Polska Akademia Nauk · Instytut Badań Systemowych

Marek Libura

Analiza wrażliwości rozwiązań zadań optymalizacji dyskretnej

Analiza wrażliwości rozwiązań

zadań optymalizacji dyskretnej

Polska Akademia Nauk · Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 17

Redaktor naukowy:
Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 1993

Marek Libura

Analiza wrażliwości rozwiązań zadań optymalizacji dyskretnej

Zakład Wydawniczo-Poligraficzny SYNPRESS

Publikację opiniowali do druku:

prof. dr hab. Juliusz Lech Kulikowski
prof. dr hab. Eugeniusz Toczyłowski

Wykonano z oryginałów tekstowych
dostarczonych przez Instytut Badań Systemowych PAN

ISBN 83-85847-10-3
ISSN 0208-8029

WSTĘP

Analiza wrażliwości rozwiązań zadań optymalizacji jest działem zajmującym się badaniem wpływu zaburzeń danych zadania na jego rozwiązania. Zwykle jest zaliczana do tak zwanej *analizy pooptymalizacyjnej* (patrz np. [23,49]), która rozpoczyna się po uzyskaniu rozwiązania optymalnego lub przybliżonego zadania.

Podstawowy problem rozważany w analizie wrażliwości dla zadań optymalizacji dyskretnej polega na wyznaczeniu dla danego rozwiązania optymalnego lub suboptymalnego takich zmian danych zadania, przy których rozwiązanie to pozostaje rozwiązaniem optymalnym (suboptymalnym). Takie podzbiory danych zadania nazywane są *obszarami niewrażliwości rozwiązań* (patrz [48,49]). W konkretnych przypadkach badane są rozmaite warianty tego podstawowego problemu, sprowadzające się najczęściej do zawężenia go w taki sposób, że analizowane są jedynie obszary zmienności wybranych parametrów zadania (na przykład pojedyńczych współczynników) nie naruszające optymalności danego rozwiązania.

Takie postawienie problemu wrażliwości rozwiązań w optymalizacji dyskretnej różni się od typowego postawienia problemu wrażliwości na przykład w programowaniu nieliniowym (patrz np. [18]). W tym ostatnim przypadku celem analizy wrażliwości jest zwykle wyznaczenie zależności zmian rozwiązań optymalnych i wartości optymalnej zadania od niewielkich zaburzeń danych.

Analiza wrażliwości rozwiązań ma ścisły związek z innym działem analizy pooptymalizacyjnej - tak zwaną *analizą parametryczną rozwią-*

zań. Dotyczy ona sytuacji, w której zakłada się, że dane zadania zależą od pewnego zbioru parametrów. Celem analizy parametrycznej jest rozbicie całego obszaru zmienności parametrów na maksymalne w sensie zawierania podobszary, w których rozwiązania optymalne zadania pozostają niezmienne, a następnie wyznaczenie rozwiązań optymalnych dla każdego z tych obszarów. Tak więc każdy z obszarów znajdowanych w analizie parametrycznej jest pewnym podzbiorem obszaru niewrażliwości dla odpowiadającego mu rozwiązania optymalnego. Pozwala to na wykorzystanie wyników analizy wrażliwości w analizie parametrycznej.

Potrzeba prowadzenia analizy wrażliwości rozwiązań w optymalizacji dyskretnej wynika z tych samych przesłanek, co w przypadku innych działów optymalizacji. Podstawowym powodem badania wrażliwości rozwiązania w przypadku praktycznego problemu jest to, że rozwiązanie to jest uzyskiwane przy niedokładnych danych zadania. Wyznaczenie obszaru niewrażliwości lub jego podobszarów pozwala się zorientować, na ile wiarygodne jest takie rozwiązanie. Pozwala to również na wskazanie, które z parametrów modelu są najistotniejsze i powinny być w związku z tym estymowane ze szczególną uwagą.

W sposób naturalny obszar niewrażliwości określa również zakres stosowalności danego rozwiązania, a co za tym idzie, potrzebę reoptymalizacji przy dokładnych wprawdzie, ale zmieniających się danych. W przypadku optymalizacji dyskretnej argument ten staje się szczególnie istotny, ze względu na wysoką zwykle złożoność obliczeniową tego typu zadań. Przy tym sytuacje, w których zachodzi potrzeba rozwiązania sekwencji problemów nieznacznie różniących się danymi, zachodzą bardzo często. Powodem ich wystąpienia może być naturalna zmienność parametrów zadania (na przykład cen, itp.). Inny powód wynika ze specyfiki metod optymalizacji, które używają danego zadania jako podproblemu i w kolejnych iteracjach wymagają rozwiązania go dla innych, często nieznacznie zmienionych, danych. Z taką sytuacją mamy do czynienia na przykład przy rozwiązywaniu zadań dualnych (patrz np. [52]) oraz w metodzie podziału i oszacowań.

Prace dotyczące analizy pooptymalizacyjnej w optymalizacji dyskretnej zaczęły się pojawiać w pierwszej połowie lat siedemdziesiątych. Od tego czasu liczba publikacji dotyczących tej tematyki znacznie przekroczyła sto. Jednakże dziedzina ta nadal nie jest w pełni ukształtowana. Większość publikacji nadal koncentruje się na zagadnieniach dotyczących konkretnych szczególnych problemów.

Praca niniejsza jest pierwszą tak obszerną pozycją monograficzną dotyczącą ilościowych problemów analizy wrażliwości dla zadań optymalizacji dyskretnej. Zagadnienia jakościowego badania wrażliwości (przez co rozumie się na przykład analizę takich właściwości rozwiązań zadań z zaburzonymi parametrami, jak ciągłość multifunkcji opisujących zbiory rozwiązań dopuszczalnych i optymalnych) są tu całkowicie pominięte. Ta tematyka wykazuje zresztą znacznie więcej zbieżności z analogicznymi zagadnieniami w optymalizacji ciągłej i doczekała się opracowań monograficznych [4,66].

Zasadniczym zagadnieniem omawianym w pracy jest problem wyznaczania obszarów niewrażliwości dla rozwiązań optymalnych zadań dyskretnych, który jest traktowany jako centralny problem w analizie wrażliwości dla tych zadań. Inne zagadnienia są poruszane w bardzo niewielkim stopniu. Niemal całkowicie są pomijane wyniki dotyczące ilościowej analizy parametrycznej. Należy jednak sądzić, że ze względu na pilną potrzebę stworzenia skutecznych metod dla zagadnień parametrycznych, dziedzina ta stanie się w najbliższym czasie jednym z najbardziej dynamicznie rozwijających się działów optymalizacji dyskretnej.

Układ pracy jest następujący. Praca jest podzielona na trzy rozdziały.

Rozdział 1 przedstawia sformułowania podstawowych problemów pojawiających się w analizie pooptymalizacyjnej dla zadań dyskretnych.

Omawiane są również problemy, które tylko w niewielkim stopniu są rozwijane w dalszych częściach pracy, ale zostały tu zamieszczone dla pełności prezentacji. Rozdział rozpoczyna się od sformułowania klasy zadań dyskretnych, których dotyczą dalsze rozważania, oraz podania przykładów takich zadań.

Rozdział 2 jest opisem technik , które mogą być używane do znajdowania obszarów lub podobszarów niewrażliwości dla zadań optymalizacji dyskretnej. Prezentacja ta jest podporządkowana powiązaniom między analizą wrażliwości a możliwością sformułowania warunków optymalności rozwiązania. Obszernie są przedstawiane związki analizy wrażliwości z dualnością dla zadań dyskretnych.

Rozdział 3 jest najobszerniejszą częścią pracy i zawiera wyniki analizy wrażliwości dla kilku wybranych zadań optymalizacji dyskretnej. W trzech kolejnych podrozdziałach przedstawione są rezultaty uzyskane dla zadania znajdowania w matroidzie bazy o minimalnej wadze, binarnego zadania załadunku oraz zadań wyznaczania w grafie najkrótszej drogi i obwodu Hamiltona. Starano się, aby podrozdziały te mogły być czytane w dużym stopniu niezależnie od siebie, co powodowało konieczność przypominania i powtarzania niektórych oznaczeń. Jednakże występują ścisłe związki między tymi częściami pracy, na przykład w rozdziale o drogach i obwodach Hamiltoma w istotny sposób korzysta się z rezultatów uzyskanych dla baz matroidów.

Pracę kończy spis literatury, zawierający wybór ważniejszych pozycji dotyczących analizy wrażliwości dla zadań optymalizacji dyskretnej.

ROZDZIAŁ 2

METODY WYZNACZANIA OBSZARÓW NIEWRAŻLIWOŚCI

2.1 Wprowadzenie

W Rozdziale 1 wspomniano już, że jako główny problem w analizie wrażliwości dla zadań dyskretnych traktowane jest zagadnienie wyznaczania obszaru niewrażliwości dla danego rozwiązania optymalnego. Rozdział niniejszy poświęcony jest prezentacji najważniejszych metod używanych do opisu obszaru niewrażliwości, wyznaczania jego podzbiorów oraz stwierdzania, czy dany punkt jest elementem tego obszaru.

Zagadnienie wyznaczania obszaru niewrażliwości danego rozwiązania zadania ma ścisły związek z warunkami optymalności tego rozwiązania. Z tego właśnie punktu widzenia zostały potraktowane w dalszych rozważaniach poszczególne techniki znajdowania obszarów niewrażliwości.

Punkt 2.2 prezentuje rolę warunków optymalności w analizie wrażliwości, natomiast punkt 2.3 jest obszernym przedstawieniem zastosowania dualności w znajdowaniu obszarów niewrażliwości.

2.2 Warunki optymalności dla zadań optymalizacji dyskretnej i ich wykorzystanie w analizie wrażliwości

Rozważmy ponownie zadanie optymalizacji dyskretnej w postaci

$$\min_{X \in \mathcal{F}(u)} \sum_{e \in X} c(e) \tag{2.1}$$

i niech, jak poprzednio, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{U}$ będzie obszarem możliwych danych $p = (c,u)$ zadania, gdzie $c = (c(e_1),\dots,c(e_n))^T \in \mathcal{C}$, oraz $u \in \mathcal{U}$. Niech X^o będzie znanym rozwiązaniem optymalnym zadania (2.1) uzyskanym dla $p^o = (c^o, u^o)$.

Zasadniczą rolę w analizie wrażliwości dla zadania (2.1) odgrywa możliwość sformułowania warunków optymalności rozwiązania X^o. Łatwo bowiem zauważyć, że problem określenia warunków koniecznych i dostatecznych optymalności X^o dla zadania (2.1) i problem wyznaczenia obszaru niewrażliwości rozwiązania X^o są bardzo ściśle ze sobą związane. Załóżmy bowiem, że potrafimy dla zadania (2.1) wypisać warunki konieczne i dostateczne optymalności rozwiązania X^o. Przyjmijmy ponadto, że warunki te mają postać układu nierówności

$$J_q(X^o, c, u) \le 0 \quad \text{dla} \quad q \in Q, \tag{2.2}$$

gdzie Q jest zbiorem indeksów, a J_q, $q \in Q$, są pewnymi funkcjami rzeczywistymi, $J_q : \mathcal{F} \times \mathcal{C} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$.

