_u}(t))$ – jako dogodny parametr projektu, wynikający ze specyfikacji odnośnie wymaganej szybkości procesów sterowania oraz ograniczeń nałożonych na sterowanie.

Lemat 3.2 (o postaci prototypowych wielomianów dyskretnego sterowania predykcyjnego; Suchomski i Kowalczyk [417]). *Współczynniki \tilde{k}_{d,N_u}^i , $0 \leq i \leq$*

$d - 1$, prototypowych wielomianów $\tilde{K}_{d,N_u}(\bar{\delta})$ mają postać wymiernej funkcji $\tilde{k}_{d,N_u}^i(\eta) = \tilde{n}_{d,N_u}^i(\eta)/\tilde{d}_{d,N_u}^i(\eta)$, gdzie $\tilde{n}_{d,N_u}^i(\eta)$ oraz $\tilde{d}_{d,N_u}^i(\eta)$ są odpowiednimi wielomianami zmiennej η . Dla $\eta_1 = 0$ zachodzi:

$$\begin{aligned} \deg \tilde{n}_{d,N_u}^i(\eta) &= \begin{cases} (2d-1)(N_u+1) - d & \text{dla } i = 0 \\ 2(d-1)(N_u+1) - d + i & \text{dla } 1 \leq i \leq d-1 \end{cases} \\ \tilde{d}_{d,N_u}^i(\eta) &= \begin{cases} \eta^{N_u+1} \tilde{d}_{d,N_u}(\eta) & \text{dla } i = 0 \\ \tilde{d}_{d,N_u}(\eta) & \text{dla } 1 \leq i \leq d-1 \end{cases} \\ \deg \tilde{d}_{d,N_u}^i(\eta) &= 2(d-1)(N_u+1). \end{aligned}$$

Gdy $\eta_1 = d$, mamy:

$$\begin{aligned} \deg \tilde{n}_{d,N_u}^i(\eta) &= 2d(N_u+1) - d + i \\ \deg \tilde{d}_{d,N_u}^i(\eta) &= 2d(N_u+1). \quad \square \end{aligned}$$

Ze względu na skończony horyzont oceny skutków sterowania ($\eta < \infty$) problem stabilności prototypowych wielomianów $\tilde{K}_{d,N_u}(\bar{\delta})$ ma podstawowe znaczenie. Punktem wyjścia odpowiednich badań jest przedstawiona niżej analiza asymptotycznych właściwości tych wielomianów.

Asymptotyczne właściwości prototypowych wielomianów

Asymptotyczne cechy prototypowych wielomianów $\tilde{K}_{d,N_u}(\bar{\delta})$ dla $\eta_1 = 0$ oraz $\eta_1 = d$ wstępnie omówiono w poniższym lemacie.

Lemat 3.3 (o asymptotycznych właściwościach prototypowych wielomianów dyskretnego sterowania predykcyjnego; Suchomski i Kowalczyk [417]). *Współczynniki prototypowych wielomianów $\tilde{K}_{d,N_u}(\bar{\delta})$ dla $\eta_1 \in \{0, d\}$, $\Delta > 0$ oraz $T > 0$ charakteryzują się następującymi cechami:*

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \tilde{k}_{d,N_u}^i(\eta) &= 0, \quad 0 \leq i \leq d-1 \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-d} \tilde{K}_{d,N_u}(\bar{\delta}) \Big|_{\bar{\delta}=\Delta\delta} &= T^{-d} \hat{K}_{d,N_u}(p) \Big|_{p=Ts} \end{aligned} \quad (3.6)$$

gdzie

$$\hat{K}_{d,N_u}(p) = \sum_{i=0}^d \hat{k}_{d,N_u}^i p^i$$

oznacza odpowiedni moniczny prototypowy wielomian zespolonej zmiennej $p = Ts$. Współczynniki tego wielomianu

$$\hat{k}_{d,N_u}^i = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta^{d-i} \tilde{k}_{d,N_u}^i(\eta), \quad 0 \leq i \leq d$$

zależą wyłącznie od parametrów d oraz N_u . Ponadto, dla $\eta_1 = d$ zachodzi

$$\lim_{\eta \rightarrow d} \tilde{k}_{d, N_u}^i(\eta) = \binom{d}{i}. \quad \square$$

Uwaga 3.1 (Suchomski i Kowalczyk [417]). Z faktu, iż $\deg \tilde{d}_{d, N_u}^i(\eta) - \deg \tilde{n}_{d, N_u}^i(\eta) = d - i, \forall \eta$, wynika, że granica (3.6) zawsze istnieje. Ponadto, dla $\eta_1 = d$ oraz przy $\eta \rightarrow d$ zera wielomianu $\tilde{K}_{d, N_u}(\bar{\delta})$ dążą do -1 , co odpowiada układowi sterowania minimalnoczasowego (*dead-beat*). \square

Sterowanie predykcyjne w czasie ciągłym

Znana jest analityczna postać prototypowych wielomianów $\hat{K}_{d, N_u}(p)$, zaś ich współczynniki można wyznaczyć w oparciu o numerycznie stabilną formułę.

Lemat 3.4 (o prototypowych wielomianach sterowania predykcyjnego w czasie ciągłym; Suchomski i Kowalczyk [416]). *Współczynniki $\hat{k}_{d, N_u}^i, 0 \leq i \leq d$, prototypowego wielomianu $\hat{K}_{d, N_u}(p)$ dane są wzorem*

$$\hat{k}_{d, N_u}^i = \begin{cases} \frac{d!}{i!} \frac{(2d+1)}{(d+i+1)} & \text{dla } N_u = 0 \\ \frac{d!}{N_u! i!} \prod_{j=1}^{N_u+1} \frac{(2d+j)}{(d+i+j)} \prod_{j=1}^{N_u} (d-i+j) & \text{dla } N_u \geq 1. \quad \square \end{cases}$$

Uwaga 3.2 (Suchomski i Kowalczyk [416]). Prototypowe wielomiany odpowiadające ciągłoczasowemu sterowaniu predykcyjnemu zależą od względnego rzędu d nominalnego modelu sterowanego obiektu oraz od przyjętego rzędu predykcji sterowania N_u . Danemu obiektowi przyporządkować można rodzinę takich optymalnych prototypowych wielomianów o współczynnikach opisanych analitycznymi formułami. Ułatwia to syntezę regulatora, gdyż pozwala uniknąć numerycznych trudności przy odwracaniu źle uwarunkowanych (pod)macierzy Hilberta (por. Kowalczyk i Suchomski [237], Suchomski i Kowalczyk [413]). Asymptotyczną wartość wzmocnienia dyskretnego regulatora predykcyjnego wyznaczamy zatem ze wzoru

$$g = \frac{\hat{k}_{d, N_u}^0}{h_d T^d} = \frac{d!}{N_u! \cdot h_d T^d (d + N_u + 1)} \cdot \prod_{j=1}^{N_u+1} (2d + j)$$

gdzie $h_d = b_{N_B}$ oznacza pierwszy niezerowy parametr Markowa (ciągłoczasowego!) modelu $B(s)/A(s)$ sterowanego obiektu. \square

Prototypowemu modelowi zamkniętego układu sterowania predykcyjnego w czasie ciągłym

$$G_{yr}^-(p) = \frac{\hat{k}_{d,N_u}^0}{\hat{K}_{d,N_u}(p)}$$

przyporządkować można standardowe wskaźniki skokowej odpowiedzi tego układu (np. przeregulowanie $\hat{\kappa}$, czas szczytu \hat{T}_κ , czasy ustalania $\hat{T}_{s2\%}$ oraz $\hat{T}_{s5\%}$), otrzymując w ten sposób dogodnie narzędzie projektowana w oparciu o zadane specyfikacje w dziedzinie czasu. Obszerny katalog takich charakterystyk dano w (Suchomski i Kowalczyk [416]). Przykładowo, oczekując aby przy założonych parametrach d oraz N_u , czas ustalania $T_{s2\%}$ odpowiedzi skokowej nominalnego układu zamkniętego nie przekraczał zadanej wartości $T_{s2\% \max}$, uzyskujemy nierównościowe ograniczenie na dalszy horyzont obserwacji $T \leq T_{s2\% \max} / \hat{T}_{s2\%}(d, N_u)$. Żądając w warunkach takiego pobudzenia ograniczenia maksymalnej wartości sygnału sterującego $|u(0)| \leq u_{\max}$, musimy zaakceptować kolejne ograniczenie nałożone na tę nastawę: $T \geq |r \hat{k}_{d,N_u}^0 / (h_d u_{\max})|^{1/d}$. Podobne wskazania można wyprowadzić na podstawie innych wymagań stawianych układowi sterowania, np. ustalonego błędu śledzenia sygnałów prędkościowych lub też specyfikacji widmowych (Kowalczyk i Suchomski [243]). Wyznaczywszy współczynniki prototypowych wielomianów $\hat{K}_{d,N_u}(p)$, łatwo znajdziemy odpowiedź na pytanie o stabilność tych wielomianów.

Lemat 3.5 (o stabilności prototypowych wielomianów sterowania predykcyjnego w czasie ciągłym; Suchomski i Kowalczyk [416]). *Prototypowy wielomian $\hat{K}_{d,N_u}(p)$ stopnia $d \leq 10$ (ograniczono się do 'praktycznego' zakresu względnego rzędu modeli sterowanych obiektów) jest wielomianem stabilnym (wielomianem Hurwitza) wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\begin{aligned} d \leq 4 \text{ oraz } N_u \geq 0, & \quad d = 5 \text{ oraz } N_u \geq 1, & \quad d = 6, 7 \text{ oraz } N_u \geq 2, \\ d = 8 \text{ oraz } N_u \geq 3, & \quad d = 9 \text{ oraz } N_u \geq 4, & \quad d = 10 \text{ oraz } N_u \geq 5. \quad \square \end{aligned}$$

Przykład 3.1 (synteza ciągłego regulatora predykcyjnego (I); Suchomski i Kowalczyk [416]). Weźmy następujący nominalny model niestabilnego i minimalnofazowego obiektu

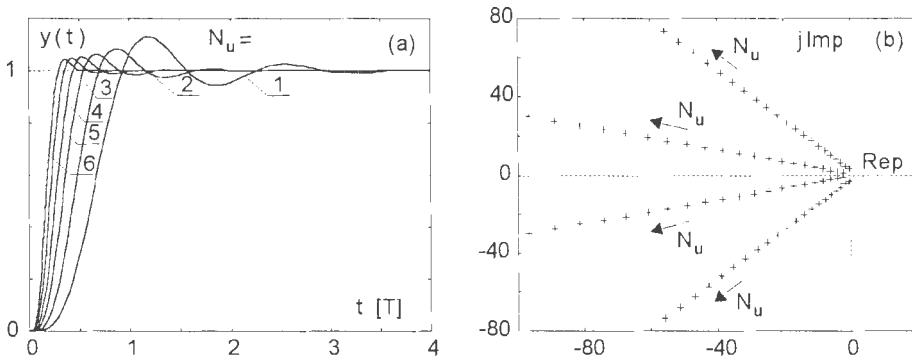
$$\bar{P}_{pyu}(s) = \frac{2}{s(1+s)(1+s^2)}.$$

Wybrane charakterystyki odpowiedniego prototypowego zamkniętego układu sterowania, wynikające z właściwości wielomianów $\hat{K}_{d,N_u}(p)$, $d = 4$, $0 \leq$

$N_u \leq 8$, zestawiono w tabeli 3.1. Uzupełnieniem tych danych są wykresy dane na rys. 3.2, ilustrujące przebieg odpowiedzi skokowych dla $1 \leq N_u \leq 6$ (rys. 3.2a) oraz rozmieszczenie zer wielomianów $\hat{K}_{d,N_u}(p)$ dla $0 \leq N_u \leq 20$ (rys. 3.2b).

N_u	$\hat{K}_{d,N_u}(p)$	$\hat{\kappa}$	$\hat{T}_{s2\%}$
0	$43.2 + 36p + 15.43p^2 + 4.5p^3 + p^4$	0.2931	12.875
1	$360 + 205.71p + 57.86p^2 + 10p^3 + p^4$	0.1311	2.664
2	$1697.14 + 707.14p + 141.43p^2 + 16.5p^3 + p^4$	0.0839	1.450
3	$5940 + 1885.71p + 282.86p^2 + 24p^3 + p^4$	0.0635	0.837
4	$17160 + 4290p + 501.43p^2 + 32.5p^3 + p^4$	0.0527	0.657
5	$43243.2 + 8736p + 819p^2 + 42p^3 + p^4$	0.0462	0.529
6	$98280 + 16380p + 1260p^2 + 52.5p^3 + p^4$	0.0419	0.435
7	$205920 + 28800p + 1851.43p^2 + 64p^3 + p^4$	0.0390	0.364
8	$403920 + 48085.71p + 2622.86p^2 + 76.5p^3 + p^4$	0.0369	0.309

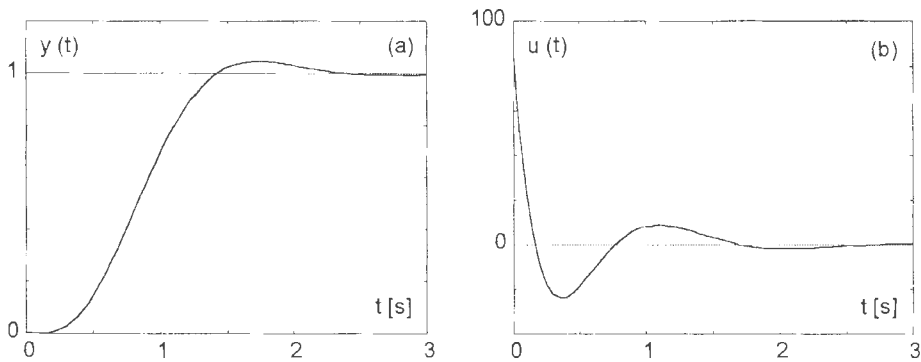
Tabela 3.1. Przykład 3.1. Charakterystyki ciągłego prototypowego układu zamkniętego ($d = 4$).



Rys. 3.2. Przykład 3.1. Właściwości ciągłego prototypowego układu zamkniętego ($d = 4$): a) odpowiedzi skokowe dla $1 \leq N_u \leq 6$, b) zera wielomianów $\hat{K}_{4,N_u}(p)$ dla $0 \leq N_u \leq 20$.

Założony przykładowe specyfikacje odnoszące się do skokowej odpowiedzi nominalnego zamkniętego układu sterowania: $\kappa \leq 0.05$, $T_{s2\%} \leq 2.5$ s oraz $u_{\max} \leq 100$. Specyfikacje te dotyczą zatem stabilności tego układu, szybkości procesów przejściowych oraz realizowalności stosownego sterowania. Przyjmując $N_u = 5$, z tabeli 3.1 odczytujemy: $\hat{\kappa}(d, N_u) = 0.0462 < 0.05$,

$\hat{T}_{s2\%}(d, N_u) = 0.529$ oraz $\hat{k}_{d, N_u}^0 = 43243.2$. Na tej podstawie wyznaczamy ograniczenia wynikające z postulowanej szybkości odpowiedzi skokowej oraz dopuszczalnej dynamiki sygnału sterującego: $T \leq 4.726$ s oraz $T \geq 3.835$ s. Niech $C(s) = (1 + 0.2s)(1 + 0.25s)(1 + 0.5s)$. Kładąc $T = 4$ s, otrzymujemy: $L_y(s) = F(s) = 56.5766s + 76.4680s^2 + 34.1133s^3$ oraz $L_u(s) = G(s) = 22.3469 + 3.6297s + 0.2375s^2$, a ponadto $g = 84.4594$. Wykresy odpowiedzi skokowej (rys. 3.3a) oraz sygnału sterującego (rys. 3.3b) pokazują cechy układu z takim regulatorem. Przydatne wskazówki dotyczące strojenia regulatorów *CGPC*, a także liczne przykłady ilustrujące właściwości odpowiednich układów regulacji, znaleźć można w (Kowalczyk i Suchomski [241]-[244], Suchomski i Kowalczyk [416]).



Rys. 3.3. Przykład 3.1. Charakterystyki ciągłego układu sterowania predykcyjnego: a) odpowiedź skokowa, b) sygnał sterujący.

3.2.3 Formuły sterowania predykcyjnego

Wnioski z dotychczasowych rozważań wskazują na kierunek dalszego rozumowania, wiodącego do ogólnej postaci formuł sterowania predykcyjnego, które obowiązywałyby zarówno w przypadku minimalnofazowych, jak i nie-minimalnofazowych nominalnych modeli sterowanych obiektów.

Lemat 3.6 (o syntezy dyskretnego regulatora predykcyjnego w oparciu o prognozę filtrowanego wyjścia; Suchomski i Kowalczyk [417]). *W przypadku regulatora predykcyjnego optymalizowanego ze względu na kryterium $\bar{J}(u_{N_u}(t))$ formuły $N_u \geq 0$ oraz $N_y = N_A + N_u$ można stosować dla obiektów o minimalnofazowych oraz nie-minimalnofazowych nominalnych modelach. \square*

Niech rząd predykcji sterowania $N_u \geq 0$ będzie swobodnym parametrem, zaś $N_y = N_A + N_u$ oraz $N_\delta = N_y$. Analizując postać macierzy $\bar{K}_{N_u, N_A + N_u, N_A + N_u} \equiv K_{N_u, N_A + N_u}$, stwierdzamy, że wektor wzmocnień odpowiedniego regulatora dany jest wzorem (Suchomski i Kowalczyk [417])

$$\bar{k}_{N_A + N_u}^T = \bar{h}_{N_A}^{-1} \cdot [v_{N_A, N_u}^T \underbrace{1 \ 0 \ \cdots \ 0}_{N_u + 1}] \quad (3.7)$$

przy czym $\bar{h}_{N_A} = 1/a_{N_A}$. Uzyskujemy w ten sposób zbiór monicznych prototypowych wielomianów $\tilde{K}_{N_A, N_u}(\bar{\delta}) = \sum_{i=0}^{N_A} \tilde{k}_{N_A, N_u}^i \bar{\delta}^i$ o współczynnikach $\tilde{k}_{N_A, N_u}^{N_A} = 1$ oraz $\tilde{k}_{N_A, N_u}^i = (-1)^{N_A - i} \tilde{v}_{N_A, N_u}^i$, $0 \leq i \leq N_A - 1$, zależnych od: (i) rzędu N_A nominalnego modelu sterowanego obiektu, (ii) założonego rzędu predykcji sterowania N_u , (iii) założonych względnych horyzontów obserwacji η_1 oraz $\eta = \eta_2$. Parametry te ustalamy na podstawie specyfikacji, otrzymując wielomian

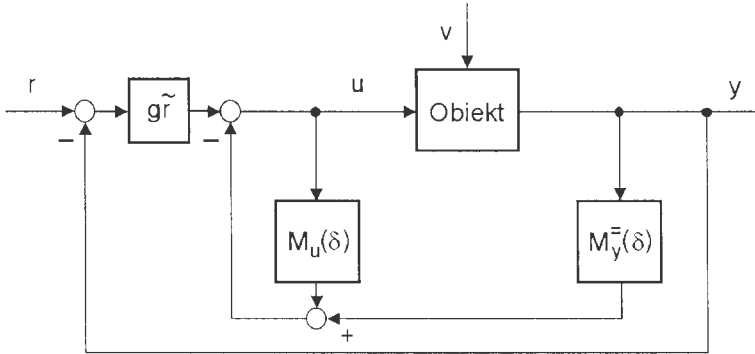
$$\bar{K}_{N_A, N_u}(\delta) = \Delta^{-N_A} \cdot \tilde{K}_{N_A, N_u}(\bar{\delta}) \Big|_{\bar{\delta} = \Delta \delta}$$

w którym $\tilde{k}_i = \Delta^{-(N_A - i)} \tilde{k}_{N_A, N_u}^i$, $0 \leq i \leq N_A$. Ten prototypowy wielomian jest czynnikiem wielomianu charakterystycznego układu zamkniętego: $T_0(\delta) = \bar{K}_{N_A, N_u}(\delta)$ (por. *podrozdział 2.3*). Wzmocnienie regulatora predykcyjnego $g = k_{N_A, N_u}^0 / \Delta^{N_A}$, zaś odpowiedni współczynnik skalujący $\tilde{r} = 1/b_0$.

