3.32 — plazma, magnetosfera

Krzysztof Żuchowski

NIELINIOWE KOHERENTNE ODDZIAŁYWANIE FAL I CZĄSTEK W PLAZMIE BEZZDERZENIOWEJ

42/1984

WARSZAWA 1984

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 7 listopada 1984 r.

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1. Ark. druk. 1,5 .
Oddano do drukarni w grudniu 1984 r.
Nr zamówienia 780/84

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Krzysztof Żuchowski
Zakład Mechaniki
Cieczy i Gazów

NIELINIOWE KOHERENTNE ODDZIAŁYWANIE FAL I CZĄSTEK W PLAZMIE BEZZDERZENIOWEJ

Streszczenie

W pracy rozważano nieliniowe oddziaływanie fal i cząstek w plazmie bezzderzeniowej, ograniczając się głównie do oddziaływań koherentnych. Szczególnie użyteczna okazała się metoda "fal sprzężonych", która w przypadku nieliniowego oddziaływania fal w plazmie bezzderzeniowej prowadzi do układu równań typu Volterry-Lotki, lub pewnych jego uogólnień przy uwzględnieniu dyssypacji w układzie. Powyższa metoda jest wygodna, gdy bezzderzeniowa plazma została poddana parametrycznemu oddziaływaniu, co oznacza, że zaburzenie ma odpowiednio dopasowane okres i fazę do danego układu.

Rozważono także wpływ nieliniowości ośrodka na modulacje zaburzenia gęstości cząstek w plazmie. Uwydatnił się tu związek nieliniowości z niestacjonarnością ośrodka. Przy pewnych uproszczeniach równanie opisujące względną zmianę gęstości cząstek ośrodka daje się sprowadzić do nieliniowego równania Schrödingera. Przytoczono także rozważania uwypuklające z kolei związek pomiędzy nieliniowością i niejednorodnością a modulacją fali świstowej w plazmie. Bezpośrednią przyczyną modulacji była perturbacja gęstości jako wynik efektu ponderomotorycznego. Równanie opisujące modulacje amplitudy fali świstowej można także

sprowadzić, przy pewnych uproszczeniach, do postaci nieliniowego równania Schrödingera.

Wstęp

Teoria liniowa fal rozchodzących się w plazmie /spełniających związek dyspersyjny $D(\underline{k}, \omega) = 0$, wynikający z układu równań Maxwella i równań liniowych opisujących dynamikę plazmy/ nie opisuje wystarczająco rozwoju w czasie nawet małego odchylenia od równowagi. Falom o skończonych amplitudach towarzyszą zjawiska, w których iloczyny amplitud odgrywają ważną rolę. Na przykład można tu wymienić [1] , [2] , [3] : dudnienie fal, rozpraszanie fal przez rozkład cząstek, czy też rezonansowe oddziaływanie fal oraz fal i cząstek.

Dynamiczny rozwój teorii plazmy, jaki nastąpił w ostatnich latach przyczynił się do opracowania pewnych metod badania nieliniowych obiektów fizycznych /np. fal nieliniowych, uderzeniowych i solitonów/.

Najbardziej konwencjonalnym podejściem do zjawisk nieliniowych w plazmie jest teoria zaburzeń. Perturbacyjna teoria nieliniowych fal plazmowych, o małych, lecz skończonych amplitudach, oddziaływaniu tych fal doczekała się już wielu opracowań [4] , [5] . Dla dwóch przypadków granicznych ta słabo nieliniowa teoria jest stosunkowo prosta. W pierwszym przypadku, gdy jest niewiele fal o skończonych amplitudach, można każdą z nich rozpatrywać oddzielnie. Mamy wtedy do czynienia z teorią słabych fal koherentnych [6] . W drugim przypadku występuje tak wiele fal, że można do nich zastosować opis statystyczny, otrzymując te właściwości rozwoju w czasie stanu plazmowego, które nie zależą od szczegółów faz początkowych fal. Teoria ta nosi nazwę quasi-liniowej jeżeli uwzględnia jedynie oddziaływanie fal z rozkładem cząstek. Jeżeli uwzględnione są także oddziaływania fal, to teoria taka nosi nazwę słabej turbulencji. Nowe wyprowadzenie równań teorii quasi-liniowej, bez użycia metody "przybliżenia chaotycznych faz" /"random phase approximation"/, została przedstawiona w [7] , gdzie w celu wykonania uśrednienia po fazach posługiwano się funkcją autokorelacji stochastycznego pola elektrycznego.

Podejście oparte o rachunek zaburzeń musi zawieść, gdy amplitudy fal stają się tak duże, że zachodzi jedna z możliwości:

1. Rachunek zaburzeń jest rozbieżny.

2. Orbity cząstek zmieniają się tak wskutek oddziaływania z polami, że nie można już zakładać o funkcji rozkładu: $f \approx f_0$ przy dokładnym obliczaniu liniowych właściwości falowych plazmy, gdzie f_0 jest równowagową funkcją rozkładu.