Mamy wówczas, w oczywisty sposób,

$$P(X^o) = \{(c,u) \in \mathcal{P} : J_q(X^o, c, u) \le 0 \quad \text{dla} \quad q \in Q \}. \tag{2.3}$$

W niektórych działach programowania matematycznego (na przykład w programowaniu liniowym, programowaniu wypukłym, programowaniu geometrycznym) można w stosunkowo prosty sposób skorzystać z warunków optymalności dla efektywnej analizy wrażliwości [18,20,74,86]. W optymalizacji dyskretnej sytuacja jest znacznie gorsza, bowiem bardzo rzadko się zdarza, abyśmy dysponowali warunkami koniecznymi i dostatecznymi optymalności danego rozwiązania. Z taką wyjątkową sytuacją mamy do czynienia w przypadku opisanego w Rozdziale 3 zadania znajdowania w matroidzie bazy o minimalnej wadze i wtedy analiza wrażliwości okazuje się stosunkowo prosta. Zauważmy jednak, że dzięki skończoności zbioru rozwiązań dopuszczalnych, zawsze możemy wypisać *trywialne* warunki konieczne i dostateczne optymalności rozwiązania X^o dla zadania (2.1). Wynikają one bezpośrednio z definicji rozwiązania optymalnego i mają postać następującą :

X^o jest rozwiązaniem optymalnym zadania (2.1) dla danego $u \in \mathcal{U}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X^o \in \mathcal{F}(u)$ oraz

$$C(X^o) \le C(X) \quad \text{dla każdego} \quad X \in \mathcal{F}(u). \tag{2.4}$$

Szanse efektywnego skorzystania z powyższych oczywistych warunków optymalności są niewielkie, chociaż można sobie wyobrazić proste sytuacje, w których przy ustalonym u opis zbioru rozwiązań dopuszczalnych jest na tyle prosty, że zależności (2.4) dają akceptowalny obliczeniowo opis obszaru niewrażliwości rozwiązania X^o. Zwykle jednak na to, aby opis powyższy był użyteczny, musi być w przypadku konkretnego problemu istotnie uproszczony. Takie podejście jest prezentowane w punkcie 3.3, gdzie punktem wyjścia do opisu obszaru niewrażliwości dla zadania załadunku są, w istocie, trywialne warunki optymalności rozwiązania, a następnie dokonywane są uproszczenia tego opisu.

Innym wykorzystaniem trywialnych warunków optymalności (2.4) jest użycie ich do wyprowadzenia pewnych ogólnych formuł opisujących takie wielkości, jak promień niewrażliwości czy promień stabilności danych. Formuły takie nie są wprawdzie zwykle użyteczne jako praktyczne sposoby wyznaczania tych wielkości, ale pozwalają na badanie pewnych ogólnych właściwości obiektów występujących w analizie wrażliwości. Poniższy przykład ilustruje takie możliwości.

Przykład 2.1

Rozważmy zagadnienie wyznaczania promienia niewrażliwości rozwiązania optymalnego X^o zadania (P) uzyskanego dla $p^o = (c^o, u^o)$, w przypadku, gdy parametr u jest ustalony i $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$, to znaczy gdy $\mathcal{P} = \mathbb{R}^n \times \{u^o\}$. Załóżmy, że zaburzamy wektor kosztów c w taki sposób, że $\|c - c^o\| \le r$, gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę Czebyszewa w $\mathbb{R}^n$, a r jest ustaloną liczbą rzeczywistą. Chcemy znaleźć promień niewrażliwości rozwiązania X^o, co oznacza w tym przypadku wyznaczenie maksymalnej wartości r, dla której kula $K_r(p^o)$ należy do obszaru niewrażliwości $P(X^o)$.

Zauważmy, że dla dowolnego $X \in \mathcal{F}$

$C(X) - C(X^o) = C(X\backslash X^o) - C(X^o\backslash X) =$

$(C(X\backslash X^o) - C^o(X\backslash X^o)) - (C(X^o\backslash X) - C^o(X^o\backslash X)) + C^o(X) - C^o(X^o),$

gdzie $C^o(Y)$, $Y \subseteq S$, jest wagą zbioru Y dla wektora kosztów c^o.

Trywialne warunki optymalności (2.4) są więc spełnione dla X^o i danego $c \in \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $X \in \mathcal{F}\backslash\{X^o\}$

$(C(X\backslash X^o) - C^o(X\backslash X^o)) - (C(X^o\backslash X) - C^o(X^o\backslash X)) + C^o(X) - C^o(X^o) \le 0.$

Ale przy założeniu, że $\|c - c^o\| \le r$ mamy

$|C(X\backslash X^o) - C^o(X\backslash X^o)| \le r|X\backslash X^o|$

oraz

$|C(X^o\backslash X) - C^o(X^o\backslash X)| \le r|X^o\backslash X|,$

a zatem maksymalną wartością r, przy której powyższe warunki optymalności są spełnione dla dowolnego $c \in K_r(c^o)$, jest

$$\rho(P,p^o) = \min_{X \in \mathcal{F} \setminus \{X^o\}} \frac{C^o(X) - C^o(X^o)}{|X \setminus X^o| + |X^o \setminus X|} = \min_{X \in \mathcal{F} \setminus \{X^o\}} \frac{C^o(X) - C^o(X^o)}{|X| + |X^o| - 2|X \cap X^o|} .$$

W podobny sposób, korzystając z trywialnych warunków optymalności (2.4), można wyprowadzić wyrażenie (patrz [45]) na promień stabilności rozwiązania, będące punktem wyjścia dla całego podejścia prezentowanego w pracach [44,45,46]. Przy przyjętych wyżej założeniach wyrażenie to ma postać następującą :

$$\rho_\Omega(P,p^o) = \min_{X \in \mathcal{F} \setminus \Omega} \ \max_{X^* \in \Omega} \frac{C^o(X) - C^o(X^*)}{|X| + |X^*| - 2|X \cap X^*|} ,$$

gdzie Ω jest zbiorem rozwiązań optymalnych zadania (P) z danymi p^o.

Jak już wspomniano, podane wyżej wyrażenia mają niewielkie znaczenie dla praktycznych obliczeń. Pozwalają jednak na wyciąganie pewnych prostych wniosków.

Przyjmijmy na przykład, że oprócz wymienionych wyżej założeń dotyczących obszaru $\mathcal{P}$ wiadomo, że X^o jest jedynym rozwiązaniem optymalnym i wszystkie składowe wektora c^o są liczbami wymiernymi, to znaczy $c_i^o = \dfrac{l_i^o}{m_i^o}$, $i = 1,\dots,n$. Wówczas z podanych wyżej formuł wynika, że zarówno promień niewrażliwości, jak i promień stabilności danych nie mogą być mniejsze niż $1/(2\mu n)$, gdzie μ jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb m_i^o, $i = 1,\dots,n$. □

2.2.1 Warunki optymalności oparte na prostych relaksacjach i restrykcjach zadania.

Mimo braku warunków koniecznych i dostatecznych optymalności, mamy w programowaniu dyskretnym często możliwość sformułowania różnorodnych warunków *dostatecznych* optymalności. Chociaż zwykle nie są one również warunkami koniecznymi optymalności, to odgrywają bardzo istotną rolę w analizie wrażliwości. Pozwalają bowiem często na wyznaczenie podzbioru obszaru niewrażliwości rozwiązań. Najczęstszym źródłem warunków dostatecznych optymalności rozwiązań są *relaksacje* (osłabienia) oryginalnego zadania.

Definicja 2.1

Relaksacją zadania

$$(P) \qquad \min_{X \in \mathcal{F}(u)} C(X)$$

dla danego $u \in \mathcal{U}$ nazywamy zadanie

$$(R) \qquad \min_{X \in \mathcal{F}'} C'(X),$$

gdzie $\mathcal{F}(u) \subseteq \mathcal{F}'$ oraz $C'(X) \le C(X)$ dla każdego $X \in \mathcal{F}(u)$.

Relaksacje zadań są zwykle konstruowane w taki sposób, że zmiany danych zadania pierwotnego (P) znajdują bezpośrednie odbicie w zmianach danych relaksacji, co oznacza, że C' można traktować jako funkcję c oraz $\mathcal{F}'$ jest pewną funkcją zależną od u, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'(u)$. Fakt ten odgrywa istotną rolę w analizie wrażliwości rozwiązań.

Różnorodne relaksacje zadań są powszechnie używane w optymalizacji dyskretnej. Często przy tym spotykana jest sytuacja, w której $C' = C$. Relaksacje tego typu odgrywają ogromną rolę w algorytmach rozwiązywania zadań, na przykład przy szacowaniu wartości optymalnej podproblemów w metodzie podziału i oszacowań (patrz [21]). Zasadniczym faktem, na którym opiera się wykorzystanie relaksacji w analizie wrażliwości, jest następujący dobrze znany warunek dostateczny optymalności.

Lemat 2.1

Jeśli dla $(c,u) \in (\mathcal{C} \times \mathcal{U})$, X^* jest rozwiązaniem optymalnym relaksacji (R) zadania (P) oraz $X^* \in \mathcal{F}(u)$, to X^* jest też rozwiązaniem optymalnym zadania (P).

Dowód. Dowód wynika natychmiast z faktu, że jeśli X^* jest rozwiązaniem optymalnym zadania (R), to z definicji relaksacji wynika, że spełnione są trywialne warunki konieczne i dostateczne optymalności (2.4).

■

Pojęciem w pewnym sensie odwrotnym do relaksacji zadania jest *restrykcja* (wzmocnienie) zadania (P).

Definicja 2.2

Zadanie

$$\text{(Q)} \qquad \min_{X \in \mathcal{F}''} C''(X)$$

nazywamy restrykcją zadania (P) dla danego $u \in \mathcal{U}$, jeśli $\mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F}(u)$ oraz $C''(X) \geq C(X)$ dla $X \in \mathcal{F}''$.

Podobnie, jak w przypadku relaksacji, użyteczne dla analizy wrażliwości są takie restrykcje (Q) zadania (P), dla których istnieje zależność między C'' i c oraz $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}''(u)$.

Zastosowanie restrykcji w analizie wrażliwości opiera się na następującym prostym fakcie [23] :

Lemat 2.2

Jeśli X^o jest rozwiązaniem optymalnym zadania (P) oraz jest jednocześnie rozwiązaniem dopuszczalnym restrykcji (Q) zadania (P), a ponadto zachodzi równość $C''(X^o) = C(X^o)$, to X^o jest też rozwiązaniem optymalnym zadania (Q).