Uwaga 3.3 (Suchomski i Kowalczyk [417]). Z *lematu 3.5* wynika, że prototypowe wielomiany $\hat{K}_{d, N_u}(p)$ (lub odpowiednio $\hat{K}_{N_A, N_u}(p)$) są wielomianami Hurwitza przy dostatecznie dużych wartościach rzędu predykcji sterowania N_u . Na tej podstawie wnioskujemy, że przy małym okresie próbkowania Δ zawsze jest możliwe ustabilizowanie zamkniętego układu sterowania predykcyjnego przez dobór stosownego rzędu N_u . Ponadto, z *lematu 3.3* wynika, że przy $\eta_1 = d$ stabilizację tego układu dla dowolnego okresu próbkowania Δ zapewnimy, przyjmując odpowiednio mały dalszy horyzont obserwacji $\eta \geq d$. W takim przypadku należy się jednak liczyć z dużymi wartościami sygnałów sterujących. Dyskusja problemu stabilności układów sterowania predykcyjnego będzie kontynuowana w dalszej części tego rozdziału. \square

Uwaga 3.4 (Suchomski i Kowalczyk [417]). Zmodyfikowany strukturalny schemat układu sterowania predykcyjnego, w którym zastosowano główną pętlę jednostkowego pozycyjnego sprzężenia zwrotnego pokazano na

rys. 3.4. W zależności od rozważanego przypadku: $M_y^-(\delta) = F^-(\delta)/C(\delta)$, gdzie $F^-(\delta) = \sum_{i=1}^{N_y} k_i F_i(\delta)$ lub $M_y^-(\delta) = \bar{F}^-(\delta)/C(\delta)$, gdzie $\bar{F}^-(\delta) = F^-(\delta) - \bar{k}_0 C(\delta)/b_0$. Dla obiektów z całkowaniem zachodzi: $L_i(0) = 0$, $F_i(0) = 0$, $\bar{L}_i(0) = 0$ oraz $\bar{F}_i(0) = 0$, $i \geq 1$, a zatem $F^-(0) = 0$ oraz $\bar{F}^-(0) = 0$, co oznacza różniczkujący charakter sprzężenia od wyjścia. \square



Rys. 3.4. Schemat układu sterowania predykcyjnego: implementacja z pętlą jednostkowego sprzężenia zwrotnego.

Synteza z uwzględnieniem kosztów sterowania

Algorytmy sterowania predykcyjnego rozważane do tej pory opierały się na kwadratowych wskaźnikach $J(u_{N_u}(t))$ oraz $\bar{J}(u_{N_u}(t))$, w których sygnał wielkości sterującej nie występował w sposób jawny. Uzasadnieniem takiego postępowania była chęć uzyskania analitycznych formuł opisujących parametry optymalnych regulatorów. Dostępność takich formuł znacznie bowiem ułatwia badanie podstawowych właściwości odpowiednich układów zamkniętych, w tym ich stabilności. W takiej sytuacji, przy ustalonej wartości rzędu predykcji sterowania N_u , jedynym prostym, i niejako 'bezpośrednim', sposobem oddziaływania na postać sygnału sterującego pozostaje kształtowanie statycznego wzmocnienia g regulatora predykcyjnego przez kompromisowy dobór horyzontu obserwacji T : przyspieszenie procesów przejściowych (otrzymywane dzięki zmniejszaniu wartości T) zawsze prowadzi do zwiększenia wysiłku sterowania. Okazuje się jednak, że przez pewną modyfikację kryteriów sterowania predykcyjnego łatwo uzyskuje się dogodną pośrednią możliwość wpływania na wielkość tego wysiłku, zachowując (do pewnego stopnia) walory analitycznego przepisu strojenia regulatorów. Modyfikacji tej dokonujemy, przyjmując: $J_\lambda(u_{N_u}(t)) = J(u_{N_u}(t)) + \lambda u^2(t)$ oraz

$\bar{J}_\lambda(u_{N_u}(t)) = \bar{J}(u_{N_u}(t)) + \bar{\lambda}u^2(t)$, gdzie $\lambda, \bar{\lambda} \geq 0$ są swobodnymi współczynnikami (Suchomski i Kowalczyk [417]). Minimalizacja tych wskaźników prowadzi do rozwiązań, które sprowadzają się do odpowiedniego skalowania uprzednio wyznaczonych wektorów wzmocnień (3.4) oraz (3.7):

$$k_{d+N_u}(\lambda) = \frac{k_{d+N_u}}{1 + \lambda h_d^{-2} \hat{x}_{d,N_u}}, \quad \bar{k}_{N_A+N_u}(\bar{\lambda}) = \frac{\bar{k}_{N_A+N_u}}{1 + \bar{\lambda} h_{N_A}^{-2} \hat{x}_{N_A,N_u}}$$

gdzie

$$(X_{m,N_u}^{22})^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{m,N_u} & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad m \in \{d, N_A\}.$$

Wyróżnione czynniki $T_0(\delta)$ charakterystycznego wielomianu układu zamkniętego przyjmują teraz postać: $B(\delta) \cdot K_{d,N_u}(\delta) + \lambda h_d^{-2} \hat{x}_{d,N_u} \cdot A(\delta)$ oraz $\bar{K}_{N_A,N_u}(\delta) + \bar{\lambda} h_{N_A}^{-2} \hat{x}_{N_A,N_u} \cdot A(\delta)$. Wynika stąd, że skutki postulowanego ograniczenia wysiłku sterowania ($\lambda, \bar{\lambda} > 0$) można interpretować w kategoriach pewnych addytywnych zaburzeń pierwotnych postaci tych czynników (czyli odpowiednich prototypowych wielomianów) przez stosowne składniki, będące ważonym mianownikiem nominalnego modelu sterowanego obiektu. Podobny efekt obserwuje się w przypadku bardziej złożonych modyfikacji podstawowej funkcji kryterialnej sterowania predycyjnego, w których bierze się pod uwagę kolejne δ -pochodne sygnału sterującego. Wpływ takich zaburzeń można łatwo ocenić, stosując do wypadkowego wielomianu $T_0(\delta)$ standardową metodę linii pierwiastkowych. W przypadku niestabilnych obiektów istnieje zatem górne ograniczenie na dopuszczalną wartość $\lambda, \bar{\lambda} \geq 0$. Z drugiej strony, dla obiektów stabilnych zawsze istnieje możliwość ustabilizowania układu zamkniętego przez przyjęcie dostatecznie 'dużych' wartości tych współczynników.

Uwaga 3.5 (Suchomski i Kowalczyk [417]). Inną możliwość racjonalnego kształtowania sygnału sterującego w rozważanym układzie sterowania predycyjnego daje prosta adaptacja metody antycypacyjnej filtracji uchybu. Ta skuteczna metoda, znana z dziedziny czasu dyskretnego (Kowalczyk i Suchomski [235, 236, 242, 245], Suchomski i Kowalczyk [418]) oraz ciągłego (Kowalczyk i Suchomski [243], Suchomski i Kowalczyk [416]), pozwala na ograniczenie wysiłku sterowania przez sformułowanie 'realistycznych' wymagań co do przyszłego przebiegu uchybu sterowania. Rozważmy przykładowy algorytm sterowania w oparciu o prognozę wyjścia obiektu. W tym celu zakładamy, że ewolucję przyszłego sygnału odniesienia można opisać (antycypować) formułą

$$\hat{r}(t) \Big|_{i=t+\tau} = y(t) + t_{0,N_y}^T(\tau) V_{N_y,N_y} \bar{r}_{N_y}(r(t) - y(t))$$

której drugi składnik interpretujemy jako odpowiedź pewnego liniowego filtru reprezentowanego przez wektor $\bar{r}_{N_y} \in \mathbb{R}^{N_y+1}$ na skokowe pobudzenie o amplitudzie wyznaczonej przez aktualną wartość uchybu sterowania (przyjęto tu $N_\delta = N_y$). Współrzędne wektora \bar{r}_{N_y} dobiera projektant, zaś wpływ opisanego mechanizmu ujawnia się jako odpowiednia modyfikacja wzmocnienia predykcyjnego regulatora, które ma teraz postać liniowej formy $g = k_{N_y}^T \bar{r}_{N_y}$. Przyjęcie jednostkowego wektora $\bar{r}_{N_y} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ jest równoważne 'wyłączeniu' takiej antycypacyjnej filtracji.

Założmy, że w chwili t znana jest przyszła trajektoria wielkości odniesienia, reprezentowana przez wektor $r_{N_y}(t) = d_{N_y}(r(t)) \in \mathbb{R}^{N_y+1}$ o współrzędnych zdeterminowanych bieżącą wartością $r(t)$ oraz wartościami kolejnych δ -pochodnych tego sygnału ($d_{N_y}(\cdot) = [\delta^0 \ \delta^1 \ \dots \ \delta^{N_y}]^T$). Definiując błąd jako $e(\hat{t}) = \hat{r}(\hat{t}) - \hat{y}(\hat{t})$, gdzie $\hat{r}(\hat{t})|_{\hat{t}=t+\tau} = t_{0,N_y}^T(\tau) V_{N_y,N_y} r_{N_y}(t)$, otrzymujemy zmodyfikowaną regułę sterowania $u(t) = -k_{N_y}^T y_{w,N_y}^0(t) + u_w(t)$, w której korygujący składnik $u_w(t) = [k_1 \ \dots \ k_{N_y}] [\delta r(t) \ \dots \ \delta^{N_y} r(t)]^T$ obrazuje wpływ dostępnej wiedzy o przyszłej wielkości odniesienia. \square

3.2.4 Właściwości układów sterowania predykcyjnego

Rozważmy cechy układów sterowania predykcyjnego, których algorytmy oparto na modelach wykorzystujących operator δ . Uwagę skupimy przede wszystkim na stabilności odpowiednich prototypowych wielomianów charakterystycznych, pytając także o możliwość uzyskania stabilnych rozwiązań prowadzących do układów, w których występują nominalne procesy przejściowe o minimalnym czasie trwania. W tym celu rozpatrzono dwa ważne przypadki bliższego względnego horyzontu obserwacji: $\eta_1 = 0$ oraz $\eta_1 = d$. Wykazano, że dla praktycznie istotnych nominalnych modeli o jednostkowym względnym rzędzie $d = 1$, zamkniętemu układowi sterowania zawsze można zapewnić nominalną stabilność, a ponadto przy $\eta_1 = 0$ możliwe jest uzyskanie układu o minimalnoczasowej odpowiedzi skokowej. Pokazano także, że w przypadku nominalnych modeli o względnym rzędzie $d \geq 2$ zera prototypowych wielomianów charakterystycznych odpowiadających bliższemu horyzontowi $\eta_1 = d$ mają bardziej 'regularne' cechy, niż zera wielomianów uzyskanych przy założeniu minimalnej wartości tego horyzontu $\eta_1 = 0$ (Suchomski i Kowalczyk [417]).

Dla $\eta_1 = 0$, mamy $\tilde{X}_m^{-1} = \eta^{-1} \cdot \tilde{V}_m^{-1} N_{0,m}^{-1}(\eta) (H_{0,m}^{0,m})^{-1} N_{0,m}^{-1}(\eta) (\tilde{V}_m^{-1})^T$. W dalszych rozważaniach wykorzystamy trójkątną strukturę macierzy \tilde{V}_m oraz fakt, że elementy $[\bar{h}_{i,j}^m]_{i,j=0}^m$ odwrotności macierzy $H_{0,m}^{0,m}$ są liczbami całkowitymi.

tymi

$$\bar{i}_{i,j}^m = \frac{(-1)^{j-i}}{(i+j+1)} \frac{(m+i+1)!(m+j+1)!}{(i!)^2(j!)^2(m-i)!(m-j)!}. \quad (3.8)$$

Zakładając, że obowiązuje podział macierzy $\tilde{X}_{d+N_u}^{-1}$ zgodny z podziałem X_{d+N_u} oraz \tilde{X}_{d-N_u}

$$\tilde{X}_{d+N_u}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{X}_{d,N_u}^{11} & \bar{X}_{d,N_u}^{12} \\ \bar{X}_{d,N_u}^{21} & \bar{X}_{d,N_u}^{22} \end{bmatrix}$$

stwierdzamy, że $\bar{X}_{d,N_u}^{21} = -(\bar{X}_{d,N_u}^{22})^{-1} \bar{X}_{d,N_u}^{21} (\bar{S}_{d,N_u}^{22})^{-1}$, gdzie $\bar{S}_{d,N_u}^{22} = \bar{X}_{d,N_u}^{11} - \bar{X}_{d,N_u}^{12} (\bar{X}_{d,N_u}^{22})^{-1} \bar{X}_{d,N_u}^{21}$ jest uzupełnieniem Schura podmacierzy \bar{X}_{d,N_u}^{22} . Ponieważ $\bar{X}_{d,N_u}^{11} = (\bar{S}_{d,N_u}^{22})^{-1}$, zatem $(\bar{X}_{d,N_u}^{22})^{-1} \bar{X}_{d,N_u}^{21} = -\bar{X}_{d,N_u}^{21} (\bar{X}_{d,N_u}^{11})^{-1}$. Na tej podstawie otrzymujemy dogodną reprezentację wektora \tilde{v}_{d,N_u}

$$\tilde{v}_{d,N_u}^T = -\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{N_u+1} \bar{X}_{d,N_u}^{21} (\bar{X}_{d,N_u}^{11})^{-1} \quad (3.9)$$

z której wynika, że wyznaczanie wartości współrzędnych tego wektora wymaga rozwiązania liniowego układu równań z macierzą \bar{X}_{d,N_u}^{11} oraz wektorem wyrazów wolnych określonym przez pierwszy wiersz macierzy X_{d,N_u}^{21} (Suchomski i Kowalczyk [417]).

Modele o względnym rzędzie $d = 1$

Ważną klasę dyskretnych modeli o względnym rzędzie $d = 1$ uzyskujemy, stosując podstawową metodę dyskretyzacji modeli czasu ciągłego (zob. *rozdział 1.* oraz *uwaga 2.8*).

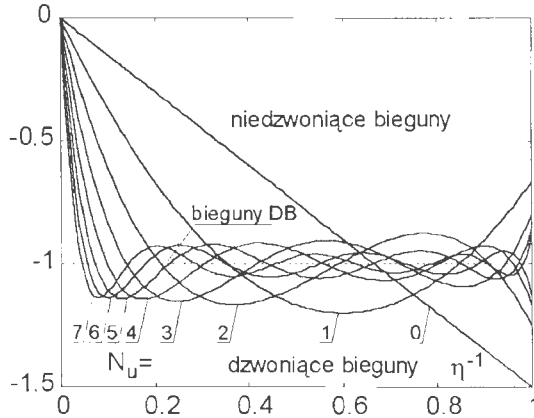
Synteza dla $\eta_1 = 0$. Niech $\tilde{X}_m^{-1} = [\bar{x}_{i,j}]_{i,j=1}^{m+1}$. Ze wzoru (3.9) otrzymujemy $\tilde{k}_{1,N_u}^0 = -\tilde{v}_{1,N_u}^0 = \bar{x}_{2,1}/\bar{x}_{1,1}$. Aby obliczyć $\bar{x}_{1,1}$ oraz $\bar{x}_{2,1}$, niezbędna jest znajomość wartości elementów tylko dwóch pierwszych wierszy macierzy \tilde{V}_m^{-1} . Biorąc po uwagę wzór (3.5), stwierdzamy, że

$$\tilde{V}_m^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & \frac{-1}{2!} & \cdots & \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

skąd wynika, iż $\bar{x}_{1,1} = \eta^{-1} \bar{h}_{0,0}^m$ oraz $\bar{x}_{2,1} = -\eta^{-1} \sum_{i=1}^{N_u+1} \bar{h}_{i,0}^m \eta^{-i}$. W oparciu o wzór (3.8) wnioskujemy, że

$$\tilde{k}_{1,N_u}^0(\eta) = \frac{\sum_{i=0}^{N_u} \frac{(-1)^{N_u-i} (2N_u-i+3)!}{(N_u-i+2)((N_u-i+1)!)^2} \eta^i}{(N_u+2)\eta^{N_u+1}}.$$

Jawną postać funkcji $\tilde{k}_{1,N_u}^0(\eta)$ dla początkowych wartości rzędu predykcji sterowania N_u można znaleźć w (Suchomski i Kowalczyk [417]). Zera prototypowych wielomianów $\tilde{K}_{1,N_u}(\bar{\delta}) = \tilde{k}_{1,N_u}^0 + \bar{\delta}$, $0 \leq N_u \leq 7$, jako funkcje zmiennej $\eta^{-1} \in [0, 1]$, przedstawiono na rys. 3.5 (obszary przyporządkowane 'dzwoniącym' oraz 'niedzwoniącym' biegunom odpowiedniego zamkniętego układu sterowania oddzielono prostą o rzędnej -1 wyznaczonej położeniem minimalnoczasowego bieguna). Jak łatwo zauważyć, wszystkie rozważane wielomiany są stabilne.

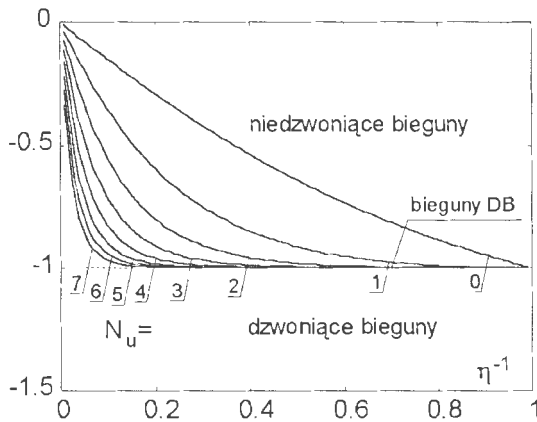


Rys. 3.5. Miejsca geometryczne zer wielomianów $\tilde{K}_{1,N_u}(\bar{\delta})$ dla $\eta_1 = 0$.

Uwaga 3.6 (Suchomski i Kowalczyk [417]). Każdemu rzędowi predykcji sterowania $N_u \geq 0$ przyporządkany jest zbiór $\{\hat{\eta}_{N_u}^i\}_{i=1}^{N_u+1} = \{\hat{\eta} : \tilde{k}_{1,N_u}^0(\hat{\eta}^{-1}) = 1\}$, którego elementami są odwrotności takich wartości dalszego względnego horyzontu obserwacji η , dla których $\tilde{K}_{1,N_u}(\bar{\delta})$ ma zero w punkcie -1 . Informacje o tak zdefiniowanych zbiorach znajdziemy w (Suchomski i Kowalczyk [417]). Na tej podstawie głosimy, że w przypadku, w którym $d = 1$ oraz $\eta_1 = 0$, dla zadanych parametrów Δ oraz N_u akceptowalną ('niedzwoniącą') wartością stabilnego bieguna funkcji przenoszenia układu zamkniętego można zawsze uzyskać przy dostatecznie odległym

dalszym horyzoncie obserwacji $T \geq \Delta/\hat{\eta}_{N_u}^1$, gdzie $\hat{\eta}_{N_u}^1$ jest najmniejszym elementem uporządkowanego zbioru $\{\hat{\eta}_{N_u}^i\}_{i=1}^{N_u+1}$. \square

Synteza dla $\eta_1 = d$. Jawną postać funkcji $\tilde{k}_{1,N_u}^0(\eta)$ dla początkowych wartości rzędu predykcji sterowania $N_u \geq 0$ podano w (Suchomski i Kowalczyk [417]). Wykresy pokazane na rys. 3.6 dotyczą zer wielomianów $\tilde{K}_{1,N_u}(\bar{\delta}) = \tilde{k}_{1,N_u}^0 + \bar{\delta}$, $0 \leq N_u \leq 7$, jako funkcji zmiennej $\eta^{-1} \in [0, 1]$. Wszystkie rozważane wielomiany są stabilne, zaś odpowiednie bieguny mają 'niedzwojący' charakter (minimalnoczasowy układ sterowania uzyskujemy tylko dla $\eta = \eta_1 = 1$).