W przypadku plazmy spokojnej /quiscent plasma/ fluktuacje mają charakter termodynamiczny i ich poziom jest określony przez temperaturę ośrodka. Stosunek energii fluktuacji do energii kinetycznej cząstek plazmy jest rzędu parametru plazmowego $q = 1/n\lambda_D^3$, gdzie n - koncentracja cząstek, zaś λ_D - promień Debye'a. W celu uzyskania równania na funkcję korelacyjną należy dokonać rozwinięcia hierarchii BBGKY w szereg względem parametru plazmowego [1]. Jeżeli poziom fluktuacji znacznie przewyższa ich wartość dla plazmy znajdującej się w pobliżu równowagi termodynamicznej wówczas, choć hierarchia BBGKY nadal obowiązuje, jednak nie można tu zastosować sposobu jej obcięcia charakterystycznego dla spokojnej plazmy i opartego na rozwinięciu w szereg względem parametru plazmowego. Załamuje się tu rachunek zaburzeń i nie można już wykonać iteracji rozwiązania równania Własowa, która była skuteczna w przypadku słabej turbulencji. Teoria opisująca plazmę o wysokim poziomie energii fluktuacji nosi nazwa teorii silnej turbulencji.
W przypadku silnej turbulencji plazmy charakterystyczne jest widmo energetyczne $\varepsilon_{\underline{k}}$ drgań plazmowych o wektorze falowym $\underline{k}$. Dla tego stanu plazmy możliwe są korelacje fluktuacji o makroskopowych natężeniach. Ponadto w ośrodku plazmowym turbulentnym, gdzie istnieje stałe źródło zewnętrzne utrzymujące ośrodek w stanie niestabilności, na przykład zewnętrzne pole elektryczne, może wytworzyć się turbulentny stan stacjonarny ośrodka scharakteryzowany przez stacjonarny przepływ strumienia gęstości energii.

Przy rozpatrywaniu stacjonarnej plazmy silnie turbulentnej należy już w stanie wyjściowym /zagadnienie początkowe/uwzględnić istnienie makroskopowych korelacji i fluktuacji. Ponieważ znajomość funkcji korelacji obok jednocząstkowej funkcji rozkładu stanowi docelowy punkt teorii, więc jest to zagadnienie samouzgodnione. Pomocniczym etapem do rozwiązania tego zagadnienia jest wykorzystanie teorii liniowej odpowiedzi na zaburzenie zewnętrzne dla plazmy znajdującej się w stanie stacjonarnej turbulentności.

Alternatywnym podejściem do plazmy silnie turbulentnej jest zastosowanie hierarchii BGKY w celu wyprowadzenia równań dla funkcji korelacyjnej. Jednak w tym przypadku wielocząstkowe funkcje pozostają skończone w granicy $q \to 0$ i należy inaczej dokonać obcięcia hierarchii niż dla spokojnej plazmy.

Nieliniowe oddziaływanie fal i cząstek

W przypadku rozpatrywania zjawisk liniowych jedynym możliwym kolektywnym oddziaływaniem w plazmie bezzderzeniowej jest rezonansowe oddziaływanie cząstek plazmy z falą, które wymaga spełnienia zależności:

$$\omega_{\underline{k}} - \underline{k} \cdot \underline{v} \approx 0, \tag{1}$$

gdzie: $\omega_{\underline{k}}$ - częstość fali, $\underline{k}$ - wektor falowy, $\underline{v}$ - prędkość cząstki. Zjawisko to nosi nazwę tłumienia Landaua, ewentualnie prowadzi do niestabilności, w zależności od początkowego rozkładu cząstek w przestrzeni prędkości. Natomiast w przypadku nieliniowym kolektywnie oddziaływują z cząstkami plazmy przynajmniej dwie fale i najprostszy warunek oddziaływania przybiera postać:

$$\omega_{\underline{k}} - \omega_{\underline{k}'} - (\underline{k} - \underline{k}') \cdot \underline{v} = 0, \tag{2}$$

zaś zjawisko z nim związane nosi nazwę nieliniowego tłumienia Landaua i może odgrywać ważną rolę zarówno w opisie ewolucji amplitud fal, jak i rozkładu cząstek w przestrzeni prędkości. Gdy sprzężenia pomiędzy falami i cząstkami są słabe tak, że związki /1/ i /2/ nie zachodzą, to decydującym mechanizmem opisującym ewolucje układu może być oddziaływanie fal. W przypadku oddziaływania trzech fal nieliniowe zjawisko jest szczególnie istotne przy spełnieniu warunku rezonansowego:

$$/3/ \qquad \omega_{\underline{k}} = \omega_{\underline{k}'} + \omega_{\underline{k}''} \quad , \qquad \underline{k} = \underline{k}' + \underline{k}'' .$$

Gdy rozważany jest makroskopowy model ośrodka, to na ogół, w przypadku ograniczenia się do słabej nieliniowości i dyspersji, można go przedstawić w postaci [4] :

$$/4/ \qquad i \frac{\partial}{\partial_t} \omega(\underline{x},t) = \underline{\underline{L}} \{ \underline{\psi}(\underline{x},t) \} + \underline{\underline{B}} \{ \underline{\psi}(\underline{x},t), \underline{\psi}(x,t) \} ,$$

gdzie $\underline{\psi}$ jest skończenie wymiarowym wektorem kolumnowym, którego elementami są wybrane wielkości fizyczne, opisujący w wystarczający sposób badany ośrodek:

$$/5/ \qquad \underline{\psi}(\underline{x},t) = \begin{bmatrix} \psi_1(\underline{x},t) \\ \psi_2(\underline{x},t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

W równaniu /4/ $\underline{\underline{L}}$ oraz $\underline{\underline{B}}$ są operatorami różniczkowymi względem $\underline{x}$. Ponadto $\underline{\underline{L}}\{\underline{\psi}\}$ jest liniowe względem $\underline{\psi}$, zaś $\underline{\underline{B}}\{\underline{\psi},\underline{\psi}\}$ kwadratowe względem $\underline{\psi}$.