Dowód. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że ponieważ $C''(X) \geq C(X)$ dla $X \in \mathcal{F}''$, to X^o spełnia trywialne warunki optymalności (2.4) sformułowane dla zadania (Q). ■

Lemat 2.2 formułuje warunki dostateczne optymalności dla zadania (Q). Dopóki warunki te są spełnione, dopóty dane zadania definiujące restrykcję (Q) określają punkt należący do obszaru niewrażliwości rozwiązania X^o. Dobór restrykcji i powiązanie parametrów zadań (P) i (Q) są zwykle bardzo naturalne i chociaż przesłanki, na których opiera się taka analiza wrażliwości, są bardzo oczywiste, to jej rezultaty mogą być użyteczne.

Bardzo prostym wnioskiem z Lematu 2.2 jest poniższy fakt opisujący podzbiór obszaru niewrażliwości $P(X^o)$. Niech dla danego $u \in \mathcal{U}$, $\mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F}(u)$ oraz $X^o \in \mathcal{F}''$. Oznaczmy

$$\begin{aligned} \bar{C} = \{ d \in \mathcal{C} : \ & d(e) \geq c(e) \quad \text{dla} \quad e \notin X^o, \\ & d(e) = c(e) \quad \text{dla} \quad e \in \hat{X}^o \}. \end{aligned}$$

Wniosek 2.1

$$(\bar{C} \times \{u\}) \cap \mathcal{P} \subseteq P(X^o).$$

Dowód. Dowód powyższej inkluzji wynika natychmiast z obserwacji, że zadanie $\min\{ C''(X) : X \in \mathcal{F}'' \}$ dla $C''(X) = \sum_{e\in X} d(e)$ jest restrykcją zadania (P) i X^o spełnia założenia Lematu 2.2.

■

Przykład 2.1

Niech $x^o = (x^o_1, \dots, x^o_n)^T$ będzie rozwiązaniem optymalnym zadania programowania binarnego (1.1), tzn.

$$x^o = \arg\min \{ c^T x : Ax \geq b,\ x \in \{0,1\}^n \},$$

gdzie $(A,b) \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^m$, $c \in \mathcal{C} = \mathbb{R}^n$.

Przyjmijmy, że obszarem interesujących nas danych zadania jest zbiór $\mathcal{P} = \mathcal{C} \times \mathcal{U} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^m$ i wprowadźmy następujące oznaczenia :

$I_0 = \{ i=1,\dots,n : x^o_i = 0 \}$ oraz $I_1 = \{ i=1,\dots,n : x^o_i = 1 \}$.

Z Wniosku 2.1 wynika, że obszar niewrażliwości $P(X^o)$ zawiera wszystkie punkty $(\bar{c},\bar{A},\bar{b}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^m$ takie, że

$\bar{c}_i = c_i$ dla $i \in I_1$,

$\bar{c}_i \geq c_i$ dla $i \in I_0$,

$\bar{A}^1 x^o \geq \bar{b}$,

$\bar{A} \leq A$,

$\bar{b} \geq b$.

Mamy tu więc do czynienia z przypadkiem opisu jednoczesnych zmian danych, kiedy zwiększeniu ulegaja współczynniki wektora funkcji celu i prawych stron ograniczeń i równocześnie maleją elementy macierzy ograniczeń. □

2.2.2. Warunki optymalności związane z relaksacją ciągłą zadania.

Z bardzo ważnym przykładem, ilustrującym wykorzystanie relaksacji w analizie wrażliwości, mamy do czynienia wówczas, gdy jako relaksacja zadania (P) brany jest problem, w którym zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathcal{F}$ jest zastąpiony powłoką wypukłą wektorów charakterystycznych elementów zbioru $\mathcal{F}$. Mamy wówczas do czynienia z zadaniem programowania liniowego (ciągłego) i warunki optymalności rozwiązania optymalnego wynikają z bogatej teorii programowania liniowego. Przypadek ten omówimy bardziej szczegółowo, bowiem dodatkowo ilustruje on dobrze istotę trudności w analizie wrażliwości dla zadań optymalizacji dyskretnej.

Załóżmy, że zmiany danych mogą dotyczyć jedynie funkcji celu zadania (P). Może to mieć miejsce wówczas, gdy parametr u definiujący rodzinę zbiorów dopuszczalnych $\mathcal{F}(u)$ jest ustalony, albo gdy, jak w omawianych wyżej przykładach, problem jest definiowany dla niesparametryzowanej rodziny $\mathcal{F}$ zbiorów dopuszczalnych. Można więc przyjąć, że $\mathcal{U} = \{u_0\}$.

Niech, jak poprzednio, $\xi(X) \in \mathbb{R}^n$ będzie wektorem charakterystycznym zbioru $X \in \mathcal{F}$, to znaczy $\xi(X) = (\xi_1(X),\dots,\xi_n(X))^T$, gdzie dla $i=1,\dots,n$, $\xi_i(X) = 1$, jeśli $e_i \in X$, oraz $\xi_i(X) = 0$ w przeciwnym przypadku.

Oznaczmy symbolem F zbiór wektorów charakterystycznych elementów rodziny $\mathcal{F}$ i niech conv(F) oznacza powłokę wypukłą zbioru F.

Ponieważ F jest zbiorem skończonym, zatem istnieje skończona liczba ścian wyznaczających conv(F), to znaczy

$$\mathrm{conv}(F) = \{\ x \in \mathbb{R}^n :\ (h^i)^T x \le h_o^i,\quad i \in I\ \},$$

gdzie I jest zbiorem indeksów nierówności definiujących ściany, $h^i \in \mathbb{R}^n$, $h_o^i \in \mathbb{R}$ dla $i \in I$.

Zadanie (P) może być teraz zapisane jako problem minimalizacji funkcji liniowej na wielościanie wypukłym (patrz na przykład [21]) :

$$\min_{x \in \mathrm{conv}(F)} \sum_{i=1}^{n} c(e_i)\ x_i .$$

Znajomość opisu zbioru conv(F) sprowadza więc problem (P) do zadania programowania liniowego, a badanie wrażliwości rozwiązań optymalnych przy zmianach wag wektora c - do standardowej analizy pooptymalizacyjnej w programowaniu liniowym (patrz [20,86]).

Załóżmy teraz, że wektor c może być dowolnym elementem $\mathbb{R}^n$ (to znaczy $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$).

Niech $\xi(X^o)$ będzie wektorem charakterystycznym rozważanego rozwiązania optymalnego X^o i niech I^o będzie zbiorem indeksów ścian wielościanu conv(F) przechodzących przez punkt $\xi(X^o)$, tzn.:

$$I^o = \{\ i \in I :\ (h^i)^T\ \xi(X^o) = h_o^i\ \}.$$

Oznaczmy symbolem $D(X^o)$ stożek wyznaczony przez wektory h^i, $i \in I^o$, czyli

$$D(X^o) = \{\ x \in \mathbb{R}^n :\ (h^i)^T x \le 0,\quad i \in I^o\}.$$

Z teorii programowania liniowego (patrz na przykład [77]) wynika następujący fakt :

Lemat 2.3
$P(X^o) = G(X^o) \times \mathcal{U}$, gdzie $G(X^o) = \{ c \in \mathbb{R}^n : c^T x \le 0,\ x \in -D(X) \}$.

■

Dopuszczalny obszar zmienności wektorów c nie naruszających optymalmości rozwiązania X^o jest więc stożkiem biegunowym stożka $-D(X^o)$. Z właściwości stożków biegunowych wynika teraz (patrz np. [73]), że

$$G(X^o) = \{ c \in \mathbb{R}^n : c = \sum_{i \in I_o} -h^i \lambda_i\ ,\ \lambda_i \ge 0 \ \text{dla}\ i \in I^o \}.$$

Wyznaczanie opisu zbioru conv(F) jest zwykle bardzo trudne. Tylko w nielicznych przypadkach pełny opis ścian tego wielościanu jest znany. Tak jest na przykład dla zadania maksymalnego skojarzenia w grafie i zostało to wykorzystane w [49] do analizy wrażliwości dla tego zadania. Ale i wtedy praktyczne skorzystanie z powyższego lematu jest ograniczone do zadań o bardzo niewielkich rozmiarach ze względu na szybki wzrost mocy zbioru I wraz z rozmiarem zadania. Zdarza się jednak, że w wyniku zastosowanej metody rozwiązywania zadania uzyskiwany jest pewien częściowy opis wielościanu conv(F) w okolicy punktu $\xi(X^o)$, a ściślej, wyznaczany jest stożek wypukły D' taki, że $D(X^o) \subseteq D'$, a ponadto wektor współczynników funkcji celu c spełnia warunek $c \in G'$, gdzie G' jest stożkiem biegunowym stożka D'. Ponieważ $G' \subseteq G(X^o)$, zatem G' wyznacza pewien podzbiór obszaru niewrażliwości rozwiązania X^o. Z taką sytuacją mamy na przykład do czynienia, kiedy zadanie jest rozwiązywane z użyciem odcięć (patrz [21]). W klasycznych metodach odcięć, stosowanych głównie do zadań programowania całkowitoliczbowego liniowego, wektor optymalny $\xi(X^0)$ jest uzyskiwany jako rozwiązanie zadania programowania liniowego otrzymywanego poprzez uzupełnienie oryginalnych ograniczeń zadania dodatkowymi nierównościami liniowymi (tak zwanymi odcięciami Gomory'ego), wyznaczanymi w wyniku formalnych przekształceń pierwotnych ograniczeń. Podejście to jest obecnie uważane za mało efektywne. Możliwościom różnego rodzaju analizy pooptymalizacyjnej związanym z odcięciami Gomory'ego są poświęcone prace [31,32,37].

W ostatnich latach intensywnie były rozwijane badania dotyczące wielościanów rozwiązań dopuszczalonych dla różnego rodzaju zadań optymalizacji kombinatorycznej (patrz [2,26,42,73]). Doprowadziło to do znalezienia wielu typów ścian dla takich problemów, jak zadanie komiwojażera, zadanie załadunku, zadanie rozbicia zbiorów i inne. Wprawdzie zwykle nadal nie pozwala to na pełny opis powłoki wypukłej rozwiązań dla większości zadań kombinatorycznych, ale umożliwia konstruowanie bardzo efekywnych algorytmów opartych na idei podziału i odcięć (*branch and cut*) (patrz np. [13,42]). W trakcie działania tego typu algorytmów uzyskiwana jest pewna liczba nierówności generujących ściany conv(F), które jednocześnie wyznaczają podzbiór obszaru niewrażliwości rozwiązania.

2.2.3. Warunki optymalności oparte na znajomości podzbioru rozwiązań najlepszych.

Stosunkowo proste warunki optymalności można uzyskać łącząc odpowiednie relaksacje oryginalnego zadania z generowaniem podzbioru kilku rozwiązań o najmniejszych wartościach wag. Punktem wyjścia do opisywanego tu podejścia jest idea zawarta w [64].