Rys. 3.6. Miejsca geometryczne zer wielomianów $\tilde{K}_{1,N_u}(\bar{\delta})$ dla $\eta_1 = 1$.

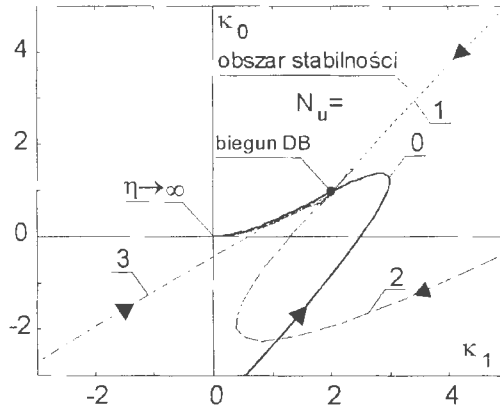
Porównując właściwości omawianych przypadków horyzontów $\eta_1 = 0$ oraz $\eta_1 = d$ ze względu na ich przydatność przy projektowaniu regulatorów, dochodzimy do wniosku, że prototypowe wielomiany przyporządkowane horyzontowi $\eta_1 = d$ mają korzystniejsze cechy: w odpowiadających im układach sterowania możemy spodziewać się aperiodycznych procesów przejściowych z monotoniczną zależnością czasu ich trwania od swobodnego parametru η .

Modele o względnym rzędzie $d \geq 2$

Modele o względnym rzędzie $d \geq 2$ można otrzymać, stosując identyfikację obiektu 'bezpośrednio' w dziedzinie czasu dyskretnego (Goodwin *et al.* [142], Kuznetsov [253], Lauritsen [263], Middleton i Goodwin [294], Rostgaard

et al. [342]), bądź też przez uproszczenie (obniżenie stopnia licznika) modelu wynikającego z dyskretyzacji odpowiedniego modelu czasu ciągłego tego obiektu.

Synteza dla $\eta_1 = 0$. Zaczniemy od przypadku $d = 2$. Jawne postacie funkcji $\tilde{n}_{2,N_u}^0(\eta)$, $\tilde{n}_{2,N_u}^1(\eta)$ oraz $\tilde{d}_{2,N_u}(\eta)$ opisujących współczynniki $\tilde{k}_{2,N_u}^0(\eta)$ oraz $\tilde{k}_{2,N_u}^1(\eta)$ wielomianów $\tilde{K}_{2,N_u}(\bar{\delta}) = \tilde{k}_{2,N_u}^0 + \tilde{k}_{2,N_u}^1 \bar{\delta} + \bar{\delta}^2$ podano w (Suchomski i Kowalczyk [417]). Rozważmy uprządkowane pary $(\kappa_1, \kappa_0) \in \mathbb{R}^2$. Na rys. 3.7 przedstawiono miejsca geometryczne takich par, którym przyporządkowane są stabilne wielomiany $\kappa_0 + \kappa_1 \bar{\delta} + \bar{\delta}^2$. Do wnętrza tego obszaru należy punkt (2, 1) odpowiadający podwójnemu minimalnoczasowemu (DB) biegunowi -1 układu zamkniętego. Przykładowe cztery skierowane krzywe $(\tilde{k}_{2,N_u}^1(\eta), \tilde{k}_{2,N_u}^0(\eta))$, $\eta \in [1, \infty)$, $N_u \leq 3$, pokazane na tym rysunku ilustrują właściwości badanych wielomianów $\tilde{K}_{2,N_u}(\bar{\delta})$. Wszystkie krzywe, zaczynając się na zewnątrz wyróżnionego obszaru, zbiegają do punktu (0, 0) należącego do jego brzegu. Na tej podstawie wnioskujemy, że zakładając dostatecznie odległy dalszy horyzont obserwacji η (a zatem rezygnując z wygórowanych wymagań co do szybkości procesów przejściowych), zawsze możemy zaprojektować układowi zapewnić stabilność.

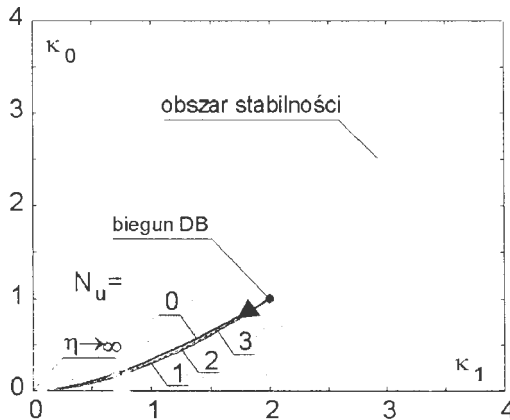


Rys. 3.7. Miejsca geometryczne zer wielomianów $\tilde{K}_{2,N_u}(\bar{\delta})$ dla $\eta_1 = 0$.

Zbadajmy teraz stabilność prototypowych wielomianów $\tilde{K}_{d,N_u}(\bar{\delta})$ w przypadku większych wartości parametru d . W tym celu definiujemy pomocniczy wskaźnik $\sigma_{d,N_u}^{\eta_1}(\eta^{-1})$, jako euklidesową odległość dzielącą punkt $(-1, 0)$ od najdalej oddalonego zera wielomianu $\tilde{K}_{d,N_u}(\bar{\delta})$ przy ustalonych horyzontach η_1 oraz η . Wielomian ten jest stabilny wtedy i tylko, gdy $\sigma_{d,N_u}^{\eta_1}(\eta^{-1}) \in [0, 1)$.

Przebiegi funkcji $\sigma_{d,N_u}^0(\eta^{-1})$, $1 \leq d \leq 6$, pokazano w (Suchomski i Kowalczyk [417]). Wreszcie, niech $\tilde{\eta}_{d,N_u}$ (dla założonych d oraz N_u) oznacza taką liczbę, że $\forall \eta > 1/\tilde{\eta}_{d,N_u}$ wielomian $\tilde{K}_{d,N_u}(\bar{\delta})$ przyporządkowany horyzontom $\eta_1 = 0$ oraz η jest wielomianem stabilnym. Wartości tego parametru, wyznaczające zakres skuteczności opisywanej metody parametryzacji algorytmu predykcyjnego, także podano w (Suchomski i Kowalczyk [417]).

Synteza dla $\eta_1 = d$. Zaczynamy od $d = 2$. Jawne postacie funkcji $\tilde{n}_{2,N_u}^0(\eta)$, $\tilde{n}_{2,N_u}^1(\eta)$ oraz $\tilde{d}_{2,N_u}(\eta)$ można znaleźć w (Suchomski i Kowalczyk [417]). Warto zwrócić uwagę, że funkcje te są bardziej złożone w porównaniu z ich odpowiednikami dla $\eta_1 = 0$. Na rys. 3.8 pokazano położenie skierowanych krzywych ($\tilde{k}_{2,N_u}^1(\eta)$, $\tilde{k}_{2,N_u}^0(\eta)$), $\eta \in [1, \infty)$, $N_u \leq 3$, względem obszaru stabilności zdefiniowanego dla współczynników $(\kappa_1, \kappa_0) \in \mathbb{R}^2$ wielomianu stopnia drugiego $\kappa_0 + \kappa_1 \bar{\delta} + \bar{\delta}^2$. Zwraca uwagę fakt, iż wszystkie krzywe, startując w punkcie $(2, 1)$ oraz zmierzając do punktu $(0, 0)$, zawierają się w obszarze stabilności. Przebieg funkcji $\sigma_{d,N_u}^d(\eta^{-1})$, $1 \leq d \leq 6$, badano w (Suchomski i Kowalczyk [417]). Niech $\underline{\eta}_{d,N_u}$ (przy ustalonych d oraz N_u) oznacza taką liczbę, że $\forall \eta$ spełniających nierówność $d \leq \eta < 1/\underline{\eta}_{d,N_u}$, wielomian $\tilde{K}_{d,N_u}(\bar{\delta})$ przyporządkowany horyzontom $\eta_1 = d$ oraz η jest wielomianem stabilnym. Wartości tego istotnego przy projektowaniu predykcyjnych regulatorów parametru także znajdziemy w cytowanej wyżej pracy.

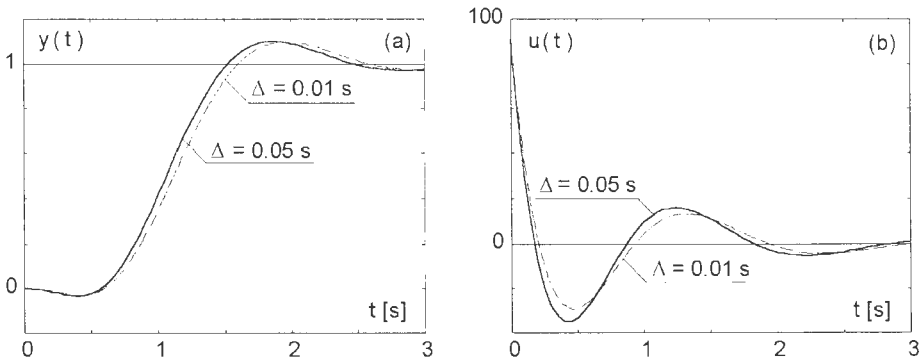


Rys. 3.8. Miejsca geometryczne zer wielomianów $\tilde{K}_{2,N_u}(\bar{\delta})$ dla $\eta_1 = 2$.

Przykład 3.2 (synteza dyskretnego regulatora predykcyjnego; Suchomski i Kowalczyk [417]). Rozważmy nominalny model pewnego niestabilnego i nieminimalnofazowego obiektu

$$\bar{P}_{\rho y u}(s) = \frac{1 - 0.2s}{s(1 + s)(1 + s^2)}.$$

Okresowi próbkowania $\Delta = 0.05$ s odpowiada nominalny model dyskretny $B(\delta) / A(\delta)$, przy czym $N_A = 4$ oraz $d = 1$. Pożądane cechy nominalnego zamkniętego układu sterowania opisane są specyfikacjami dotyczącymi jego skokowej odpowiedzi oraz sterowania dla takiego pobudzenia: $\kappa \leq 0.10$, $T_{s5\%} \leq 2.5$ s oraz $u_{\max} \leq 100$. Charakterystyki prototypowego modelu w czasie ciągłym $\hat{k}_{N_A, N_u}^0 / \hat{K}_{N_A, N_u}(p)$ przedstawiono w tabeli 3.1. Na tej podstawie wnioskujemy, że wystarczy przyjąć $N_u = 2$, zachodzi bowiem $\hat{\kappa}(N_A, N_u) = 0.0839 < 0.10$. Zatem $N_y = N_A + N_u = 6$. Dalszy horyzont obserwacji T powinien spełniać nierówność $T \leq T_{s5\%} / \hat{T}_{s5\%}(N_A, N_u) = 2.453$ s. Kolejne ograniczenie na ten parametr otrzymamy, rozważając wymaganie nałożone na sterowanie $u(0) = g\tilde{r} = \tilde{k}_0/b_0 = \tilde{k}_{N_A, N_u}^0 / (T_s^{N_A} b_0) = \tilde{k}_{N_A, N_u}^0 \eta^{N_A} / (T^{N_A} b_0) \approx \hat{k}_{N_A, N_u}^0 / (T^{N_A} b_0)$, co prowadzi do nierówności $T \geq (\hat{k}_{N_A, N_u}^0 / (u(0) b_0))^{1/N_A} = 2.042$ s. Kładąc $T = 2.1$ s (a zatem $\eta = 42$) oraz $\eta_1 = N_A = 4$, otrzymujemy: $\tilde{K}_{N_A, N_u}(\bar{\delta}) = 0.000552 + 0.010247\bar{\delta} + 0.087209\bar{\delta}^2 + 0.416762\bar{\delta}^3 + \bar{\delta}^4$ oraz $\tilde{K}_{N_A, N_u}(\delta) = 88.317527 + 81.979182\delta + 34.883672\delta^2 + 8.335236\delta^3 + \delta^4$. Wzmocnienie regulatora wynosi $g = 88.318$. Przykładowemu wielomianowi $C(\delta) = (1 + 0.25\delta)^3$ przyporządkowane są liczniki filtrów tego regulatora: $\bar{F}(\delta) = 90.562729 + 145.085321\delta + 112.194574\delta^2 + 45.225759\delta^3$ oraz $\bar{G}(\delta) = 17.201452 + 2.165330\delta + 0.117704\delta^2$. Ponadto: $u(0) = 90.563 < 100$.



Rys. 3.9. Przykład 3.2. Charakterystyki dyskretnego układu sterowania predykcyjnego: a) odpowiedź skokowa, b) sygnał sterujący.

Rozważmy właściwości układu zaprojektowanego dla innego okresu próbkowania $\Delta = 0.01$ s. Dla $\eta_1 = N_A = 4$ oraz niezmienniczej wartości $T = 2.1$ s (teraz $\eta = 210$), mamy: $\tilde{K}_{N_A, N_u}(\bar{\delta}) = 0.000000875 + 0.00007748\bar{\delta} + 0.0032617\bar{\delta}^2 + 0.0794967\bar{\delta}^3 + \bar{\delta}^4$, $\bar{K}_{N_A, N_u}(\delta) = 87.530286 + 77.484975\delta + 32.617107\delta^2 + 7.949673\delta^3 + \delta^4$ oraz $g = 87.530$. Zachowując poprzedni wielomian $C(\delta)$, otrzymujemy: $\bar{F}(\delta) = 87.969400 + 139.986221\delta + 110.780823\delta^2 + 46.115721\delta^3$ oraz $\bar{G}(\delta) = 19.138130 + 1.776309\delta + 0.108662\delta^2$. Układ zamknięty można ocenić na podstawie charakterystyk danych na rys. 3.9. Warto też podkreślić względną niezależność nastaw regulatora od wartości okresu próbkowania Δ . \square

3.2.5 Sterowanie predykcyjne w czasie ciągłym: obiekty z opóźnieniem

Wyniki wcześniej uzyskane w tym rozdziale znajdują zastosowanie przy rozwiązywaniu zadania predykcyjnego sterowania obiektem, którego nominalny model zawiera transportowe opóźnienie w kanale sterowania $U \rightarrow Y$. Rozważa się trzy podejścia: jedno ścisłe oraz dwa przybliżone. W podejściu ścisłym (*DpCGPC*) w torze regulatora przekształcającym sygnał podawany na obiekt (sterowanie) występuje człon opóźniający o nominalnym opóźnieniu. Dzięki takiej złożonej strukturze regulatora można w sposób 'bezpośredni' wykorzystać właściwości prototypowych układów *CGPC* ustalone dla obiektów bez opóźnienia, co znakomicie ułatwia analizę stabilności układu zamkniętego oraz czyni procedurę projektowania w pełni analityczną. Takie podejście można jednak stosować tylko do obiektów stabilnych, przy czym nie występują tu żadne ograniczenia na wielkość opóźnienia. W pierwszym z przybliżonych algorytmów projektowania (*DsCGPC*) przyjmujemy założenie, zgodnie z którym prognozowany przebieg przyszłego wyjścia obiektu wyznacza się dla zerowej wartości odpowiedniego korekcyjnego członu regulatora. Dzięki temu osiąga się uproszczenie struktury tego regulatora oraz przestaje obowiązywać wymóg stabilności sterowanego obiektu. Podejście to jest jednak skuteczne tylko w przypadku obiektów o dostatecznie małym opóźnieniu. W drugim przybliżonym algorytmie predykcyjnym (*DaCGPC*) wykorzystuje się odpowiednio zmodyfikowany wymierny model sterowanego obiektu. W tym celu stosuje się aproksymację Padé członu opóźniającego, co prowadzi do regulatora o wymiernej postaci.

Rozważmy obiekt opisany nominalnym modelem

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \cdot e^{-T_0 s} U(s) + \frac{C(s)}{A(s)} \cdot V(s), \quad T_0 \geq 0$$

w którym $\deg A(s) = N_A$, $\deg C(s) = N_A - 1$ oraz $d = \deg A(s) - \deg B(s) > 0$. Niech $Y_{i,T_0}^*(s) = e^{T_0 s} Y_i^*(s)$, gdzie $Y_i^*(s)$ oznacza transformatę Laplace'a przewidywalnego składnika i -tej pochodnej $y_i(t) = d^i y(t)/dt^i$, $\forall i \geq 0$, sygnału wyjścia tego obiektu. Mamy zatem $Y_i(s) = s^i \cdot Y(s) = Y_i^*(s) + V_i^+(s)$, przy czym

$$Y_i^*(s) = \frac{B(s) \cdot E_i(s)}{C(s)} \cdot e^{-T_0 s} U(s) + \frac{F_i(s)}{C(s)} \cdot Y(s)$$

oraz $V_i^+(s) = L_i(s) \cdot V(s)$. Wielomiany $E_i(s)$ oraz $F_i(s)$, $\forall i \geq 0$, uzyskujemy w oparciu o pierwszą diofantyczną bazę zdefiniowaną dla zmiennej s . Postępując analogicznie jak w przypadku sterowania w czasie dyskretnym, w sygnale $Y_i^*(s)$ wyróżniamy dwa składniki: składnik 'obserwatorowy'

$$Y_i^-(s) = \frac{G_i(s)}{C(s)} \cdot e^{-T_0 s} U(s) + \frac{F_i(s)}{C(s)} \cdot Y(s)$$

oraz składnik 'predyktorowy' $Y_{i,T_0}^+(s) = H_i(s) \cdot e^{-T_0 s} U(s)$, przy czym potrzebne wielomiany $G_i(s)$ oraz $H_i(s)$ wyznacza się w oparciu o pierwszą diofantyczną bazę. Mamy zatem

$$Y_{i,T_0}^*(s) = \frac{G_i(s)}{C(s)} \cdot U(s) + \frac{F_i(s)}{C(s)} \cdot Y_{0,T_0}^*(s) + Y_i^+(s)$$

gdzie

$$Y_{0,T_0}^*(s) = e^{T_0 s} Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \cdot U(s) + \frac{C(s)}{A(s)} \cdot e^{T_0 s} V(s)$$

oraz $Y_i^+(s) = H_i(s) \cdot U(s)$. Zakładając prosty sposób prognozowania przyszłych zakłóceń ($e^{T_0 s} V(s) \approx V(s)$), otrzymujemy realizowalne (przyczynowe) przybliżenie $\hat{Y}_{0,T_0}^*(s)$ wielkości $Y_{0,T_0}^*(s)$

$$\hat{Y}_{0,T_0}^*(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \cdot U(s) + \frac{C(s)}{A(s)} \cdot V(s) = Y(s) + \frac{B(s)}{A(s)} \cdot (1 - e^{-T_0 s}) \cdot U(s).$$

Na tej podstawie wyznaczamy następujące oszacowanie $\hat{Y}_{i,T_0}^*(s) = \hat{Y}_{i,T_0}^-(s) + Y_i^+(s)$ wielkości $Y_{i,T_0}^*(s)$, przy czym

$$\hat{Y}_{i,T_0}^-(s) = \left[\frac{G_i(s)}{C(s)} + \frac{F_i(s)}{C(s)} \cdot \frac{B(s)}{A(s)} \cdot (1 - e^{-T_0 s}) \right] \cdot U(s) + \frac{F_i(s)}{C(s)} \cdot Y(s).$$

Rozważając kwadratową funkcję celu $\int_{T_1}^{T_2} e^2(t + T_0 + \tau) d\tau + \lambda \int_{T_3}^{T_4} u^2(t + \tau) d\tau$, $\lambda \geq 0$, której pierwszy składnik zdefiniowano dla odpowiednio odchyłonego