Równanie Kortevega - de Vriesa [3] , [4] , [8] , [9] , które jest najprostszym równaniem opisującym nieliniowość i dyspersje, jest szczególnym przypadkiem /4/ . Także układ równań Maxwella wraz z dołączonymi równaniami plazmy wieloskładnikowej oraz równania magnetohydrodynamiki opisujące zimną plazmę w polu magnetycznym, nieliniowo zaburzoną względem stanu jednorodnego, też mają postać /4/. W tym ostatnim przypadku wektor $\underline{\psi}$ ma 7 składowych: perturbacja gęstości, prędkość płynu i perturbacja pola magnetycznego.

Po przejściu do reprezentacji fourierowskiej względem zmiennych przestrzennych i wykorzystaniu jako bazy wektorów własnych amplitud fourierowskich części zlinearyzowanej układu /4/:

$$/6/ \qquad \underline{\psi}(\underline{x},t) = \sum_{\underline{k}} \exp(i\underline{k}\cdot\underline{x}) \underline{\psi}_{\underline{k}}(t) ,$$

$$/7/ \quad \underline{\Psi}_{\underline{k}}(t) = \sum_{\alpha} A^{\alpha}_{\underline{k}}(t) \exp(-i\omega^{\alpha}_{\underline{k}} t)\, \underline{U}_{\alpha}(\underline{k})$$

można otrzymać równanie:

$$/8/ \quad \frac{\partial}{\partial t} A^{\alpha}_{\underline{k}} = \sum_{\beta,\gamma} \sum_{\underline{k}',\underline{k}''} K^{\alpha\beta\gamma}_{\underline{k},\underline{k}',\underline{k}''} A^{\beta}_{\underline{k}''} \exp[i(\omega^{\alpha}_{\underline{k}} - \omega^{\beta}_{\underline{k}'} - \omega^{\gamma}_{\underline{k}''})t],$$

gdzie $K^{\alpha\beta\gamma}_{\underline{k},\underline{k}',\underline{k}''}$ zależy od dokładnej postaci operatorów $\underline{L}$ i $\underline{B}$. Postać równania /8/ dla plazmy opisanej równaniem Własowa, przy założeniu słabego sprzężenia fal i cząstek została wyprowadzona w [4] przy użyciu metody wielu skal względem czasu.

Jeżeli nie zachodzi warunek /3/, to rozwiązania /8/ mają charakter oscylacyjny. Przy spełnieniu /3/ rozwiązania /8/ posiadają część systematyczną.

Równania /8/ mogą być wykorzystane zarówno w przypadku koherentnym, gdy mamy do czynienia z niewielką ilością fal, jak i w przypadku słabej turbulencji /stan niekoherentny/. W tym ostatnim przypadku mamy do czynienia z wielką ilością fal o chaotycznie rozłożonych fazach. Informacja o fazach poszczególnych fal jest w tym przypadku nieistotna i dokonuje się uśrednienia względem faz.

Koherentne nieliniowe oddziaływanie fal i cząstek.

Formalne podejście do oddziaływania fal i cząstek, w tym także nieliniowe przedstawiono w [10]. Podano tam hamiltonowskie sformułowanie równania Własowa na przestrzeni fazowej wyposażonej w strukturę nawiasów Poissona i przekształcenia kanoniczne. Praca ta jest kontynuacją rozważań przedstawionych w [11], [12]. Podobne rozważania przeprowadzono w [13]. Nie podano tam jednak równań przedstawiających nieliniowe oddziaływania konkretnych fal w plazmie, ani wyrażeń na siłę ponderomotoryczną wynikających z nieliniowego oddziaływania w ośrodku, pomimo zawartych tam ogólnych rozważań dotyczących tych efektów.

W [6] przedstawiono uproszczone podejście do badania koherentnego oddziaływania fal w plazmie. Metoda "fal sprzężonych" ma zastosowanie do badania oddziaływania fal oraz fal i cząstek zarówno w plazmie bezzderzeniowej jak i uwzględniającej zderzenia. Jest to fenomenologiczne ujęcie ogólnej metody przedstawionej w poprzedniej części pracy, której wynikiem było równanie /8/.

Aby przedstawić powyższą metodę podamy tu wyprowadzenie równań dla fal sprzężonych, opisujących oddziaływanie dwóch fal elektromagnetycznych poprzecznych i podłużnej fali plazmowej.

Układ równań opisujących dynamikę plazmy ma postać:

$$\partial n/\partial t + N_0 \underline{\nabla}\cdot\underline{V} = -\underline{\nabla}(n\underline{v}),$$

$$\partial \underline{B}/\partial t + \underline{\nabla}\times\underline{E} = 0,$$

$$/9/ \quad \partial\underline{v}/\partial t + e\underline{E}/m + (u^2/N_0)\underline{\nabla} n = -(\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v} - (e/m)\underline{v}\times\underline{B} - (u^2/N_0^2)\, n\underline{\nabla} n,$$

$$\varepsilon_0\, \partial\underline{E}/\partial t - (1/\mu_0)\underline{\nabla}\times\underline{B} - eN_0\underline{V} = en\underline{v},$$

gdzie: $-e$ i m odpowiednio ładunek i masa elektronu; N_0, n i $\underline{v}$ - równowagowa gęstość plazmy, zaburzenie gęstości elektronów i zaburzenie prędkości elektronów; $\underline{E}$ i $\underline{B}$ - natężenie pola elektrycznego i indukcja magnetyczna; u - prędkość cieplna elektronów; ε_0, μ_0 - przenikalności odnoszące się do próżni. Układ równań /9/ został napisany przy założeniu, że plazma jest jednorodna w stanie niezaburzonym i ruch jonów można zaniedbać. Zaniedbanie prawych stron układu /9/ jest równoważne linearyzacji i wtedy poszukiwanie jego rozwiązań w postaci fali płaskiej $A \exp[i(\omega t - \underline{k}\,\underline{x})]$ prowadzi do związku dyspersyjnego pomiędzy częstością ω i wektorem falowym $\underline{k}$:

$$/10/ \quad (\omega^2 - \omega_p^2 - k^2u^2)(\omega^2 - \omega_p^2 - k^2c^2) = 0$$