Rozważmy zbiór wszystkich rozwiązań dopuszczalnych zadania (P) ponumerowanych w taki sposób, że

$$C(X^o) \le C(X^1) \le C(X^2) \le \ldots \le C(X^s), \tag{2.5}$$

gdzie $s = |\mathcal{F}|-1$.

Rozwiązanie X^k w tak skonstruowanym ciągu będziemy nazywać *k-tym najlepszym rozwiązaniem* zadania (P).

Załóżmy teraz, że oprócz rozwiązania optymalnego X^o znamy jeszcze k-1 kolejnych elementów ciągu (2.5). Wiele algorytmów rozwiązywania zadań dyskretnych daje się w stosunkowo łatwy sposób zmodyfikować tak, aby oprócz rozwiązania optymalnego generowały również kolejne wyrazy ciągu (2.5). Również dodatkowy nakład obliczeń związany z taką modyfikacją jest często niewielki (patrz np. [10,15,27,34,64]).

Niech

$$\mathcal{K} = \{X^1, \ldots, X^{k-1}\}$$

oraz

$$\delta = C(X^{k-1}) - C(X^o).$$

Niech ponadto dla $c' \in \mathcal{C}$

$$z(C') = \min\{C'(Y) : Y \in \mathcal{F},\ C(Y) \ge C(X^o) + \delta\}, \tag{2.6}$$

gdzie $C'(Y)$, $Y \subseteq \mathcal{F}$, jest wagą podzbioru Y dla wektora wag c'.

Poniższy prosty lemat formułuje warunek dostateczny optymalności rozwiązania X^o, który można wykorzystać przy badaniu dopuszczalnych zaburzeń danych w funkcji celu zadania (P).

Lemat 2.4

X^o jest rozwiązaniem optymalnym zadania (P) z funkcją celu C', jeśli

(i) $C'(X^o) \le C'(Y)$ dla każdego $Y \in \mathcal{K}$

oraz

(ii) $C'(X^o) \le z$ dla pewnego $z \le z(C')$.

Dowód. Warunek (i) żąda, żeby waga rozwiązania X^o dla wektora wag c' była nie większa niż waga dowolnego rozwiązania ze zbioru $\mathcal{K}$. Na to, aby X^o pozostawało rozwiązaniem optymalnym zadania (P) przy funkcji celu C' wystarcza więc, aby warunek (ii) wymuszał, że waga $C'(X^o)$ jest nie większa niż waga dowolnego rozwiązania ze zbioru $\mathcal{F}\setminus\mathcal{K}$, to znaczy, musi zachodzić nierówność

$$z \le \bar{z}, \tag{2.7}$$

gdzie

$$\bar{z} = \min\{C'(Y) : Y \in \mathcal{F}\setminus\mathcal{K}\}. \tag{2.8}$$

Ale tak istotnie jest, bowiem zadanie (2.8) jest relaksacją zadania (2.6). Aby to pokazać zauważmy, że funkcje celu w obu zadaniach są identyczne, natomiast z definicji δ wynika, że

$$\mathcal{F}\setminus\mathcal{K} \subseteq \{Y \in \mathcal{F} : C(Y) \ge C(X^o) + \delta\}.$$

Mamy więc $z(C') \le \bar{z}$, co implikuje (2.7).

∎

Lemat powyższy nie pozwala w prosty sposób wypisać układu nierówności opisującego podzbiór obszaru niewrażliwości rozwiązania

X^o. Umożliwia jednak badanie czy konkretna wartość wektora c' należy do obszaru niewrażliwości $P(X^o)$. Aby to zrobić, potrzebne jest wyznaczenie odpowiedniego progu z. Na to, aby warunki dostateczne optymalności wynikające z Lematu 2.4 nie były trywialne, próg ten musi być dostatecznie bliski $z(C')$. Jednakże wyznaczenie wartości $z(C')$ dla ustalonego wektora c' jest równie trudne, jak rozwiązanie oryginalnego zadania. Na to więc, aby opłacalne było korzystanie z Lematu 2.4, wartość z musi być wyznaczana nie poprzez policzenie wartości $z(C')$, lecz poprzez tańsze obliczeniowo znalezienie jej oszacowania dolnego. Takie oszacowanie można uzyskać z relaksacji zadania (2.6). Zależnie od konkretnej postaci rodziny $\mathcal{F}$ może być opłacalne rozważanie różnych relaksacji. Dwie najprostsze prowadzą do rozwiązywania zadań załadunku. Mają one następującą postać :

$$z'(C') = \min\{C'(Y) : Y \in 2^S,\ C(Y) \geq C(X^o) + \delta\}, \tag{2.9}$$

$$z''(C') = \min\{(c')^T y : y \in \mathbb{R}^n,\ c^T y \geq c^T x^o + \delta,\ 0 \leq y \leq 1\}, \tag{2.10}$$

gdzie $x^o = \xi(X^o)$.

W przypadku (2.9) mamy do czynienia z binarnym zadaniem załadunku, bowiem jak łatwo zauważyć, (2.9) jest równoważne zadaniu

$$z'(C') = \min\ \{(c')^T y : c^T y \geq c^T x^o + \delta,\ y \in \mathbb{B}^n\}.$$

Zadanie (2.10) jest ciągłą relaksacją (2.9). Z właściwości relaksacji wynika, że $z''(C') \leq z'(C') \leq z(C')$. Zatem jako próg z można wziąć wartość optymalną jednego z zadań (2.9) lub (2.10).

2.2.4. Warunki optymalności dla wyznaczania tolerancji wag elementów

Możliwość sformułowania warunków optymalności rozwiązania zależy w istotny sposób od postaci obszaru $\mathcal{P}$ dopuszczalnych zmian danych zadania. Z bardzo ważnym przypadkiem takiego szczególnego obszaru dopuszczalnych zmian mamy do czynienia wówczas, gdy założymy, że $\mathcal{P} = \mathcal{P}_e = \mathcal{C}_e \times \mathcal{U}_o$, gdzie $\mathcal{C}_e = \{d \in \mathbb{R}^n : d(u) = c(u)$ dla $u \neq e$, $d(e) \in \mathbb{R}\}$ i $\mathcal{U}_o = \{u_o\}$. Oznacza to, że wszystkie elementy danych zadania, z wyjątkiem jednego skalarnego współczynnika będącego wagą elementu e, są ustalone. Z Lematu 2.3 wynika, że obszar niewrażliwości rozwiązania optymalnego X^o jest wówczas zbiorem wypukłym. Wyznaczenie obszaru niewrażliwości $P(X^o)$ polega więc w tym przypadku na znalezieniu maksymalnego przyrostu (oznaczanego symbolem $t^+(e,X^o)$) i maksymalnego zmniejszenia (oznaczanego symbolem $t^-(e,X^o)$) wagi elementu e, nie naruszających optymalności rozwiązania X^o. Wielkości $t^+(e,X^o)$ i $t^-(e,X^o)$ będziemy nazywać odpowiednio *tolerancją górną* i *tolerancją dolną* wagi elementu e względem rozwiązania X^o.

Warunki optymalności rozwiązania X^o przy tak zdefiniowanym obszarze dopuszczalnej zmienności danych mają związek z pewnymi zadaniami pomocniczymi określonymi na podzbiorach rodziny $\mathcal{F}$.
Niech dla $e \in S$,

$$\mathcal{F}_e = \{ X \in \mathcal{F} : e \in X \}$$

oraz

$$\mathcal{F}^e = \{ X \in \mathcal{F} : e \notin X \}.$$

Przyjmijmy ponadto konwencję, że jeśli zadanie minimalizacji jest sprzeczne, to jego wartość optymalna jest równa ∞. Podobnie, w przypadku sprzecznego zadania maksymalizacji przyjmujemy, że jego wartość optymalna jest równa $-\infty$. Zachodzi następujący prosty fakt :

Lemat 2.5

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by rozwiązanie optymalne X^o zadania (P) uzyskane dla danych $p^o = (c^o, u^o)$ było rozwiązaniem optymalnym zadania (P) dla $p = (c, u^o)$, jest spełnienie następujących nierówności :

$c(e) \le c^o(e) + \min \{ C(X) : X \in \mathcal{F}^e \} - C(X^o)$ dla $e \in X^o$,

$c(e) \ge c^o(e) - \min \{ C(X) : X \in \mathcal{F}_e \} + C(X^o)$ dla $e \notin X^o$.

Dowód. Rozważmy przypadek, gdy $e \in X^o$. Jest oczywiste, że waga elementu e może dowolnie maleć i nie narusza to optymalności rozwiązania X^o. Jeśli natomiast waga elementu e rośnie, a wagi pozostałych elementów nie ulegają zmianie, to wówczas w taki sam sposób rosną wagi wszystkich rozwiązań dopuszczalnych należących do $\mathcal{F}_e$, a wagi rozwiązań należących do $\mathcal{F}^e$ pozostają niezmienione. Na to, by X^o było nadal rozwiązaniem optymalnym, potrzeba więc i wystarcza, aby przyrost wagi elementu e nie przekroczył różnicy między najmniejszą wagą rozwiązania dopuszczalnego ze zbioru $\mathcal{F}^e$ a wartością $C(X^o)$. Dowód w przypadku, gdy $e \notin X^o$, jest analogiczny.

■

Natychmiastową konsekwenją powyższego lematu jest

Wniosek 2.2

Jeśli $e \in X^o$, to $t^-(e, X^o) = \infty$ oraz

$$t^+(e, X^o) = \min \{ C(X) : X \in \mathcal{F}^e \} - C(X^o). \tag{2.11}$$

Jeśli $e \notin X^o$, to $t^+(e, X^o) = \infty$ oraz

$$t^-(e, X^o) = \min \{ C(X) : X \in \mathcal{F}_e \} - C(X^o). \tag{2.12}$$

■

Występujące w (2.11) i (2.12) zadania optymalizacyjne mogą być w ogólnym przypadku równie trudne, jak oryginalne zadanie (P), a zatem wyznaczanie tolerancji na podstawie powyższego wniosku może być obliczeniowo bardzo złożone. Praktycznie interesująca jest jednak sytuacja, gdy wraz z rozwiązaniem X^o dysponujemy oszacowaniami dolnymi wartości rozwiązań zadań pomocniczych w (2.11) i (2.12), to znaczy, gdy znane są wielkości v^e, v_e takie, że

$$v^e \le \min \{ C(X) : X \in \mathcal{F}^e \},$$

$$v_e \le \min \{ C(X) : X \in \mathcal{F}_e \}.$$

Mamy wówczas oszacowania od dołu wartości tolerancji wag elementów, bowiem z (2.11) i (2.12) wynika natychmiast, że

$$t^+(e,X^o) \ge \max \{ 0, v^e - C(X^o) \},$$

$$t^-(e,X^o) \ge \max \{ 0, v_e - C(X^o) \}.$$

Wielkości v^e, v_e dla niektórych elementów zbioru S mogą być dostępne jako w pewnym sensie produkt uboczny rozwiązania zadania (P). Tak jest na przykład w przypadku metody podziału i oszacowań z wykorzystaniem relaksacji ciągłej pierwotnego zadania, gdy wraz z rozwiązaniem optymalnym dysponujemy zwykle tak zwanymi pseudokosztami (patrz np. [90]).