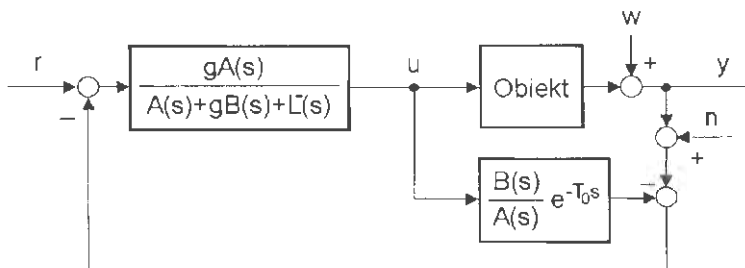
argumentu stosownej funkcji błędu, otrzymujemy regułę predykcyjnego sterowania w układzie zamkniętym: $U(s) = g(R(s) - Y(s)) - M_u(s) \cdot U(s) - M_y^-(s) \cdot Y(s)$, gdzie (Kowalczyk i Suchomski [241, 242])

$$M_u(s) = \frac{G(s)}{C(s)} + \left(g + \frac{F(s)}{C(s)} \right) \cdot \frac{B(s)}{A(s)} \cdot (1 - e^{-T_0 s}), \quad M_y(s) = \frac{F^-(s)}{C(s)}$$

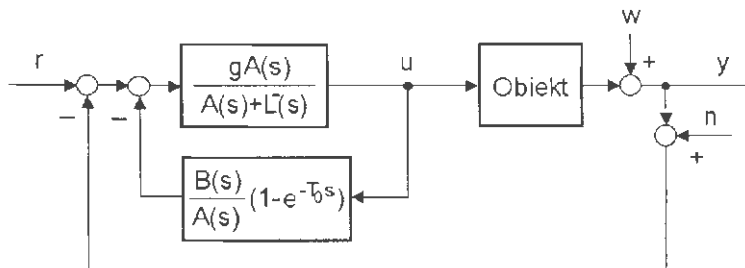
zaś $G(s) = \sum_{i=0}^{N_y} k_i G_i(s)$ oraz $F^-(s) = \sum_{i=1}^{N_y} k_i F_i(s)$, przy czym $\deg G(s) = N_A - 2$ oraz $\deg F^-(s) = N_A - 1$. Wzmocnienie omawianego regulatora ma postać formy liniowej $g = k_{N_y}^T r_{N_y}$, w której wektor $k_{N_y} \in \mathbb{R}^{N_y+1}$ utworzono z elementów pierwszego wiersza macierzy $(H_{N_y, N_u}^T T_{0, N_y}^{0, N_y}(T_1, T_2) H_{N_y, N_u} + \lambda T_{0, N_u}^{0, N_u}(T_3, T_4))^{-1} H_{N_y, N_u}^T T_{0, N_y}^{0, N_y}(T_1, T_2) \in \mathbb{R}^{(N_u+1) \times (N_y+1)}$, zaś współrzędne wektora $\bar{r}_{N_y} \in \mathbb{R}^{N_y+1}$ są kolejnymi współczynnikami Markowa antycypacyjnego filtru. Podobnie jak w przypadku sterowania w czasie dyskretnym, przyjęcie $\bar{r}_{N_y} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ oznacza, że rezygnujemy z antycypacyjnej filtracji, biorąc $g = k_0$. W opisywanym algorytmie zwraca uwagę niewymierny składnik wejściowego filtru $M_u(s)$ kompensujący wpływ opóźnienia T_0 . Podkreślenia wymaga także fakt, że wielomiany $G(s)$ oraz $F^-(s)$ nie zależą od wartości tego opóźnienia i są wyznaczane w standardowy sposób. Obowiązuje teraz równość $A(s) \cdot G(s) + B(s) \cdot F^-(s) = C(s) \cdot L^-(s)$, gdzie $L^-(s) = \sum_{i=1}^{N_y} k_i L_i(s)$ oraz $\deg L^-(s) = N_A - 1$. Kładąc $g = k_0$, $N_y = d + N_u$, $\lambda = 0$, $T_1 = 0$ oraz $T_2 = T$, zapewniamy, że $gB(s) + L^-(s) = L(s)$ oraz $A(s) + L(s) = B(s) \cdot K_{d, N_u}(s)$, gdzie $K_{d, N_u}(s)$ jest odpowiednim prototypowym wielomianem zależnym tylko od parametrów d , N_u oraz dalszego horyzontu obserwacji T . Opisane postępowanie służy zatem zapewnieniu nominalnej stabilności oraz nominalnej jakości. W podobny sposób, korzystając z drugiej diofantycznej bazy zdefiniowanej dla operatora s , uzyskujemy dogodną możliwość syntezy algorytmu predykcyjnej regulacji w przypadku obiektów, których modele zawierają wielomiany $B(s)$ z nieminimalnofazowymi zerami. Wszystkie mechanizmy omówione w rozdziale 2., czyniące układ sterowania odpornym, także mogą tu być stosowane.

Uwaga 3.7 (Kowalczyk i Suchomski [241]). Stabilność sterowanego obiektu jest koniecznym warunkiem wewnętrznej stabilności rozważanego predykcyjnego układu sterowania, w którym realizuje się postulat pełnej kompensacji opóźnienia $T_0 > 0$ obecnego w modelu obiektu (por. także dany dalej przykład 3.3). Jest to znany warunek obowiązujący dla układów sterowania o strukturze z wewnętrznym modelem obiektu (IMC) oraz układów opartych na schemacie predyktora Smitha (SP) (Braatz [42], Garcia i Morari

[127], Górecki [147], Morari i Zafriou [297], Palmor [314], Smith [364]). Odpowiednie schematy takiej alternatywnej realizacji predykcyjnego algorytmu przedstawiono na rys. 3.10 oraz 3.11. Ponieważ wzmacnienie g oraz wielomian $L^-(s)$ nie zależą od $C(s)$, zatem regulatory zbudowane na schematach *IMC* oraz *SP* są strukturalnie uboższe w stosunku do podstawowego algorytmu predykcyjnego regulatora, którego postać stwarza dodatkowe możliwości kształtowania pożądanych cech układu zamkniętego, w tym zwiększonej odporności oraz zdolności tłumienia wpływu zakłóceń (Kowalczyk i Suchomski [241, 242]). Badania odporności klasycznych układów regulacji o schematach *IMC* oraz *SP* opisano w (Hocken *et al.* [181], Laughlin *et al.* [261], Laughlin *et al.* [262], Romagnoli *et al.* [338], Wang i Skogestad [458]). Nowoczesne ujęcie szerszego zagadnienia odpornej stabilności układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami przedstawiono w (Bustowicz [51]). □



Rys. 3.10. Układ sterowania predykcyjnego: struktura z wewnętrznym modelem (*IMC*).



Rys. 3.11. Układ sterowania predykcyjnego: struktura predyktora Smitha (*SP*).

Rozważmy przybliżone metody syntezy predykcyjnego regulatora, w których nie obowiązuje założenie o stabilności sterowanego obiektu z opóźnie-

niem. Podstawowym problemem jest teraz zapewnienie układowi zamkniętemu nominalnej stabilności (w przypadku wyżej omówionej ścisłej metody stabilność wynika z właściwości odpowiedniego prototypowego wielomianu). Najprostsze ('sztywne', *Ds-CGPC*; Kowalczuk i Suchomski [241]) rozwiązanie sprowadza się do przyjęcia założenia, że $Y_{0,T_0}^*(s) \approx Y(s)$, co wiedzie do formuły sterowania, w której $M_u(s) = G(s)/C(s)$. Jest przeto oczywistym, że takie podejście można stosować tylko dla 'małych' opóźnień T_0 . Tak uzyskany układ zamknięty z prostym wymiernym regulatorem odpowiednio niskiego rzędu charakteryzuje się jednak z reguły niską nominalną jakością oraz koniecznie wymaga dodatkowej korekcji zwiększającej odporność. W dalszych rozważaniach skupimy się zatem na podejściu, w którym wykorzystuje się pewne wymierne przybliżenia członu e^{-T_0s} w celu pozyskania zmodyfikowanego nominalnego modelu sterowanego obiektu. Model taki stanowi podstawę syntezy algorytmu regulatora predykcyjnego o odpowiednio podwyższonym rzędzie wejściowego wymiernego filtra. Taki sposób postępowania istotnie poprawia nominalną jakość sterowania, w ogólności także wymaga jednak stosownej korekcji zwiększającej odporność. Konieczność takiej korekcji trudno wszakże traktować jako wadę algorytmu, gdyż w praktycznych warunkach sterowania obiektem o niepewnym modelu korekcyjne mechanizmy (Q -parametry) zawsze powinny być używane. Chętnie stosowanym wymiernym przybliżeniem członu opóźniającego e^{-T_0s} są funkcje Padé $P_{m,n}(s, T_0) = N_m(s, T_0)/D_n(s, T_0)$, w których $N_m(s, T_0)$ oraz $D_n(s, T_0)$ oznaczają wielomiany stopnia odpowiednio m oraz n , dobrane w taki sposób, aby $e^{-T_0s} - P_{m,n}(s, T_0) = \mathcal{O}(s^{m+n+1})$. Najczęściej korzysta się z 'symetrycznych' funkcji Padé, dla których $m = n$ (Baker [17], Baker *et al.* [18]). Rozważając zmodyfikowany model nominalny

$$Y(s) = \frac{B(s) \cdot N_n(s, T_0)}{A(s) \cdot D_n(s, T_0)} \cdot U(s) + \frac{C(s) \cdot D_n(s, T_0)}{A(s) \cdot D_n(s, T_0)} \cdot V(s)$$

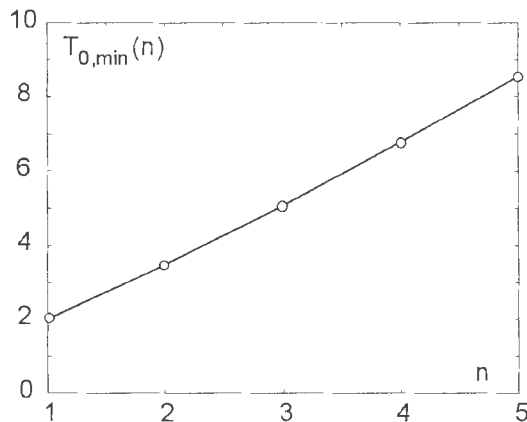
w którym opis toru zakłóceń nie uległ zmianie, otrzymujemy odpowiedni wymierny algorytm sterowania (*Da-CGPC*; Kowalczuk i Suchomski [241]):

$$M_u(s) = \frac{G(s)}{C(s) \cdot D_n(s, T_0)}, \quad M_y^-(s) = \frac{F^-(s)}{C(s)}$$

przy czym $\deg G(s) = N_A + n - 2$, zaś $\deg F^-(s) = N_A - 1$.

Na zakończenie zbadajmy promień zbieżności szeregu Laurenta funkcji Padé $P_{n,n}(s, T_0)$. Niech $\mathcal{P}_n^0 = \{\sigma \in \mathbb{C} : D_n(\sigma, 1) = 0\}$ oraz $\sigma_{n,\max} = \arg \max_{\sigma \in \mathcal{P}_n^0} |\sigma|$. Dla $T_{0,\min}(n) = |\sigma_{n,\max}|$ wyznaczamy kres dolny zbioru wartości opóźnień T_0 , dla których bieguny funkcji $P_{n,n}(s, T_0)$ leżą we wnętrzu

jednostkowego okręgu. Jak łatwo pokazać, $T_{0,\min}(1) = 2$ oraz $T_{0,\min}(2) = 2\sqrt{3}$. Wartości $T_{0,\min}(n)$ dla $n \leq 5$ zilustrowano na rys. 3.12. Tak zdefiniowana wielkość $T_{0,\min}(n)$ jest dolnym kresem zbioru wartości opóźnień, dla których odpowiednie funkcje aproksymujące charakteryzują się pożądanymi numerycznymi cechami (por. *podrozdział 2.2*). Mamy tu zatem do czynienia z sytuacją, w której dążąc do zapewnienia projektowanemu układowi wysokiej nominalnej jakości, co zamierzamy osiągnąć przez zwiększanie rzędu aproksymującej funkcji $P_{n,n}(s, T_0)$, możemy napotkać ograniczenie wynikające z właściwości parametrów Markowa takiej funkcji. Prosty rekurencyjny algorytm wyznaczania parametrów Markowa symetrycznych funkcji Padé przedstawiono w (Kowalczyk i Suchomski [242]).



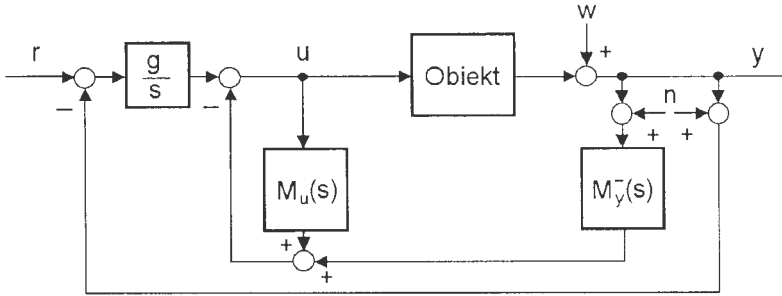
Rys. 3.12. Promień zbieżności szeregów Laurenta funkcji Padé $P_{n,n}(s, T_0)$.

Przykład 3.3 (synteza ciągłego regulatora predykcyjnego (II); Kowalczyk i Suchomski [241]). Na rys. 3.13 pokazano schemat badanego układu zamkniętego z całkowaniem pozytywnego uchybu regulacji. Zakładamy, że tor sterowania obiektu opisany jest formułą $A(s) \cdot Y(s) = B(s)e^{-T_0 s} \cdot U(s)$, przy czym $\deg A(s) = N_A$.

Przyjęcie następującego nominalnego modelu pomocniczego obiektu

$$Y(s) = \frac{B(s) \cdot e^{-T_0 s}}{s \cdot A(s)} \cdot U(s) + \frac{C(s)}{s \cdot A(s)} \cdot V(s), \quad \deg C(s) = N_A$$

umożliwia łatwe wykorzystanie uprzednio opracowanych algorytmów predyk-

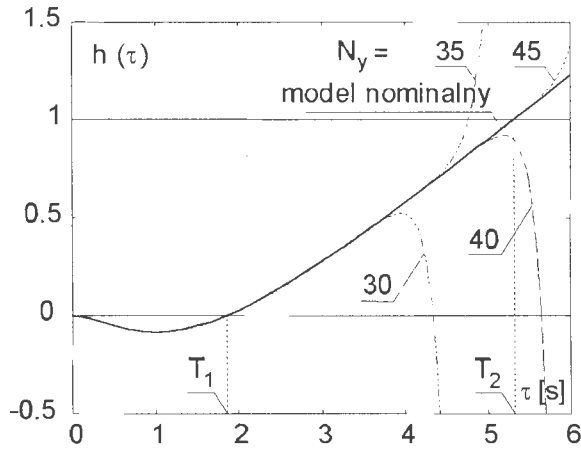


Rys. 3.13. Przykład 3.3. Schemat układu z całkowaniem uchybu regulacji.

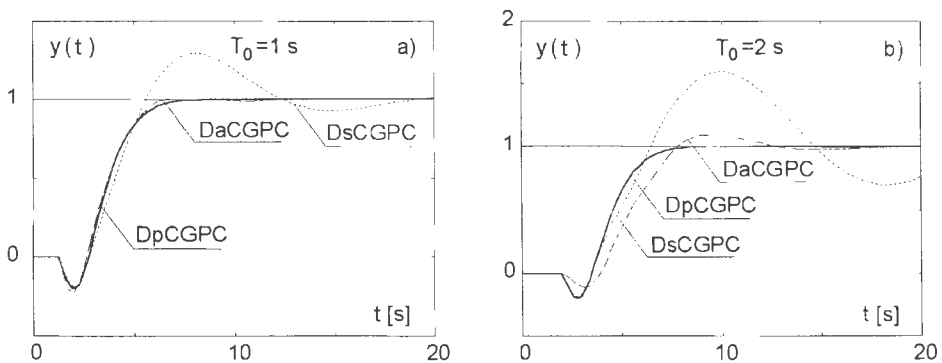
cyjnego sterowania. Na tej podstawie otrzymujemy:

$$M_u(s) = \frac{G(s)}{C(s)} + \left(g + \frac{F^-(s)}{C(s)} \right) \cdot \frac{B(s)}{s \cdot A(s)} \cdot (1 - e^{-T_0 s}), \quad M_y^-(s) = \frac{F'^-(s)}{C(s)}$$

przy czym $\deg G(s) = N_A - 1$ oraz $F^-(s) = s \cdot F'^-(s)$, gdzie $\deg F'^-(s) = N_A - 1$. Niech $A(s) = (1 + s)(3 + s)$ oraz $B(s) = 1 - s$, zaś $C(s) = (1 + \alpha s)^2$, gdzie $\alpha > 0$ jest swobodnym parametrem. Nastawy predykcyjnego regulatora dobrano na podstawie markowskiego przybliżenia $h(\tau)$ początkowego fragmentu nieopóźnionej skokowej odpowiedzi (rys. 3.14) pomocniczego członu dynamicznego opisanego funkcją przenoszenia $B(s)/(s \cdot A(s))$ (zob. Kowalczyk *et al.* [234]). Tak postępując, wyznaczono $N_u = 1$, $N_y = 45$, $T_1 = 1.876$ s oraz $T_2 = 5.319$ s, co przy $\lambda = 0$ oraz jednobiegunowym antycypacyjnym filtrze $1/(1 + 0.75s)$ prowadzi do predykcyjnego regulatora o wzmacnieniu $g = 3.8286$. Zwraca uwagę względnie duża wartość rzędu predykcji wyjścia N_y niezbędna przy stosowaniu nieanalitycznej metody strojenia regulatora – co wynika z faktu, że wielomian $A(s)$ ma pierwiastek $p = -3 < -1$, a zatem $|p| > 1$. Podkreślamy, że opisany fragment projektu nie zależy od wartości opóźnienia T_0 . Na rys. 3.15 pokazano skokowe odpowiedzi zamkniętych układów regulacji dla różnych wartości tego parametru modelu obiektu. W (Kowalczyk i Suchomski [241, 242]) przedstawiono szczegółową analizę właściwości rozważanych układów sterowania predykcyjnego. Badania dotyczyły także wpływu parametru α wielomianu $C(s)$ na wybrane właściwości układu zamkniętego, w tym na jego odporność (zob. także Freudenberg i Looze [118]).



Rys. 3.14. Przykład 3.3. Ilustracja numerycznej metody strojenia predykcyjnego regulatora.



Rys. 3.15. Przykład 3.3. Odpowiedzi skokowe nominalnych układów sterowania predykcyjnego: a) $T_0 = 1$ s, b) $T_0 = 2$ s.

Zakończenie

Praca dotyczyła problemów syntezy algorytmów odpornego sterowania w czasie dyskretnym. Próbując wskazać najważniejsze przyczynki, które zdaniem autora wnosi niniejsza praca, należałoby – konsekwentnie wiążąc poniższe sformułowania z przyjętym sposobem modelowania sterowanych obiektów opartym na operatorze δ – wymienić co następuje.

- (1) Opracowano analityczne formuły nastawiania korektorów Youli–Kučery o niskim rzędzie, służące zapewnieniu odpornej stabilności oraz odpornego zachowania się nominalnie stabilnych układów sterowania wyznaczonych zgodnie z metodą rozmieszczania biegunów oraz układów sterowania predykcyjnego. Zdefiniowano dwie rodziny diofantycznych równań niezbędnych przy rozwiązywaniu zadań syntezy algorytmów sterowania na podstawie zasady rozmieszczania biegunów.
- (2) Podano oszacowanie wstecznego oraz względnego błędu rozwiązania problemu rozmieszczania biegunów dla ściśle strukturalizowalnych zaburzeń liniowego zadania wynikającego z odpowiednich równań diofantycznych.
- (3) Przedstawiono numerycznie stabilną metodę oceny stopnia największego wspólnego dzielnika wielomianów dyskretnego modelu sterowanego obiektu.
- (4) Opracowano metodę strojenia algorytmów predykcyjnego sterowania, mającą postać analitycznych formuł wywiedzionych z właściwości odpowiednio sparametryzowanych rodzin prototypowych wielomianów.
- (5) Badając wrażliwość rozwiązań dyskretnych równań Riccatiego oraz dyskretnych równań Lapunowa na zaburzenia odpowiednich macierzowych pęków, wykazano, że w przypadku nieosobliwych zadań przy dostatecznie małej wartości okresu próbkowania równania przyporządkowane standardowemu operatorowi przesunięcia q charakteryzują się istotnie

gorszym uwarunkowaniem w stosunku do równań wynikających z zastosowania operatora δ . Ujawniono także istnienie klasy osobliwych zadań, dla których taka przewaga modeli związanych z operatorem δ nie występuje.