Równanie /10/ separuje się na związek dyspersyjny dla fal podłużnych /langmuirowskich/:

/11/ $$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 u^2$$

i związek dyspersyjny dla fal poprzecznych /elektromagnetycznych/:

/12/ $$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2 ,$$

gdzie $\omega_p = (N_0 e^2 / m \cdot \varepsilon_0)^{1/2}$ - elektronowa częstość plazmowa, c - prędkość światła.

Jeżeli zostaną uwzględnione człony nieliniowe występujące po prawej stronie układu /9/, to fala płaska nie będzie już rozwiązaniem tego układu. Zajmiemy się teraz ewolucją wielkości α, która jest kombinacją liniową fourierowskich składowych przestrzennych zmiennych dynamicznych opisujących ośrodek plazmowy modelowany układem /9/. Wielkość α ma spełniać równanie

/13/ $$\partial\alpha / \partial t = i\omega\alpha .$$

Podstawiając wspomnianą kombinację do równania /13/ i rugując pochodne względem czasu przy pomocy liniowej części układu /9/ /przy założeniu, że rozpatrujemy tylko drgania poprzeczne i fala jest spolaryzowana wzdłuż osi y / po uwzględnieniu w nich harmonicznej zależności względem zmiennych przestrzennych $(\partial/\partial x \rightarrow -ik)$ i wykorzystaniu związku dyspersyjnego /12/ można otrzymać:

/14/ $$\alpha_T = \bar{V}_y + (i\omega_T \varepsilon_0 / e N_0)\bar{E}_y + (i k_T / \mu_0 e N_0)\bar{B}_z ,$$

gdzie ω_T i k_T spełniają związek dyspersyjny /12/. Ponadto

/15/ $$V_y = (1/2)(\bar{V}_y + \bar{V}_y^*)$$

i podobnie dla pozostałych wielkości: E_y, B_z.

Różniczkując /14/ względem czasu po wyeliminowaniu pochodnych względem czasu przy pomocy pełnego układu /9/ z wyeliminowanymi pochodnymi względem zmiennych przestrzennych w części liniowej / $\partial/\partial x \rightarrow -ik_T$ / można otrzymać:

$$/16/\quad \frac{\partial \alpha_T}{\partial t} - i\omega_T \alpha_T = \left(\frac{e}{m} V_x B_z + \frac{i\omega_T}{N_0} n V_y - V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)_{k_T},$$

gdzie indeks k_T wskazuje, że przy zapisie prawej części należy przyjąć zależność od zmiennych przestrzennych postaci $\exp\left[-ik_T x\right]$.

Analogiczne rozważania dla fal podłużnych prowadzą do zależności:

$$/17/\quad \alpha_L = \tilde{n} + \left(N_0 \omega_L / k_L u^2\right) \tilde{V}_x + \left(ieN_0 / m k_L u^2\right) \bar{E}_x ,$$

$$/18/\quad \frac{\partial \alpha_L}{\partial t} - i\omega_L \alpha_L = \Big[-\frac{\partial}{\partial x}(nV_x) + \frac{ie^2 N_0}{m k_L u^2 E_0} n V_x - \frac{\omega_L N_0}{k_L u^2} \Big(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{e}{m} V_y B_z - \frac{u^2}{N_0^2} n \frac{\partial n}{\partial x} \Big) \Big]_{k_L}.$$

Teraz można rozważyć oddziaływanie trzech fal: dwu poprzecznych /z częstościami ω_{T_0} i ω_{T_1} oraz liczbami falowymi k_{T_0} i k_{T_1} / z jedną falą podłużną / częstością ω_L i liczbą falową k_L /. Wyjściowymi równaniami dla tych rozważań są dwa równania typu /16/ jedno równanie typu /18/.

Przedstawienie pól falowych jako przestrzennych składowych fourierowskich prowadzi do warunku

$$/19/\quad k_{T_0} = k_{T_1} + k_L ,$$

przy wypełnieniu którego po obu stronach równań /16/ oraz /18/ mamy taką samą zależność od zmiennych przestrzennych.

Aby znaleźć nieliniowy układ równań dla drgań normalnych wyrażonych przez wielkości α należy wyrazić wielkości dynamiczne przez α i podstawić je do prawych stron równań /16/, /18/.