2.3 Związki analizy wrażliwości z dualnością

Teoria dualności odgrywa zasadniczą rolę w analizie wrażliwości w takich działach programowania matematycznego, jak programowanie liniowe, programowanie wypukłe, programowanie geometryczne. W optymalizacji dyskretnej rola zadań dualnych jest również bardzo istotna, chociaż sytuacja jest tu zasadniczo różna. Główna różnica polega na tym, że w optymalizacji dyskretnej mamy do czynienia z wieloma typami zadań dualnych, a ponadto wyniki są zwykle słabsze w tym sensie, że zazwyczaj nie zachodzi silne twierdzenie o dualności, a co za tym idzie, ze związków między zadaniami prymarnym i dualnym nie wynikają warunki konieczne i dostateczne optymalności analizowanego rozwiązania. Sytuację tę omówimy szczegółowo w punkcie 2.3.2, natomiast w punkcie 2.3.1 przedstawimy podstawowy schemat tworzenia zadań dualnych zaproponowany w [52]. Pozwala on na konstruowanie różnych typów zadań dualnych rozważanych w optymalizacji dyskretnej.

2.3.1 Zadania dualne w optymalizacji dyskretnej

Tworzenie zadań dualnych wiąże się z wprowadzonym w poprzednim punkcie pojęciem relaksacji zadania. Rozważmy parę zadań :
zadanie pierwotne (prymarne)

$$(P) \qquad \min_{X \in \mathcal{F}} C(X)$$

oraz jego relaksację

$$(R) \qquad \min_{X \in \mathcal{F}'} C'(X).$$

Przy konstrukcji zadań dualnych zachodzi potrzeba rozważania nie pojedyńczej relaksacji zadania, lecz rodziny relaksacji, utworzonej jako rodzina podobnych zadań, z których każde jest wyznaczone przez parametr q należący do tak zwanego *zbioru zmiennych dualnych* Q. Poniższe przykłady pokazują, jak mogą być tworzone tego typu rodziny dla często stosowanych relaksacji.

Załóżmy, że problem (P) jest zadaniem optymalizacji dyskretnej, w którym rodzina rozwiązań dopuszczalnych jest przecięciem dwóch rodzin zbiorów, to znaczy

$$\mathcal{F} = \mathcal{G} \cap \mathcal{X}, \qquad \text{gdzie } \mathcal{G},\mathcal{X} \subseteq 2^S. \tag{2.13}$$

Przyjmijmy ponadto, że rodzina $\mathcal{G}$ jest zadana przez układ ograniczeń nałożonych na wektory charakterystyczne $x = \xi(X)$ zbiorów będących elementami tej rodziny :

$$\mathcal{G} = \{ X \subseteq S : g(x) \le b \}, \tag{2.14}$$

gdzie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, $b \in \mathbb{R}^s$.

Mamy więc do czynienia z następującym zadaniem prymarnym :

$$\begin{aligned} &\min C(X) \\ &\quad g(x) \le b \\ &\quad\; X \in \mathcal{X} , \end{aligned} \tag{2.15}$$

przy czym $x = \xi(X)$, $X \subseteq S$.

Taka postać zadania występuje bardzo często w różnych sytuacjach. Rodzina $\mathcal{X}$ opisuje wówczas zwykle cechy strukturalne rozwiązań. Na przykład $\mathcal{X}$ może być rodziną podzbiorów krawędzi grafu tworzących drogi w grafie, natomiast rodzina $\mathcal{G}$ obejmuje tylko te podzbiory krawędzi, których moc jest nie mniejsza niż zadana liczba k. Jeśli funkcja celu jest zdefiniowana jako suma długości krawędzi, to mamy wówczas problem wyznaczania najkrótszej drogi zawierającej co najmniej k krawędzi grafu. Zauważmy, że również standardowe zadanie programowania binarnego (1.1) ma strukturę zbioru rozwiązań dopuszczalnych taką, jak zadanie (2.15).

Przedstawienie zbioru rozwiązań dopuszczalnych w postaci (2.15) jest zwykle podyktowane względami algorytmicznymi. Często bowiem zadanie optymalizacyjne na zbiorze $\mathcal{X}$ jest proste i dopiero warunek $X \in \mathcal{G}$ czyni je trudnym obliczeniowo. Powszechnie w takich przypadkach stosowana bywa *relaksacja Lagrange'a* zadania (2.15) :

$$\min_{X\in\mathcal{X}} \left(C(X) + \lambda\, [g(x) - b] \right) \tag{2.16}$$

definiowana dla pewnego wektora $\lambda \in \mathbb{R}^s_+$.

Inną często stosowaną relaksacją jest tak zwana *relaksacja z ograniczeniem zastępczym*. Ma ona postać zadania, w którym warunek $X \in \mathcal{G}$ jest zastąpiony dla pewnego ustalonego wektora $\omega \in \mathbb{R}^s_+$ pojedyńczym ograniczeniem

$$\omega^T g(x) \le \omega^T b.$$

Zadanie ma więc postać

$$\min \{ C(X) : \omega^T g(x) \le \omega^T b,\ X \in \mathcal{X} \}. \tag{2.17}$$

Relaksacja powyższa jest również często atrakcyjna obliczeniowo ze względu na skuteczne techniki rozwiązywania zadań typu zadania załadunku.

W obydwu omówionych wyżej przypadkach, każda konkretna relaksacja wiąże się z wyborem tak zwanego *parametru relaksacji* : w przypadku reaksacji Lagrange'a jest to wektor λ mnożników Lagrange'a, a w przypadku zadania (2.17) - wektor ω mnożników ograniczenia zastępczego. W powyższych przykładach mnożniki te pełnią rolę wspomnianych wyżej zmiennych dualnych. W przypadku zadań (2.16), (2.17) zbiorem zmiennych dualnych Q jest stożek $\mathbb{R}^s_+$.

We wszystkich podanych dotąd przykładach zbiorem zmienych dualnych był zbiór wektorów rzeczywistych. Obszerną klasę relaksacji otrzymujemy, gdy jako zbiór Q jest przyjęty pewien podzbiór $\mathcal{D}$ zbioru F^s_+ funkcji rzeczywistych niemalejących $F : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$. Dwa przykłady takich relaksacji otrzymujemy, uogólniając w naturalny sposób wspomniane wyżej relaksacje (2.16) i (2.17). Otrzymujemy wówczas *l-relaksację* (od *lagrangean relaxation*) oraz *s-relaksację* (od *surrogate relaxation*).

Dla dowolnej funkcji $F \in F^s_+$ l-relaksacja ma postać :

$$\min_{X \in \mathcal{X}} [C(X) + F(g(x)) - F(b)], \tag{2.18}$$

natomiast s-relaksacja jest zdefiniowana następująco

$$\min [C(X) : F(g(x)) \le F(b), X \in \mathcal{X}]. \tag{2.19}$$

Związki między powyższymi zadaniami oraz właściwości tych zadań są omówione dokładniej w [52].

Załóżmy teraz, że dla zadania prymarnego (P) mamy określoną rodzinę relaksacji $\{(R_q),\ q \in Q\}$, gdzie zadanie wyznaczone przez parametr dualny q ma postać

$$(R_q) \qquad \min_{X \in \mathcal{F}_q} C_q(X).$$

Niech $v(R_q)$ oznacza wartość optymalną zadania (R_q).

Definicja 2.3

Zadaniem dualnym do zadania (P) wyznaczonym przez rodzinę relaksacji $\{(R_q),\ q \in Q\}$ nazywamy zadanie

$$(D) \qquad \sup_{q \in Q} v(R_q). \tag{2.20}$$

Przy opisanym wyżej schemacie tworzenia zadań dualnych mamy do czynienia z dużą ich różnorodnością, spowodowaną wyborem rozmaitych typów relaksacji oraz zbiorów zmiennych dualnych. Jeśli na przykład zadaniem prymarnym jest (2.15) i jako zbiór zmiennych dualnych wybierzemy dowolny niepusty podzbiór $\mathcal{D} \subseteq F_+^s$, to biorąc jako relaksację zadania l-relaksację (2.18), otrzymujemy tak zwane zadanie *l-dualne* w postaci

$$(D_l) \qquad \sup_{F \in \mathcal{D}} \min_{X \in \mathcal{X}} [C(X) + F(g(X)) - F(b)]. \tag{2.21}$$

Natomiast wybierając jako relaksację s-relaksację (2.19), otrzymujemy zadanie *s-dualne* w postaci

$$(D_s) \qquad \sup_{F \in \mathcal{D}} \min[C(X) : F(g(x)) \le F(b),\ X \in \mathcal{X}]. \tag{2.22}$$

Podobnie, biorąc jako zbiór zmiennych dualnych $\mathbb{R}^s_+$, a jako relaksację odpowiednio wspomnianą wyżej relaksację Lagrange'a albo relaksację z ograniczeniem zastępczym, otrzymujemy często spotykane zadanie dualne Lagrange'a i zadanie dualne ograniczenia zastępczego.

W analizie związków między zadaniami dualnymi istotną rolę odgrywa jeszcze jedno zadanie, nazywane zadaniem *f-dualnym* [52,89]. Zadanie f-dualne dla problemu (2.15) jest formułowane następująco :

$$
\begin{array}{lll}
(D_f) & \sup F(b) & \\
 & F(g(x)) \geq C(X) \quad \text{dla } X \in \mathcal{X} & (2.23) \\
 & F \in \mathcal{D}, &
\end{array}
$$

gdzie $\mathcal{D}$ jest dowolnym niepustym podzbiorem F^s_+.

Zadanie powyższe można również wyprowadzić z ogólnego schematu tworzenia zadań dualnych (patrz [52]), biorąc jako relaksację patologiczne zadanie $\min\{F(b) : X \in \mathcal{X}\}$, a jako zbiór zmiennych dualnych $Q = \{F \in \mathcal{D} : F(g(x)) \geq C(X) \text{ dla } X \in \mathcal{X}\}$.