- (6) Dla typowych struktur algorytmów optymalnego sterowania pokazano w jaki sposób, wykorzystując odpowiednio zdefiniowane równania Lapunowa, wyznaczyć zakres niestrukturalizowalnych zaburzeń nominalnego modelu sterowanego obiektu, dopuszczalnych ze względu na stabilność układu zamkniętego.
- (7) Zbadano właściwości J –bezstratnych stabilizujących koniugatorów.
- (8) Sformułowano konieczne i wystarczające warunki istnienia różnych J –bezstratnych faktoryzacji modeli (macierzy) rozproszenia, w tym także uogólnionych J –bezstratnych faktoryzacji macierzy, które mają zera należące do $\partial\mathcal{D}_\Delta$. Szczegółowo przeanalizowano właściwości czynników takich faktoryzacji.
- (9) Ukazano podstawowe strukturalne cechy szerokiej klasy optymalnych algorytmów sterowania, które uzyskuje się, biorąc pod uwagę zalecenia wynikające z teorii przestrzeni \mathcal{H}_∞ . Podano wystarczające warunki istnienia wymiernych rozwiązań o ściśle właściwej postaci, a także zwrócono uwagę na ograniczony zakres ich stosowalności.
- (10) Omówiono szereg algorytmów odpornego sterowania oraz estymacji stanu, w tym ogólną postać algorytmu wyprowadzonego z metody rozmieszczania biegunów.

Rozdział 6., poświęcony problemom syntezy liniowych układów optymalnych ze względu na normę \mathcal{H}_∞ , stanowi merytorycznie najistotniejszą część pracy. Łatwo wszakże zauważyć, że motyw kształtowania charakterystyk układów dynamicznych (sterowania oraz estymacji) w oparciu o wskazania formułowane z wykorzystaniem normy \mathcal{H}_∞ wielokrotnie pojawiał się także w innych miejscach tej pracy.

Problemy oraz zadania tu podjęte nie wypełniają całości obszaru zasługującego na penetrację. Jeden z rozpoczętych i interesujących wątków wiąże się z pytaniem o możliwość zbudowania numerycznie stabilnego algorytmu syntezy regulatora według normy \mathcal{H}_∞ na podstawie rozszerzonego modelu danego obiektu. Okazuje się, że w przypadku takich modeli, badając konieczne i wystarczające warunki istnienia odpowiednich J –bezstratnych faktoryzacji, a także definiując dodatkowe strukturalne wymagania nakładane

na unimodularne czynniki tych faktoryzacji, po raz kolejny przekonujemy się o korzyściach, jakie daje reprezentacja rozważanych równań Riccatiego w postaci stosownych macierzowych pęków (Suchomski [412]). Inny problem, o którym tylko wspomniano w toku prowadzonych rozważań, dotyczy algorytmów syntezy odpornych adaptacyjnych układów sterowania z Q -parametrami zmieniającymi się w czasie (Suchomski [411]).

Na zakończenie warto jeszcze wymienić dwa tematy, które będąc rozwinięciem problematyki poruszonej w niniejszej pracy, stanowią o aktualnych fascynacjach jej autora. Są to problemy syntezy numerycznie odpornych algorytmów sterowania nieliniowymi obiektami o nieskończeniowym wymiarowym modelach oraz zagadnienia związane z adekwatnym modelowaniem w czasie dyskretnym niepewności charakterystyk obiektów opisanych różniczkowymi inkluzjami.

Literatura

- [1] J. Abels, P. Benner: CAREX (DAREX) - a collection of benchmark examples for continuous-time (discrete-time) Riccati equations, *SLICOT Working Note*, 1999, 14 (16), Katholieke Univ., Leuven, Belgium.
- [2] A. Albert: Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudo inverses, *SIAM Journ. Applied Math.*, 1969, 17 (2), 434-440.
- [3] B.D.O. Anderson: From Youla-Kučera to identification, adaptive and nonlinear control, *Automatica*, 1998, 34 (12), 1485-1506.
- [4] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammerling, A. McKenny, D. Sorensen: *LAPACK users' guide*, SIAM, Philadelphia, PA, 1999.
- [5] B.D.O. Anderson, J.B. Moore: *Optimal control. Linear quadratic methods*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1990.
- [6] P. Ansay, V. Wertz: Model uncertainties in GPC: a systematic two-step design, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, FR-A-B-3.
- [7] P. Ansay, M. Gevers, V. Wertz: Enhancing the robustness of GPC via a simple choice of the Youla parameter, *European Journ. Control*, 1998, 4 (1), 64-70.
- [8] K. Arent, I.M.Y. Mareels, J.W. Polderman: The pole-zero cancellation problem in adaptive control: a solution for minimum phase systems by approximate models, *European Journ. Control*, 1998, 4 (3), 320-332.
- [9] L. Arnold: *Stochastic differential equations. Theory and Applications*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1974.
- [10] W.F. Arnold, A.J. Laub: Generalized eigenproblem algorithms and software for algebraic Riccati equations, *Proc. IEEE*, 1984, 72 (12), 1746-1754.
- [11] K.J. Åström: Limitations on control system performance, *European Journ. Control*, 2000, 6 (1), 2-20.
- [12] K.J. Åström, P. Hagander, J. Sternby: Zeros of sampled systems, *Automatica*, 1984, 20 (1), 31-38.

- [13] K.J. Åström, B. Wittenmark: *Adaptive control*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA., 1989.
- [14] K.J. Åström, B. Wittenmark: *Computer-controlled systems*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ., 1997.
- [15] E.W. Bai, Z. Ding: Zeros of sampled data systems represented by FIR models, *Automatica*, 2000, 36 (1), 121-123.
- [16] E.W. Bai, Y.Q. Wu: Limiting zero distribution of sampled systems, *Automatica*, 2002, 38 (5), 843-851.
- [17] G.A. Baker: *Essentials of Padé approximants*, Academic Press, New York, San Fransisco, 1975.
- [18] G.A. Baker, P. Graves-Morris, P.A. Carruthers: *Padé approximants*, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1981.
- [19] S. Barnett: *Matrices in control theory*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1971.
- [20] A.Y. Barraud: A numerical algorithm to solve $A^T X A - X = Q$, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1977, AC-22 (5), 883-885.
- [21] R.H. Bartels, A.R. Conn, C. Charalambous: On Cline's direct method for solving overdetermined linear systems in the l_∞ sense, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1978, 15 (2), 255-270.
- [22] H. Bartels, G.W. Stewart: Algorithm 432. Solution of the matrix equation $AX + XB = C$, *Comm. Assoc. Computing Mach.*, 1972, 15 (9), 820-826.
- [23] F.L. Bauer: Optimally scaled matrices, *Numer. Math.*, 1963, 5 (1), 73-87.
- [24] F.L. Bauer: Remarks on optimally scaled matrices, *Numer. Math.*, 1969, 13 (1), 1-3.
- [25] B. Beckermann, G. Labahn: A fast and numerically stable Euclidean-like algorithm for detecting relatively prime numerical polynomials, *Journ. Symbolic Comput.*, 1998, 26 (6), 691-714.
- [26] B. Benhammouda: Rank-revealing 'top-down' *ULV* factorizations, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1997, SFB393/97-02, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.
- [27] P. Benner, A.J. Laub, V. Mehrmann: A collection of benchmark examples for the numerical solution of algebraic Riccati equations. I: continuous-time case, II: discrete-time case, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1995, 95-22, 95-23, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.
- [28] P. Benner, A.J. Laub, V. Mehrmann: Benchmarks for the numerical solution of algebraic Riccati equations, *IEEE Control Systems Magazine*, 1997, 17 (5), 18-28.

- [29] A. Berman, R.J. Plemmons: *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [30] R.R. Bitmead, M. Gevers: Riccati difference and differential equations: convergence, monotonicity and stability, w S. Bittani, A.J. Laub, J.C. Willems (Eds.): *The Riccati equation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [31] R.R. Bitmead, H. Weiss: On the solution of discrete-time Lyapunov matrix equation in controllable canonical form, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1979, AC-24 (3), 481-482.
- [32] Å. Björck: *Numerical methods for least squares problems*, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.
- [33] Å. Björck: Component-wise perturbation analysis and error bounds, *BIT*, 1991, 31, 238-244.
- [34] T. Bleile, P. Boucher, D. Dumur: Delta-operator generalized predictive cascade control, *Proc. 3rd European Control Conf ECC'95*, Rome, Italy, 4, 1995, 2857-2862.
- [35] M.J. Błachuta: On zeros of pulse transfer functions, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1999, AC-44 (6), 1229-1234.
- [36] J. Bognar: *Indefinite inner product spaces*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1974.
- [37] D.L. Boley: Computing rank-deficiency of rectangular matrix pencils, *Systems and Control Letters*, 1987, 9, 207-214.
- [38] D.L. Boley, W.S. Lu: Measuring how far a controllable system is from an uncontrollable one, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1986, AC-31 (3), 249-251.
- [39] P. Boucher, D. Dumur, R. Neumann: Control axis using delta-operator generalized-predictive control, *Proc. 2nd European Control Conf. ECC'93*, Groningen, The Netherlands, 1993 2, 937-940.
- [40] T.L. Boullion, P.L. Odell: *Generalized inverse matrices*, Wiley-Interscience, John Wiley and Sons, New York, 1971.
- [41] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in system and control theory*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [42] R.D. Braatz: Internal model control, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [43] G.E. Bredon: *Topology and geometry*, Springer Verlag, New York, 1993.
- [44] W.S. Brown: On Euclid's algorithm and the computation of polynomial greatest common divisors, *Journ. Assoc. Computing Mach.*, 1971, 18 (4), 476-504.
- [45] R.G. Brown, P.Y.C. Hwang: *Introduction to random signals and applied Kalman filtering*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1992.

- [46] J.R. Bunch: The weak and strong stability of algorithms in numerical linear algebra, *Linear Algebra Appl.*, 1987, 88/89, 49-66.
- [47] J.R. Bunch, C.P. Nielsen: Updating the singular value decomposition, *Numer. Math.*, 1978, 31 (2), 111-129.
- [48] A. Bunse-Gerstner, R. Byers, V. Mehrmann: A chart of numerical methods for structured eigenvalue problems, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1992, 13 (2), 419-453.
- [49] P.A. Businger: Matrices which can be optimally scaled, *Numer. Math.*, 1968, 12, 346-348.
- [50] P.A. Businger, G.H. Golub: Linear least squares solutions by Householder transformations, *Numer. Math.*, 1965, 7 (3), 269-276.
- [51] M. Busłowicz: *Odporna stabilność układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami*, Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk, Politechnika Białostocka, Warszawa, Białystok, 2000.
- [52] R. Byers: A LINPACK-style condition estimator for the equation $AX - XB^T = C$, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1984, AC-29 (10), 926-928.
- [53] E.F. Camacho, C. Bordons: *Model predictive control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [54] T.F. Chan, D.E. Foulser: Effectively well-conditioned linear systems, *SIAM Journ. Sci. Statist. Comput.*, 1988, 9 (6), 963-969.
- [55] S. Chandrasekaran, I.C.F. Ipsen: On the sensitivity of solution components in linear systems of equations, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1995, 16 (1), 93-112.
- [56] B.M. Chen: *Robust and H_∞ control*, Springer Verlag, London, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [57] C.T. Chen: *Analog and digital control system design: transfer-function, state-space, and algebraic methods*, Saunders College Publishing, Philadelphia, San Diego, 1993.
- [58] B.S. Chen, T.Y. Dong: LQG Optimal control system design under plant perturbation and noise uncertainty: a state-space approach, *Automatica*, 1989, 25 (3), 431-436.
- [59] S. Chen, J. Wu, R.H. Istepanian, J. Chu, J.F. Whidborne: Optimising stability bounds of finite-precision controller structures for sampled-data systems in the δ -operator domain, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1999, 146 (6), 517-526.
- [60] H.W. Cheng, S.S.T. Yau: More explicit formulas for the matrix exponential, *Linear Algebra Appl.*, 1997, 262, 131-163.

- [61] P. Chin, R.M. Corless: Optimization strategies for the approximate GCD problem, *Proc. Int. Symp. Symbolic and Algebraic Computation ISSAC*, Rostock, Germany, 1998, 228-235.
- [62] A. Chotai, P. Young, P. McKenna, W. Tych: Proportional-integral-plus (PIP) design for delta (δ) operator systems. Part 2: MIMO systems, *Int. Journ. Control*, 1998, 70 (1), 149-168.
- [63] C.K. Chui, G. Chen: *Kalman filtering with real-time applications*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [64] D.W. Clarke: Self-tuning control, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [65] D.W. Clarke, C. Mohtadi: Properties of generalized predictive control, *Automatica*, 1989, 25 (6), 859-876.
- [66] D.W. Clarke, C. Mohtadi, P.S. Tuffs: Generalized predictive control - Part I. The basic algorithm, *Automatica*, 1987, 23 (1), 137-148.
- [67] T.F. Coleman, Y. Li: A global and quadratically convergent method for linear l_∞ problems, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1992, 29 (4), 1166-1186.
- [68] E.G. Collins Jr., W.M. Haddad, V. Challeboina: Robustness analysis in the delta-domain using fixed-structure multipliers, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 3286-3291.
- [69] E.G. Collins Jr., T. Song: A delta operator approach to discrete-time \mathcal{H}_∞ control, *Int. Journ. Control*, 1999, 72 (4), 315-320.
- [70] J.B. Conway: *Functions of one complex variable*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, 1978.
- [71] R.B. Copeland, M.G. Safonov: A generalized eigenproblem solution for singular \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ problems, *Control and Dynamic Systems*, 1992 50 (2), 331-394.
- [72] R.B. Copeland, M.G. Safonov: Zero cancelling compensation for singular control problems and their application to the inner-outer factorization problem, *Int. Journ. Robust and Nonlinear Control*, 1992, 2 (2), 139-164.
- [73] R.B. Copeland, M.G. Safonov: A zero compensation approach to singular \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ , *Int. Journ. Robust and Nonlinear Control*, 1995, 5 (2), 71-106.
- [74] C.L. Cox, W.F. Moss: Backward error analysis for a pole assignment algorithm, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1989, 10 (4), 446-456.
- [75] S. Cristea, C. De Prada: Predictive control system with slow and fast dynamics using the delta operator, *Proc. CIDIC Seminar. Theory and Applic. Model-based Predictive Control*, Brussel, Belgium, 1996.
- [76] C.G. Cullen, C.A. Hall: On determining whether two polynomials are relatively prime, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1971, AC-16 (4), 369-370.

- [77] P.F. Curran: Lyapunov's matrix equation with system matrix in companion form, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (6), 1509-1516.
- [78] B.N. Datta: *Numerical methods for linear control systems*, Elsevier Academic Press, Amsterdam, Boston, 2004.
- [79] E.J. Davison, I.J. Ferguson: The design of controllers for the multivariable robust servomechanism problem using parameter optimization methods, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, AC-26 (1), 93-110.
- [80] H. Demircioglu: Constrained continuous-time generalised predictive control, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1999, 146 (5), 470-476.
- [81] H. Demircioglu, D.W. Clarke: CGPC with guaranteed stability properties, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1992, 139 (4), 371-380.
- [82] H. Demircioglu, P.J. Gawthrop: Continuous-time generalised predictive control (CGPC), *Automatica*, 1991, 27 (1), 55-74.
- [83] H. Demircioglu, P.J. Gawthrop: Multivariable continuous-time generalised predictive control (MCGPC), *Automatica*, 1992, 28 (4), 697-713.
- [84] J.W. Demmel: *Applied numerical linear algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, 1997.
- [85] J.W. Demmel, M. Gu, S. Eisenstat, Slapničar, K. Veselič, Z. Drmač: Computing the singular value decomposition with relative accuracy, *LAPACK working note*, 1997, 119, CS-97-348. SIAM, Philadelphia, PA, 1997.
- [86] M.C.F. de Oliveira, P.J. Fleming: Effective mapping of continuous-time controllers to their equivalents, *Electronics Letters*, 1990, 26 (9), 562-564.
- [87] P. Devilde, H. Dym: Lossless chain scattering matrices and optimum linear prediction: the vector case, *Circuit Theory Appl.*, 1981, 9 (2), 135-175.
- [88] I.S. Dhillon: Reliable computation of the condition number of a tridiagonal matrix in $\mathcal{O}(n)$ time, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 19 (3), 776-796.
- [89] C. De Prada, S. Cristea, A.G. Kuznetsov: Stability guarantee in predictive control delta domain, *Proc. 14th World Congress of IFAC*, Beijing, China, 1999, 3b-07-3, I, 397-402.
- [90] C.A. Desoer, M. Vidyasagar: *Feedback systems: input-output properties*, Academic Press, New York, 1975.
- [91] J. Douglas, M. Athans: Multivariable poles, zeros, and pole-zero cancellations, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [92] J.C. Doyle: Guaranteed margins for LQG regulators, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1978, AC-23 (4), 756-757.
- [93] J.C. Doyle: Analysis of feedback systems with structured uncertainties, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1982, 129 (6), 242-250.

- [94] C.J. Doyle, B.A. Francis, A.R. Tannenbaum: *Feedback control theory*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- [95] J.C. Doyle, A. Packard, K. Zhou: Review of LFTs, LMIs and μ , *Proc. 30th IEEE Conf. Decision and Control*, Brighton, England, 1991, 1227-1232.
- [96] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis: State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, 34 (8), 831-847.
- [97] J. Dugundji: *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.
- [98] D. Dumur, P. Boucher: New predictive techniques: control axis solutions, *Proc. 3rd Conf. on Control Applications*, Glasgow, Scotland, UK, 1994, 1663-1668.
- [99] D. Dumur, P. Boucher, E. Pope, C. Holtan: PREDATOR: a delta identification and autotuned predictive control software toolbox, *Proc. 3rd European Control Conf. ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 2845-2850.
- [100] G.E. Dullerud, F. Paganini: *A course in robust control theory*, Springer Verlag, New York, Berlin, 2000.
- [101] W. Ebert: Optimal filtered predictive control - a delta operator approach, *Systems and Control Letters*, 2001, 42, 69-80.
- [102] M. El-Khoury, O.D. Crisalle: Relative zero location for second-order sampled systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, AC-37 (10), 1551-1552.
- [103] E. Elmroth, F. Gustavson, I. Jonsson, B. Kågström: Recursive blocked algorithms and hybrid data structures for dense matrix library software, *SIAM Review*, 2004, 46 (1), 3-45.
- [104] L. Elsner, C. He: An algorithm for computing the distance to uncontrollability, *Systems and Control Letters*, 1991, 17, 453-464.
- [105] A. Emami-Nacini, P. Van Dooren: Computation of zeros of linear multivariable systems, *Automatica*, 1982, 18 (4), 415-430.
- [106] I.Z. Emiris, A. Galligo, H. Lombardi: Numerical univariate polynomial GCD, w J. Renegar, M. Shub, S. Smale (Eds.): *The mathematics of numerical analysis, Lect. appl. math.*, 32, Amer. Math. Soc., 1996.
- [107] I.Z. Emiris, A. Galligo, H. Lombardi: Certified approximate univariate GCDs, *Journ. Pure Appl. Algebra*, 1997, 117/118, 229-251.
- [108] F.W. Fairman: *Linear control theory, the state space approach*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, New York, 1998.
- [109] G. Favier, D. Dubois: A review of k -step-ahead predictors, *Automatica*, 1990, 26 (1), 75-84.
- [110] A. Feintuch: *Robust control theory in Hilbert space*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1998.