Wtedy można otrzymać układ postaci:

$$/20/\quad \begin{aligned} \partial\alpha_{T_0}/\partial t - i\omega_{T_0}\alpha_{T_0} &= C_{1L}\,\alpha_{T_1}\alpha_L \\ \partial\alpha_{T_1}/\partial t - i\omega_{T_1}\alpha_{T_1} &= C_{0L}\,\alpha_{T_0}\alpha^*_L \\ \partial\alpha_L/\partial t - i\omega_L\alpha_L &= C_{01}\,\alpha_{T_0}\alpha^*_{T_1} , \end{aligned}$$

gdzie

$$C_{1L} = \frac{i\,\omega_{T_0} K_L^2 U^2 \omega_p^2}{4 N_0 \omega_L^2 \omega_{T_1}^2}\,, \qquad C_{01} = \frac{i\,N_0 \omega_L \omega_p^4}{4 U^2 \omega_{T_1}^2 \omega_{T_0}^2}\,,$$

/21/

$$C_{0L} = \frac{i\,\omega_{T_1} K_L^2 U^2 \omega_p^2}{4 N_0 \omega_L^2 \omega_{T_0}^2}\,.$$

Metoda drgań normalnych /fal sprzężonych/ daje się także wykorzystać w podejściu kinetycznym, przy badaniu oddziaływania fal [6]. Analiza układu równań typu /24/ przedstawiona w [3], [6] dopuszcza dla takich układów niestabilność eksplozyjną, gdy wszystkie amplitudy fal narastają do nieskończoności $\sim (t_\infty - t)^{-1}$ w skończonym czasie t_∞.

Dla dalszych celów wygodnie będzie wykonywać podstawienie dla układu /20/ postaci

/22/ $\alpha_i = A_i(t) \exp \omega_i(t)$,

gdzie $A_i(t)$ jest wolno zmienną amplitudą.
Ponadto

/23/ $\Delta\omega = \omega_{T_0} - \omega_{T_1} - \omega_L$.

Wtedy układ /20/ można zapisać w postaci:

/24/
$$\begin{aligned} \partial A_0/\partial t &= C_{12} A_1 A_2 \exp(-i\Delta\omega t) \\ \partial A_1/\partial t &= C_{02} A_0 \overset{*}{A}_2 \exp(i\Delta\omega t) \\ \partial A_2/\partial t &= C_{01} A_0 \overset{*}{A}_1 \exp(i\Delta\omega t), \end{aligned}$$

gdzie nowe indeksy oznaczają, że rozważone jest oddziaływanie trzech fal, w ośrodku plazmowym bez dysypacji, nie przesądzając typu tych fal.

Gdy $\Delta\omega = 0$, układ taki jest typu Volterry - Lotki [14], W tym przypadku może on także reprezentować niekoherentne oddziaływanie fal, gdy już zostało wykonane uśrednienie względem chaotocznych faz i przedstawia zależności pomiędzy amplitudami fal.

Korzystając z formalizmu oddziaływania trzech fal omówionego poniżej można włączyć oddziaływanie fal z cząstkami. Rozpatrzmy taki przypadek oddziaływania trzech fal, gdy częstość fali dudnienia, które to fala powstała w wyniku oddziaływania dwu fal wyjściowych nie pokrywa się z jakąś z częstości fal plazmowych. Jednak dzięki istnieniu tłumienia Landaua które rozszerza widmo dla fal dudnienia, istnieje pewien związek pomiędzy pierwotnymi falami i oddziaływaniem kolektywnym w plazmie dla tego przypadku. Wszystkie oddziaływania fal w bezzderzeniowej plazmie można klasyfikować jako oddziaływanie typu fala-fala, lub fala-cząstka.

Niech przy oddziaływaniu dwu pierwotnych fal powstaje fala dudnienia o częstości ω_d , która różni się o wielkość $\Delta\omega$ od określonej częstości ω_2 drgań kolektywnych w plazmie, to znaczy $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_d$.

Następnie, postępując jak w [15], można wyjściowy układ równań, analogiczny do /24/, sprowadzić przy pomocy podstawienia

/25/ $$A_d = A_2 \exp(-i\Delta\omega t)$$

do następującej postaci:

/26/ $$\begin{aligned} &\partial A_0/\partial t = c_{1d}\, A_1 A_d \\ &\partial A_1/\partial t = c_{0d}\, A_0 \overset{*}{A}_d \\ &(\partial/\partial t + i\Delta\omega) A_d = c_{01}\, A_0 \overset{*}{A}_1 \end{aligned}$$

Uwzględniając powolność zmiany amplitudy A_d można założyć, że drugi składnik w lewej części ostatniego równania układu /26/ jest dominujący, można w przybliżeniu napisać:

/27/ $$A_d = (c_{01}/i\Delta\omega) A_0 \overset{*}{A}_1$$

Podsumowując /27/ do pozostałych równań układu /26/ otrzymamy:

/28/ $$\begin{aligned} &\partial A_0/\partial t = (c_{01}\, c_{1d}/i\Delta\omega) A_0 A_1 \overset{*}{A}_1 \\ &\partial A_1/\partial t = -(c_{01}\, c_{0d}/i\Delta\omega) A_0 \overset{*}{A}_0 A_1 \end{aligned}$$

Obok układu /28/ możemy napisać układ do niego zespolono sprzężony /28/*. Mnożąc pierwsze równanie układu /28/ przez $\overset{*}{A}_0$ a drugie przez $\overset{*}{A}_1$, zaś pierwsze równanie układu /28/* przez A_0 a drugie przez A_1 i dodając je odpowiednio stronami otrzymamy:

$$(\partial/\partial t)|A_0|^2 = 2\,\mathrm{Im}\,(C_{01}\,C_{1d}/\Delta\omega)|A_0|^2|A_1|^2$$

/29/

$$(\partial/\partial t)|A_1|^2 = 2\,\mathrm{Im}\,(C_{01}\,C_{0d}/\Delta\omega)|A_0|^2|A_1|^2.$$

Jest to prosty układ Volterry-Lotki. Założenie $\mathrm{Im}\,\Delta\omega = 0$ prowadziło by do stałości amplitud fal pierwotnych. Jednak fala dudnienia jest tłumiona ze względu na oddziaływanie jej z cząstkami plazmy. Wynika stąd związek pomiędzy amplitudami fal pierwotnych. W takim razie obecność fali dudnienia można traktować jako przejaw związku pomiędzy amplitudami fal pierwotnych i cząstkami plazmy. Czyli fala dudnienia reprezentuje nieliniowe oddziaływanie fal i cząstek.

Wobec tego można wprowadzić oznaczenie:

/30/ $$\Delta\omega = \Delta\omega_0 + i\gamma$$

i zakładając dla prostoty rzeczywistość współczynników C_{01}, C_{0d} można otrzymać

$$(\partial/\partial t|A_0|^2 = -\varkappa_0|A_0|^2|A_1|^2$$

/31/

$$(\partial/\partial t|A_1|^2 = \varkappa_1|A_0|^2|A_1|^2,$$

gdzie:

/32/ $$\varkappa_0 = \frac{2\gamma}{\gamma^2+(\Delta\omega)^2}C_{01}\,C_{1d}\,,\quad \varkappa_1 = \frac{2\gamma}{\gamma^2+(\Delta\omega_0)^2}C_{01}\,C_{0d}\,.$$

Wprowadzając przekształcenia

/33/ $$I_0 = \varkappa_1|A_0|^2\,,\qquad I_1 = \varkappa_0|A_1|^2\,,$$

otrzymamy

/34/ $$dI_0/dt = -I_0 I_1\,,\qquad dI_1/dt = I_0 I_1\,.$$

Dodając stronami równania układu /34/ można otrzymać stałą ruchu :

/35/ $$I_0 + I_1 = I_0(0) + I_1(0) = m_1 ,$$

która jest szczególnym przypadkiem związków Manley-Rowe [16]. Układ /34/ ma rozwiązania w postaci:

/36/
$$I_0 = m_1 I_0(0) / [I_0(0) + I_1(0) \exp(m_1 t)]$$
$$I_1 = m_1 I_1(0) / [I_1(0) + I_0(0) \exp(-m_1 t)] .$$

Tak więc energia przepływa monotonicznie z jednej fali do drugiej. Szybkość tego procesu zależy od stosunku parametrów $\Delta\omega_0$ i γ .

Modulacja fali w nieliniowym ośrodku plazmowym.

Gdy fala o dostatecznie dużej amplitudzie /pobudzona zewnętrznie lub samoistnie/ rozchodzi się w nieliniowym ośrodku dyspersyjnym, wtedy jednym z najważniejszych skutków jest pojawienie się amplitudowej zależności w związku dyspersyjnym, co powoduje modulacje fazową fali [17], [18], W [19] przedstawiono analitycznie modulacje fali jako wynik oddziaływania trzech fal. Natomiast w [20] przedstawiono związek pomiędzy modulacją amplitudy i modulacją fazy jako konsekwencje nieliniowości.

Dla zmodułowanej fali można napisać:

/37/ $$F(x,t) = a(x,t) \cos[k_0 x - \omega_0 t + \phi(x,t)] ,$$

gdzie $a(x,t) = a_0 + a_m(x,t)$, zaś $a_m(x,t)$ i $\phi(x,t)$ są odpowiednio, powoli zmieniającymi się, amplitudową i fazową modulacją fali nośnej o liczbie falowej k_0 i częstości ω_0 . To znaczy obowiązują założenia:

/38/ $$\left| \frac{1}{a_m} \frac{\partial a_m}{\partial x} \right| \approx \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| \ll k_0$$

/39/ $$\left| \frac{1}{a_m} \frac{\partial a_m}{\partial t} \right| \approx \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| \ll \omega_0 .$$

Częstość chwilowa zaburzenia $F(x,t)$ można określić jako:

/40/ $$\omega = \omega_0 - \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t}.$$

Czyli chwilowe odchylenie od wartości częstotliwości fali nośnej ma postać:

/41/ $$\delta\omega = \omega - \omega_0 = -\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t}.$$

Jedną z konsekwencji nieliniowości jest występowanie amplitudy w zależności dyspersyjnej:

/42/ $$\omega = \omega(k, a^2).$$

Zakładając, że modulacja amplitudy a_m jest bardzo mała można dokonać rozwinięcia związku dyspersyjnego /42/ względem a_m

/43/ $$\omega = \omega(k) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_{a_0} a_m^2 + \ldots ,$$

zaś indeks a_0 oznacza obliczanie pochodnej przy $a = a_0$. Jeżeli będziemy rozumieć $\omega(k)$ jako zaburzenie częstości zanim nieliniowe efekty staną się istotne, wtedy można wprowadzić

/44/ $$\delta\omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_{a_0} a_m^2(x,t) ,$$

jako odchylenie częstości spowodowane nieliniowością.

Jeżeli nieliniowość jest przyczyną modulacji fali nośnej, to można napisać /41/, /43/:

/45/ $$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_{a_0} a_m^2(x,t).$$

Związek /45/ ustanawia zależność pomiędzy modulacją fazy spowodowany nieliniowością. Równanie /45/ implikuje, że modulacja amplitudy indukuje modulację fazy i na odwrót.

Załóżmy teraz, że cała amplituda a jet mała i dokonajmy założenia w szereg wokół wartości: częstości ω_0 , liczby falowej k_0 fali nośnej:

/46/ $$\omega = \omega_0 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_0 (k-k_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right)_0 (k-k_0)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right) a^2 ,$$

gdzie tym razem $(\partial\omega/\partial k)_0$, $(\partial^2\omega/\partial k^2)_0$ i $(\partial\omega/\partial a^2)$ są wartościami wziętymi w granicy $a = 0$ i $k = k_0$, Z drugiej strony modulacja fazy ϕ jest przyczyną pewnej niestacjonarności fali:

/47/ $$\omega(x,t) = \omega_0 - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

/48/ $$k(x,t) = k_0 + \frac{\partial \phi}{\partial x} .$$

Równanie zachowania energii można napisać w postaci [17]:

/49/ $$\frac{\partial (a^2)}{\partial t} + \frac{\partial (U_E a^2)}{\partial x} = 0$$

gdzie:

/50/ $$U_E(k, a^2) = v_g + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right)_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right),$$

zaś v_g - prędkość grupowa. Wprowadzimy teraz zespołoną amplitudę

/51/ $$\psi(x,t) = a(x,t) \exp[i\phi(x,t)] ,$$

która może opisywać na przykład modulacje gęstości cząsteczek plazmy:

/52/ $$\frac{\delta n}{n} = \psi(x,t) \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)] .$$

Podstawiając do /46/ związki /47/, /48/ mnożymy otrzymane równanie przez czynnik $ia \exp[i\phi(x,t)]$ i dodajemy do niego stronami równanie /49/ po uprzednim podzieleniu stronami tego ostatniego przez a. W wyniku otrzymujemy nieliniowe równanie Schrodingera

/53/ $$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + p \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + q |\psi|^2 \cdot \psi = 0 ,$$

gdzie nowe zmienne niezależne mają postać:

/54/ $$\xi = x - v_g t \qquad \tau = t .$$

Przy wyprowadzeniu /53/ wykorzystaliśmy zależności:

/55/ $$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial x} , \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} v_g + \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$$

oraz oznaczenia

$$p = (1/2)(\partial^2\omega/\partial k^2)_0\,, \quad q = -(\partial\omega/\partial a^2)_0 = -(\partial\omega/\partial|\Psi|^2)_0\,, \tag{56}$$

$$v_g = (\partial\omega/\partial k)_0\,. \tag{57}$$

Ponadto przy wyprowadzeniu równania /53/ został pominięty czynnik $p(1/a)(\partial^2 a/\partial x^2)$, co jest uzasadnione przy małej modulacji, to jest powolnych zmianach w przestrzeni i w czasie amplitudy a.

Równanie /53/ zostało omówione w [8], [9] oraz [17], gdzie zostało ono wyprowadzone dla zagadnień dotyczących nieliniowej modulacji fali w ośrodku dyspersyjnym na drodze rachunku wariacyjnego.

Dokładne rozważania dotyczące rozwiązania równania /53/ zależą od postaci nieliniowego związku dyspersyjnego, który implikuje wartości p i q, zaś przy szczególnym ich doborze dopuszcza rozwiązania solitonowe.

Innym przykładem nieliniowego oddziaływania w plazmie jest ponderomotoryczna nieliniowość, która powoduje samomodulację fali świstowej [21]. Wprowadzono tam nieliniowość jako efekt ponderomotoryczny, którego idea opiera się na efekcie oddziaływania na siebie elementów z prądem elektrycznym za pośrednictwem pól magnetycznych wytworzonych przez te prądy, poprzez tensor przenikalności elektrycznej zależny od gęstości cząstek.

Układ równań Maxwella rozpisany na składowe, przy założeniu, że nie ma zmienności względem osi y ma postać:

$$\begin{aligned}
&(\partial_z^2 + K_\perp)E_x - i|K_x|E_y - \partial_x\partial_z E_z = 0\,,\\
&i|K_x|E_x + (\partial_x^2 + \partial_z^2 + K_\perp)E_y = 0\,,\\
&-\partial_x\partial_z E_x + (\partial_x^2 + K_\parallel)E_z = 0.
\end{aligned} \tag{58}$$

W równaniu /58/ przyjęto zależność $\exp(-i\omega t)$, zaś stałe pole magnetyczne, skierowane wzdłuż osi z, ma taką wartość, że częstość fali padającej spełnia nierówność:

$\Omega_i \ll \omega \ll \Omega_e$ gdzie Ω_i, Ω_e są odpowiednio jonową i elektronową częstością cyklotronową. Układ /58/ jest nieliniowy ze względu na zależność składowych tensora przenikalności elektrycznej od gęstości cząstek:

/59/ $$K_\perp = K_{\perp_0} + (K_{\perp_0} - 1)\frac{\delta n}{n_0}, \quad K_x = K_{x_0}\left(1 + \frac{\delta n}{n_0}\right),$$

$$K_\parallel = K_{\parallel_0}\left(1 + \frac{\delta n}{n_0}\right),$$

gdzie:

/60/ $$K_{\perp_0} \approx 1 - \frac{\omega^2_{pi}(x)}{\omega^2} + \frac{\omega^2_{pe}(x)}{\Omega^2_e}, \quad K_{x_0} \approx \frac{\omega^2_{pe_0}(x)}{\omega\,\Omega_e}$$

oraz $$K_{\parallel_0} \approx -\frac{\omega^2_{pe}(x)}{\omega^2}.$$

Układ niezaburzony jest słabo niejednorodny, w kierunku X, i stąd wynika zależność częstości plazmowych, $\omega_{pi_0}(x)$, $\omega_{pe_0}(x)$, jonowych i elektronowych od x. Natomiast δn oznacza perturbacje gęstości spowodowanych efektem ponderomotorycznym.

Układ /58/ można w operatorowej formie zapisać w postaci

/61/ $$LE = (\delta n / n_0)\, ME,$$

gdzie $LE = 0$ jest jego postacią po odrzuceniu członów nieliniowych. Pole elektryczne zostało zapisane w postaci:

/62/ $$E = \mathcal{E} \exp\left(i \int n_x dx + i n_z dz\right) + \text{c.c.},$$

gdzie $n_x = k_x c/\omega$, $\quad n_z = k_z c/\omega$.

Wolno zmienna amplituda $\mathcal{E}$ została rozłożona w formalny szereg

/63/ $$\mathcal{E} = \epsilon \mathcal{E}^1 + \epsilon \mathcal{E}^2 + \dots,$$

gdzie $\epsilon \ll 1$.

Otrzymano nieliniowe równanie Schrodingera

/64/ $$i\partial_x \psi + p\partial_\zeta \psi + q|\psi|^2 \psi - i r \partial_x (\ln n_0)\psi = 0,$$

gdzie $\zeta = z - \int^x u\, dx$, $\quad u = -\frac{dn_z}{dn_x}$

zaś $\mathcal{E} = \psi V_1$, gdzie $L(in_x, in_z)V_1 = 0$ oraz $V_1^+ V_1 = 1$, gdyż $\mathcal{E}^1$ jest wektorem własnym operatora L o zerowej wartości własnej.

Pozostałe oznaczenia mają postać:

$$/65/ \quad p \simeq \frac{[-(2n_z^2 + K_{\perp 0})K_{x0}^4 + 6n_z K_{x0}^2 (n_z^2 - K_{\perp 0})^2 + (n_z^2 - K_{\perp 0})^4 K_{\perp 0}]}{2n_x (n_z^2 - K_{\perp 0})^3 [K_{x0} - n_z^2 - K_{\perp 0})^2]},$$

$$/66/ \quad q \simeq \frac{[K_{x0}^2 (2n_z^2 - K_{\perp 0} - 1) + (K_{\perp 0} - 1)(n_z^2 - K_{\perp 0})^2]^2}{2n_x (n_z^2 - K_{\perp 0})^2 [K_{x0}^2 + (n_z^2 - K_{\perp 0})^2]},$$

$$/67/ \quad r \simeq \frac{(3n_z^2 - K_{\perp 0} - 2)K_{x0}^2 + (K_{\perp 0} - 1)(n_z^2 - K_{\perp 0})^2}{(n_z^2 - K_{\perp 0})[K_{x0}^2 + (n_z^2 - K_{\perp 0})^2]}.$$

Wykorzystano ponadto założenia

$$/68/ \quad |in_x| \gg |u\partial\zeta| \gg |\partial x|, \qquad |in_x| \gg |\partial\zeta|$$

$$|K_{\parallel}| \gg |K_{\perp}| \approx 1.$$

Tak więc ponderomotoryczne zaburzenie $\frac{\delta n}{n}$ gęstości spowodowało modulację amplitudy pola elektrycznego opisaną przez nieliniowe równania Schrodingera. Należy tu podkreślić związek niejednorodności z nieliniowością.

Natomiast w pierwszej części tego punktu pracy rozważano inny efekt, którego wynikiem była modulacja zaburzenia gęstości, zaś jako przyczynę należało traktować relacje nieliniowości i niestacjonarności.

LITERATURA

[1] S.ICHIMARU - Basic principles of plasma physics Benjamin, Massachussetts 1973.

[2] N.A.KRALL, W.TRIVELPIECE - Fizyka plazmy, PWN, Warszawa, 1979.

[3] B.B.KAADOMCEW.-Koliektiwnyje jowlenija w płazmie, Nauka, Moskwa 1976.

[4] R.C.DAVIBSON - Methods in nonlinear theory, Academic Press, 1972.

[5] Elektrodinamika płazmi - pod redakciu A.I.Achieriera, Nauka Moskwa 1974.

[6] J.WEILAND, H.WILHELMSSON - Coherent non-linear interaction of waves in plasmas, Pergamon Press, 1977.

[7] E.S.WEIBEL, J.VACLAVIK - Phys.Fluids 24, 413/1981/.

[8] P.L.BHATNAGAR - Nonlinear waves in one dimensional dispensive systems, Clarendon Press, 1979.

[9] G.L.LAMB, JR. - Elements of solition theory, J.Wiley, 1980.

[10] A.N.KAUFMAN - Physica Scripta T2, 517 /1982/.

[11] J.R.CARY, A.N.KAUFMAN - Phys.Fluids 24, 1238 /1981/.

[12] A.N.KAUFMAN - Phys.Fluids 25, 1993 /1982/.

[13] H.VERNON WONG - Phys.Fluids 25, 1811 /1982/.

[14] A.C.SCOTT - Active and nonlinear wave propagation in electronics, J.Wiley, 1970.

[15] D.ANDERSON - Physics Scripta 13, 117 /1976/.

[16] W.H.LOUISELL - Conpled mode and parametric electronics, J.Wiley, 1960.

[17] G.B.WHITHAM - Linear and nonlinear waves, J.Wiley, 1971.

[18] B.B.KADOMTSEW, V.I.KARPMAN - Usp.Fiz.Nauk.103, 193/1971/.

[19] A.S.BAKAI - Nucl.Fusion 10, 53/1970/.

[20] Y.C.KIM, L.KHADRA, E.J.POWERS - Phys.Fluids 23, 2251/1980/.

[21] S.N.ANTANI, D.J.KAUP - Phys.Fluids 24,.1391 /1981/.