Niech teraz $v(D_l)$, $v(D_s)$ i $v(D_f)$ oznaczają odpowiednio wartości optymalne zadań l-dualnego, s-dualnego i f-dualnego. Zachodzi następujący fakt [52], nazywany słabym twierdzeniem o dualności, który podamy tu bez dowodu :

Twierdzenie 2.1

Dla dowolnego niepustego podzbioru $\mathcal{D} \subseteq F^s_+$ zachodzą nierówności

$$v(P) \geq v(D_s) \geq v(D_l) \geq v(D_f).$$

■

Rozważmy teraz parę zadań: zadanie prymarne (P) i zadanie dualne (D). Istotną rolę, jeśli chodzi o możliwości wykorzystania zadania dualnego w analizie wrażliwości dla zadania prymarnego, odgrywa wielkość nazywana *odstępem dualności*, definiowana następująco :

$$\Delta = v(P) - v(D).$$

Jest pożądane, aby wartość odstępu dualności była równa zeru albo możliwie mała. Uzyskanie zerowego odstępu dualności nie zawsze jest możliwe. Na przykład w przypadku zadania dualnego Lagrange'a i zadania dualnego ograniczenia zastępczego, często musimy się liczyć z niezerowym odstępem dualności. W przypadku zadań l-dualnego, s-dualnego i f-dualnego, możliwy jest taki dobór zbioru zmiennych dualnych, że odstęp dualności jest równy zeru. Należy jednak mieć na uwadze fakt, że mamy tu do czynienia z trudnymi zadaniami optymalizacyjnymi.

Istota postępowania gwarantującego zerowy odstęp dualności dla zadań (D_l), (D_s) i (D_f) polega na doborze na tyle obszernego zbioru zmiennych dualnych, aby zawierał on funkcję, nazywaną *funkcją zaburzeń zadania* (2.15).

Definicja 2.4

Funkcją zaburzeń zadania (2.15) nazywamy funkcję $\zeta : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, gdzie

$$\zeta(y) = \min_{X \in \mathcal{X}} \{C(X) : g(x) \le y\}. \qquad (2.24)$$

Poniższe twierdzenie, które również przytoczymy bez dowodu, (patrz [52,83,89]) określa warunek dostateczny zerowania się odstępu dualności dla zadań (D_l), (D_s) i (D_f).

Twierdzenie 2.2

Jeśli w przypadku zadania (2.15) zbiór $\mathcal{D}$ zawiera funkcję zaburzeń ζ, to wówczas

$$v(P) = v(D_s) = v(D_l) = v(D_f). \qquad \blacksquare$$

Założenia powyższego twierdzenia są bardzo silne. Żądanie, aby zbiór $\mathcal{D}$ zawierał funkcję zaburzeń zadania, prowadzi do bardzo trudnych zadań optymalizacyjnych. Wynika to z właściwości funkcji zaburzeń zadań dyskretnych, która zwykle nie jest funkcją ciągłą. Zgodnie z podaną w Rozdziale 1 klasyfikacją problemów analizy pooptymalizacyjnej, badanie przebiegu funkcji zaburzeń należy do analizy parametrycznej rozwiązań. Dla niektórych problemów optymalizacji dyskretnej właściwości funkcji zaburzeń są częściowo znane (patrz np. [6,7]).

2.3.2 Wykorzystanie zadań dualnych w analizie wrażliwości

Zadanie dualne z zerowym odstępem dualności może być użyte do określenia podzbioru obszaru niewrażliwości rozwiazania X^o. Niech $\{(R_q),\ q \in Q\}$ będzie rodziną relaksacji wyznaczającą zadanie dualne. Oznaczmy:

$$P_R = \{(c,u) \in \mathcal{P} \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{U} : \begin{array}{ll} \text{(i)} & X^o \in \mathcal{F}(u), \\ \text{(ii)} & q^* \in Q, \\ \text{(iii)} & C(X^o) = v(R_{q^*}) \ \}. \end{array}$$

Zauważmy, że parametr q^* spełniający warunki (ii),(iii) jest rozwiązaniem optymalnym zadania dualnego, wyznaczonego przez rodzinę relaksacji $\{(R_q),\ q \in Q\}$. Zachodzi następujący fakt:

Wniosek 2.3

$$P_R \subseteq P(X^o). \tag{2.25}$$

Dowód. Rozważmy dowolną parę (c,u) spełniającą warunki (i),(ii),(iii). Z konstrukcji zadania dualnego wynika, że (R_{q^*}) jest relaksacją zadania (P), a ponieważ spełnione są warunki (i) i (iii), to X^o jest też rozwiązaniem optymalnym (R_{q^*}). Na podstawie warunku (i) X^o jest rozwiązaniem dopuszczalnym (P), a zatem z Lematu 2.1 wynika, że (c,u) należy do obszaru niewrażliwości rozwiązania X^o.

■

Wniosek 2.3 jest podstawą następującego postępowania prowadzącego do wyznaczenia podzbioru obszaru niewrażliwości rozwiązania X^o :

1^o Mając dane rozwiązanie X^o oraz określony obszar $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{U}$ dopuszczalnych zmian parametrów zadania (P), należy wybrać rodzinę relaksacji $\{(R_q),\ q \in Q\}$ zadania (P) taką, że rozwiązanie q^* zadania dualnego opartego na tej rodzinie spełnia warunek $v(R_{q^*}) = C(X^o)$.

2^o Następnie należy rozważyć, w jaki sposób zmiany danych $(\underline{c},\underline{u}) \in \mathcal{P}$ zadania prymarnego przenoszą się na zaburzenia danych relaksacji. Dla potrzeb analizy wrażliwości istotne jest, aby relaksacja (R_{q^*}) dała się przedstawić w następującej postaci :

$$V(q^*,\underline{c},\underline{u}) = \min_{X\in\mathcal{F}'} C'(X), \tag{2.26}$$

gdzie $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'_{q^*}(\underline{u})$ oraz $C'(X) = C'(X,\underline{c})$.

3^o Zgodnie z Wnioskiem 2.3, do obszaru niewrażliwości rozwiązania X^o zadania (P) należą te dane $(\underline{c},\underline{u}) \in \mathcal{P}$, dla których :

(i) X^o jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania prymarnego, to znaczy $X^o \in \mathcal{F}(\underline{u})$;

(ii) Zadanie (2.26) jest relaksacją zadania prymarnego $\min\{\underline{C}(X) : X \in \mathcal{F}(\underline{u})\}$;

(iii) Zachodzi równość $\underline{C}(X^o) = V(q^*,\underline{c},\underline{u})$.

Sprawdzenie warunków (i) oraz (ii) jest zwykle proste. Natomiast wyznaczenie danych, dla których zachodzi (iii), może być w konkretnym przypadku trudne. Zauważmy, że w istocie weryfikacja równości (iii) wymaga umiejętności prowadzenia w pewnym zakresie analizy parametrycznej dla relaksacji (2.26). Nie jest to wprawdzie pełna analiza parametryczna rozumiana tak, jak w Rozdziale 1, bowiem potrzebne jest jedynie wyznaczenie parametrycznej funkcji wartości zadania bez konieczności znajdowania rozwiązań, ale i tak może to być obliczeniowo skomplikowane. Z drugiej strony, można się spodziewać, że relaksacja będzie zadaniem znacznie łatwiejszym niż oryginalny problem (P), a co za tym idzie, analiza pooptymalizacyjna dla relaksacji może być również znacznie prostsza.

Omawiane podejście jest wykorzystywane w Rozdziale 3 do analizy wrażliwości dla zadania komiwojażera, a zadanie dualne jest konstruowane w oparciu o rodzinę relaksacji, będących zadaniami wyznaczania minimalnych drzew rozpinających uzupełnionych.

Rozważana wyżej sytuacja dotyczy przypadku, gdy udaje się znaleźć zadanie dualne, dla którego odstęp dualności jest równy zeru. W pozostałych przypadkach sytuacja jest bardziej złożona. Schemat postępowania, podobny do omawianego wyżej, pozwala wówczas na wyznaczenie podzbioru danych należących do tak zwanego *obszaru*

ε-*niewrażliwości*, to znaczy takiego zbioru dopuszczalnych parametrów, dla których dane rozwiązanie pozostaje rozwiązaniem ε-optymalnym. Zadanie dualne z niezerowym odstępem dualności może być też użyte do znajdowania podzbiorów zbioru $P(X^o)$. Tak jest to robione w punkcie 3.4 dla zadania komiwojażera. Również w tym przypadku istotne jest uzyskanie możliwie małego odstępu dualności.

Jak już wspomniano wyżej, zerowy odstęp dualności może być zagwarantowany w przypadku zadania f-dualnego z odpowiednio dobranym zbiorem funkcji dualnych $\mathcal{D}$. Warunkiem wystarczającym jest wybranie takiego zbioru $\mathcal{D}$, który zawiera funkcję zaburzeń zadania.

Rozważmy parę zadań : zadanie prymarne w postaci

$$(\bullet) \qquad \begin{aligned} &\min C(X) \\ &\quad g(x) \le b \\ &\quad X \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

oraz zadanie f-dualne

$$(\bullet\bullet) \qquad \begin{aligned} &\sup F(b) \\ &\quad F(g(x)) \ge C(X) \quad \text{dla każdego } X \in \mathcal{X} \\ &\quad F \in \mathcal{D} \subseteq F^s_+ . \end{aligned}$$

Zadanie f-dualne pozwala na sformułowanie następującego warunku optymalności rozwiązania X^o (patrz [89]) :

Twierdzenie 2.3

Zbiór X^o jest rozwiązaniem optymalnym zadania (•) wtedy i tylko wtedy, gdy

(i) $g(x^o) \le b$,

(ii) $X^o \in \mathcal{X}$

oraz istnieje funkcja $F^o \in F^s_+$ taka, że

(iii) $F^o(g(x^o)) \ge C(X^o)$,

(iv) $C(X^o) = F^o(b)$.

■

Rozwiązanie zadania f-dualnego jest zwykle niejednoznaczne i istnieją liczne funkcje spełniające założenia Twierdzenia 2.3. Mając dowolną taką funkcję i wypisując układ warunków (i)-(iv), uzyskujemy opis podzbioru obszaru niewrażliwości $P(X^o)$. Zauważmy, że twierdzenie powyższe jest dodatkowo atrakcyjne ze względu na to, że pozwala badać równoczesne zmiany wielu parametrów zadania. Niejednoznaczność rozwiązania zadania dualnego powoduje jednak, że mimo iż dysponujemy tu warunkami koniecznymi i dostatecznymi optymalności rozwiązania, to nie mając wszystkich funkcji spełniających warunki (iii), (iv), możemy wyznaczyć jedynie podzbiór obszaru niewrażliwości.

Podstawową trudnością w omawianym podejściu jest znalezienie funkcji $F^o \in F^s_+$ spełniającej warunki (iii), (iv). Jest to zadanie trudne nawet w tych przypadkach, gdy dzięki znajomości właściwości funkcji zaburzeń dla konkretnego zadania, można na podstawie Twierdzenia 2.2 ograniczyć klasę funkcji, w obrębie których należy poszukiwać rozwiązania zadania dualnego.

Pewną szansę na skorzystanie z wyników Twierdzenia 2.3 daje poczyniona w [89] obserwacja, że niektóre algorytmy rozwiązywania oryginalnego zadania można w nieznaczny sposób zmodyfikować po to, by wraz z rozwiązaniem optymalnym generowały pewną funkcję dualną.