- [111] V. Feliu, J.A. Cerrada: Analysis and design of minimum-phase zeros of sampled systems, *Int. Journ. Control*, 1997, 68 (6), 1397-1416.
- [112] A. Feuer, R.H. Middleton: Conditioning of LMS algorithms with fast sampling, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995, AC-43 (8), 1978-1981.
- [113] R.D. Fierro, P.C. Hansen, P.S.K. Hansen: UTV tools: MATLAB templates for rank-revealing UTV decompositions, *Numer. Algorithms*, 199, 20 (1), 165-194.
- [114] M. Fikar, S. Engell: Receding horizon predictive control based upon the Youla-Kučera parameterisation, *European Journ. Control*, 1997, 3 (2), 304-316.
- [115] M. Fikar, M. Morari, J. Mikleš: On Youla-Kučera parameterisation approach to predictive control, *Proc. 5th European Control Conf. ECC'99*, Karlsruhe, Germany, 1999, CP-12-5.
- [116] B.A. Francis: *A course in \mathcal{H}_∞ control theory*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.
- [117] J.S. Freudenberg, D.P. Looze: Right half plane poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985, AC-30 (6), 555-565.
- [118] J.S. Freudenberg, D.P. Looze: A sensitivity tradeoffs for plants with time delay, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (2), 99-104.
- [119] J.S. Freudenberg, R.H. Middleton, J.H. Braslavsky: Inherent design limitations for linear sampled-data feedback systems, *Int. Journ. Control*, 1995, 61 (6), 1387-1421.
- [120] Y. Fu, G.A. Dumont: Choice of sampling to ensure minimum-phase behaviour, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (5), 560-563.
- [121] P.A. Fuhrmann: *A polynomial approach to linear algebra*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1996.
- [122] Z. Gajic, M. Qureshi: *Lyapunov matrix equation in system stability and control*, Academic Press, New York, 1995.
- [123] P.M. Gahinet, A.J. Laub: Computable bounds for the sensitivity for the algebraic Riccati equation, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1990, 28 (6), 1461-1480.
- [124] P.M. Gahinet, A.J. Laub, C.S. Kenney, G.A. Hower: Sensitivity of the stable discrete-time Lyapunov equation, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1990, AC-35 (11), 1209-1217.
- [125] F.R. Gantmacher: *The theory of matrices*, Chelsea Publishing Co., New York, 1959.

- [126] P.J. Gawthrop: *Continuous-time self-tuning control; vol. 1: design*, Research Studies Press, Letchworth, U.K., 1987.
- [127] C.E. Garcia, M. Morari: Internal model control. A unifying review and some new results, *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 1982, 21 (2), 308-323.
- [128] P.J. Gawthrop, H. Demircioglu, I.I. Siller-Alcala: Multivariable continuous-time generalised predictive control: a state-space approach to linear and non-linear systems, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1998, 145 (3), 241-250.
- [129] P.J. Gawthrop, R.W. Jones, D.G. Sbarbaro: Emulator-based control and internal model control: complementary approaches to robust control design, *Automatica*, 1996, 32 (8), 1223-1227.
- [130] Y. Genin, P. Van Dooren, T. Kailath, J. Delosme, M. Morf: On Σ -lossless transfer functions and related questions. *Linear Algebra Appl.*, 1983, 50, 251-275.
- [131] R. Gessing: About some properties of discrete-time transfer functions for small sampling periods, *Proc. 2nd European Control Conf. ECC'93*, Groningen, The Netherlands, 1993,3, 1699-1702.
- [132] R. Gessing: Whether the delta operator models are really better for small sampling periods, *Proc. 15th Trien. World Congress of the IFAC*, Barcelona, Spain, 2002, T-We-M21 .
- [133] M. Gevers, G. Li: *Parametrizations in control, estimation and filtering problems*, Springer Verlag, London, 1993.
- [134] A.R. Ghavimi, A.J. Laub: Residual bounds for discrete-time Lyapunov equations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995, AC-40 (7), 1244-1249.
- [135] A.R. Ghavimi, A.J. Laub: Backward error, sensitivity and refinement of computed solutions of algebraic Riccati equations, *Numer. Algebra Appl.*, 1995, 2 (1), 29-49.
- [136] K.C. Goh, M.G. Safonov: The extended $j\omega$ -axis eigenstructure of a Hamiltonian matrix pencil, *Proc. 31st Conf. Decision and Control*, Tucson, Arizona, 1992, 1897-1902.
- [137] G.H. Golub, V. Klema, G.W. Stewart: Rank degeneracy and least squares problems, *Stanford Univ. Tech. Report*, 1976, STAN-CS-76-559, Computer Sci. Depart., Stanford, CA.
- [138] G.H. Golub, S. Nash, C.F. Van Loan: A Hessenberg-Schur method for the problem $AX + XB = C$, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1974, AC-24 (6), 909-913.
- [139] G.H. Golub, C.F. Van Loan: *Matrix computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, London, 1996.
- [140] R.M. Goodall, B.J. Donoghue: Very high sample rate digital filters using the δ operator realisation, *IEE Proc., Circuit Device Syst.*, 1993, 140 (3), 199-206.

- [141] G.C. Goodwin, R. Lozano Leal, D.Q. Mayne, R.H. Middleton: Rapprochement between continuous and discrete model reference adaptive control, *Automatica*, 1986, 22 (2), 199-207.
- [142] G.C. Goodwin, R.H. Middleton, H.V. Poor: High-speed digital signal processing and control, *Proc. IEEE*, 1992, 80 (2), 240-259.
- [143] G.C. Goodwin, M. Salgado: Frequency domain sensitivity functions for continuous time systems under sampled data control, *Automatica*, 1994, 30 (8), 1263-1270.
- [144] G.C. Goodwin, M.M. Seron: Fundamental design tradeoffs in filtering, prediction, and smoothing, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1997, AC-42 (9), 1240-1251.
- [145] G.C. Goodwin, A.R. Woodyatt, R.H. Middleton, J. Shim: Fundamental limitations due to $j\omega$ -axis zeros in SISO systems, *Automatica*, 1999, 35 (5), 857-863.
- [146] R. Gorcz, V. Wertz, K.Y. Zhu: On a generalised predictive control algorithm, *Systems and Control Letters*, 1987, 9 (5), 369-377.
- [147] H. Górecki: *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem*, WNT, Warszawa, 1971.
- [148] H. Górecki: *Optymalizacja systemów dynamicznych*, PWN, Warszawa, 1993.
- [149] A. Graham: *Kronecker products and matrix calculus with applications*, John Wiley and Sons, New York, 1981.
- [150] J. F. Grcar: Optimal sensitivity analysis of linear least squares, *Lawrence Berkeley National Laboratory Techn. Report*, 2002, LBNL-52434.
- [151] M. Green: \mathcal{H}_∞ controller synthesis by J -lossless coprime factorisation, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (3), 522-547.
- [152] M. Green, K. Glover, D.J.N. Limebeer, J.C. Doyle: A spectral factorization approach to \mathcal{H}_∞ control, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1990, 28 (6), 1350-1371.
- [153] M. Green, D.J.N. Limebeer: *Linear robust control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.
- [154] M.J. Grimble: *Robust industrial control*, Prentice Hall International, New York, London, 1994.
- [155] M.J. Grimble: Generalised predictive control: an introduction to the advantages and limitations, *Int. Journ. Systems Science*, 1992, 23 (1), 85-98.
- [156] M. Gu: Backward perturbation bounds for linear least squares problems, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 20 (2), 363-372.

- [157] D.W. Gu, M.C. Tsai, S.D. O'Young, I. Postlethwaite: State-space formulae for discrete-time \mathcal{H}_∞ optimization, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (5), 1683-1723.
- [158] T. Gudmundsson, C. Kenney, A.J. Laub: Scaling of the discrete-time algebraic Riccati equation to enhance stability of the Schur solution method, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, AC-37 (4), 513-518.
- [159] C.H. Guo, A.J. Laub: On a Newton-like method for solving algebraic Riccati equations, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2000, 21 (2), 694-698.
- [160] T. Hagiwara: Analytic study of the intrinsic zeros of sampled data systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1996, AC-41 (2), 261-263.
- [161] T. Hagiwara, T. Yuasa, M. Araki: Stability of the limiting zeros of sampled-data systems with zero- and first-order holds, *Int. Journ. Control*, 1993, 58 (6), 1325-1346.
- [162] M.E. Halpern: Modified pole-assignment controller for plant models with exact or near pole-zero cancellation, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1988, 135 (3), 189-195.
- [163] S.J. Hammarling: Numerical solution of the stable, nonnegative definite Lyapunov equation, *IMA Journ. Numer. Anal.* 1982, 2, 303-323.
- [164] P.C. Hansen, P.Y. Yalamov: Computing symmetric rank-revealing decompositions via triangular factorization, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2002, 23 (2), 443-458.
- [165] S. Hara, H. Katori, R. Kondo: The relationship between real poles and real zeros in SISO sampled data systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (5), 632-635.
- [166] S. Hara, R. Kondo, H. Katori: Properties of zeros in digital control systems with computational time delay, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (2), 493-511.
- [167] S. Hara, T. Sugie: Inner-outer factorization for strictly proper functions with $j\omega$ -axis zeros, *Systems Control Letters*, 1991, 16 (2), 179-185.
- [168] S. Hara, T. Sugie, R. Kondo: \mathcal{H}_∞ control problem with $j\omega$ -axis zeros, *Automatica*, 1992, 28 (1), 55-70.
- [169] B. Hassibi, A.H. Sayed, T. Kailath: *Indefinite-quadratic estimation and control. A unified approach to \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ theories*, SIAM, Philadelphia, PA, 1999.
- [170] J.W. Helton, O. Merino: *Classical control using \mathcal{H}_∞ methods*, SIAM, Philadelphia, PA, 1998.
- [171] H.V. Henderson, S.S. Searle: The vec-permutation matrix, the vec operator and Kronecker products: a review, *Linear and Multilinear Algebra*, 1981, 9, 271-288.

- [172] M.A. Hersh: The zeros and poles of delta operator systems, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (3), 557-575.
- [173] G.A. Hewer, C.S. Kenney: The sensitivity of the stable Lyapunov equation, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1988, 26 (2), 321-344.
- [174] N.J. Higham: Computing error bounds for regression problems, *Contemporary Math.*, 1990, 112, 195-210.
- [175] N.J. Higham: Perturbation theory and backward error for $AX - XB = C$, *BIT*, 1993, 33 (1), 124-136.
- [176] N.J. Higham: A survey of componentwise perturbation theory in numerical linear algebra, Proc. Symposia in Applied Math., American Math. Soc., 1994, 48, 49-77.
- [177] N.J. Higham: *Accuracy and stability of numerical algorithms*, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.
- [178] N.J. Higham: Notes on accuracy and stability of algorithms in numerical linear algebra, *Numer. Anal. Report*, 1998, 333, The Univ. of Manchester.
- [179] D.J. Higham, N.J. Higham: Backward error and condition of structured linear systems, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1992, 13 (1), 162-175.
- [180] N.J. Higham, M. Konstantinov, V. Mehrmann, P. Petkov: The sensitivity of computational control problems, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 28-43.
- [181] R.D. Hocken, S.V. Salehi, J.F. Marshall: Time-delay mismatch and the performance of predictor control schemes, *Int. Journ. Control*, 1983, 38 (2), 433-447.
- [182] A.S. Hodel: Recent applications of the Lyapunov equation in control theory, w R. Beauvencs, P. de Groen (Eds.): *Iterative methods in linear algebra*, Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [183] R.A. Horn, C.R. Johnson: *Topics in matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1991.
- [184] M. Hou, A.C. Pugh, G.E. Hayton: Generalized transfer functions and input-output equivalence, *Int. Journ. Control*, 1997, 68 (5), 1163-1178.
- [185] Y.S. Hung: \mathcal{H}_∞ optimal control. Part 1. Model matching, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (4), 1291-1330.
- [186] Y.S. Hung, D. Chu: A simple and unified approach for analyzing discrete-time algebraic Riccati equation and spectral factorisation related to discrete-time \mathcal{H}_∞ control problem, *Technical Report*, 1995, University of Hong Kong.
- [187] Y.S. Hung, D. Chu: (J, J') -lossless factorisation for discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1998, 71 (3), 517-533.

- [188] Y.S. Hung, D. Chu: Relationships between discrete-time and continuous-time algebraic Riccati inequalities, *Linear Algebra Appl.*, 1998, 270, 287-313.
- [189] Y.S. Hung, D. Chu: On extended (J, J') -lossless factorisation, *Linear Algebra Appl.*, 1998, 271, 117-138.
- [190] P. A. Iglesias, K. Glover: State-space approach to discrete-time \mathcal{H}_∞ control, *Int. Journ. Control*, 1991, 54 (5), 1031-1073.
- [191] V. Ionescu, C. Oară, M. Weiss: General matrix pencil techniques for the solution of algebraic Riccati equations: a unified approach, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1997, AC-42 (8), 1085-1097.
- [192] P.A. Ioannou, J. Sun: *Robust adaptive control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1996.
- [193] V. Ionescu, M. Weiss: On computing the stabilizing solution of the discrete-time Riccati equation, *Linear Algebra Appl.*, 1992, 174, 229-238.
- [194] V. Ionescu, M. Weiss: Two-Riccati formulae for the discrete-time \mathcal{H}_∞ control problem, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (1), 141-195.
- [195] R. Isermann: *Digital control systems*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.
- [196] R. Isermann: *Digital control systems. Vol. 1: fundamentals, deterministic control*, Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [197] M. Ishitobi: Conditions for stable zeros of sampled systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, AC-37 (10), 1558-1561.
- [198] M. Ishitobi: Stable zeros of sampled low-pass systems, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (6), 1485-1498.
- [199] M. Ishitobi: Criteria for stability of zeros of sampled systems, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1994, 141(6), 396-402.
- [200] M. Ishitobi: Stable zeros of a discrete systems obtained by sampling a continuous-time plant with a time delay, *Int. Journ. Control*, 1994, 59 (4), 1053-1062.
- [201] A.H. Jazwinski: *Stochastic processes and filtering theory*, Academic Press, New York, 1970.
- [202] J. Ježek: Polynomial equations, conjugacy and symmetry, w K.J. Hunt (Ed.): *Polynomial methods in optimal control and filtering*, Peter Peregrinus Ltd, London, 1993.
- [203] J.C. Johnson, C.L. Phillips: An algorithm for the computation of the integral of the state transition matrix, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1971, AC-16 (2), 204-205.
- [204] P.T. Kabamba: Control of linear systems using generalized sampled-data hold functions, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (9), 772-783.

- [205] T. Kaczorek: *Teoria sterowania i systemów*, PWN, Warszawa, 1996.
- [206] T. Kailath: *Linear systems*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1980.
- [207] T. Kailath, A.H. Sayed, B. Hassibi: *Linear estimation*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 2000.
- [208] B. Kågström, P. Poromaa: LAPACK-style algorithms and software for solving the generalized Sylvester equation and estimating the separation between regular matrix pairs, *Report UMINF*, 1993, 93.23, Institute of Information processing, University of Umeå, Umeå, Sweden.
- [209] B. Kågström, P. Poromaa: Computing eigenspaces with specified eigenvalues of a regular matrix pair (A, B) and condition estimation: Theory, algorithms and software, *Report UMINF*, 1994, 94.04, Institute of Information processing, University of Umeå, Umeå, Sweden.
- [210] B. Kågström, L. Westin: Generalized Schur methods with condition estimators for solving the generalized Sylvester equation, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (7), 745-751.
- [211] R.E. Kalman, P.L. Falb, M.A. Arbib: *Topics in mathematical system theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.
- [212] N. Karcaniyas, M. Mitrouli: A matrix pencil based numerical method for the computation of GCD of polynomials, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, AC-39 (5), 977-981.
- [213] R. Karlson, B. Waldén: Estimation of optimal backward perturbation bounds for the linear least squares, *BIT*, 1997, 37 (4), 862-869.
- [214] T. Kato: *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.
- [215] J. Kautsky, N.K. Nichols, P. Van Dooren: Robust pole assignment in linear state feedback, *Int. Journ. Control*, 1985, 41 (5), 1129-1155.
- [216] C. Kenney, G. Hoyer: The sensitivity of the algebraic and differential Riccati equations, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1990, 28 (1), 50-69.
- [217] C. Kenney, A.J. Laub: Condition estimates for matrix functions, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1989, 10 (1), 191-209.
- [218] C. Kenney, A.J. Laub, M. Wette: A stability-enhancing scaling procedure for Schur-Riccati solvers, *Systems Control Letters*, 1989, 12 (2), 241-250.
- [219] A. Kiełbasiński, H. Schwetlick: *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, Warszawa, 1992.
- [220] H. Kimura: Conjugation, interpolation and model matching in \mathcal{H}_∞ , *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (1), 269-307.

- [221] H. Kimura: Generalized chain-scattering approach to \mathcal{H}_∞ control problems, *w* S.P. Bhattacharyya, L.H. Keel (Eds.): *Control of uncertain dynamic systems*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1991, 21-38.
- [222] H. Kimura: (J, J') -lossless factorisation using conjugations of zero and pole extractions, *w* S. Hosoe (Ed.): *Robust control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [223] H. Kimura: (J, J') -lossless factorization based on conjugation, *Systems Control Letters*, 1992, 19 (1) 95-109.
- [224] H. Kimura: Chain scattering representation, J -lossless factorization and \mathcal{H}_∞ control, *Journ. Math. Systems Estimation Control*, 1995, 5 (2), 203-255.
- [225] H. Kimura: *Chain-scattering approach to \mathcal{H}_∞ control*, Birkhäuser, Boston, Basel, 1997.
- [226] H. Kimura, Y. Lu, R. Kawatani: On the structure of \mathcal{H}_∞ control systems and related extensions, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, AC-36 (6), 653-667.
- [227] H. Kimura, F. Okunishi: Chain-scattering approach to control system design, *w* A. Isidori (Ed.): *Trends in control. A European perspective*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995, 151-171.
- [228] R. Kondo, S. Hara: On cancellation in \mathcal{H}_∞ optimal controllers, *Systems and Control Letters*, 1989 13 (2), 205-210.
- [229] W. Kongprawechnon, H. Kimura: J -lossless conjugation and factorization for discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1996, 65 (5), 867-884.
- [230] W. Kongprawechnon, H. Kimura: J -lossless factorization and \mathcal{H}_∞ control for discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1998, 70 (3), 423-446.
- [231] M. Konstantinov, D.W. Gu, V. Mehrmann, P. Petkov: *Perturbation theory for matrix equations*, Elsevier Press, Amsterdam, 2003.
- [232] B. Kouvaritakis, M. Cannon, J.A. Rossiter: Recent developments in generalized predictive control for continuous-time systems, *Int. Journ. Control*, 1999, 72 (2), 164-173.
- [233] B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter, A.O.T. Chang: Stable generalised predictive control: an algorithm with guaranteed stability, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1992, 139 (2), 349-362.
- [234] Z. Kowalczyk, P. Suchomski, A. Marcińczyk: Discrete-time and continuous-time generalised predictive controllers with anticipated filtration: tuning rules, *Int. Journ. Applied Math. and Computer Science*, 1996, 6 (4), 707-732.
- [235] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Anticipated filtering approach to generalised predictive control, *Proc. 3rd European Control Conf. ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 3591-3596.