W [89] opisano strukturę funkcji dualnych, które wiążą się z typowymi podejściami do rozwiązywania zadań programowania całkowitoliczbowego liniowego : metodą podziału i oszacowań, metodą odcięć Gomory'ego oraz podejściem wykorzystującym relaksację Lagrange'a. Zadanie, dla którego prowadzono te rozważania, jest klasycznym problemem o postaci

$$
\begin{aligned}
\max\ & c^T x \\
Ax &\le b \\
x &\ge 0 \\
x &\in \mathbb{Z}^n,
\end{aligned}
\qquad (2.27)
$$

przy czym $\mathbb{Z}$ jest zbiorem liczb całkowitych i dane zadania są całkowitoliczbowe, to znaczy $c \in \mathbb{Z}^n$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$. Omawiane wcześniej zadanie programowanie binarnego jest szczególnym przypadkiem zadania (2.27) otrzymywanym wówczas, gdy układ ograniczeń $Ax \le b$ zawiera warunki $x \le e$, gdzie e jest n-wymiarowym wektorem jednostkowym.

Znaną klasyczną metodą rozwiązywania zadania (2.27) jest metoda form całkowitych (metoda odcięć) Gomory'ego (patrz np. [21]) i na jej podstawie zilustrujemy omawiane podejście. W kroku t tej metody (gdzie $t = 0,1,\dots,r$) jest rozwiązywane zadanie (P^t), będące restrykcją ciągłej relaksacji zadania (2.27), (to znaczy relaksacji powstałej przez odrzucenie warunków $x \in \mathbb{Z}^n$). Jako zadanie (P^0) jest brana ciągła relaksacja zadania (P), natomiast zadanie (P^{t+1}) jest tworzone poprzez dodanie do zadania (P^t) odcięcia Gomory'ego, to znaczy ograniczenia liniowego o postaci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^t x_i \le b^t.$$

Można pokazać, że ograniczenie to daje się zawsze zapisać następująco:

$$\sum_{i=1}^{n} F^t(A^j)\, x_j \le F^t(b),$$

gdzie F^t jest pewną funkcją rzeczywistą $F^t : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Załóżmy, że do rozwiązania zadania (2,19) użyto r odcięć. Oznacza to, że w wyniku rozwiązania zadania (P^r) jako zwykłego problemu programowania liniowego (ciągłego) otrzymano jako rozwiązanie optymalne wektor całkowitoliczbowy.
Niech $u = (u_1,\dots,u_m,\ u_{m+1},\dots,u_{m+r})$ będzie rozwiązaniem optymalnym klasycznego (znanego z programowynia liniowego) zadania dualnego do problemu (P^r). Wówczas, jak pokazano w [32,89], rozwiązaniem optymalnym dla zadania f-dualnego dla problemu (2.27) jest następująca funkcja $F^o : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$:

$$F^o(d) = \sum_{i=1}^{m} u_i d_i + \sum_{t=1}^{r} u_{m+t} F^t(d). \qquad (2.28)$$

Korzystając z wyników w [32] można w sposob jawny wypisać postać funkcji F^o. Niech bowiem $B(t)^{-1}$ będzie odwrotnością macierzy bazowej dla zadania (P^t) i niech $q(t)$ oznacza wiersz tej macierzy odpowiadający tak zwanemu wierszowi źródłowemu (patrz [21]), z którego wygenerowane zostało odcięcie o numerze t. Wówczas funkcje, występujące w wyrażeniu (2.28) są tworzone następująco :

$$F^1(d) = [\ \{q(0)\}\ d\ ],$$
$$F^2(d) = [\ \{q(1)\}\ (d^T, F^1(d))^T\ ],$$
$$\dots$$
$$F^t(d) = [\ \{q(t-1)\}\ (d^T, F^1(d)^T, \dots, F^{t-1}(d))^T\ ],$$

gdzie [a], {a} oznaczają odpowiednio część całkowitą i część ułamkową liczby a, natomiast ^{T} jest symbolem transpozycji wektora.

Wspomniana wyżej modyfikacja algorytmu odcięć dla wykorzystania jego wyników do konstrukcji funkcji dualnej wymaga więc zapamiętywania dla każdego z generowanych odcięć wektora q(t).

ZAKOŃCZENIE

Analiza wrażliwości rozwiązań staje się obecnie dynamicznie rozwijającym się działem optymalizacji dyskretnej. Jednakże nadal pozostaje w niej wiele nierozwiązanych problemów. Również często możliwości obliczeniowe badania wrażliwości rozwiązań znacznie odbiegają od praktycznych potrzeb. W dużym stopniu jest to następstwem faktu, że same zadania optymalizacji dyskretnej są zwykle trudne. Wymownym objawem tych trudności jest to, że obecnie żaden komercyjny pakiet, przeznaczony do rozwiązywania zadań dyskretnych, nie oferuje jakichkolwiek możliwości analizy pooptymalizacyjnej.

Wydaje się, że obecnie trudno się spodziewać istotnego postępu, jeśli chodzi o ogólne techniki rozwiązywania problemów z zakresu analizy wrażliwości. Ciągle perspektywiczne wydają się natomiast badania dla poszczególnych klas zadań, a zwłaszcza badania związane z konkretnymi algorytmami używanymi dla tych klas zadań. W przypadku każdego takiego algorytmu zasadne jest postawienie na przykład pytań o zakres i koszty obliczeniowe modyfikacji, jakie należałoby wprowadzić dla ułatwienia reoptymalizacji. Celowe jest również analizowanie każdego z takich algorytmów z punktu widzenia możliwości użycia go do rozwiązywania nie tylko pojedyńczego zadania, ale całej rodziny zadań parametrycznych.

Z praktycznego punktu widzenia bardzo pożądane wydają się również badania nad przybliżonym rozwiązywaniem zadań z zakresu analizy pooptymalizacyjnej. Dotyczy to dwóch grup zagadnień. Pierwsza jest związana z przybliżoną analizą wrażliwości i analizą parametryczną dla rozwiązań optymalnych zadań (na przykład wyznaczanie jedynie dolnych oszacowań tolerancji, oszacowań promienia niewrażliwości, przybliżone określanie przedziału zmian wartości optymalnej zadania przy zmianie parametrów, itp.). Druga grupa zagadnień dotyczy podobnych problemów, ale formułowanych dla rozwiązań przybliżonych zadań. Takie postawienie celów w analizie wrażliwości powinno zwykle być satysfakcjonujące z praktycznego punktu widzenia, a równocześnie daje szansę na dostarczenie metod akceptowalnych obliczeniowo.

LITERATURA

[1] A.W. Aho, J.E Hopcroft, J.D. Ullman - *Projektowanie i analiza algorytmów komputerowych*. PWN, Warszawa, 1983.

[2] E. Balas - Facets of the knapsack polytope. *Mathematical Programming*, 8 (1975) 146-164.

[3] M.G. Bailey, B.E. Gillet - Parametric integer programming analysis: a contraction approach. *Journal of the Operational Research Society*, 31 (1980) 257-262.

[4] B. Bank - Qualitative Stabilitatsuntersuchungen rein- und gemischt-ganzzahliger linearer parametrischer Optimierungsprobleme. Seminarberigcht Humboldt Universität, 14, nr 6, 1978.

[5] B. Bank - Stability analysis in pure and mixed integer programming. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 23 (1980) 148-153.

[6] C.E. Blair, R.G. Jeroslow - The value function of an integer program. *Mathematical Programming*, 23 (1982) 237-273.

[7] C.E. Blair, R.G. Jeroslow - Constructive characterization of the value function of a mixed-integer program II. *Discrete Applied Mathematics*, 10 (1885) 227-240.

[8] J. Błażewicz - *Złożoność obliczeniowa problemów kombinatorycznych.* WNT, Warszawa, 1988.

[9] V.J. Bowman - The structure of integer programs under the Hermite normal form. *Operations Research*, 22 (1974) 1067-1080.

[10] P.J. Brucker, H.W. Hamacher - *k*-optimal solutions sets for some polynomially solvable scheduling problems. *European Journal of Operations Research*, 41 (1989) 194-202.

[11] F.Y. Chin, D.J. Houck - Algorithm for updating minimal spanning trees. *Journal of Computers and System Sciences*,16 (1978) 333-344.

[12] N. Christofides - *Graph Theory. An Algorithmic Approach*. Academic Press, New York, London, San Francisco, 1975.

[13] H. Crowder, E.L. Johnson, M. Padberg - Solving large-scale zero-one linear programming problems. *Operations Research*, 31 (1983) 803-834.

[14] N. Deo - *Teoria grafów i jej zastosowanie w technice i informatyce.* PWN, Warszawa, 1980.

[15] U. Derigs - Exchange properties and k-best strategies in combinatorial optimization. W : J.P. Brans (ed.) *Operations Research'84*, Elsevier Science Publishers B.V., (1984) 393-406.

[16] K. Dudziński, M. Libura, J. Majchrzak, J. Sikorski - On solving placement and routing problems in telephone exchange unit designs. *OR Spectrum*, 10 (1988), 213-220.

[17] K. Dudziński, S. Walukiewicz - Exact methods for the knapsack problem and its generalizations. *European Journal of Operations Research*, 28 (1987) 3-21.

[18] A.V. Fiacco - *Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming.* Academic Press, New York, London, 1983.

[19] J.M. Fleisher, R.R. Meyer - A new class of sufficient optimality conditions for integer programming. University of Visconsin-Madison, Computer Sciences, Technical Repot 248 (1975).

[20] T. Gal - *Postoptimal Analyses, Parametric Programming, and Related Topics.* McGraw-Hill, New York, 1979.

[21] R.S. Garfinkel, G.L. Nemhauser - *Programowanie całkowitoliczbowe.* PWN, Warszawa, 1978.

[22] M.R. Garey, D.S. Johnson - *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*. Freeman, San Francisco, 1979.

[23] A.M. Geoffrion, R. Nauss - Parametric and postoptimality analysis in integer programming. *Management Science*, 23 (1977) 453-466.

[24] D. Gusfield - A note on arc tolerances in sparse minimum path and network flow problems. *Networks*, 13 (1983) 191-196.

[25] D. Gusfield - Parametric combinatorial computing and a problem of program module distribution. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 30 (1983) 551-563.

[26] P.L. Hammer, E.L. Johnson, U.N. Peled - Facets of regular 0-1 polytopes. *Mathematical Programming*, 8 (1975) 179-206.

[27] H.W. Hamacher, M. Queyranne - K best solutions to combinatorial optimization problems. *Annals of Operations Research*, 4 (1985/6) 123-143.

[28] D. Harel, R.E. Tarjan - Fast algorithms for finding nearest common ancestor. *SIAM Journal on Computing*, 13 (1984) 338-355.

[29] M. Held, R.M. Karp - The traveling-salesman problem and minimum spanning trees. *Operations Research*, 18 (1970) 1138-1162.

[30] M. Held, R.M. Karp - The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: part II. *Mathematical Programming*, 1 (1971) 6-25.

[31] S. Holm, D. Klein - Discrete right hand side parametrization for linear integer programs. *European Journal of Operations Research*, 2 (1978) 50-53.

[32] S. Holm - The natural induced dual price function for an ILP solved by a cutting plane algorithm. Odense University, Dep. of Bussiness Administration, Rap. No.7/1979.

[33] L. Jenkins - Parametric mixed integer programming: an application to solid waste management. *Management Science*, 28 (1982) 1270-1284.

[34] M. Kano - Maximum and k-th maximal spanning trees of a weighted graph. *Combinatorica*, 7 (1987) 205-214.

[35] N. Katoh, T. Ibaraki - An efficient algorithm for the parametric resource allocation problem. *Discrete Applied Mathematics*, 10 (1985) 261-274

[36] K. Kiwiel - Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization. *Lecture Notes for Mathematics* 1133, Springer, Berlin, 1985.

[37] D. Klein, S. Holm - Integer programming post-optimal analysis with cutting planes. *Management Science*, 25 (1979) 64-72.

[38] Ł.N. Kozierackaja, T.T. Lebiediewa, I.W. Siergienko - Woprosy ustojcziwosti, paramietriczieskij i postoptimalnyj analiz zadacz diskrietnoj optimizacji. *Kibiernietika*, 4 (1983) 71-80.

[39] M.Ja. Kowaljow, Ju.N. Sotskow - Ustojcziwost' ε-pribliżonnych rieszenij buljewych zadacz minimizacji liniejnoj formy. *Wiesci Akadiemii Nauk Biełarusskaj SSR*, 2 (1990) 111-116.

[40] J. Komlós - Linear verification for spanning trees. *Combinatorica*, 5 (1985) 57-65.

[41] J.L. Kulikowski - *Zarys teorii grafów*. PWN, Warszawa, 1986.

[42] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.G. Rinnoy Kan, D. Shmoys - *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*. Wiley 1985.

[43] E.L. Lawler - *Combinatorial Optimization : Networks and Matroids*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.

[44] W.K. Leont'ew - Ustojcziwost' zadaczi komiwojażora. Żurnał Wyczislitielnoj Matiematiki i Matiematiczeskoj Fiziki, tom 15 (1975) 1298-1309.

[45] W.K. Leont'ew - Ustojcziwost' w kombinatornych zadaczach wybora. *Doklady Akadiemii Nauk SSSR*, tom 228, (1976) 23-25.

[46] W.K. Leont'ew - Ustojcziwost' w liniejnych diskretnych zadaczach. *Probliemy Kibiernietiki*, 35 (1979) 169-184.

[47] M. Libura, L. Słomiński - Transformacje zadań programowania dyskretnego. *Prace IOK*, z.10, Warszawa, 1974.

[48] M. Libura - Stability regions for optimal solutions of the integer programming problems. Working Paper MPD 3-76, Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, 1976.

[49] M. Libura - Zagadnienia wrażliwości rozwiazań w programowaniu całkowitoliczbowym. *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*. vol. XXII (1977) 299-311.

[50] M. Libura - Analiza wrażliwości rozwiązań całkowitoliczbowego zadania załadunku. *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, vol. XXII (1977) 313-322.

[51] M. Libura - Integer programming problems with inexact objective function. *Control and Cybernetics*, 9 (1980) 189-202.

[52] M. Libura - Dualność w programowaniu całkowitoliczbowym i jej zastosowanie w analizie wrażliwości i algorytmach przybliżonych. *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, vol. XXIX, zesz. 1-2 (1984) 75-92.

[53] M. Libura - Zadania programowania dyskretnego z parametryczną funkcją celu. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej*, seria Automatyka, z.74 (1984) 141-151.

[54] M. Libura - Analiza wrażliwości rozwiązań dla zadania wyznaczania najkrótszej drogi Hamiltona w grafie. *Zeszyty Naukowe Poltechniki Śląskiej*, seria Automatyka, z.84 (1986) 131-139.

[55] M. Libura - O pewnym zadaniu programowania całkowitoliczbowego z ilorazową funkcją celu. *Prace I Krajowej Konferencji Badań Operacyjnych i Systemowych*, Książ, czerwiec 1989, tom I, Optymalizacja - Metody i Zastosowania, IBS PAN, Warszawa 1989, 89-97.

[56] M. Libura - On travelling salesman problem with side constraints. W: R. Kulikowski, J.S. Sosnowski (ed.) *Badania Systemowe*, t.2, Metody Optymalizacji i Sterowania Komputerowego, Omnitech Press, Warszawa, 1990, 134-142.

[57] M. Libura - Sensitivity analysis for minimum Hamiltonian path and traveling salesman problems. *Discrete Applied Mathematics*, 30 (1991) 197-211.

[58] M. Libura - Sensitivity analysis for minimum weight base of matroid. *Control and Cybernetics*, 20 (1991) 7-24.

[59] M. Libura - Combinatorial optimization problems in brachyradiotherapy planning. *Archives of Control Sciences*, 1 (1992) 119-126.

[60] W. Lipski - *Kombinatoryka dla programistów*. WNT, Warszawa, 1989.

[61] R.E. Marsten, T.L. Morin - Parametric integer programming : the right hand side case. *Annals of Discrete Mathematics*, 1 (1977) 357-390.

[62] H. Noltemeier - Sensitivitätsanalyse bei diskreten linearen Optimierungsproblemen. *Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems*, 30, M. Beckman, H.P. Kunzi (eds.) Springer Verlag, New York, 1970.

[63] Y. Othake, N. Nishida - A branch-and-bound algorithm for 0-1 parametric mixed integer programming, *Operations Research Letters*, 4 (1985) 41-45.

[64] C.J. Piper, A.A. Zoltners - Some easy postoptimality analysis for zero-one programming. *Management Science*, 22 (1976) 759-765.

[65] M.R. Rao - Adjacency of the traveling salesman tours and 0-1 vertices. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 30 (1976) 191-198.

[66] M.A. Radke - Sensitivity analysis in discrete optimization. Western Management Science Institute, University of California, Los Angeles, *Working Paper* No. 240, September 1975.

[67] G.M. Roodman - Postoptimality analysis in zero-one programming by implicit enumeration. *Naval Research Logistics Quartarly*, 19 (1972) 435-447.

[68] G.M. Roodman - Postoptimality analysis in zero-one programming by implicit enumeration: the mixed integer case. *Naval Research Logistics Quartarly*, 21 (1974) 595-607.

[69] S.L.K. Rountree, B.E. Gillet - Parametric integer linear programming: A synthesis of branch and bound with cutting planes. *European Journal of Operations Research*, 10 (1982) 183-189.

[70] J. Seeländer - Einige Bemerkungen zur Bestimmung von Stabilitätsbereichen in der reinganzzahligen linearen Optimierung. *Mathematische Operatinsforschung und Statistic*, 11 (1980) 261-271.

[71] J. Seeländer - Über die Bestimmung von Stabilitätsbereichen bei speziellen gemischtganzahligen linearen Optimierungsproblemen. *Mathematische Operatinsforschung und Statistic*, 11 (1980) 447-454.

[72] L. Schrage, L.A. Wolsey - Sensitivity analysis for branch and bound integer programming. *Operations Research*, 33 (1985) 1008-1023.

[73] A. Schrijver - *Theory of Linear and Integer Programming.* J. Wiley, Chichester, 1986.

[74] J.F. Shapiro - *Mathematical Programming: Structures and Algorithms*. J. Wiley, New York, Toronto, 1979.

[75] J.F. Shapiro - Sensitivity analysis in integer programming. *Annals of Discrete Mathematics*, 1 (1977) 647-677.

[76] D.R. Shier, C. Witzgall - Arc tolerances in minimum-path and network flow problems. *Networks*, 10 (1980) 277-291.

[77] M. Simmonard - *Programowanie liniowe*. PWN, Warszawa, 1967.

[78] Y.N. Sotskov - Stability of an optimal schedule. *European Journal of Operations Research*, 55 (1991) 91-102.

[79] M.M. Sysło, N. Deo, J.S. Kowalik - *Discrete Optimization Algorithms with Pascal Programs.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983 (tłum. polskie - *Algorytmy optymalizacji dyskretnej z programami w języku Pascal.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1993).

[80] R.E. Tarjan - Efficiency of a good but not linear set union algorithm. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 22 (1975) 215-225.

[81] R.E. Tarjan - Applications of path compression of balanced trees. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 26 (1979) 690-715.

[82] R.E. Tarjan - Sensitivity analysis of minimum spanning trees and minimum path trees. *Information Processing Letters*, 14 (1982) 30-33.

[83] J. Tind, L.A. Wolsey - An elementary survey of general duality theory in mathematical programming. *Mathematical Programming*, 21 (1981) 241-261.

[84] W.T. Tutte - *Introduction to the Theory of Matroids.* American Elsevier, New York, 1971.

[85] S. Walukiewicz - *Programowanie dyskretne*. PWN, Warszawa, 1986.

[86] J.E. Ward, R.E. Wendell - Approaches to sensitivity analysis in linear programming. *Annals of Operations Research*, 27 (1990) 3-38.

[87] G.M. Weber - Sensitivity analysis of optimal matchings. *Networks*, 11 (1981) 41-56.

[88] D.J.A. Welsh - *Matroid Theory*. Academic Press, London, New York, San Francisco, 1976.

[89] L.A. Wolsey - Integer programming duality: Price functions and sensitivity analysis. *Mathematical Programming*, 20 (1981) 173-195.

[90] K. Zorychta, W. Ogryczak - *Programowanie liniowe i całkowitoliczbowe*. WNT, Warszawa, 1981.

ANALIZA WRAŻLIWOŚCI ROZWIĄZAŃ ZADAŃ OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

MAREK LIBURA

Analiza wrażliwości rozwiązań jest ważnym działem optymalizacji, zajmującym się wpływem zaburzeń danych zadania optymalizacyjnego na jego rozwiązania.

Niniejsza monografia jest poświęcona analizie wrażliwości w przypadku zadań optymalizacji dyskretnej. Omawiane są różne podejścia do badania wrażliwości rozwiązań, wynikające ze specyfiki tych zadań. Szczególny nacisk położony jest na techniki wyznaczania dopuszczalnych zaburzeń danych zadania, przy których pewne ustalone rozwiązanie pozostaje optymalnym. Obszerną część pracy stanowią wyniki analizy wrażliwości dla takich znanych zadań optymalizacji dyskretnej, jak zadanie wyznaczania bazy o minimalnej wadze w matroidzie, binarne zadanie załadunku, zadanie znajdowania najkrótszej drogi Hamiltona w grafie oraz zadanie komiwojażera.

Dr Marek Libura jest adiunktem w Zakładzie Programowania Matematycznego Instytutu Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk.

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy, prosimy o kontakt z
Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, tel. 36-19-01 w. 241
01-447 Warszawa

ISBN 83-85847-10-3
ISSN 0208-8029