- [236] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Discrete-time generalised predictive control with anticipated filtration, *Proc. 13th IFAC World Congress*, San Francisco, USA, June-July 1996, K, 301-306.
- [237] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Numerically robust computer aided Markov-equivalent CGPC design, *Proc. IFAC Symp. Comp. Aided Contr. Syst. Design*, Gent, Belgium, April 1997, 365-370.
- [238] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Robust predictive control based on overparameterised delay models, *Proc. 2nd IFAC Symp. Robust Control Design*, Budapest, Hungary, 1997, 525-530.
- [239] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Dyskretne uogólnione sterowanie predykcyjne z filtracją antycypacyjną, *Studia z Automatyki i Informatyki*, Poznań, 1997, 22, 41-52.
- [240] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Two-degree-of-freedom stable GPC design, *Proc. IFAC Workshop Adaptive Control and Signal Processing*, Glasgow, Scotland, 1998, 243-248.
- [241] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Continuous-time generalised predictive control of delay systems, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1999, 146 (1), 65-75.
- [242] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Control of delay plants via continuous-time GPC principle, *Control and Cybernetics*, 1999, 28 (2), 291-314.
- [243] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Analytical design of stable continuous-time generalised predictive control, *Int. Journ. Applied Math. and Computer Science*, 1999, 9 (1), 53-100.
- [244] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Robust CGPC design via simple Youla parameterisation, *Proc. 5th European Control Conf. ECC'99*, Karlsruhe, Germany, 1999, CA-12-2.
- [245] Z. Kowalczyk, P. Suchomski: Simple stable discrete-time generalised predictive control with anticipated filtration of control error, *Control and Cybernetics*, 2002, 31 (1), 17-41.
- [246] E. Kreindler, A. Jameson: Conditions for nonnegativeness of partitioned matrices, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1972, AC-17 (1), 147-148.
- [247] D. Kresner, V. Mehrmann, T. Penzl: CTLEX (DTLEX) - a collection of benchmark examples for continuous-time (discrete-time) Lyapunov equations, *SLICOT Working Note*, 1999, 6 (7), Katholieke Univ., Leuven, Belgium.
- [248] V. Kučera: Stability of discrete linear feedback system, *Proc. 6th IFAC World Congress*, Boston, 1975, 44.1.
- [249] V. Kučera: Diophantine equations in control - a survey, *Automatica*, 1993, 29 (6), 1361-1375.

- [250] V. Kučera: A tutorial on \mathcal{H}_2 control theory: the continuous time case, w M.J. Grimble, V. Kučera: *Polynomial methods for control systems design*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [251] B.C. Kuo: *Digital control systems*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1980.
- [252] H. Kushner: *Introduction to stochastic control*, Holt, Rinehart, Winston, Inc., New York, 1971.
- [253] A.G. Kuznetsov, R.O. Bowyer, D.W. Clark: Estimation of multiple order models in the δ domain, *Int. Journ. Control*, 1999, 72 (7/8), 629-642.
- [254] H. Kwakernaak: Robust control and \mathcal{H}_∞ -optimization, *Automatica*, 1993, 29 (2), 255-273.
- [255] H. Kwakernaak: Symmetries in control system design, w A. Isidori (Ed.): *Trends in control. A European perspective*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995, 17-51.
- [256] P. Lancaster, L. Rodman: *Algebraic Riccati equations*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [257] I.D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad: *Adaptive control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [258] A.J. Laub: A Schur method for solving algebraic Riccati equations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1979, AC-24 (6), 913-921.
- [259] A.J. Laub: Invariant subspace methods for the numerical solution of Riccati equations, in S. Bittani, A.J. Laub, J.C. Willems (Eds.): *The Riccati equation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [260] A.J. Laub, R.V. Patel, P.M. Van Dooren: Numerical and computational issues in linear control and system theory, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [261] D.L. Laughlin, K.G. Jordan, M. Morari: Internal model control and process uncertainty: mapping uncertainty regions for SISO controller design, *Int. Journ. Control*, 1986, 44 (6), 1675-1698.
- [262] D.L. Laughlin, D.E. Rivera, M. Morari: Smith predictor design for robust performance, *Int. Journ. Control*, 1987, 46 (2), 477-504.
- [263] M.B. Lauritsen: Delta-domain predictive control and identification for control, *Ph.D. Thesis (Lyngby: Technical University of Denmark, Institute of Mathematical Modelling*, 1997.
- [264] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard: Delta-operator predictive control, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 884-889.

- [265] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: Emulator-based GPC in the delta-domain, *Technical University Denmark Techn. Report*. 1994, IMM-Rep-1994-24, Inst. Math. Modelling, Lyngby, Danmark.
- [266] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: Optimal prediction in the delta-domain, *Proc. 3rd European Control Conf. ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 2851-2856.
- [267] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: Generalized predictive control in the delta-domain, *Proc. the American Control Conf.*, Seattle, WA, 1995, 5, 3709-3713.
- [268] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: GPC using a delta-domain emulator-based approach, *Int. Journ. Control*, 1997, 68 (1), 219-232.
- [269] C.L. Lawson, R.J. Hanson: *Solving least squares problems*, SIAM, Philadelphia, PA, 1995.
- [270] P.H. Lee, H. Kimura, Y.C. Soh: On the lossless and J -lossless embedding theorems in \mathcal{H}_∞ , *Systems and Control Letters*, 1996, 29 (1), 1-7.
- [271] M.A. Lelić, M.B. Zarrop: Generalized pole-placement self-tuning controller, part I, basic algorithms, *Int. Journ. Control*, 1987, 46 (2), 547-568.
- [272] F.L. Lewis: *Optimal estimation*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1986.
- [273] Q. Li, H.H. Fan: On properties of information matrices of delta-operator based adaptive signal processing algorithms, *IEEE Trans. Signal Processing*, 1997, SP-45 (10), 2454-2467.
- [274] G. Li, M. Gevers: Roundoff noise minimization using delta-operator realizations, *IEEE Trans. Signal Processing*, 1993, SP-41 (2), 629-637.
- [275] G. Li, M. Gevers: Comparative study of finite wordlength effects in shift and delta operator parameterizations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1993, AC-38 (5), 803-807.
- [276] K.Z. Liu, T. Mita: Conjugation and \mathcal{H}_∞ control of discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1989, 50 (4), 1435-1460.
- [277] G.P. Liu, R.J. Patton: *Eigenstructure assignment for control system design*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, New York, 1998.
- [278] D.P. Looze, J.S. Freudenberg: Limitations of feedback properties imposed by open-loop right half plane poles, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, AC-36 (6), 736-739.
- [279] D.H. Luecking, L.A. Rubel: *Complex analysis, a functional analysis approach*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1984.
- [280] J.M. Maciejowski: *Multivariable feedback design*, Addison-Wesley Publishing Company, Wokingham, Reading, MA., 1989.

- [281] A.N. Malyshev, M. Sadkane: Computation of optimal backward perturbation bounds for large sparse linear least squares problems, *BIT*, 2002, 41 (4), 739-747.
- [282] A.A. Marouf, S.A.K. Al-Assadi: Computer-aided discretization of continuous data control systems, *Computer Aided Design*, 1985, 17 (4), 169-178.
- [283] Math Works: *Using MATLAB*, The Math Works Inc., Natick, MA, 2002.
- [284] A.R. McIntosh, S.L. Shah, D.G. Fisher: Analysis and tuning of adaptive generalized predictive control, *Canadian Journ Chem. Eng.*, 1991, 69, 97-110.
- [285] V. Mehrmann: A step toward a unified treatment of continuous and discrete time control problems, *Linear Algebra Appl.*, 1996, 241-243, 749-779.
- [286] V. Mehrmann, H. Xu: An analysis of the pole placement problem. I. The single-input case, *Electr. Trans. Numer. Anal.*, 1996, 4, 89-105.
- [287] V. Mehrmann, H. Xu: Choosing poles so that the single-input pole placement problem is well-conditioned, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 19 (3), 664-681.
- [288] V. Mehrmann, H. Xu: Numerical methods in control: from pole assignment via linear quadratic to \mathcal{H}_∞ control, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1999, SFB393/99-12. Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.
- [289] D. Megias, J. Serrano, C. De Prada: Uncertainty treatment in GPC: design of T polynomial, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, Fr-A-B-1.
- [290] C.D. Meyer: *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [291] R.H. Middleton: Trade-offs in linear control system design, *Automatica*, 1991, 27 (2), 281-192.
- [292] R.H. Middleton: Trade-offs in linear filter design, *Automatica*, 1991, 31 (10), 1367-1376.
- [293] R.H. Middleton, G.C. Goodwin: Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1986, AC-31 (11), 1015-1021.
- [294] R.H. Middleton, G.C. Goodwin: *Digital control and estimation*, Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1990.
- [295] L. Mirkin: On discrete-time \mathcal{H}_∞ problem with a strictly proper controller, *Int. Journ. Control*, 1997, 66 (6), 747-765.
- [296] C. Moler, C.F. Van Loan: Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, *SIAM Review*, 1978, 20 (4), 801-836.

- [297] M. Morari, E. Zafriou: *Robust process control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1989.
- [298] K.S. Narandra, A.M. Annaswamy: *Stable adaptive systems*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1989.
- [299] C.P. Neuman: Transformations between delta and forward shift operator transfer function models, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, 1993, SMC-23 (1), 295-296.
- [300] C.P. Neuman: Properties of the delta operator model of dynamic physical systems, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, 1993, SMC-23 (1), 296-301.
- [301] R. Neumann, D. Dumur, P. Boucher: Delta-operator generalized predictive control (DGPC), *Proc. 31st Conf. Decision and Control*, Tucson, Arizona, 1992, 2224-2225.
- [302] R. Neumann, D. Dumur, P. Boucher: Application of delta-operator generalised predictive control (DGPC) *Proc. 32th Conf. Decision and Control*, San Antonio, TX, 1993, 2499-2504.
- [303] B.M. Ninness, G.C. Goodwin: The relationship between discrete time and continuous time linear estimation, w N.K. Sinha, G.P. Rao (Eds.): *Identification of continuous-time systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [304] M.T. Noda, T. Sasaki: Approximate GCD and its application to ill-conditioned algebraic equations, *Journ. Comput. Appl. Math.*, 1991, 38, 335-351.
- [305] J. Nowakowski, P. Suchomski: O specyfikacji dyskretnej transmitancji wzorcowej układu regulacji cyfrowej, *Pomiary, Automatyka, Kontrola*, 1990, 36 (4), 71-73.
- [306] J. Nowakowski, P. Suchomski: On a method of mapping of continuous-time control SISO systems to their discrete equivalents, *Archives of Control Sciences*, 1992, 37 (3-4), 269-283.
- [307] J. Nowakowski, P. Suchomski: Mapping of continuous-time control SISO systems to their equivalents with stable discrete controllers, *Int. Journ. Systems Science*, 1994, 25 (1), 193-200.
- [308] W. Oettli, W. Prager: Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides, *Numer. Math.*, 1964, 6, 405-409.
- [309] K. Ogata: *Discrete-time control systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.
- [310] M.L. Overton: *Numerical computing with IEEE floating point arithmetic*, SIAM, Philadelphia, PA, 2001.

- [311] S.D. O'Young, B.A. Francis: Sensitivity tradeoffs for multivariable plants, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985, AC-30 (7), 625-632.
- [312] S.D. O'Young, I. Postlethwaite, D.W. Gu: A treatment of $j\omega$ -axis model-matching transformation zeros in the optimal \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control design, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (5), 551-553.
- [313] A. Packard, J.C. Doyle: The complex structured singular value, *Automatica*, 1993, 29 (1) 71-109.
- [314] Z.J. Palmor: Time-delay compensation - Smith predictor and its modifications, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [315] V.J. Pan: Numerical computation of a polynomial GCD and extensions, *INRIA Techn. Report*, 1996, Sophia-Antipolis, France.
- [316] P. Pandey: On scaling an algebraic Riccati equation, *Proc. of the American Control Conf.*, San Francisco, CA, 1993, 1583-1587.
- [317] T. Pappas, A.J. Laub, N.R. Sandell: On the numerical solution of the discrete-time algebraic Riccati equations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1980, AC-25 (4), 631-641.
- [318] K.M. Passino, P.J. Antsaklis: Inverse stable low-pass systems, *Int. Journ. Control*, 1988, 47 (6), 1905-1913.
- [319] R.V. Patel, A.J. Laub, P.M. Van Dooren (Eds.): *Numerical linear algebra techniques for systems and control*, IEEE Press, Piscataway, NJ, 1993.
- [320] R.A. Paz, J.V. Madanić: \mathcal{H}_∞ control in discrete time: state feedback control and norm bounds, *Int. Journ. Control*, 1992, 55 (2), 1405-1424.
- [321] J.M. Peña: On the Skeel condition number, growth factor and pivoting strategies for Gaussian elimination, *Proc. SIAM Conf. Applied Linear Algebra*, Williamsburg, VA, 2003, CP2, <http://www.siam.org/meetings/la03/proceedings/penaj.pdf>.
- [322] P.H. Petkov, N.D. Christov, M.M. Konstantinov: On the numerical properties of the Schur approach for solving the matrix Riccati equation, *Systems and Control Letters*, 1987, 9 (2) 197-201.
- [323] P.H. Petkov, N.D. Christov, M.M. Konstantinov: *Computational methods for linear control systems*, Prentice Hall International, New York, London, 1991.
- [324] P.H. Petkov, D.W. Gu, M.M. Konstantinov, V. Mehrmann: Condition and error estimates in the solution of Lyapunov and Riccati equations, *NICONET Report*, 2000, 1, Katholieke Univ., Leuven, Belgium.
- [325] P.H. Petkov, M.M. Konstantinov, V. Mehrmann: DGRSVX and DMSRIC: Fortran 77 subroutines for solving continuous-time matrix algebraic Riccati equations with condition and accuracy estimates, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1998, SFB393/98-16, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.

- [326] A.W. Pike, M.J. Grimble, M.A. Johnson, A.W. Ordys, S. Shakoor: Predictive control, w W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [327] H.V. Poor: Delta-operator based signal processing: fast algorithms for rapidly sampled data, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 872-877.
- [328] K. Premaratne, R. Salvi, N.R. Habib, J.P. LeGall: Delta-operator formulated discrete-time approximations of continuous-time systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, AC-39 (3), 581-585.
- [329] A.C. Pugh, L. Tan: A generalized chain-scattering representation and its algebraic system properties, *IEEE Trans. Autom. Control*, 2000, AC-45 (5), 1002-1007.
- [330] K.R. Ralev, P.H. Bauer: Limit cycles elimination in delta-operator systems, *IEEE Trans. Circuits Systems, I*, 2000, CAS-47 (5), 769-772.
- [331] A.C.M. Ran, R. Vreugdenhill: Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations for continuous- and discrete-time systems, *Linear Algebra Appl.*, 1988, 99, 63-83.
- [332] G. P. Rao, N.K. Sinha: Continuous-time models and approaches, w N.K. Sinha, G.P. Rao (Eds.): *Identification of continuous-time systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [333] K.S. Rattan: Digitalization of existing continuous control systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1984, AC-29 (3), 282-285.
- [334] K.S. Rattan: Compensating for computational delay in digital equivalent of continuous control systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, AC-34 (8), 895-899.
- [335] J. Rice: A theory of condition, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1966, 3 (2), 287-310.
- [336] J.L. Rigal, J.Gaches: On the compatibility of a given solution with the data of a linear system, *Journ. Assoc. Computing Mach.*, 1967, 14 (3), 543-548.
- [337] B.D. Robinson, D.W. Clarke: Robustness effects of a prefilter in generalized predictive control, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1991, 138 (1) 2-8.
- [338] J.A. Romagnoli, M.N. Karim, O.E. Agamennoni, A. Desages: Controller design for model-plant parameter mismatch, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1988, 135 (2), 157-164.
- [339] E. Ronco, T. Arsan, P.J. Gawthrop: Open-loop intermittent feedback control: Practical continuous-time GPC, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1999, 146 (5), 426-434.

- [340] J.A. Rossiter, L. Chisci, A. Lombardi: Stabilizing predictive control algorithms in the presence of common factors, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, Th-E-B-5.
- [341] M. Rostgaard, M.B. Lauritsen, N.K. Poulsen: A state-space approach to the emulator-based GPC design, *Systems and Control Letters*, 1996, 28, 291-301.
- [342] M. Rostgaard, M.B. Lauritsen, N.K. Poulsen, O. Ravn: ML estimation using delta based state space models, *Proc. of the 1994 SYSID Conference*, Copenhagen, Denmark, 1994, 3, 655-661.
- [343] M. Rostgaard, N.K. Poulsen, O. Ravn: General predictive control using the delta operator, *Proc. 32nd Conf. Decision and Control*, San Antonio, TX, 1993, 2, 1769-1774.
- [344] M. Rostgaard, N.K. Poulsen, O. Ravn: A rapprochement between discrete-time operators, *Proc. 2nd European Control Conf. ECC'93*, Groningen, The Netherlands, 1993, 1, 426-431.
- [345] S.M. Rump: Structured perturbations. Part I: normwise distances, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2004, 25 (1), 1-30.
- [346] S.M. Rump: Structured perturbations. Part II: componentwise distances, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2004, 25 (1), 31-56.
- [347] A. Saberi, B.M. Chen, P. Sannuti: *Loop Transfer Recovery: analysis and design*, Springer Verlag, London, Berlin, 1993.
- [348] A. Saberi, P. Sannuti, B.M. Chen: *\mathcal{H}_2 optimal control*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.
- [349] A. Sage, J. Melsa: *Estimation theory with applications to communications and control*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1971.
- [350] M.G. Safonov: Imaginary-axis zeros in multivariable \mathcal{H}_∞ -optimal control, w R.F. Curtain (Ed.): *Modelling, robustness and sensitivity reduction in control systems*, NATO ASI Series, 34, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.
- [351] M. Salgado, R. Middleton, G.C. Goodwin: Connection between continuous and discrete Riccati equations with applications to Kalman filtering, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1988, 135 (1), 28-34.
- [352] C. Scherer: \mathcal{H}_∞ -control by state-feedback for plants with zeros on the imaginary axis, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (1), 123-142.
- [353] C. Scherer: \mathcal{H}_∞ -optimization without assumption on finite or infinite zeros, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (1), 143-166.
- [354] A. Schönhage: Quasi-GCD computations, *Journ. Complexity*, 1985, 1, 118-137.
- [355] Z. Schuss: *Theory and applications of stochastic differential equations*, John Wiley and Sons Ltd, New York, 1980.

- [356] J. Sefton, K. Glover: Pole/zero cancellations in the general \mathcal{H}_∞ problem with reference to a two-block design, *Systems and Control Letters*, 1990, 14 (3), 295-306.
- [357] M.M. Seron, J.H. Braslavsky, G.C. Goodwin: *Fundamental limitations in filtering and control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
- [358] A. Shapiro: Optimally scaled matrices, necessary and sufficient conditions, *Numer. Math.*, 1982, 39 (2), 239-245.
- [359] A. Shapiro: Optimal block diagonal l_2 -scaling of matrices, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1985, 22 (1), 81-94.
- [360] J. Shi, M.J. Gibbard: Discrete systems' models based on simple performance specifications in the time, frequency or complex z -domains, *Int. Journ. Control*, 1985, 42 (2), 517-527.
- [361] V. Sima, P. Petkov, S. Van Huffel: Efficient and reliable algorithms for condition estimation of Lyapunov and Riccati equations, *Proc. Symp. Math. Theory of Networks and Systems, MTNS-2000*, Perpignan, France, June 19-23, 2000, (CD-ROM).
- [362] R.D. Skeel: Scaling for numerical stability in Gaussian elimination, *Journ. Assoc. Computing Mach.*, 1979, 26 (3), 493-526.
- [363] S. Skogestad, I. Postlethwaite: *Multivariable feedback control*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, New York, 1996.
- [364] O.J.M. Smith: A controller to overcome dead time, *ISA Journ.* 1959, 6 (2), 28-33.
- [365] K. Sobczyk: *Stochastic differential equations with applications to physics and engineering*, Kluwer Academic Publishers Group, London, Dordrecht, 1991.
- [366] T. Söderström: Convergence properties of the generalized least squares identification method, *Automatica*, 1974, 10 (6), 617-626.
- [367] T. Söderström: Test of pole-zero cancellation in estimated models, *Automatica*, 1975, 11 (5), 537-541.
- [368] T. Söderström: On zero locations for sampled stochastic systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1990, AC-35 (11), 1249-1253.
- [369] T. Söderström, H. Fan, B. Carlson, M. Mossberg: Some approaches on how to use the delta operator when identifying continuous-time processes, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 890-895.
- [370] T. Söderström, P. Stoica: *System identification*, Prentice Hall International, Hemel Hemstead, U.K., 1989.
- [371] R. Soeterboek: *Predictive control, a unified approach*, Prentice Hall International, New York, London, 1992.

- [372] T. Song: Robust control and estimation for discrete-time systems with applications to finite word length design and robust detection, *Ph.D. Thesis*, FAMU-FSU College of Engineering, The Florida State University, 1999.
- [373] E. Soroka, U. Shaked: On the robustness of LQ regulators, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1984, AC-29 (7), 664-665.
- [374] E. Soroka, U. Shaked: On the stability robustness of the continuous-time LQG optimal control, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985, AC-30 (10), 1039-1043.
- [375] V. Sreeram, P. Agathoklis: Solution of Lyapunov equation with system matrix in companion form, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1991, 138 (6), 529-534.
- [376] W. Stadler: A survey of multicriteria optimization of the vector maximum problem, *Journ. Optimization Theory Appl.*, 1979, 29 (1), 1-52.
- [377] G. Stein, M. Athans: The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (2), 105-114.
- [378] G.W. Stewart: Perturbation theory for the singular value decomposition, *UMIACS - Techn. Report*, 1990, TR-90-124.
- [379] G.W. Stewart: Updating a rank revealing ULV decomposition, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1993, 14 (2), 494-499.
- [380] G.W. Stewart: Determining rank in the presence of error, w M.S. Moonen, G.H. Golub, B.L.R. DeMoor (Eds.): *Linear algebra for large scale and real-time applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [381] G.W. Stewart: *Matrix algorithms, vol. I: basic decompositions*, SIAM, Philadelphia, PA, 1998.
- [382] G.W. Stewart: *Matrix algorithms, vol. II: eigensystems*, SIAM, Philadelphia, PA, 2001.
- [383] G.W. Stewart, J. Sun: *Matrix perturbation theory*, Academic Press, London, 1990.
- [384] P. Stoica, T. Söderström: Common factor detection and estimation, *Upsala Univ. Techn. Report*, Systems Control Group, Dept. Technology, Upsala, Sweden, 1996.
- [385] A. Stoorvogel: *The \mathcal{H}_∞ control problem. A state space approach*, Prentice Hall, Inc., New York, 1992.
- [386] A. Stoorvogel: The discrete time \mathcal{H}_∞ control problem with measurement feedback, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (1), 182-202.
- [387] A. Stoorvogel, A. Saberi: The discrete algebraic Riccati equation and linear matrix inequality, *Linear Algebra Appl.*, 1998, 274, 317-365.

- [388] A. Stoorvogel, A. Saberi, B.M. Chen: The discrete-time \mathcal{H}_∞ control problem with strictly proper measurement feedback, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, 39 (9), 1936-1939.
- [389] P. Suchomski: Weighted mixed sensitivity synthesis in \mathcal{H}_∞ by J -lossless coprime factorisation, *Proc. XVII-th National Conf. Circuit Theory and Electronic Circuits*, Polanica-Zdrój, Poland, 1994, 131-136.
- [390] P. Suchomski: J -lossless coprime factorisation approach to weighted mixed sensitivity suboptimal synthesis in \mathcal{H}_∞ , *Proc. 2nd Int. Symp. Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'95*, Międzyzdroje, Poland, 1995, 1, 211-216.
- [391] P. Suchomski: An approach to suboptimal \mathcal{H}_∞ control via J -lossless coprime factorisation, *Proc. 3rd Int. Symp. Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'96*, Międzyzdroje, Poland, 1996, 2, 401-406.
- [392] P. Suchomski: A recursive method for model order reduction of discrete-time systems via q -Markov covariance equivalent realisations, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 1996, 23 (1/2), 127-135.
- [393] P. Suchomski: Structural properties of solutions of continuous-time and discrete-time matrix Lyapunov equations in controllable form, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1999, 146 (5), 477-483.
- [394] P. Suchomski: Stability robustness bounds for LQG continuous-time control systems with unstructured uncertainties, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2000, 36 (3), 401-440.
- [395] P. Suchomski: Robust PI and PID controller design in delta domain, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 2001, 148 (5), 350-354.
- [396] P. Suchomski: A J -lossless factorisation approach to \mathcal{H}_∞ control in delta domain, *Proc. 6th European Control Conf. ECC'01*, Porto, Portugal, 2001, FR-IS01-18, 3422-3427.
- [397] P. Suchomski: Numerical conditioning of delta-domain Lyapunov and Riccati equations, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 2001, 148 (6), 497-501.
- [398] P. Suchomski: Robust design in delta domain for SISO plants: phase advance and phase lag controllers, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2001, 41 (3), 503-549.
- [399] P. Suchomski: Conditioning of J -lossless factorisations for \mathcal{H}_∞ -control in delta domain, *Proc. 7th Int. Conf. Methods and Models in Automation and Robotics MMAR-2001*, Międzyzdroje, 2001, 211-216.
- [400] P. Suchomski: A J -lossless coprime factorisation approach to \mathcal{H}_∞ control in delta domain, *Automatica*, 2002, 38 (10), 1807-1814.
- [401] P. Suchomski: Robust design in delta domain for SISO plants: PI and PID controllers, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2002, 42 (1), 49-69.

- [402] P. Suchomski: A dual J -lossless factorisations for suboptimal \mathcal{H}_∞ estimation in delta domain, *Proc. 15th Trien. World Congress of the IFAC*, Barcelona, Spain, 2002, T-Fr-M05-4.
- [403] P. Suchomski: Numerically robust delta-domain solutions to discrete-time Lyapunov equations, *Systems and Control Letters*, 2002, 47 (4), 319-326.
- [404] P. Suchomski: J -lossless and extended J -lossless factorisations approach for δ -domain \mathcal{H}_∞ control, *Int. Journ. Control*, 2003, 76 (8), 794-809.
- [405] P. Suchomski: Robust pole placement in delta domain for SISO plants, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2003, 43 (4), 483-512.
- [406] P. Suchomski: J -lossless factorisations for robust \mathcal{H}_∞ -control in delta-domain, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2003, 43 (4), 525-555.
- [407] P. Suchomski: Numerically reliable \mathcal{H}_∞ -synthesis of estimators based on J -lossless factorisations, *Proc. 13th IFAC Symp. System Identification SYSID*, Rotterdam, the Netherlands, 2003, 1072-1077.
- [408] P. Suchomski: Remarks about numerical conditioning of discrete-time Riccati equations, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 2003, 149 (5), 449-456.
- [409] P. Suchomski: Numerically robust synthesis of discrete-time \mathcal{H}_∞ estimators based on J -lossless factorisations, *Control and Cybernetics*, 2003, 32 (4), 761-802.
- [410] P. Suchomski: Structural properties of discrete-time \mathcal{H}_∞ solutions based on J -lossless factorisations, artykuł zgłoszony do *Systems and Control Letters*, 2004.
- [411] P. Suchomski: Robust adaptive pole placement in \mathcal{H}_∞ , *Proc. Symp. Math. Theory of Networks and Systems*, Katholieke Univ., Leuven, Belgium, MA4.5, July 5-9, 2004, (CD-ROM).
- [412] P. Suchomski: Numerically robust solutions to \mathcal{H}_∞ control problems for augmented plants, artykuł zgłoszony do *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2004.
- [413] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Markov-equivalent continuous-time GPC design, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, Fr-M-B-1.
- [414] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Robust performance and stability of control systems - A unifying survey, *Proc. 4th Int. Symp. on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'97*, Międzyzdroje, 1997, 1, 187-194.
- [415] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: GPC tuning conditioning, *Proc. IFAC Workshop Adaptive Control and Signal Processing*, Glasgow, Scotland, 1998, 249-254.
- [416] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Analytical stable CGPC design for minimum-phase systems, *Int. Journ. Control*, 2000, 73 (17), 1605-1620.

- [417] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Analytical design of stable delta-domain generalized predictive control, *Int. Journ. Optimal Control Appl. and Methods*, 2002, 23, 239-273.
- [418] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Pre-arrangement of solvability, complexity, stability and quality of GPC systems, *Int. Journ. Adaptive Control and Signal Processing*, 2002, 16, 177-191.
- [419] P. Suchomski, Z. Kowalczyk: Robust \mathcal{H}_∞ -optimal synthesis of FDI systems, w J. Korbicz, J.M. Kościelny, Z Kowalczyk, W. Cholewa (Eds.): *Fault diagnosis. Models, artificial intelligence, applications*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004, 261-298.
- [420] T. Sugie, S. Hara: \mathcal{H}_∞ -suboptimal control problem with boundary constraints, *Systems and Control Letters*, 1989, 13 (1), 93-99.
- [421] J.G. Sun: Optimal backward perturbation bounds for the linear LS problem with multiple right-hand sides, *IMA Journ. Numer. Anal.*, 1996, 16 (1), 1-11.
- [422] J.G. Sun: Perturbation theory for algebraic Riccati equations, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 19 (1), 39-65.
- [423] J.G. Sun: Condition numbers of algebraic Riccati equations in the Frobenius norm, *Linear Algebra Appl.*, 2002, 350, 237-261.
- [424] H.K. Sung, S. Hara: Properties of sensitivity and complementary sensitivity functions in single-input single-output digital control systems, *Int. Journ. Control*, 1988, 48 (6), 2429-2439.
- [425] Y. Sung, M. Kung: Lower finite word-length effect on state space digital filter by δ operator realisation, *Int. Journ. Electron.*, 1993, 75 (6), 1135-1141.
- [426] Z. Świder: *Realizacje cyfrowe algorytmów sterowania i filtracji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 2003.
- [427] D. Tabak: Digitalization of control systems, *Computer Aided Design*, 1971, 3 (2), 13-18.
- [428] M. Tahk, J.L. Speyer: Modeling of parameter variations and asymptotic LQG synthesis, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (9), 793-801.
- [429] K. Takaba, T. Katayama: Discrete-time \mathcal{H}_∞ algebraic Riccati equation and parametrization of \mathcal{H}_∞ filters, *Int. Journ. Control*, 1996, 64 (6), 1129-1149.
- [430] L. Tan, A.C. Pugh: Non-standard \mathcal{H}_∞ control problem: a generalized chain-scattering representation approach, *Int. Journ. Control*, 2002, 75 (11), 775-783.
- [431] A. Tesfaye, M. Tomizuka: Zeros of discretized continuous systems expressed in the Euler operator - an asymptotic analysis, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995, AC-40 (4), 743-747.

- [432] M.C. Tsai, I. Postlethwaite: On J -lossless co-prime factorizations and \mathcal{H}_∞ control, *Int. Journ. Robust Nonlin. Control*, 1991, 1 (1), 47-68.
- [433] M.C. Tsai, C.S. Tsai: Formulation of the \mathcal{H}_∞ control problem by using chain scattering matrix description, *Proc. of the American Control Conf.*, Chicago, 1992, 1870-1871.
- [434] M.C. Tsai, C.S. Tsai: A chain scattering-matrix description approach to \mathcal{H}_∞ control, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1993, AC-38 (9), 1416-1421.
- [435] M.C. Tsai, C.S. Tsai: A transfer matrix framework approach to the synthesis of \mathcal{H}_∞ controllers, *Int. Journ. Robust Nonlin. Control*, 1995, 5 (2), 155-173.
- [436] M.C. Tsai, C.S. Tsai, Y.Y. Sun: On discrete-time \mathcal{H}_∞ control: a J -lossless coprime factorization approach, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1993, AC-38 (7), 1143-1147.
- [437] H. Unbehauen, B. Göhring: Tests for determining model order in parameter estimation, *Automatica*, 1974, 10 (3), 233-244.
- [438] T.J.J. Van den Boom, R.A.J. De Vries: Constrained predictive control using a time varying Youla parameter: a state space approach, *Proc. 3rd European Control Conf., ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 3235-3240.
- [439] T.J.J. Van den Boom, R.A.J. De Vries: Robust predictive control using a time varying Youla parameter, *Int. Journ. Applied Math. and Computer Science*, 1999, 9 (1), 101-128.
- [440] Van der Sluis: Condition numbers and equilibration of matrices, *Numer. Math.*, 1969, 14 (1), 14-23.
- [441] Van der Sluis: Condition, equilibration and pivoting in linear algebraic systems, *Numer. Math.*, 1970, 15 (1), 74-86.
- [442] Van der Sluis: Stability of the solutions of linear least squares problems, *Numer. Math.*, 1975, 23 (3), 241-254.
- [443] P.M. Van Dooren: The computation of Kronecker's canonical form of a singular pencil, *Linear Algebra Appl.*, 1979, 27, 103-141.
- [444] P.M. Van Dooren: A generalized eigenvalue approach for solving Riccati equations, *SIAM Journ. Sci. Stat. Comput.*, 1981, 2 (2), 121-135.
- [445] P.M. Van Dooren: The generalized eigenstructure problem in linear system theory, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, AC-26, 1, 111-129.
- [446] P.M. Van Dooren: Structured linear algebra problems in digital signal processing, w G.H. Golub, P.M. Van Dooren (Eds.): *Numerical linear algebra, digital signal processing and parallel algorithms*, NATO ASI Series, 70, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [447] P.M. Van Dooren: The basic developing numerical algorithms, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 18-27.

- [448] S. Van Huffel, V. Sima, A. Varga, S. Hammarling, F. Delebecque: High-performance numerical software for control, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 60-76.
- [449] C.F. Van Loan: Computing integrals involving the matrix exponential, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1978, AC-23 (3), 395-404.
- [450] A. Varga: Computation of Kronecker-like forms of a system pencil: applications, algorithms and software, *Proc. IEEE Int. Symp. on Computer Aided Control System Design, CACSD96*, Dearborn, MI, 1996, 77-82.
- [451] A. Varga: Numerical awareness in control, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 14-17.
- [452] M. Vidyasagar: *Control system synthesis - A Factorisation approach*, MIT Press, Cambridge, MA., 1985.
- [453] M. Vidyasagar, H. Schneider, B.A. Francis: Algebraic and topological aspects of feedback stabilization, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1982, AC-27 (4), 880-894.
- [454] B. Waldén, R. Karlson, J. Sun: Optimal backward perturbation bounds for the linear least squares problem, *Numer. Linear Algebra Appl.*, 1996, 2 (3), 271-286.
- [455] B. Wahlberg: Limit results for sampled systems, *Int. Journ. Control*, 1988, 48 (3), 1267-1283.
- [456] B. Wahlberg: The effects of rapid sampling in system identification, *Automatica*, 1990, 26 (1), 167-170.
- [457] D.J. Walker: Relationship between three discrete-time \mathcal{H}_∞ algebraic Riccati equation solutions, *Int. Journ. Control*, 1990, 52 (4), 801-809.
- [458] Z.Q. Wang, S. Skogestad: Robust control of time-delay systems using the Smith predictor, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (6), 1405-1420.
- [459] R.C. Ward: Numerical computation of the matrix exponential with accuracy estimate, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1977, 14 (3), 600-610.
- [460] G.A. Watson: An algorithm for optimal l_2 scaling of matrices, *IMA Journ. Numer. Anal.*, 1991, 11 (4), 481-492.
- [461] P. Wedin: Perturbation theory for pseudo-inverses, *BIT*, 1973, 13 (2), 217-232.
- [462] M. Wei; Perturbation of the least squares problem, *Linear Algebra Appl.*, 1990, 141, 177-182.
- [463] A. Weinmann: *Uncertain models and robust control*, Springer Verlag, Wien, 1991.

- [464] S.R. Weller: Comments on 'Zeros of discretized continuous systems expressed in the Euler operator - an asymptotic analysis', *IEEE Trans. Automatic Control*, 1998, AC-43 (9), 1308-1310.
- [465] S.R. Weller, R.H. Middleton: On the role of sampling zeros in robust sampled-data control design, *Techn. Report Dept. Electrical and Computer Eng.*, EE9807, University of Newcastle, Australia, 1998.
- [466] P.E. Wellstead, M.B. Zarrop: *Self-tuning systems*, John Wiley and Sons, Chichester, New York, 1991.
- [467] O.P. Whittle: *Optimal control*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, 1996.
- [468] M. Wicks, R.A. DeCarlo: Computing the distance to an uncontrollable system, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, AC-36 (1), 39-49.
- [469] J.H. Wilkinson: *Rounding errors in algebraic processes*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963.
- [470] J.H. Wilkinson: *The algebraic eigenvalue problem*, Oxford University Press, Oxford, 1965.
- [471] D. Williamson: *Digital control and implementation, finite wordlength considerations*, Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1991.
- [472] J.L. Willems, F.M. Gallier: The infinite horizon and the receding horizon LQ-problems with partial stabilization constraints, w S. Bittani, A.J. Laub, J.C. Willems (Eds.): *The Riccati equation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [473] J. Wu, S. Chen, G. Li, R.H. Istepanian, J. Chu: Shift and delta operator realisations for digital controllers with finite word length considerations, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 2000, 147 (6), 664-672.
- [474] J. Wu, S. Chen, G. Li, R.H. Istepanian, J. Chu: An improved closed-loop stability measures for finite-precision digital controller realizations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 2001, AC-46 (7), 1162-1166.
- [475] J. Wu, R.H. Istepanian, J. Chu, J.F. Whidborne, S. Chen, J. Hu: Stability issues of finite precision controller structures using the delta operator for sampled data systems, *Proc. 14th World Congress of IFAC*, Beijing, China, 1999, 9d-02-3, Q, 417-422.
- [476] C.S. Xiao, Z.M. Feng, X.M. Shan: On the solution of the continuous-time Lyapunov matrix equation in two canonical forms, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1992, 139 (3), 286-290
- [477] X. Xin, T. Mita: Inner-outer factorization for non-square proper functions with infinite and finite $j\omega$ -axis zeros, *Int. Journ. Control*, 1998, 71 (1), 145-161.

- [478] I. Yaesh, U. Shaked: A transfer function approach to the problems of discrete-time systems: H_∞ -linear control and filtering, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, 36 (11), 1264-1271.
- [479] T.W. Yoon, D.W. Clarke: Observer design in receding-horizon control, *Int. Journ. Control*, 1985, 61 (1), 171-191.
- [480] D.C. Youla, J.J. Bongiorno, H.A. Jabr: Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers; part I: the single-input case, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1976, AC-21 (1), 3-14.
- [481] D.C. Youla, H.A. Jabr, J.J. Bongiorno: Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers; part II: the multivariable case, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1976, AC-21 (2), 319-338.
- [482] E. Zafriou, M. Morari: Digital controllers for SISO systems: a review and a new algorithm, *Int. Journ. Control*, 1985, 42 (4), 855-876.
- [483] G. Zames: Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximation inverses, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, AC-26 (2) 301-320.
- [484] G. Zames, B.A. Francis: Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1983, AC-28 (5), 585-601.
- [485] J. Zhang: Property analysis of GPC based coefficient mapping, *Proc. 13th IFAC World Congress*, San Francisco, USA, June-July 1996, C, 457-462.
- [486] K. Zhou, J.C. Doyle: *Essentials of robust control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1998.
- [487] K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover: *Robust and optimal control*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 1996.

Sterowanie odporne polega na zapewnieniu układowi sterowania wymaganej stabilności oraz jakości w warunkach występowania niepewności w modelu sterowanego obiektu dynamicznego. Przedmiotem pracy są zagadnienia związane z syntezą liniowych algorytmów odpornego sterowania w czasie dyskretnym obiektami czasu ciągłego. Skupiono się na algorytmach wynikających z metod przestrzeni H_∞ . Wskazano na znaczenie analizy uwarunkowania zadania syntezy (optymalizacji) sterowania oraz na rolę oceny numerycznych błędów proponowanych algorytmów. Omówiono sposoby polepszania uwarunkowania poprzez zastosowanie modelowania opartego na operatorze *delta*.

W pracy wykazano przydatność łańcuchowych macierzy rozproszenia modelowanego obiektu, udowodniono szereg twierdzeń odnoszących się do J -bezstratnych faktoryzacji takich macierzy, a także omówiono strukturę algorytmów sterowania optymalnych ze względu na normę H_∞ .

Teoretyczne rozważania zilustrowano numerycznymi przykładami dotyczącymi zadań odpornego sterowania oraz estymacji stanu. Przykłady te obejmują między innymi: metodę rozmieszczania biegunów, sterowanie predykcyjne, a także sterowanie optymalne ze względu na kwadratowy wskaźnik jakości oraz ze względu na normę H_∞ .

ISSN 0208-8029

ISBN 83-85847-94-4

**W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl**