

Michał Basista

**O KONTYNUALNYCH MODELACH
USZKODZENIA MATERIAŁÓW**

40/1984

WARSZAWA 1984

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 30 sierpnia 1984 r.



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark. wyd. 2,5. Ark. druk. 3,5

Oddano do drukarni w grudniu 1984 r.

Nr zamówienia 742/84

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Michał Basista

Zakład Teorii Konstrukcji IPPT PAN

O KONTYNUALNYCH MODELACH USZKODZENIA MATERIAŁÓW

1. Wstęp

Procesowi deformacji towarzyszą zwykle zmiany wewnętrznej struktury materiału wywołane pojawieniem się mikrouszkodzeń takich, jak pustki i szczeliny. Powstawanie, wzrost i łączenie się wewnętrznych mikrodefektów może prowadzić do wystąpienia jednej lub kilku makroszczelin, a w konsekwencji - do zniszczenia materiału. Z drugiej strony, liczne mikropęknięcia obserwowane w trakcie odkształcania materiału powodują osłabienie jego wytrzymałości i sztywności jeszcze przed powstaniem dominującej szczeliny. Sformułowanie kontynualnej teorii oddającej zachowanie się uszkodzonego materiału staje się nie mniej ważne od analizy zlokalizowanego zniszczenia metodami klasycznych teorii pękania, dość dobrze już opracowanymi.

Kontynualne modelowanie zjawiska uszkodzenia polega na zdefiniowaniu i wprowadzeniu do równań konstytutywnych pewnych makroskopowych wielkości mechanicznych nazywanych zmiennymi uszkodzenia, które mają uwzględniać jakościowe i ilościowe cechy wewnętrznej deterioracji materiału, a wśród nich: rodzaj, gęstość, geometrię i przestrzenny rozkład mikrodefektów. Przyjmując, że reakcja materiału nie zależy od historii przejścia ciała ze stanu naturalnego do stanu z uszkodzeniami, a jedynie od aktualnego rozkładu mikropęknięć można określić pole uszkodzeń, zaś wielkość $\underline{Q}(x)$ charakteryzującą to pole w dowolnym punkcie uważać, po-

dobnie jak naprężenie $\underline{\sigma}$ i odkształcenie $\underline{\varepsilon}$, za zmienną stanu. Oprócz równania konstytutywnego w przestrzeni $\{\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}, \underline{\Omega}\}$ należy wówczas podać prawo ewolucji zmiennej uszkodzenia $\underline{\Omega}$, które opisywałoby wzrost mikrodefektów czyli akumulację wewnętrznego uszkodzenia w czasie, albo jakiegokolwiek inne prawo przyrostu tej wielkości w zależności od np. chwilowych charakterystyk stanów odkształcenia i uszkodzenia. Takie podejście do zjawiska zniszczenia materiałów legło u podstaw nowego, intensywnie rozwijanego działu mechaniki znanego pod nazwą Kontynuacyjnej Mechaniki Uszkodzeń.

Pojęcie uszkodzenia i jego reprezentacji przy pomocy zmiennej skalarnej zostało wprowadzone w 1958 roku przez Kaczanowa [1] do opisu trzeciej fazy pełzania w jednoosiowym stanie naprężenia. Badania doświadczalne, których przegląd przedstawimy w następnym rozdziale wskazują jednak, że uszkodzenie z powodu swej lokalnej natury jest w ogólności zjawiskiem anizotropowym i silnie zależy od rodzaju materiału, typu przyłożonego obciążenia, temperatury i warunków otoczenia. Skalarny parametr, ujmujący co najwyżej powierzchnią lub objętościową gęstość mikrodefektów, nie uwzględnia kierunkowego charakteru uszkodzeń, które np. w polikrystalicznych metalach w warunkach pełzania powstają głównie w granicach ziaren prostopadle do maksymalnego naprężenia rozciągającego [2]. Uzasadniony wydaje się taki model matematyczny, w którym zmiennej uszkodzenia nadane zostaną własności wektorowe lub tensorowe.

W dotychczas opublikowanych pracach znajdujemy różnorodne propozycje modeli uszkodzenia począwszy od skalarnych, wektorowych i tensorowych uogólnień historycznej koncepcji Kaczanowa [3,4,5,6,7,8,9], poprzez teorie fenomenologiczne wiążące uszkodzenie z tensorem deformacji [10,11,12,13], teorie termodynamiczne przyjmujące za punkt wyjścia dyssypatywność procesu uszkodzenia [6,7,14,15,16], do modeli stochastycznych [17], w których zakłada się, że równanie rozwoju uszkodzenia jest funkcją stochastycznego rozkładu wytrzymałości materiału. Nie ma w tych pracach zgodności co do sposobu opisu zachowania się uszkodzonego materiału, nie ma wyraźnego trendu w odniesieniu do matematycznej natury zmiennej uszkodzenia. Istnieje więc nadal potrzeba

sformułowania racjonalnego, kontynualnego modelu uszkodzenia w złożonych stanach naprężenia na podstawie wyników eksperymentów i zachowującego zasady termodynamiki procesów nieodwracalnych, zarówno dla materiałów kruchych jak i ciągliwych, w zakresie sprężystym i plastycznym, przy uwzględnieniu wzmocnienia materiału matrycy oraz obserwowanej zmiany gęstości w trakcie postępującej deterioracji.

Celem niniejszego opracowania jest syntetyczne przedstawienie wyników doświadczeń oraz istniejących teorii kontynualnego uszkodzenia. Własne podejście do opisu tego zjawiska będzie przedmiotem osobnej pracy.

2. Obserwacje doświadczalne - uzasadnienie anizotropowego modelu uszkodzenia

Z fizycznego punktu widzenia postępujące uszkodzenie mikrostruktury deformowanego materiału jest procesem złożonym i dlatego mechanizmy nukleacji i wzrostu mikrodefektów nie mają jak dotąd przekonującego wyjaśnienia. Wyniki nielicznych jeszcze doświadczeń dowodzą, że charakter uszkodzenia, tzn. kształt, gęstość, wielkość, rozkład mikrodefektów oraz ich ewolucja zależą bezpośrednio od rodzaju materiału, od stanu naprężenia i typu obciążenia, od warunków zewnętrznych.

2.1. Uszkodzenie sprężysto-kruche

W materiałach kruchych takich, jak skały czy betony o wysokiej wytrzymałości uszkodzenie przybiera formę płaskich mikrospękań, które w początkowym stadium quasi-statycznego procesu obciążenia powstają przez rozszczepienie materiału, następnie zarówno przez rozszczepienie jak i poślizgi na granicach ziaren [7, 18]. Obserwuje się, że rozwój uszkodzeń w tych materiałach następuje głównie w kierunku prostopadłym do maksymalnych odkształceń rozciągających [18]. Odkształcenie objętościowe $\epsilon_v = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ w testach jednoosiowego rozciągania jest zawsze dodatnie, natomiast w jednoosiowym ściskaniu może - a w przypadku betonu jest to regułą - zmienić znak z ujemnego początkowo, na dodatni w zaawansowanym etapie uszkodzenia próbki. Całko-

wite zniszczenie próbek betonowych poddanych jednoosiowemu ścisaniu następuje przez rozszczepienie materiału pociągnięciu przez próbkę granicznych odkształceń, nie naprężeń [19]. Wniosek ten jest również prawdziwy w przypadku skał [18]. Inny mechanizm uszkodzenia wykazują materiały kruche narażone na działanie obciążeń dynamicznych w postaci impulsów o wysokiej częstotliwości i krótkim czasie trwania. Mikrodefekty wywołane działaniem takich obciążeń mają wprawdzie kształt płaskich, niezależnych szczelin lecz czas przyłożenia impulsu jest tak krótki, iż nie pozwala im łączyć się ze sobą, nie ma więc warunków do powstania dominującej makroszczeliny. Zniszczenie następuje przez zupełne rozdzielenie (separację) materiału w momencie, gdy ilość i wielkość mikrodefektów jest wystarczająca by pokryły one przekrój poprzeczny [6,15]. Na podstawie omówionych doświadczeń można stwierdzić, że cechą charakterystyczną uszkodzenia materiałów kruchych niezależnie od typu obciążenia jest jego wyraźna kierunkowość, na którą składa się lokalna anizotropia samych defektów jako obiektów dwuwymiarowych oraz ich przestrzenny rozkład w objętości materiału w stosunku do kierunków głównych tensora odkształcenia.

2.2. Uszkodzenie materiałów ciągliwych

Więcej wyników badań opublikowano na temat uszkodzenia metali. W zależności od sposobu obciążenia rozróżnia się uszkodzenie sprężysto-plastyczne, które powstaje pod działaniem obciążeń quasi-statycznych, uszkodzenie podczas pełzania, uszkodzenie zmęczeniowe oraz kombinacje tych dwóch ostatnich typów, uszkodzenie dynamiczne wywołane impulsami o dużej częstotliwości.

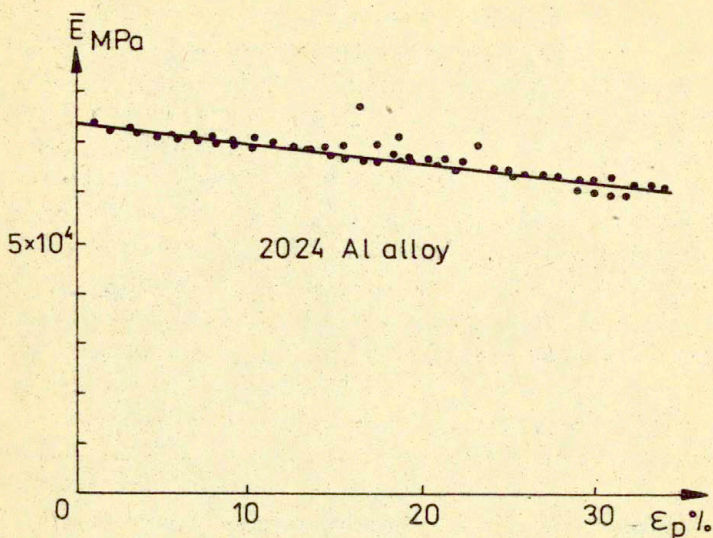
2.2.1. Uszkodzenie sprężysto-plastyczne

Uszkodzenie sprężysto-plastyczne przybiera formę albo płaskich mikroszczelin albo trójwymiarowych mikropustek. Czynnikiem, który o tym decyduje jest temperatura w jakiej przeprowadzono doświadczenia. Poniżej pewnej wartości progowej nazywanej "temperaturą przejścia", która jest cechą materiału, powstają mikroszczeliny poprzez wewnętrzne rozszczepienie ziaren polikrystalicznego metalu lub przez pękanie kruchych cząstek na granicach ziaren [20]. Zaobserwowano, że rozszczepienia wewnątrz ziaren ukła-

dają się w taki sposób, iż wektory normalne do powierzchni szcze-
lin tworzą niewielkie kąty z kierunkiem głównego naprężenia roz-
ciągającego. Powyżej temperatury przejścia zawsze powstają mikro-
pustki, z tym że w pobliżu tej wartości zauważa się mikropustki
wewnątrz ziaren [21]. Wywołują je wtrącenia w postaci zanieczyszczeń
lub tzw. cząsteczki drugiej fazy, np. tlenków węgla czy sił-
czku manganu, na których wraz ze wzrostem odkształceń następuje
koncentracja naprężeń [13]. W serii metalurgicznych doświadczeń
przeprowadzonych przez Jaliniera i in. [13,22,23,24] na próbkach
miedzianych, stalowych i aluminiowych w testach jedno- i dwuosio-
wego rozciągania stwierdzono przy użyciu mikroskopu skanningowe-
go, że mechanizm formowania się tego typu defektów polega albo
na dekohezji połączeń matryca-inkluzja, albo na rozerwaniu samej
inkluzji (lub cząsteczki II-giej fazy). W miarę dalszego wzrostu
temperatury coraz większą rolę w procesie uszkodzenia odgrywają
mikropustki związane z poślizgami na granicach ziaren. Nierówno-
ści, naroża, krawędzie oraz cząstki inkluzji wywołują zablokowanie
poślizgów na styku ziaren, które prowadzi do nukleacji defe-
któw. Dyson i in. [2,25] obserwując pod mikroskopem elektronowym
strukturę Nimonicu 80 A w złożonych stanach naprężenia zauważyli
że ten rodzaj mikrodefektów pojawia się na granicach ziaren rów-
noległych do kierunku głównego naprężenia rozciągającego.

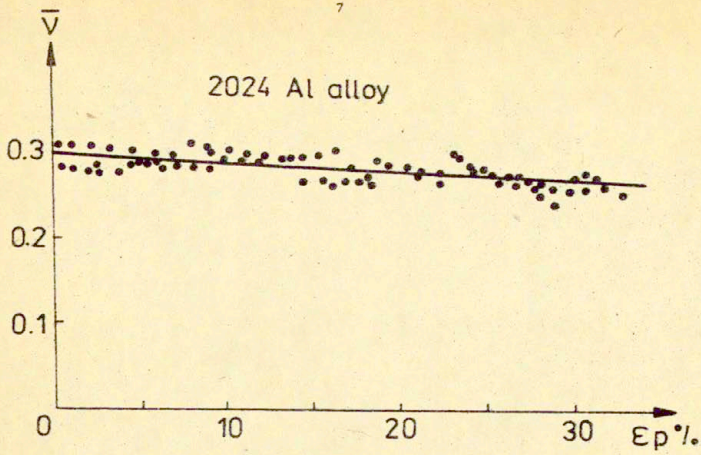
Wszystkie opisane typy uszkodzenia wywierają wpływ na sprę-
żyste i plastyczne własności metali w skali makro. Lemaitre i
Chaboche [26,27] badali zależności pomiędzy wielkością stałych
sprężystych, a odkształceniem plastycznym dla miedzi i alumi-
nium w testach jednoosiowych i zanotowali w przypadku stopu alu-
minium 2024, 20%-owe zmniejszenie wartości modułu Younga mierzo-
nego w kierunku rozciągania, przy odkształceniu plastycznym rzę-
du 25-30%. Cofdebois i Sidoroff [28,29] badali ten sam stop Al
2024 pod kątem zmiany modułu Younga (E) oraz współczynnika Pois-
sona (ν). Uzyskali ponownie 20%-ową redukcję modułu Younga oraz
dwukrotnie mniejszą zmianę współczynnika Poissona przy odkształ-
ceniach plastycznych około 30%, rys.1a,b. Traktując zmianę wiel-
kości E i ν jako pośrednią miarę uszkodzenia mikrostruktury ma-
teriału jest widoczne, że uszkodzenie w kierunku osiowym było do-
minujące. Widoczny jest także liniowy charakter zależności $\bar{\epsilon} =$

$$= f(\varepsilon_{pl}) \text{ i } \bar{v} = g(\varepsilon_{pl}).$$

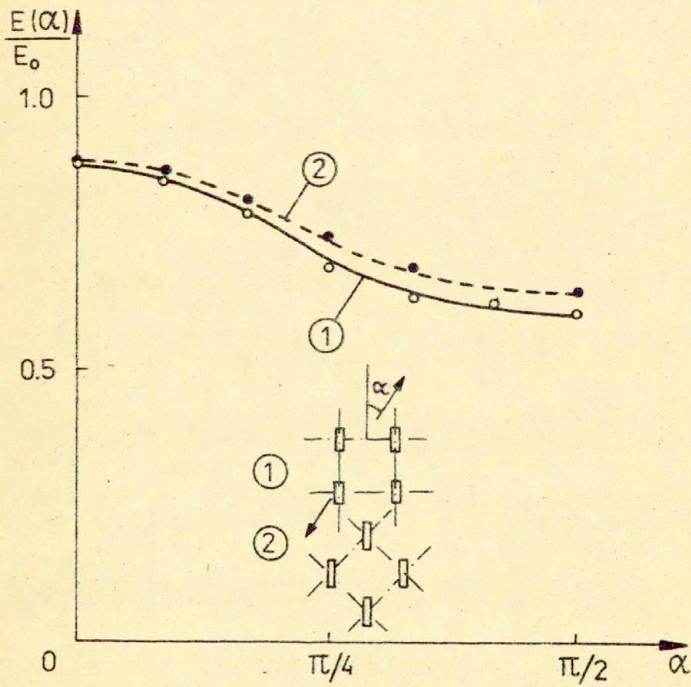


Rys.1a , [29]

Zagadnienie wpływu wewnętrznej ^wdeterioracji na sprężyste i plastyczne zachowanie się aluminium analizowali również Sawczuk i Litwka [30], lecz na innej drodze. Ich podejście polegało na eksperymentalnym symulowaniu uszkodzenia a priori, poprzez wstępne perforowanie materiału w formie regularnych systemów szczelin. Tak przygotowane próbki poddawano jednoosiowemu rozciąganiu przy jednocześnie zmieniającym się kącie nachylenia wyróżnionego kierunku perforacji do osi obciążenia α . Stwierdzono zmniejszanie się modułu Younga dla całego przedziału $\alpha \in [0, 90^\circ]$ i dla obu rozpatrywanych układów defektów, rys.2. Stwierdzono także obniżanie się wartości granicy plastyczności (σ_{pl}) w porównaniu ze stanem początkowym bez uszkodzeń lecz funkcja $\sigma_{pl}(\alpha)$ nie była już funkcją malejącą w całym zakresie zmienności α , co mogłoby wskazywać na odmienne mechanizmy uszkodzenia plastycznego i sprężystego.



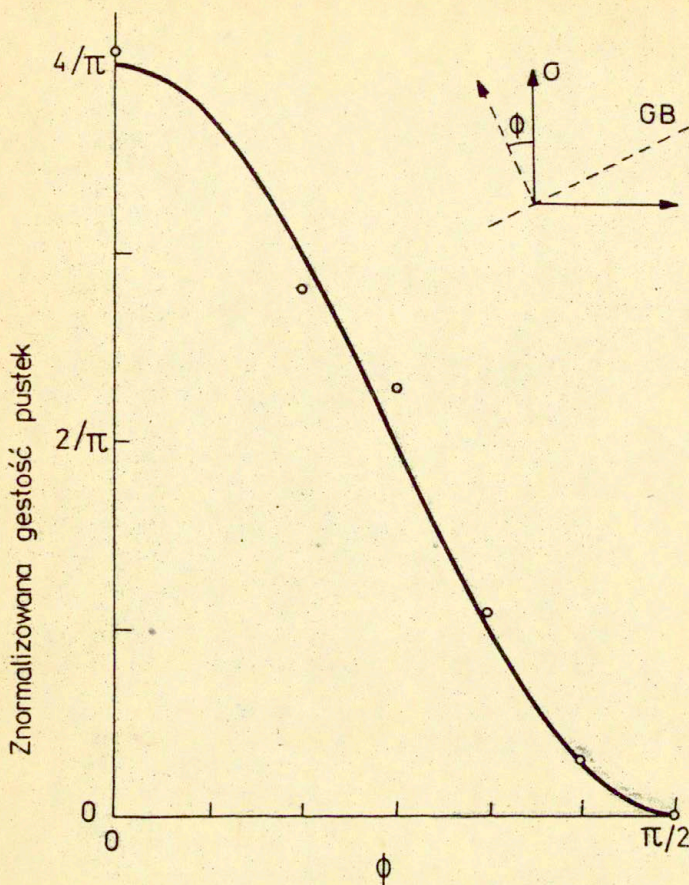
Rys.1b , [29]



Rys.2 , [30]

2.2.2. Uszkodzenie w warunkach pełzania

Osobnego omówienia wymagają doświadczenia dotyczące uszkodzenia w warunkach pełzania, gdyż problem ten był w ostatnich latach dość intensywnie badany i opisywany [2,3,4,8,9,21,25]. Mikrodefekty powstające podczas pełzania w polikrystalicznych metalach przybierają postać mikroszczelin w kształcie klina (miedź) lub trójwymiarowych, prawie sferycznych mikropustek (stal austeniczna) i lokalizują się głównie na granicach ziaren prostopadłych do maksymalnego naprężenia rozciągającego [31,32]. Często oba typy defektów rozwijają się w tym samym materiale równocześnie, przy czym mikroszczeliny łatwiej tworzą się w niższych temperaturach i przy wyższym poziomie naprężeń [21]. Nukleacja mikropustek jest rezultatem koncentracji naprężeń na nieregularnościach występujących na granicach kryształów, mikroszczeliny zaś powstają najczęściej w narożach będących miejscem styku trzech ziaren (tzw. punkty trójdzielne) i są konsekwencją poślizgów wewnątrz struktury metalu [32]. Kierunkowy charakter rozwoju uszkodzenia podczas pełzania ilustrują doświadczenia Dysona i McLeana [2] oraz Chena i Argona [31]. Badali oni między innymi rozkład gęstości mikropustek na granicach ziaren w zależności od nachylenia do kierunku głównego naprężenia rozciągającego. Przebieg tej zależności dla stali 304 przedstawia rys.3. Jednoznacznie anizotropowy charakter uszkodzenia przy pełzaniu potwierdzają także testy przeprowadzane pod obciążeniem nieproporcjonalnym [33,34,35] na próbkach z miedzi, aluminium i Nimonicu 80A. Rurki miedziane poddane były działaniu stałego rozciągania i zmiennego skręcania. Zaobserwowano, że uszkodzenie rozwijało się oddzielnie na dwóch różnych płaszczyznach odpowiadających maksymalnemu rozciąganiu w każdym ze stanów naprężenia, [35]. Co więcej czas do zniszczenia przy takim obciążeniu okazał się prawie dwukrotnie dłuższy niż w zwykłej próbie jednoczesnego rozciągania i skręcania. Oba te fakty podają w wątpliwość skalarne miary uszkodzenia.



Rys.3 , [31]

2.3. Inne typy uszkodzenia ciągłego

Uszkodzenie metali narażonych na obciążenia uderzeniowe (impulsowe) cechuje podobny mechanizm, jak w przypadku materiałów kruchych z tą różnicą, że w zależności od rodzaju materiału mogą powstawać zarówno mikroszczeliny (żelazo, beryl) jak i mikropustki (miedź, aluminium, tantal), [15].

Uszkodzenie zmęczeniowe metali nie przypomina żadnego z omówionych dotąd typów. Mikrodefekty powstające w postaci szczelin są rezultatem lokalnych odkształceń plastycznych i wzmocnienia materiału wywołanego cyklicznym obciążeniem. Nukleacja mikroszczelin jest przypadkowa, natomiast ewolucję cechującą pewne prawidłowości: początkowo uszkodzenie wzrasta wzdłuż kierunków maksymalnych odkształceń ścinających, lecz potem zaczyna dominować uszkodzenie w płaszczyźnie normalnej do maksymalnego naprężenia rozciągającego [20].

Przedstawiliśmy w dużym skrócie podstawy doświadczalne kontynuacji mechaniki uszkodzeń ze szczególnym uwzględnieniem tych wyników, które wskazują na anizotropowy charakter wewnętrznej degradacji materiału podczas odkształcania. W zasadzie wszystkie opublikowane w ostatnich latach prace eksperymentalne na temat uszkodzenia potwierdzają tezę o jego anizotropowej naturze i potrzebie modelu tensorowego. Odosobnionym wyjątkiem jest przypadek bardzo ciągliwych metali i rzadkiej koncentracji kulistych mikrodefektów [15,36], dla którego wystarczającą aproksymacją rozkładu i gęstości uszkodzenia jest skalarny parametr Kaczanowa [1]. Trzeba również dodać, że model skalarny okazał się efektywny w zagadnieniach jednoosiowego rozciągania, gdzie defekty powstawały prostopadle do ustalonego kierunku obciążenia, a swój wpływ na mechaniczne własności materiału manifestowały poprzez stopniową redukcję powierzchni czynnego przekroju poprzecznego. W złożonych stanach naprężenia skalarny parametr uszkodzenia przestaje być adekwatny, co przyznaje nawet sam Kaczanow [37], a potwierdzają omówione badania doświadczalne.

3. Skalarne modele uszkodzenia

W koncepcji Kaczanowa [1] uszkodzenie spowodowane wzrostem mikroszczelin utożsamiane było ze zmniejszaniem się efektywnej powierzchni obciążonego przekroju. Miarą tego uszkodzenia była skalarna zmienna ψ nazwana ciągłością, przybierająca wartości: 1 w stanie początkowym bez defektów oraz 0 w chwili zlokalizowanego zniszczenia materiału. Pomimo, iż autor nie podał expli-cite fizycznej interpretacji parametru ψ , niemniej można przy-jąć, że

$$(3.1) \quad \psi = \frac{A}{A_0} \quad , \quad 1 \geq \psi \geq 0 \quad ,$$

gdzie A oznacza pole aktualnej powierzchni przekroju netto (ma-trycy), A_0 zaś, pole powierzchni pełnego przekroju zmierzone w tej samej chwili czasu.

Zadane obciążenie P jest analogiczne dla obu rozciąganych prze-krojów A_0 i A

$$(3.2) \quad P = \sigma A_0 = \sigma^* A \quad .$$

Naprężenie σ^* działające na materiał matrycy, które Kaczanow nazwał naprężeniem efektywnym, ulega zwiększeniu w miarę jak wzrasta uszkodzenie a zmniejsza się ciągłość ψ :

$$(3.3) \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{\psi} \quad .$$

Prawo ewolucji zmiennej ψ zostało zaproponowane w formie nastę-pującej funkcji potęgowej:

$$(3.4) \quad \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi} = -B \left(\frac{\sigma_{\max}}{\psi} \right)^{\nu} \quad ,$$

gdzie B i ν są stałymi materiałowymi, σ_{\max} jest maksymalnym na-prężeniem rozciągającym .

Rabotnow [38] zastąpił parametr ciągłości ψ innym skalarem będącym dopełnieniem ψ

$$(3.5) \quad \omega = 1 - \psi = \frac{A_0 - A}{A_0}, \quad 0 \leq \omega \leq 1$$

i nazwał go uszkodzeniem; ω ma bezpośrednią interpretację fizyczną, gdyż oznacza część powierzchni przekroju zajęta w danej chwili przez defekty, odniesioną do aktualnego przekroju bez uszkodzeń. Model Kaczanowa pomyślany był do opisu pełzania z uwzględnieniem postępującej deterioracji materiału. Jednakże autor zastrzega się, że prędkość pełzania $\dot{\epsilon}^C$ nie zależy od uszkodzenia ω . Założenie to powoduje, iż przedstawiony model nie jest w stanie opisać najistotniejszej, trzeciej fazy pełzania, która ma ścisły związek z rozwojem wewnętrznego uszkodzenia [29] Rabotnow, w cytowanej już pracy [38] rozwinął jednowymiarową teorię Kaczanowa proponując jawną postać równania konstytutywnego pełzania i prawa ewolucji uszkodzenia w zależności od parametru ω , mianowicie:

$$(3.6) \quad \dot{\epsilon}^C = F(\sigma, \omega) = A \frac{\sigma^n}{(1-\omega)^m},$$

$$(3.7) \quad \dot{\omega} = G(\sigma, \omega) = B \frac{\sigma^v}{(1-\omega)^\mu},$$

gdzie A, B, m, n, μ, v są stałymi materiałowymi.

Teoria Kaczanowa-Rabotnowa nie tłumaczy wprawdzie makroskopowej anizotropii uszkodzonego materiału, nie daje się zastosować w złożonych stanach naprężenia, nie uwzględnia wzmocnienia materiału matrycy, lecz za to proponuje jasną i odpowiadającą intuicji interpretację osłabienia przekroju przez wprowadzenie pojęcia naprężeń efektywnych. Teoria ta stała się prototypem wielu późniejszych modeli uszkodzenia i jest uważana za początek kontynualnej mechaniki uszkodzeń.

Kaczanow [5] próbuje uwzględnić anizotropię stanu uszkodzenia i wprowadza trzy zmienne skalarne ψ_1, ψ_2, ψ_3 charakteryzujące

powierzchnie przekrojów netto, normalnych do kierunków naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, definiując w ten sposób trzy główne składowe naprężeń efektywnych

$$(3.8) \quad \sigma_1^* = \frac{\sigma_1}{\psi_1}, \quad \sigma_2^* = \frac{\sigma_2}{\psi_2}, \quad \sigma_3^* = \frac{\sigma_3}{\psi_3}.$$

Tak zmodyfikowana teoria może być zastosowana tylko wtedy, gdy kierunki główne tensora naprężenia są ustalone i nie zmieniają się w całej historii odkształcenia. Jest natomiast nieprzydatna, gdy rozważania dotyczą dowolnego kartezjańskiego układu współrzędnych lub gdy kierunki główne naprężeń obracają się w trakcie procesu deformacji.

Prostsza odmianę tej teorii przedstawili w 1973 r. Hayhurst i Leckie [3] zakładając, że tylko jedno z naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ zwiększa się z powodu wzrostu uszkodzenia przekroju, a pozostałe dwa nie ulegają zmianie:

$$(3.9) \quad \sigma_1^* = \frac{\sigma_1}{1-\omega}, \quad \sigma_2^* = \sigma_2, \quad \sigma_3^* = \sigma_3.$$

Do ograniczeń wymienionych powyżej trzeba dodać, że równania (3.9) nie są reprezentacją anizotropowego stanu uszkodzenia. Ci sami autorzy [4] ogłosili w 1977 roku uogólnienie równań Rabotnwa (3.6) i (3.7) na złożone stany naprężenia w dowolnym układzie współrzędnych zakładając, że stan uszkodzenia przy pełzaniu jest izotropowy w objętości materiału.

Chrzanowski [65,66] zaproponował potęgowe prawo ewolucji dla skalarnego parametru (3.5) i zastosował je do określenia ilości cykli do zniszczenia metalu w warunkach jednoczesnego pełzania i zmęczenia.

Wprowadzone przez Kaczanowa pojęcie naprężeń efektywnych (3.3) łączy się z postulatem równoważności odkształceń. Zgodnie z tym postulatem, aby otrzymać związek konstytutywny dla materiału uszkodzonego wystarczy w znanym równaniu dla materiału idealnego zastąpić naprężenie σ naprężeniem σ^* podając jedno-

częściej prawo ewolucji dla zmiennej uszkodzenia ω . Stałe sprężyste materiału ulegają degradacji wraz ze wzrostem uszkodzeń. Przyjmując postulat teorii Kaczanowa, iż naprężenie efektywne σ^* wywołuje w materiale nieuszkodzonym takie same odkształcenia ϵ , jak naprężenie σ w materiale uszkodzonym, można napisać

$$(3.10) \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E^*} = \frac{\sigma^*}{E} = \frac{\sigma}{(1-\omega)E} ,$$

gdzie E^* oznacza moduł Younga dla materiału uszkodzonego mierzonego w kierunku rozciągania.

Na tej podstawie zdefiniowana została nowa, skalarna zmienna uszkodzenia $\bar{\omega}$

$$(3.11) \quad \bar{\omega} = 1 - \frac{E^*}{E} .$$

Lemaitre i Chaboche [26] opierając się na definicji (3.11) przedstawili jednowymiarowy model sprężysto-plastycznego uszkodzenia metali w warunkach pełzania, w którym plastyczne uszkodzenie zaczyna się rozwijać po osiągnięciu przez naprężenia wartości progowej σ_g . Model ten został rozszerzony na przypadek trójosiowego stanu naprężenia, lecz przy koniecznym ograniczeniu, że uszkodzenie ma charakter izotropowy [27].

Podejście Lemaitre'a i Chaboche'a jest przejrzyste, jednakże jest to kolejny model skalarny, dotyczą go więc zastrzeżenia wymienione na zakończenie poprzedniego rozdziału oraz większość tych podanych przy omawianiu teorii Kaczanowa-Rabotnowa [1,38].

4. Wektorowe zmienne uszkodzenia

Niedoskonałość modeli skalarnych a anizotropowy charakter uszkodzenia były motywacją do poszukiwań innych sposobów opisu tego zjawiska. Kaczanow [5] zaproponował, aby stan uszkodzenia opisywać przy pomocy zmiennej wektorowej $\underline{\psi}$. Weźmy pod uwagę element powierzchni o dowolnym wektorze normalnym \underline{v} . Na element ten działa naprężenie normalne σ_v , które wywołuje rozwój mikroszcze lin. Wektor uszkodzenia $\underline{\psi}$ zdefiniowany został jako

$$(4.1) \quad \underline{\psi}_v = \psi_v \underline{v} \quad ,$$

gdzie ψ_v oznacza skalarną miarę uszkodzenia (3.1) przyporządkowaną kierunkowi \underline{v} .

Na podstawie (4.1) określone zostało naprężenie efektywne σ_v^*

$$(4.2) \quad \sigma_v^* = \frac{\sigma_v}{\psi_v} \quad .$$

Podobną wektorową zmienną uszkodzenia wprowadzili Davison i Stevens [6] przy formułowaniu modelu dynamicznego uszkodzenia materiałów kruchych. Przyjęli oni, iż wyizolowana płaska mikroszczelina jest dostatecznie scharakteryzowana przez swoje położenie i pole powierzchni, może więc być definiowana przez wektor normalny do płaszczyzny mikroszczeliny, o długości równej jej polu powierzchni. Stan uszkodzenia można wówczas opisywać przy pomocy funkcji wektorowej $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$

$$(4.3) \quad \underline{\omega}(\underline{x}, t) = \omega(\underline{x}, t) \underline{N} \quad ,$$

gdzie skalar ω oznacza gęstość defektów w przekroju wyznaczonym przez wektor wodzący \underline{x} i normalną \underline{N} w chwili t .

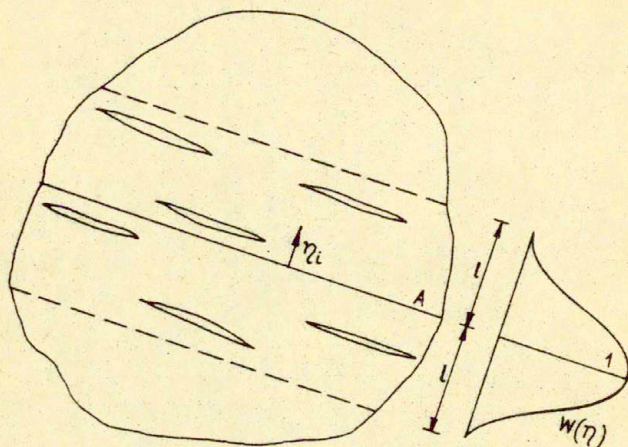
Ideę wektora uszkodzenia (4.3) wykorzystują Krajcinovic i Fonseka [7] przedstawiając kontynuálną teorię uszkodzenia materiałów idealnie kruchych w zakresie obciążeń quasi-statycznych.

Obie prace [6] i [7] omówimy szerzej w następnych rozdziałach.

Ostatnio Krajcinovic [60] zajął się ponownie definicją (4.3) i zaproponował uśrednione wektory uszkodzenia związane z tzw. charakterystyczną odległością l , rys.4

$$(4.4) \quad \underline{\hat{\omega}} = \frac{\xi}{A} \underline{N} \quad , \quad \xi = \sum_i w^{(i)} \omega^{(i)} \quad ,$$

gdzie w jest funkcją wagową malejącą monotonicznie w miarę oddalania się od przekroju A ; \underline{N} jest jednostkowym wektorem normalnym.

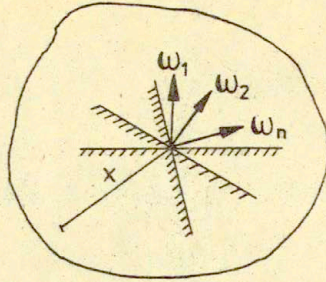


Rys.4 , [60]

Wektorowe miary uszkodzenia wprowadzone do równań konstytutywnych jako zmienne stanu umożliwiają budowanie anizotropowych modeli uszkodzenia, niemniej towarzyszą im pewne niejasności. Rozważmy sytuację przedstawioną na rys.5. Materiał poddano najpierw rozciąganiu w kierunku 1, które wywołało uszkodzenie $\underline{\omega}$, rys.5a. Po odciążeniu tę samą próbkę rozciągnano w kierunku prostopadłym do poprzedniego. Zgodnie z obserwacjami doświadczalnymi [35] obraz uszkodzenia jest teraz taki, jak na rys.5b. Z algebry wektorów w sposób naturalny wynika suma

$$(4.5) \quad \underline{\omega} = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2$$

lecz w świetle definicji (4.1) lub (4.3) oznaczałoby to obec-



Rys.6

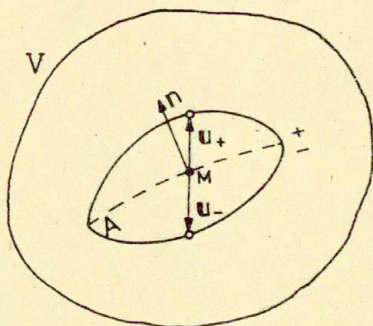
5. Tensorowe modele uszkodzenia

Argumenty przedstawione do tej pory dowodzą, iż zarówno skalarne jak i wektorowe teorie uszkodzenia nie są w stanie opisać jego anizotropowej natury. Przedstawione w rozdziale 2 wyniki doświadczeń dostarczają przekonujących przesłanek, że matematyczną reprezentacją stanu uszkodzenia powinna być zmienna tensorowa. Pozostaje kwestia, z jakimi miarami wewnętrznej deterioracji materiału należy ów tensor powiązać oraz jaka powinna być jego walencja. Spośród mierzalnych wielkości mikroskopowych, ilość, długość, pole powierzchni oraz objętość mikrodefektów, a także ich geometria, rozkład przestrzenny i orientacja są najczęściej wykorzystywane przy definiowaniu tensorów uszkodzenia. W innych podejściach tensor uszkodzenia łączy się z miarami makroskopowymi takimi, jak: stałe sprężyste, granica plastyczności wydłużenie czy gęstość masy, których zmiana wywołana wewnętrznym niszczeniem materiału pozwala identyfikować stan uszkodzenia.

Tensor uszkodzenia został wprowadzony po raz pierwszy przez Vakulenkę i Kaczanowa jr. [40,41] w kontynualnym modelu ciała sprężystego z mikrodefektami struktury. Zaproponowali oni, aby geometrię mikroszczelin ¹⁾ opisywać przy pomocy pola tensorowego II-go rzędu Ω_{ij} . Tensor Ω_{ij} zdefiniowano najpierw lokalnie

$$(5.1) \quad \underline{\underline{\Omega}}' = \underline{\underline{b}} \otimes \underline{\underline{n}} \quad , \quad \underline{\underline{b}}(M) = \underline{u}_+(M) - \underline{u}_-(M) \quad ,$$

gdzie \underline{n} oznacza wektor ortonormalny do początkowej powierzchni (szczeliny) A , wektor \underline{b} zaś, jest skokiem przemieszczenia \underline{u} punktu $M \in A$ przy przejściu przez powierzchnię nieciągłości wywołaną rozsunieniem brzegów A na skutek rozwarcia się szczeliny, rys.7.



Rys.7

Wektor \underline{u} określa pole przemieszczeń punktów ciała od idealnego stanu początkowego (I) do stanu uszkodzonego (II). Pole tensorowe (5.1) związane z wyizolowanymi szczelinami zostało następnie uśrednione w elementarnej i reprezentatywnej objętości V :

$$(5.2) \quad \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \int_{A_{(k)}(V)} \underline{\underline{b}}^{(k)} \otimes \underline{\underline{n}}^{(k)} dA \quad ,$$

gdzie $A_{(k)}(V)$ to część powierzchni k -tej szczeliny zawarta wewnątrz V . Tensor $\underline{\underline{\Omega}}$ otrzymał nazwę tensora gęstości spękań. Zauważmy, że tensory (5.1) i (5.2) nie są symetryczne, ale też nie

1) Pod tym pojęciem autorzy rozumieją defekty trójwymiarowe. W poprzedniej, jak i dalszej części tekstu mikroszczelina oznacza

zależą od wyboru zwrotu wektora normalnego \underline{n} . W szczególnym przypadku, gdy $\underline{n}^{(k)}$ i $\underline{b}^{(k)}$ są równoległe, tensor (5.2) opisuje mikrodefekty typu rozszczepienia materiału, jeśli zaś $\underline{n}^{(k)}$ i $\underline{b}^{(k)}$ są ortogonalne - mamy do czynienia z uszkodzeniem podczas ścinania. W modelu Vakulenki-Kaczanowa jr. wykorzystane zostały doświadczenia kontynualnej teorii dyslokacji, zwłaszcza w odniesieniu do takich pojęć, jak wektor skoku przemieszczeń \underline{b} , który jest uogólnieniem wektora Burgersa oraz tensor gęstości uszkodzeń $\underline{\Omega}$, w którym można dostrzec podobieństwa do tensora gęstości dyslokacji. Tensor gęstości mikroszczelin (5.2) pozwala uwzględnić typowe cechy przestrzennego rozkładu mikrodefektów, jednak koncepcja idealnego stanu ciała oraz szczegółowej historii przejścia do stanu II przy pomocy wektora przemieszczeń \underline{u} wydaje się niepotrzebna, przynajmniej w stosunku do sprężystych własności uszkodzonego materiału. Tensor gęstości uszkodzeń może być wprowadzony bezpośrednio w stanie II w oparciu o aktualną geometrię pola mikroszczelin pod warunkiem wyposażenia go w równanie ewolucji. Ponadto tensor (5.2) nie uwzględnia płaskich mikroszczelin, ponieważ w takim przypadku $\underline{b}=\underline{0}$ [21].

Definicje (5.1) i (5.2) były później dyskutowane przez Kaczanowa jr. [42]. Zaproponował on zmodyfikowane, symetryczne postaci bezwymiarowych tensorów $\underline{\Omega}'$ i $\underline{\Omega}$:

$$(5.3) \quad \underline{\Omega}' = \underline{b} \otimes \underline{n} = \beta \underline{n} \otimes \underline{n} \quad ,$$

gdzie β oznacza rozwarcie mikroszczeliny w dowolnym punkcie $M \in A$,

$$(5.4) \quad \underline{\Omega} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \sqrt{A^{(k)}} \int_{A^{(k)}(V)} \underline{n}^{(k)} \otimes \underline{n}^{(k)} dA \quad .$$

Łatwo można zauważyć, iż pominięto w ten sposób składowe styczne tensora uszkodzenia (5.1) zakładając, że zasadnicze znaczenie

defekt płaski, natomiast mikropętka - przestrzenny.

mają mikrodefekty typu rozszczepienia.

Mając określony tensor gęstości uszkodzeń (5.4) autor formułuje równanie konstytutywne sprężystości zakładając istnienie potencjału sprężystego dla ciała z uszkodzeniami $f(\underline{\sigma}, \underline{\Omega})$. Potencjał $f(\underline{\sigma}, \underline{\Omega})$ musi być izotropową funkcją argumentów $\underline{\Omega}$ i $\underline{\sigma}$:

$$(5.5a) \quad f(\underline{\sigma} \underline{\sigma} \underline{\Omega}^T, \underline{\Omega} \underline{\Omega} \underline{\Omega}^T) = f(\underline{\sigma}, \underline{\Omega}) ,$$

gdyż w stanie początkowym bez uszkodzeń ciało było izotropowe. Na podstawie twierdzenia o wielomianowej reprezentacji skalarnej funkcji dwóch symetrycznych argumentów tensorowych [43,44,45] otrzymuje się ogólną postać potencjału f , która dla liniowej sprężystości jest formą kwadratową w naprężeniach

$$(5.5b) \quad f(\underline{\sigma}, \underline{\Omega}) = \alpha_1 \text{tr}^2 \underline{\sigma} + \alpha_2 \text{tr} \underline{\sigma}^2 + \alpha_3 \text{tr} \underline{\sigma} \text{tr} \underline{\Omega} + \alpha_4 \text{tr}^2 \underline{\sigma} \underline{\Omega} + \\ + \alpha_5 \text{tr}^2 \underline{\sigma} \underline{\Omega}^2 + \alpha_6 \text{tr} \underline{\sigma}^2 \underline{\Omega}^2 + \alpha_7 \text{tr} \underline{\sigma} \text{tr} \underline{\sigma} \underline{\Omega}^2 + \alpha_8 \text{tr} \underline{\sigma} \text{tr} \underline{\Omega}^2$$

gdzie współczynniki α_i są w ogólności funkcjami niezmienników $\underline{\sigma}$. Równanie konstytutywne dla ośrodka liniowo-sprężystego z uszkodzeniami otrzymuje się z zależności

$$(5.6) \quad \underline{\varepsilon} = \left. \frac{\partial f(\underline{\sigma}, \underline{\Omega})}{\partial \underline{\sigma}} \right|_{\underline{\Omega} = \text{const}} ,$$

podczas, gdy w nieliniowej sprężystości różniczkowanie obciążenia powinno oba argumenty, co powoduje iż prawo konstytutywne komplikuje się

$$(5.7) \quad \underline{\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\Omega}} : \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial \underline{\sigma}}$$

i wymaga dodatkowych założeń w odniesieniu do tensora 4-go rzędu $\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial \underline{\sigma}}$.

Zasadniczym zarzutem wobec teorii Vakulenkii-Kaczanowa jr. jest fakt, że w żadnej z prac [40,41,42] nie ma rozróżnienia pomiędzy stanem uszkodzenia i ewolucją uszkodzenia. Rozpatrzmy przykład podany przez Krajcinovica i Fonsekę [7] nawiązujący do pierwotnej definicji tensora gęstości szczelin (5.2). Niech Ω_{11} oznacza uszkodzenie powstałe podczas jednoosiowego rozciągania próbki w kierunku 1. Po odciążeniu ta sama próbka poddana została czystemu ścinaniu, w którym jedynie $d\Omega_{12} \neq 0$. Wcześniejsze uszkodzenie zmagazynowane w Ω_{11} zostaje "zapomniane" a nowe Ω_{12} powstaje w tym samym przekroju, więc jak gdyby na istniejących już szczelinach.

Zainspirowani ideą tensora gęstości szczelin (5.2), Murakami i Ohno [8,9] przedstawiają swoją wizję zmiennej uszkodzenia i formułują teorię uszkodzenia metali w warunkach pełzania. Opierając się na klasycznej koncepcji Kaczanowa [1], autorzy przeprowadzają analizę geometrii elementarnego czworościanu w stanie idealnym i uszkodzonym, rys.8 i na tej podstawie wyznaczają symetryczny tensor uszkodzenia II-go rzędu w postaci zbliżonej do (5.4):

$$(5.8) \quad \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{A_g(V)/3} \sum_{k=1}^N \int_V (\underline{n}^{(k)} \otimes \underline{n}^{(k)}) dA_g^{(k)}, \quad k=1,2,\dots,N,$$

gdzie: $dA_g^{(k)}$ oznacza pole powierzchni k-tej mikroszczeliny, $\underline{n}^{(k)}$ - jednostkowy wektor normalny do $dA_g^{(k)}$, zaś $A_g(V)$ - pole wszystkich powierzchni styku ziaren zawartych w charakterystycznej objętości V , rys.9.

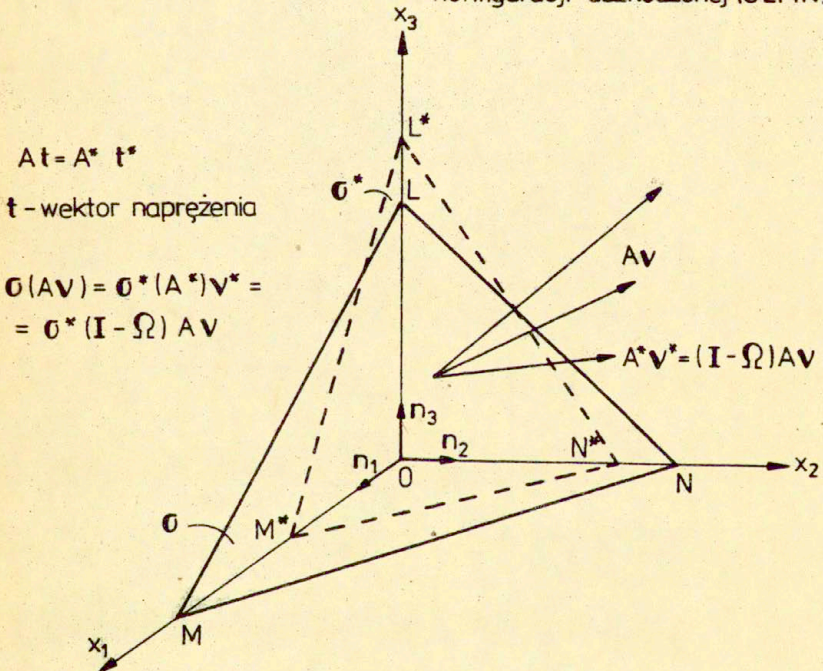
Tensor (5.8) ma trzy rzeczywiste wartości główne i odpowiadające im kierunki własne

$$(5.9) \quad \underline{\underline{\Omega}} = \sum_{j=1}^3 \Omega_j \underline{n}_j \otimes \underline{n}_j,$$

przy czym Ω_j jest gęstością pustek na płaszczyźnie o normalnej \underline{n}_j i podlega warunkowi $0 \leq \Omega_j \leq 1$. Podobnie jak w [1] wartość graniczna $\Omega_j = 0$ odpowiada nieuszkodzonej konfiguracji ciała, natomiast $\Omega_j = 1$ można rozumieć jako kryterium zniszczenia ma-

teriału, które wystąpi na j -tej płaszczyźnie głównej tensora (5.4). Zniszczenie materiału występuje jednak przy znacznie niższych wartościach $\Omega_{j\max}$, np. dla tytanu- α deterioracja powierzchni w momencie zniszczenia próbki wyniosła około 50% [7]. Warunek $\Omega_j=1$ może więc mieć jedynie znaczenie z punktu widzenia spójności modelu. Z drugiej strony, pewnym usprawiedliwieniem dla tego kryterium w przypadku pełzania jest obserwowany w doświadczeniach przebieg zależności przyrostu uszkodzenia od czasu, rys.10.

OLMN-konfiguracja początkowa
 $OL^*M^*N^*$ -fikcyjna konfiguracja
 bez uszkodzeń odpowiadająca
 konfiguracji uszkodzonej (OLMN)

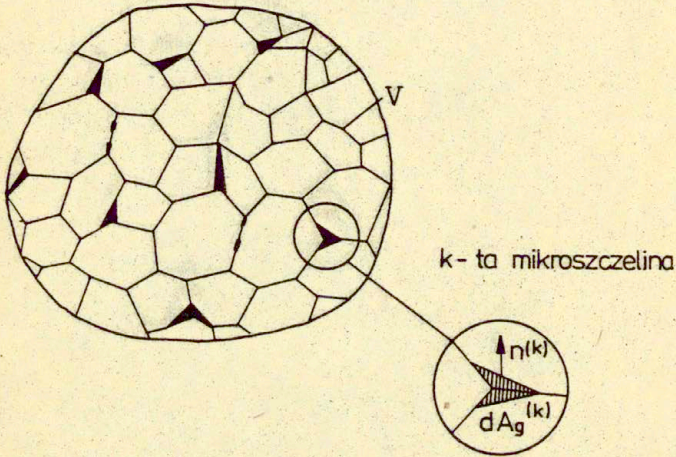


Rys.8 , [9]

Konsekwentnie do pierwowzoru [1] wprowadzono tensor naprężeń efektywnych podając następujące prawo transformacji ze stanu I do stanu II :

$$(5.10) \quad \underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\sigma}} \quad , \quad \text{przy czym}$$

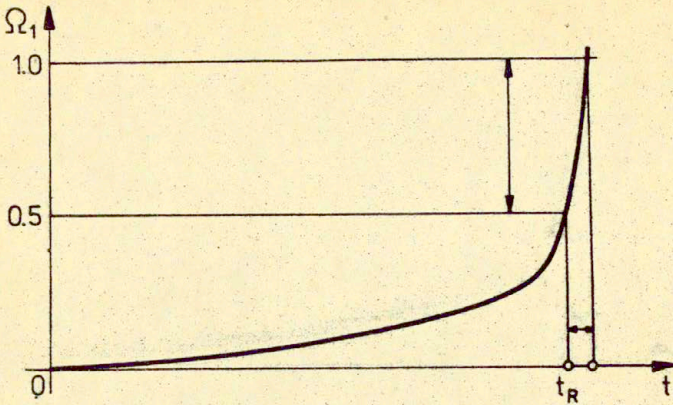
$$(5.11) \quad \underline{\underline{\Phi}} = (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Omega}})^{-1}, \quad \underline{\underline{\Phi}}, \underline{\underline{\sigma}} \in T_2^S, \quad \underline{\underline{\sigma}}^* \in T_2.$$



Rys.9 , [9]

Tensor $\underline{\underline{\Phi}}$, który określa wpływ uszkodzenia przekroju na wielkość naprężeń jest zgodnie z (5.11) symetrycznym tensorem II-go rzędu. Jednakże prawo transformacji (5.10) implikuje asymetrię tensora naprężeń efektywnych $\underline{\underline{\sigma}}^*$, co wydaje się nie pozbawione słuszności w przypadku anizotropowego uszkodzenia, lecz pozostaje w sprzeczności z postulatem równoważności odkształceń. Zauważmy, że prawo transformacji naprężeń (5.10) uzyskane przez Murakamiego i Ohno wyłącznie na podstawie analizy geometrycznej rys.8, przedstawia szczególny rodzaj zwężenia po jednej parze indeksów

$$(5.12) \quad \sigma_{ij}^* = \Phi_{ik} \sigma_{kj}$$



Rys.10 , [46]

Ta nietypowa transformacja liniowa tensorów naprężenia \underline{g}^* i \underline{g} wynika bezpośrednio z definicji zmiennej uszkodzenia (5.8), która jest tensorowym uogólnieniem parametru Kaczanowa-Rabotnowa (3.5) i oznacza, że uszkodzenie wpływa na naprężenia jedynie poprzez zmianę efektywnej powierzchni przekroju, ponieważ tylko jeden z indeksów tensora σ_{kj} podlega kontrakcji. W ogólności, prawo transformacji naprężeń (5.12) wymaga zastosowania operatora liniowego 4-go rzędu.

Po zdefiniowaniu tensora uszkodzenia przedstawiono teorię pełzania metali z uwzględnieniem narastającej deterioracji struktury. Związek konstytutywny oraz równanie wzrostu mikrodefektów zostały sformułowane w oparciu o teorię funkcji tensorowych:

$$(5.13) \quad \dot{\underline{\xi}}_C = \underline{G}(\underline{g}^*, \underline{\Phi}, \kappa, \theta) ,$$

$$(5.14) \quad \dot{\underline{\Omega}} = \underline{H}(\underline{g}^*, \underline{\Phi}, \kappa, \theta) ,$$

gdzie $\dot{\underline{\xi}}_C$ jest tensorem prędkości pełzania, κ -parametrem wzmocnie

nia materiału matrycy, θ -temperaturą, funkcje \underline{G} i \underline{H} są izotropowymi funkcjami tensorowymi II-go stopnia od argumentów $\underline{\sigma}^*$, $\underline{\Phi}$, natomiast $\underline{\sigma}^*$ jest teraz zsymetryzowanym tensorem naprężeń efektywnych :

$$(5.15) \quad \underline{\sigma}^* = \frac{1}{2}(\underline{\sigma}\underline{\Phi} + \underline{\Phi}\underline{\sigma}) .$$

Równanie (5.13) wyspecyfikowano dla małych odkształceń przy wykorzystaniu prawa płynięcia Druckera-Pragera oraz hipotezy wzmocnienia odkształceniowego przy założeniu równoważności prędkości deformacji pełzania w stanie I i II

$$(5.16) \quad \dot{\underline{\epsilon}}_c = \frac{3}{2} m A^{1/m} \kappa^{(m-1)/m} \underline{\sigma}_{eq}^{(n-m)/m} \underline{\dot{\sigma}}^* .$$

Równanie ewolucji (5.14) otrzymało postać

$$(5.17) \quad \dot{\underline{\Omega}} = B[\underline{\sigma}^{*(1)}]^k \underline{\nu}^{(1)} \otimes \underline{\nu}^{(1)} ,$$

gdzie: A, B, k, m, n są stałymi materiałowymi, $\underline{\sigma}^{*(1)}$ i $\underline{\nu}^{(1)}$ oznaczają maksymalną dodatnią wartość główną $\underline{\sigma}^*$ i odpowiadający jej kierunek główny, $\underline{\dot{\sigma}}_{eq} = (\frac{3}{2} \text{tr} \underline{\dot{\sigma}}^2)^{1/2}$, $\underline{\dot{\sigma}}^*$ jest dewiatorem tensora $\underline{\dot{\sigma}}^*$

$$(5.18) \quad \underline{\dot{\sigma}}^* = \frac{1}{2}(\underline{\dot{\sigma}}\underline{\Phi} + \underline{\Phi}\underline{\dot{\sigma}}) , \quad \underline{\Phi} = (\underline{I} - c\underline{\Omega})^{-1} , \quad c \in [0, 1] ,$$

c jest skalarnym współczynnikiem reprezentującym niejednorodność ewolucji mikrodefektów w objętości materiału.

Pomimo, że w stosunku do (5.13) i (5.14) autorzy deklarują podejście oparte na teorii reprezentacji funkcji tensorowych, to praktycznie zależność (5.14) nie otrzymała formy reprezentacji lecz została intuicyjnie zapostulowana tak, aby uwzględniała podstawowe obserwacje doświadczalne dotyczące wzrostu uszkodzenia w polikrystalicznych metalach [3,36]. Równanie konstytutywne (5.13) rozwinięto co prawda w formalną reprezentację wielomianową, ale natychmiast uproszczono do postaci

$$(5.19) \quad \dot{\underline{\epsilon}}_c = \beta_0 \underline{I} + \beta_1 \underline{\dot{\sigma}}^* + \beta_2 \underline{\dot{\sigma}}^{*2} ,$$

aby ostatecznie nadać mu formę liniowej zależności (5.16). Niejasny jest również sens współczynnika c w definicji (5.18). Okazuje się, że tensor uszkodzenia (5.8) nie oddaje anizotropowego charakteru uszkodzenia. Jest jedynie tensorowa miarą gęstości mikroszczelin. Z tego powodu wprowadzono ad hoc skalar c , któremu przypisano zadanie uwzględnienia wspomnianej anizotropii nie podając jego interpretacji fizycznej, czy geometrycznej. Te nieścisłości modelu znalazły swoje odbicie w weryfikacji eksperymentalnej, której poddano równania (5.16) i (5.17). Obliczony czas do zniszczenia w przypadku nieproporcjonalnego obciążenia próbek miedzianych [35] (stałe rozciąganie, cykliczne skręcanie) był o 12% dłuższy niż stwierdzony doświadczalnie. Odształcenia graniczne przewidziano o 20% mniejsze niż pokazały doświadczenia.

Poprawioną wersję omawianej teorii podają Murakami i Imai [47]. Najistotniejszą zmianą jest wprowadzenie sugerowanej, zsymetryzowanej transformacji naprężeń (5.12) w postaci tensora 4-go rzędu $\tilde{\Gamma}$, będącego funkcją tensorową o tej walencji od argumentu $\tilde{\Omega}$:

$$(5.20) \quad \tilde{\sigma}^{**} = \frac{1}{2} [\tilde{\Gamma}(\tilde{\Omega})\tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}\tilde{\Gamma}(\tilde{\Omega})^T] .$$

Funkcje $\tilde{\Gamma}$ przedstawiono w formie wielomianowej reprezentacji Rivlina-Ericksena [48]. Prawo ewolucji podtrzymano w postaci (5.14), zakładając, że proces wzrostu uszkodzeń zależy głównie od wielkości efektywnej powierzchni przekroju, a więc jest dobrze określony przez tensor $\tilde{\Omega}$, (5.9). Inaczej niż wzrost mikrodefektów, odształcenie uszkodzonego materiału zależy nie tylko od powierzchni netto, ale również od przestrzennego rozkładu mikrodefektów i dlatego do równania konstytutywnego peźnania wprowadzono zmodyfikowany tensor naprężeń efektywnych $\tilde{\sigma}^{**}$ (5.20)

$$(5.21) \quad \dot{\tilde{\epsilon}}_c = \tilde{G}(\tilde{\sigma}^{**}, \tilde{\Omega}, \kappa, \theta) .$$

Tensor naprężeń efektywnych ma zatem podwójną definicję: jedną dla potrzeb równania wzrostu uszkodzeń (5.15), drugą dla prawa konstytutywnego (5.20). Należy to uznać za niekonsekwencję modelu. Przeprowadzono weryfikację doświadczalną tensorów $\underline{\underline{\sigma}} = (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Omega}})^{-1}$ i $\underline{\underline{g}}^*$, które są argumentami funkcji ewolucji uszkodzenia (5.14) oraz nowowprowadzonego tensora $\underline{\underline{g}}^{**}$, który występuje w równaniu konstytutywnym (5.21). Doświadczenia polegały na symulowaniu rzeczywistych mikrodefektów poprzez perforowanie materiału, podobnie jak w pracy Litewki i Sawczuka [30]. Otrzymano dobrą zgodność wyników teoretycznych z doświadczeniem, co potwierdza poprawność koncepcji symetrycznego tensora uszkodzenia II-go rzędu. Uzyskane dane doświadczalne wskazują również, że jeśli gęstość uszkodzeń nie przekracza pewnej granicy (2% w przypadku Nimonicu 80A, [2]), to wpływ uszkodzenia na odkształcenia przy pełzaniu można aproksymować parametrem skalarnym, gdyż rozkład mikropustek jest wówczas prawie izotropowy. Stwierdzono też, że naprężenia przy zniszczeniu próbek perforowanych zależą w niewielkim stopniu od geometrycznego układu otworów, a głównie od redukcji powierzchni efektywnej. To spostrzeżenie sygnalizują niezależnie Litewka i Sawczuk [30] w odniesieniu do uszkodzenia sprężysto-plastycznego symulowanego w próbkach aluminiowych. Nie należy stąd jednak wyciągać wniosku, że uszkodzenie w metalach nie ma charakteru kierunkowego, gdyż porównań dokonano co prawda dla różnych systemów perforacji [47], ale kierunki główne uszkodzenia pokrywały się, a gęstość uszkodzeń w odpowiadających sobie kierunkach była w obu przypadkach prawie identyczna.

Zbliżoną teorię anizotropowego uszkodzenia w warunkach pełzania rozwinął Betten [49,50]. Rozważając elementarny czworościan w stanie idealnym (I) i uszkodzonym (II) wprowadza tak, jak Murakami i Ohno [9] pojęcie fikcyjnej konfiguracji nieuszkodzonej, równoważnej konfiguracji w stanie II. Pola powierzchni wszystkich ścian czworościanu są reprezentowane przez wektory normalne, ale w postaci bardziej formalnej, przy zastosowaniu iloczynu wektorowego i pojęcia biwektorów. Na podstawie analizy geometrycznej autor dochodzi do definicji symetrycznego tensora uszkodzenia drugiego rzędu. Przeprowadza iden-

tyczną jak w [9], analizę wpływu uszkodzenia na wielkość naprężenia, wprowadzając symetryczny tensor naprężeń efektywnych. Następnie postuluje ogólne równanie pełzania dla materiałów wstępnie izotropowych i anizotropowych w formie wielomianowych rozwinięć funkcji tensorowej

$$(5.31) \quad \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_C = \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{\Omega}}, \underline{\underline{g}}) ,$$

posługując się teorią reprezentacji; $\underline{\underline{A}}$ jest tensorem 4-go rzędu charakteryzującym wrodzoną anizotropię materiału. Twierdzenia teorii reprezentacji zostały udowodnione dla argumentów (tensorów) o walencji 2 co najwyżej [43,44,45]. Założenia modelu Bettena wymagają rozszerzenia tych twierdzeń na tensory 4-go rzędu. Jest to problem z zakresu algebry tensorów i teorii niezmienników. Zaproponowane w pracy uogólnienie wydaje się jednak trudne do zaakceptowania ze względów praktycznych. Pełna reprezentacja funkcji (5.31) zawierałaby 139 generatorów tensorowych i tyleż nieznanych funkcji skalarnych od niezmienników bazy, które należałoby wyspecyfikować albo eksperymentalnie albo przy dodatkowych założeniach co do ich postaci. Wyniki przedstawione w [49] są interesujące z punktu widzenia matematycznej teorii funkcji tensorowych, natomiast wnoszą niewiele jeśli chodzi o fizyczną stronę zjawiska uszkodzenia. Tu wykorzystane zostały stare koncepcje Kaczanowa [1] oraz Murakamiego i Ohno [9] w bardziej wyrafinowanej postaci. Nadmierna uniwersalność przyjętych założeń powoduje, że model uszkodzonego materiału stał się nierealistyczny w zastosowaniach.

Kontynuując teorię pełzania z uwzględnieniem wewnętrznego uszkodzenia przedstawili Leckie i Onat [51]. Przyjęli oni, że bezpośrednią miarą nukleacji mikrodefektów jest ich ilość w jednostkowej objętości, natomiast miarą wzrostu uszkodzenia jest objętość pojedynczej mikropustki. W oparciu o te założenia autorzy konstruują zbiór tensorów momentowych parzystych stopni

$$(5.32) \quad \underline{\underline{N}}_0 = \int_A \underline{\underline{N}}(\underline{\underline{n}}) dA(\underline{\underline{n}}) \quad ; \quad \underline{\underline{N}}_1 = \int_A \underline{\underline{N}}(\underline{\underline{n}}) \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} dA(\underline{\underline{n}}) ,$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}_2 &= \int_A N(\underline{n}) \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \, dA(\underline{n}) \quad , \dots \\
 (5.33) \quad \tilde{V}_0 &= \int_A V(\underline{n}) \, dA(\underline{n}) \quad , \quad \tilde{V}_1 = \int_A V(\underline{n}) \underline{n} \otimes \underline{n} \, dA(\underline{n}) \quad , \\
 \tilde{V}_2 &= \int_A V(\underline{n}) \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \, dA(\underline{n}) \quad , \dots
 \end{aligned}$$

i postulują, że (5.32) i (5.33) opisują stan uszkodzenia w metalach podczas pełzania; $N(\underline{n})$ jest ilością mikropustek w elemencie powierzchni $dA(\underline{n})$ o wektorze normalnym \underline{n} , a jest powierzchnią sferyczną o jednostkowym promieniu. Spośród ciągów zmiennych uszkodzenia (5.32 i (5.33) wybrano drugi moment gęstości mikropustek $V_1 = \int_A V(\underline{n}) \underline{n} \otimes \underline{n} \, dA(\underline{n})$ i podano propozycje równania konstytutywnego pełzania, prawa ewolucji mikrodefektów oraz kryterium zniszczenia, w następującej ogólnej postaci

$$(5.34) \quad \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_C = f \left(\frac{1}{2} \text{tr} \underline{\underline{S}}^2 \right) , \text{tr} \underline{\underline{V}}_1 \underline{\underline{S}} \quad ,$$

$$(5.35) \quad \dot{\underline{\underline{V}}}_1 = g(\sigma^{(1)}) \underline{\underline{n}}^{(1)} \otimes \underline{\underline{n}}^{(1)} \quad ,$$

$$(5.36) \quad R(\sigma^{(1)} , \text{tr} \underline{\underline{V}}_1 , \text{tr} \underline{\underline{n}}^{(1)} \underline{\underline{V}}_1 \underline{\underline{n}}^{(1)}) = 0 \quad ,$$

gdzie: $\underline{\underline{S}}$ oznacza dewiator naprężenia, $\sigma^{(1)}$ - maksymalne główne naprężenia rozciągające, $\underline{\underline{n}}^{(1)}$ - kierunek główny odpowiadający $\sigma^{(1)}$. Skalarne funkcje f, g, R nie zostały wyspecyfikowane.

W dotychczas omówionych tensorowych modelach anizotropowego uszkodzenia zmienną uszkodzenia był symetryczny tensor o walencji 2. Chaboche [52], postulując równoważność odkształceń w stanie I i II, zaproponował następujące prawo transformacji naprężeń w zakresie sprężystej reakcji materiału:

$$(5.37) \quad \underline{\underline{\sigma}}^* = [C : C_{\approx D}^{(-1)}(\underline{\underline{\Omega}})] : \underline{\underline{\sigma}} \quad ,$$

gdzie: $\underline{\underline{C}}$ i $\underline{\underline{C}}_D(\underline{\underline{\Omega}})$ są tensorami sprężystości 4-go rzędu w stanie idealnym i uszkodzonym, $\underline{\underline{\Omega}}$ jest nieznanym tensorem uszkodzenia. Na tensor stałych sprężystych $\underline{\underline{C}}_D(\underline{\underline{\Omega}})$ nałożono wymaganie symetrii:

$$(5.38) \quad \underline{\underline{C}}_D^{ijkl} = \underline{\underline{C}}_D^{klij} .$$

na podstawie wyników homogenizacji Chaboche twierdzi, iż tensor uszkodzenia, który umożliwi zachowanie warunku (5.38) powinien być niesymetrycznym tensorem 4-go rzędu, takim że

$$(5.39) \quad \underline{\underline{C}}_D(\underline{\underline{\Omega}}) = (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Omega}}) : \underline{\underline{C}} ,$$

$\underline{\underline{I}}$ - jest tensorem jednostkowym 4-go stopnia.

Nasuując na obie strony równania (5.39) tensor $\underline{\underline{C}}^{-1}$ otrzymujemy jawną definicję tensora uszkodzenia :

$$(5.40) \quad \underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}}_D : \underline{\underline{C}}^{-1} .$$

Podstawiając (5.39) do (5.37) otrzymujemy wzór na naprężenia efektywne

$$(5.41) \quad \underline{\underline{\sigma}}^* = (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Omega}})^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} .$$

Chaboche założył, że anizotropowe uszkodzenie może być aproksymowane przez kombinację uszkodzenia izotropowego oraz tzw. "idealnego uszkodzenia anizotropowego", które odpowiada dużej ilości płaskich mikroszczelin położonych w płaszczyźnie normalnej do największego głównego naprężenia rozciągającego. Dlatego tensor (5.40) zmodyfikowano, nadając mu postać

$$(5.42) \quad \underline{\underline{\Omega}} = \omega \underline{\underline{\Omega}} ,$$

przy czym ω jest skalarną zmienną charakteryzującą uszkodzenie

izotropowe, natomiast $\underline{\underline{\Omega}}$ określa idealne uszkodzenie anizotropowe zgodnie z (5.40) i wymaga ustalenia macierzy stałych sprężystych C_D w stanie uszkodzonym.

W ramach tego samego podejścia, Chaboche [53], kładąc nacisk na zachowanie obiektywności opisu, dochodzi do tensora uszkodzenia 8-go rzędu.

Jednym z podstawowych założeń teorii Chaboche'a [52] jest postulat równoważności odkształceń [1], akceptowany w większości omawianych modeli uszkodzenia. Rozważmy w tym miejscu dokładniej problem tego postulatu w odniesieniu do sprężystego zachowania materiału. Równania konstytutywne dla materiału sprężystego w stanie idealnym i uszkodzonym można zapisać następująco

$$(5.43) \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}}_0 \underline{\underline{g}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{g}} - \left(\frac{\nu}{E} \text{tr} \underline{\underline{g}} \right) \underline{\underline{I}} \quad ,$$

$$(5.44) \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\Omega}}) \underline{\underline{g}} \quad .$$

Jeśli przyjmiemy, że w stanie uszkodzonym (5.44) tensory $\underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{g}}$ są symetryczne, to z rozważań termodynamicznych, a także na podstawie wyników homogenizacji [28] otrzymuje się, że tensor 4-go rzędu $\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\Omega}})$ jest również symetryczny jako operator liniowy między tensorami symetrycznymi. Załóżmy, że naprężenia efektywne są zdefiniowane przez pewne tensorowe prawo transformacji

$$(5.45) \quad \underline{\underline{g}}^* = \underline{\underline{M}}(\underline{\underline{\Omega}}) \underline{\underline{g}} \quad , \quad \underline{\underline{M}} \in T_4^S \quad .$$

Zgodnie z postulatem równoważności odkształceń dostajemy

$$(5.46) \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{C}}_0 \underline{\underline{g}}^* = \underline{\underline{C}}_0 \underline{\underline{M}}(\underline{\underline{\Omega}}) \underline{\underline{g}} \quad ,$$

a stąd

$$(5.47) \quad \underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\Omega}}) = \underline{\underline{C}}_0 \underline{\underline{M}}(\underline{\underline{\Omega}})$$

Warunek symetrii nałożony na tensor stałych sprężystych $\underline{C}(\underline{\Omega})$ narzuca silne ograniczenia na prawo transformacji naprężeń $\underline{M}(\underline{\Omega})$. Jeśli prawo transformacji $\underline{M}(\underline{\Omega})$ ma być uniwersalne dla wszystkich rodzajów materiałów, to można pokazać, [28], że gdy tensor naprężeń jest izotropowy (lub jest dewiatorem), taki sam okazuje się tensor naprężeń efektywnych $\underline{\sigma}^*$, co pozostaje w sprzeczności z koncepcją anizotropowego uszkodzenia.

Weźmy pod uwagę przykład podany przez Sidoroffa [39], dotyczący tzw. niesprężonego anizotropowego uszkodzenia^{*)}, [26]:

$$(5.48) \quad \sigma_1^* = \frac{\sigma_1}{1-\Omega_1}, \quad \sigma_2^* = \frac{\sigma_2}{1-\Omega_2}, \quad \sigma_3^* = \frac{\sigma_3}{1-\Omega_3}$$

Podstawiając (5.48) do (5.43) otrzymujemy, [39]:

$$(5.49) \quad \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\Omega_1} & \frac{-\nu}{1-\Omega_2} & \frac{-\nu}{1-\Omega_3} \\ \frac{-\nu}{1-\Omega_1} & \frac{1}{1-\Omega_2} & \frac{-\nu}{1-\Omega_3} \\ \frac{-\nu}{1-\Omega_1} & \frac{-\nu}{1-\Omega_2} & \frac{1}{1-\Omega_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}$$

co przeczy przyjętemu założeniu, gdyż tensor stałych sprężystych $\underline{C}(\underline{\Omega})$ jest niesymetryczny, chyba że $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3$, a to oznacza uszkodzenie izotropowe.

Jest widoczne, że przynajmniej w odniesieniu do sprężystości, chcąc opisać anizotropowe uszkodzenie należy wybrać pomiędzy postulatem równoważności odkształceń, a pojęciem naprężeń efektywnych (5.45) (przy konwencjonalnej definicji tensorów $\underline{\epsilon}$ i $\underline{\sigma}$).

W miejsce postulatu ekwiwalentnych odkształceń Cordebois i Sidoroff [28,29] proponują identyfikację energetyczną. Energia komplementarna w stanie naturalnym i uszkodzonym wy-

*) Tensory $\underline{\Omega}$ i $\underline{\sigma}$ są wówczas współosiowe; uszkodzenie rozwija się wyłącznie w płaszczyznach normalnych do głównych naprężeń i jest wzajemnie niezależne.

raża się wzorami:

$$(5.50) \quad W_0(\underline{\sigma}) = \frac{1+\nu}{2E} \text{tr} \underline{\sigma}^2 - \frac{\nu}{2E} \text{tr}^2 \underline{\sigma} = \frac{1}{2} \underline{\sigma} \underline{C}_0 \underline{\sigma} ,$$

$$(5.31) \quad W_D(\underline{\sigma}, \underline{\Omega}) = \frac{1}{2} \underline{\sigma} \underline{C}_D(\underline{\Omega}) \underline{\sigma} .$$

Zakłada się, że energia w stanie uszkodzonym (5.51) może być otrzymana z energii w stanie idealnym (5.50) przez zastąpienie tensora naprężeń $\underline{\sigma}$ tensorem naprężeń efektywnych, tzn.:

$$(5.52) \quad W_D(\underline{\sigma}, \underline{\Omega}) \equiv W_0(\underline{\sigma}^*) ,$$

a więc

$$\frac{1}{2} \underline{\sigma}^* \underline{C}_0 \underline{\sigma}^* = \frac{1}{2} \underline{M}(\underline{\Omega}) \underline{\sigma} \underline{C}_D(\underline{\Omega}) \underline{\sigma} \equiv \frac{1}{2} \underline{\sigma} \underline{C}_D(\underline{\Omega}) \underline{\sigma} ,$$

stąd

$$\underline{M}^T(\underline{\Omega}) \underline{C}_0 \underline{M}(\underline{\Omega}) \underline{\sigma} = \underline{\sigma} \underline{C}_D(\underline{\Omega}) \underline{\sigma}$$

i ostatecznie otrzymujemy równanie określające prawo transformacji $\underline{M}(\underline{\Omega})$, (5.45) :

$$(5.53) \quad \underline{M}^T(\underline{\Omega}) \underline{C}_0 \underline{M}(\underline{\Omega}) = \underline{C}_D(\underline{\Omega}) ,$$

którego nie dotyczą wspomniane ograniczenia, [39] . Przyjmując, że zmienna uszkodzenia jest symetrycznym tensorem 2-go rzędu, autorzy wyprowadzają następujący tensor naprężeń efektywnych

$$(5.54) \quad \underline{\sigma}^* = (\underline{I} - \underline{\Omega})^{-0.5} \underline{\sigma} (\underline{I} - \underline{\Omega})^{-0.5}$$

oraz tensor stałych sprężystych w stanie uszkodzonym

$$(5.55) \quad \underline{C}_D(\underline{\Omega}) = (\underline{I} - \underline{\Omega})^{1/2} \otimes (\underline{I} - \underline{\Omega})^{1/2} \otimes (\underline{I} - \underline{\Omega})^{1/2} \otimes (\underline{I} - \underline{\Omega})^{1/2} :: \underline{C}_0$$

Struktura (5.55) jest bardzo skomplikowana i dlatego doświadczalna identyfikacja składowych tensora $\underline{\underline{C}}_D(\underline{\underline{\Omega}})$ jest trudna do przeprowadzenia, na co zwraca uwagę Chaboche [52].

Dragon [54] analizował nukleację i rozwój mikrodefektów w materiałach sprężysto-kruchych. Stosując tensor uszkodzenia II-go rzędu (5.2), autor postuluje, iż mikroszczeliny zaczynają powstawać, jeśli spełnione jest pewne kryterium $f(\text{tr}\underline{\underline{g}}, \text{tr}\underline{\underline{S}}^2) > 0$ w przestrzeni naprężeń. Proponuje dalej ogólne równanie wzrostu uszkodzeń:

$$(5.56) \quad \begin{aligned} d\underline{\underline{\Omega}} &= g(\text{tr}\underline{\underline{g}}, \text{tr}\underline{\underline{S}}^2) d\underline{\underline{g}} \quad , \quad f(\text{tr}\underline{\underline{g}}, \text{tr}\underline{\underline{S}}^2) \geq 0 \\ d\underline{\underline{\Omega}} &= 0 \quad , \quad f(\text{tr}\underline{\underline{g}}, \text{tr}\underline{\underline{S}}^2) < 0, \end{aligned}$$

gdzie $\underline{\underline{g}}$ oznacza pseudotensor naprężenia zbudowany z dodatnich składowych tensora Cauchy'ego $\underline{\underline{g}}$.

Prawo konstytutywne podano w formie przyrostowej, zakładając istnienie potencjału sprężystego i zaniehbując odkształcenia nieodwracalne

$$(5.57) \quad d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial^2 F(\sigma_{ij}, \Omega_{ij})}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial^2 F(\sigma_{ij}, \Omega_{ij})}{\partial \sigma_{ij} \partial \Omega_{kl}} d\Omega_{kl} .$$

Wykorzystując koncepcje teorii plastyczności Dragon i Mróz [55] proponują interesujące rozwinięcie tego modelu uzyskując równania konstytutywne typu $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{\dot{\sigma}}})$ w przypadku sprężysto-plastycznego zachowania się materiału przy narastającym uszkodzeniu. Krajcinovic i Fonseka polemizują z teorią Dragona-Mroza w punkcie dotyczącym uszkodzenia materiałów kruchych. Powołując się na wyniki doświadczeń [18,19] twierdzą [7], że uszkodzenie materiałów kruchych powinno być kojarzone z tensorem odkształcenia, a nie naprężenia, gdyż właśnie graniczne odkształcenia są tym czynnikiem, który decyduje o wytrzymałości skał i betonu. Wskazują, że przyjęcie tensora naprężenia jako zmiennej stanu [55] powoduje niepotrzebne komplikacje modelu w postaci koniecznego rozróżnienia: - dewiator naprężeń $\underline{\underline{S}}$, gdy $\text{tr}\underline{\underline{\sigma}} < 0$

oraz pełny tensor Cauchy'ego \underline{g} , gdy $\text{tr}\sigma > 0$.

6. Teorie odkształceniowe

Odmienne podejście do zjawiska uszkodzenia odnajdujemy w pracach Jansona i Hulta [10] , Sawczuka [11,12] , Sadowskiego [12] oraz Jaliniera i Schmitta [13] . Zamiast definiować tensor uszkodzenia w oparciu o geometryczne cechy defektów w mikroskali, a następnie stosować kłopotliwą procedurę uśredniania po objętości, autorzy tych prac proponują naturalne powiązanie zmiennej uszkodzenia z makroskopową miarą odkształcenia, która jest wielkością mierzalną doświadczalnie.

Janson i Hult [10] rozważają elementarny przypadek jednoosiowego rozciągania i postulują a priori liniową postać związków konstytutywnych pomiędzy odkształceniem, naprężeniem efektywnym w sensie Kaczanowa [1] oraz uszkodzeniem skalarnym (3.5), mianowicie:

$$(6.1) \quad \varepsilon = G(\sigma^*) = \frac{\sigma^*}{E} \quad , \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{1-\omega} \quad ,$$

$$(6.2) \quad \omega = g(\sigma^*) = \frac{\sigma^*}{D} \quad ,$$

gdzie stała D jest tzw. modułem uszkodzenia; w stanie idealnym $D = \infty$.

Łatwo można zauważyć, że miara uszkodzenia ω jest liniową funkcją odkształcenia osiowego ε ,

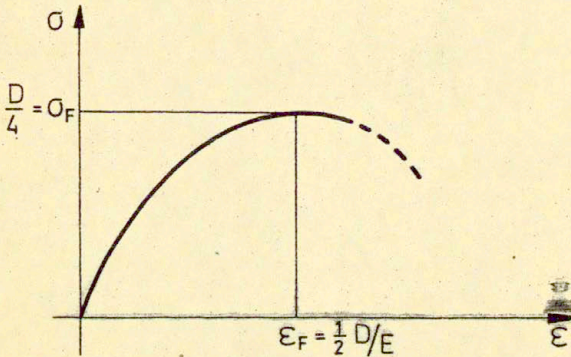
$$(6.3) \quad \omega = f(\varepsilon) = \frac{E}{D} \varepsilon \quad .$$

Równanie konstytutywne $\sigma(\varepsilon)$ dla materiału początkowo liniowo-sprężystego jest nieliniowe z powodu obecności i wzrostu uszkodzeń.

$$(6.4) \quad \sigma = E\varepsilon \left(1 - \frac{E\varepsilon}{D}\right) .$$

Nieliniowość tę, obserwowaną w zasadzie od początku procesu deformacji materiału, potwierdzają doświadczenia oprate na metodzie symulacji uszkodzeń [30]. Kryterium zlokalizowanego zniszczenia jest w tym modelu utożsamiane z osiągnięciem przez krzywą (6.4) punktu niestateczności, rys.11

$$(6.5) \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0$$



Rys. 11

Moduł uszkodzenia D może być interpretowany jako $4\sigma_F$.

Idea skojarzenia wewnętrznego uszkodzenia z makroskopową miarą deformacji ciała wydaje się racjonalna. Wymierną korzyścią z definicji (6.3) jest to, że nie musimy formułować równania ewolucji uszkodzenia w dotychczasowym pojęciu. Z drugiej strony, w takim pośrednim sposobie opisu ominięta zostaje fizyczna strona procesu uszkodzenia na poziomie mikrostruktury. Nasuwa się jednak pytanie, co ma być celem formułowanych kontynuacyjnych teorii: czy wierna, stąd bardzo skomplikowana analiza mikromechanizmów powstawania i rozwoju defektów, a dopiero w następnej kolejności przejście, dość enigmatyczne jak dotąd, do makroopisu

zachowania się uszkodzonego materiału, czy też chodzi o zbudowanie adekwatnego modelu fenomenologicznego, opartego na makroskopowych charakterystykach uszkodzonego materiału, uwzględniającego podstawowe efekty z obserwacji doświadczalnych i nadającego się do inżynierskich zastosowań? W tym drugim przypadku jednowymiarowy model odkształceniowy naszkicowany przez Jansona i Hulta wart jest rozwinięcia.

Sawczuk i in. [11,12] przedstawiają bezpośrednie tensorowe uogólnienie tego modelu na złożone stany naprężenia. Podstawowym założeniem jest przyjęcie współliniowości tensorów uszkodzenia i odkształcenia

$$(6.6) \quad \underline{\Omega} = c\underline{\epsilon} \quad ,$$

co oznacza, że kierunki główne obu tensorów pokrywają się. Zasadność tego postulatu nie podlega dyskusji w odniesieniu do testów jednoosiowych czy nawet dwuosiowych, gdzie mikrodefekty układają się prostopadle do maksymalnego głównego naprężenia rozciągającego. Jednak w stanach trójosiowych, związek (6.6) nie jest oczywisty i wymaga weryfikacji eksperymentalnej. Sadowski i Sawczuk [12] zastosowali tensor (6.6) do analizy zginania płyt w złożonym stanie naprężenia uwzględniając akumulację wewnętrznej deterioracji materiału oraz jej anizotropowy charakter.

Wariant skalarnego modelu odkształceniowego sformułowali Jalinier i Schmitt opracowując wyniki własnych doświadczeń na temat uszkodzenia sprężysto-plastycznego metali w jednoosiowym i dwuosiowym rozciąganiu [13]. Parametrem uszkodzenia jest tu charakterystyczny wymiar mikropustki związany z przyłożonym, kontrolowanym odkształceniem. Ten półempiryczny model jest zlinearyzowaną odmianą teorii Rice'a i Tracey'a [56] dotyczącej ewolucji kulistej mikropustki w plastycznej macierzy bez wzmocnienia.

7. Podejścia termodynamiczne

Mechanizm powstawania i rozwoju mikrodefektów wewnętrznej struktury materiału związany jest z dyssypacją energii dostarczonej podczas procesu odkształcania. Materiały, których zachowanie zależy jedynie od chwilowych wartości zmiennych stanu, a w tym od aktualnego obrazu uszkodzenia, powinno się więc opisywać w oparciu o zasady termodynamiki. Termodynamiczna teoria wewnętrznych parametrów stanu stwarza racjonalne podstawy dla formułowania równań konstytutywnych w ramach kontynualnej mechaniki uszkodzeń [57]. Parametrami wewnętrznymi, które charakteryzują dyssypatywny proces deterioracji materiału są omawiane zmienne $\underline{\Omega}$. Energia zewnętrzna zużyta na zdeformowanie ciała w warunkach izotermicznych jest w części akumulowana w postaci energii odkształcenia sprężystego, a w części rozpraszana w wyniku nieodwracalnych zmian struktury - plastycznego płynięcia i uszkodzenia. Mechanizmy dyssypacji plastycznej i uszkodzeniowej różnią się między sobą i dlatego należy rozważyć dwie grupy parametrów wewnętrznych :

- $\underline{\eta}$ - odzwierciedlających stan deformacji plastycznych,
- $\underline{\Omega}$ - charakteryzujących stan aktualny i historię uszkodzenia.

Parametry $\underline{\eta}$ określają wzmocnienie materiału, natomiast $\underline{\Omega}$ - jego osłabienie; powyższy podział ma zatem fizyczne uzasadnienie. Zgodnie z drugą zasadą termodynamiki lokalna prędkość zmian entropii musi być nieujemna

$$(7.1) \quad \rho \dot{D} = \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \rho (\dot{\psi} + D\theta) - \frac{1}{\theta} \underline{q} \cdot \text{grad} \theta \geq 0,$$

gdzie: $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\epsilon}}, \rho, \psi, D, \theta, \underline{q}$ oznaczają kolejno: tensor naprężenia, tensor odkształcenia, stałą gęstość masy, gęstość energii swobodnej Helmholtza, gęstość entropii, temperaturę oraz wektor strumienia ciepła.

Przyjmując założenie, iż proces deformacji jest izotermiczny,

(7.1) upraszcza się do następującej postaci (nierówność Clausiusa-Duhema):

$$(7.2) \quad \rho \dot{D} = \text{tr} \underline{\underline{\dot{\xi}}} - \rho \dot{\phi} \geq 0 .$$

Tensor naprężenia oraz wektory uogólnionych sił termodynamicznych można zdefiniować wykorzystując energię swobodną $\rho\phi = \phi(\varepsilon_{ij}, \omega_j, \eta_j)^*$

$$(7.3) \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad , \quad \rho = \text{const.}$$

$$(7.4) \quad N_j = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \eta_j} \quad , \quad R_j = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \omega_j} .$$

Podstawmy (7.3) i (7.4) do nierówności Clausiusa-Duhema:

$$(7.5) \quad \rho \dot{D} \equiv \rho \text{tr} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^e}{\partial t} \right) - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^e}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial \omega_j} \frac{\partial \omega_j}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta_j} \frac{\partial \eta_j}{\partial t} > 0 \quad ,$$

stąd prędkość zmian entropii wynosi

$$(7.6) \quad \rho \dot{D} = -(R_j \dot{\omega}_j + N_j \dot{\eta}_j) \geq 0 \quad ;$$

przyjmując ogólną notację termodynamiczną [14] , otrzymujemy

$$(7.7) \quad \rho \dot{D} \equiv X_i \dot{J}_i \geq 0 \quad ,$$

gdzie X_i jest wektorem skoniugowanych sił termodynamicznych, $X_i = \{-R_i, N_i, \sigma_i\}$; \dot{J}_i jest wektorem strumieni termodynamicznych

*) dla uproszczenia rozważań zmiennym stanu $\underline{\underline{\Omega}}$ i $\underline{\underline{\eta}}$ nadano postać wektorów : uszkodzenia ω_j i wzmocnienia η_j .

$\dot{J}_i = \{\dot{\varepsilon}_i, \dot{\omega}_i, \dot{\eta}_i\}$. Uogólnione równanie konstytutywne zapisane dla izotermicznego procesu deformacji powinno mieć postać:

$$(7.8) \quad \dot{J}_i = \dot{J}_i(\varepsilon_i^e, X_i) ,$$

przy czym dopuszczalny zakres zmienności stałych materiałowych występujących w szczegółowym równaniu (7.8) określony jest przez nierówność (7.7). Pozostaje jeszcze sformułować prawo ewolucji uszkodzenia. Propozycje tego równania omówimy poniżej, przedstawiając istniejące termodynamiczne teorie uszkodzenia.

Najprostszą klasą materiałów z uszkodzeniami są materiały idealnie kruche, a typowe dla nich defekty struktury - to płaskie mikroszczeliny. Model kruchego uszkodzenia zbudowali Davison i Stevens [6] przyjmując, że stan deterioracji materiału definiowany jest przez funkcję wektorową (4.3). Energia swobodna jest w tym przypadku skalarną funkcją tensora odkształcenia $\underline{\varepsilon}^e$ i wprowadzonego wektora uszkodzenia $\underline{\omega}$

$$(7.9) \quad \varphi = \varphi(\underline{\varepsilon}^e, \underline{\omega}) .$$

Niezmienniczą postać tej funkcji otrzymuje się na podstawie twierdzeń o reprezentacjach wielomianowych. Niezmienniki bazy mogą być następujące

$$(7.10) \quad I_1: I_1, I_2, I_3, \text{tr}\underline{\omega}\underline{\omega} , \text{tr}\underline{\omega}\underline{\varepsilon} , \text{tr}\underline{\omega}\underline{\varepsilon}^2 ;$$

$$I_1 = \text{tr}\underline{\varepsilon} , I_2 = \frac{1}{2}(\text{tr}^2\underline{\varepsilon} - \text{tr}\underline{\varepsilon}^2), I_3 = \det\underline{\varepsilon} .$$

Równanie $\underline{\sigma}(\underline{\varepsilon})$ otrzymujemy z termodynamicznej zależności (7.3) dla ustalonego chwilowego wektora $\underline{\omega}$

$$(7.11) \quad \sigma_{ij} = \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial I_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial I_2} I_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial I_3} I_2 \right) \delta_{ij} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial I_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial I_3} I_1 \right) \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial I_3} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} + \frac{\partial \varphi}{\partial (\omega_k \varepsilon_{k1} \omega_1)} \omega_i \omega_j +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial (\omega_k \epsilon_{kl} \epsilon_{lm} \omega_m)} (\omega_i \epsilon_{jp} \omega_p + \omega_p \epsilon_{pi} \omega_j) .$$

Prawo wzrostu uszkodzeń $\dot{\underline{\omega}} = \dot{\underline{\omega}}(\underline{\epsilon}, \underline{\omega})$ zapisano także w formie wielomianowej reprezentacji funkcji wektorowej od mieszanych argumentów $\underline{\epsilon}, \underline{\omega}$:

$$(7.12) \quad \dot{\underline{\omega}} = \alpha_1 \underline{\omega} + \alpha_2 \underline{\epsilon} \underline{\omega} + \alpha_3 \underline{\epsilon}^2 \underline{\omega} ,$$

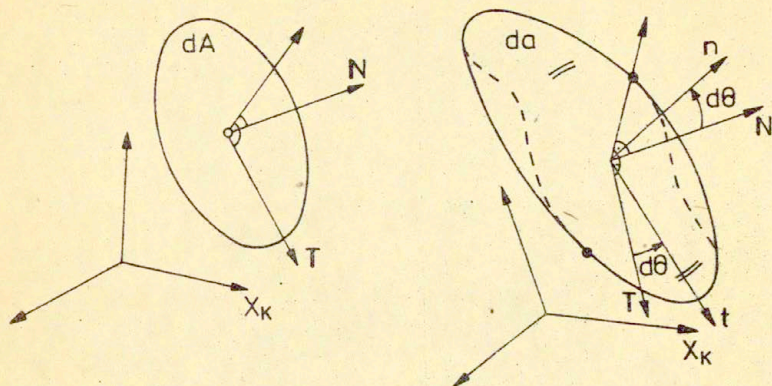
przy czym $\alpha_i = \alpha_i(I_i)$.

Model Davisona i Stevensa został rozwinięty przez Krajcinovica i Fonsekę [7] głównie w części dotyczącej kinematyki wzrostu uszkodzeń. Wychodząc z definicji (4.3), autorzy przeprowadzają ścisłą matematyczną analizę zmiany powierzchni mikroszczeliny wykorzystując koncepcję, według której w klasycznej mechanice ośrodka ciągłego wprowadzono miarę odkształcenia. Uzyskano w ten sposób tensor II-go rzędu $d\Omega_{kl}$, który jest miarą zmian geometrii mikroszczeliny:

$$(7.13) \quad d\Omega_{kl} = \frac{1}{2} (J^2 X_{K,i} X_{L,i} - \delta_{KL}) ,$$

J - jacobian transformacji $X_K \rightarrow x_k$.

Składowa diagonalna $d\Omega_{NN}$ reprezentuje względny przyrost pola powierzchni mikroszczeliny w płaszczyźnie prostopadłej do normalnej początkowej \underline{N} . Składowa styczna $d\Omega_{NT}$ określa wielkość kąta obrotu między wektorami \underline{N} i \underline{n} , zmierzoną wokół osi prostopadłej do kierunków \underline{N} i \underline{T} , rys.12. Równanie konstytutywne sprężystości sformułowano dla małych odkształceń $\underline{\epsilon} = \underline{e}$, aby uniknąć rozróżnienia pomiędzy wartościami zmiennych stanu $(\underline{\omega}, \underline{g})$ odniesionymi do konfiguracji początkowej X_K , a chwilowymi wartościami $(\underline{\omega}^X, \underline{g}^X)$ związanymi z $(\underline{\omega}, \underline{g})$ poprzez równanie ruchu ciała. Analogicznie jak w [6] określono reprezentację funkcji energii sprężystej Helmholtza $\varphi(\underline{e}, \underline{\omega})$, (7.9), pozostawiając tylko człony zawierające \underline{e}^2 (tzw. energia odkształcenia sprężystego):



Rys.12 , [6]

$$(7.14) \quad \rho\varphi = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}^2 - \mu(\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}^2 - \text{tr}^2\underline{\underline{\varepsilon}}) + C_1\text{tr}(\underline{\underline{\omega}}\underline{\underline{\varepsilon}}\underline{\underline{\omega}}) + \\ + C_2\text{tr}(\underline{\underline{\omega}}\underline{\underline{\varepsilon}}^2\underline{\underline{\omega}}) ,$$

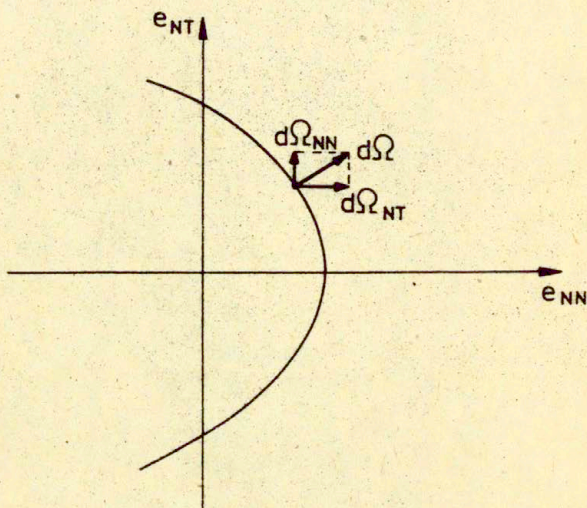
gdzie gęstość $\rho = \text{const.}$, gdyż rozważane mikrodefekty są płaskie; C_1, C_2 są stałymi materiałowymi zależnymi od uszkodzenia. Związek konstytutywny $\underline{\underline{g}}(\underline{\underline{\varepsilon}})$ zapisano w formie przyrostowej wykorzystując definicję (7.3):

$$(7.15) \quad d\sigma_{IJ} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial e_{IJ} \partial e_{KL}} de_{KL} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial e_{IJ} \partial \omega_M} d\omega_M ,$$

przy czym $\varphi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\omega}})$ - według (7.14).

Prawo wzrostu uszkodzenia zostało zaproponowane w oparciu o hipotezę istnienia, tzw. powierzchni uszkodzenia w przestrzeni

odkształceń, rys.13, która jest przeniesieniem koncepcji powierzchni pęknięcia z teorii plastyczności. Pojęcie powierzchni uszkodzenia zostało po raz pierwszy użyte przez Dougilla [58,59], a następnie przez Dragona i Mroza [55] .



Rys.13 , [7]

Powierzchnia uszkodzenia jest tu rozumiana jako eksperymentalnie ustalona, skalarna funkcja $f = f(\underline{e}, \underline{\omega}) = 0$, będąca obwiednią wszystkich stanów naprężenia, które mogą być osiągnięte bez dodatkowego przyrostu uszkodzenia. Motywacją fizyczną dla takiego podejścia jest stwierdzone doświadczalnie występowanie stanów obciążenia, które nie powodują wzrostu uszkodzenia (ściskanie, odciążenie). Dodatkowym założeniem jest ortogonalność wektora przyrostu uszkodzenia do powierzchni $f(\underline{e}, \underline{\omega})$, co oznacza, iż funkcja $f = F = 0$ jest potencjałem dla $d\underline{\omega}$ (lub $\underline{\omega}$). Prawo wzrostu można wobec tego zapisać następująco:

$$(7.16) \quad \dot{\bar{\omega}} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \bar{\xi}} ,$$

gdzie $\lambda > 0$ jest skalarną funkcją materiałową. Potencjał F jest w [7] dość arbitralnie przyjętą funkcją odkształceń i największej gęstości uszkodzeń $\bar{\omega}_N$, opartą bardziej na geometrycznych spekulacjach niż na rozważaniach termodynamicznych:

$$(7.17) \quad F = e_{NN} + B_1 \bar{\omega}_N^{1/2} \sqrt{B_2^{-2} e_{NT}^2 + \bar{\omega}_N} - B_3 \bar{\omega}_N = 0,$$

gdzie : B_1, B_2, B_3 to stałe materiałowe.

Krajcinovic [14], przedstawiając systematyczne, termodynamiczne podejście do problemu wzrostu uszkodzenia postuluje, aby funkcja F była potencjałem dyssypacji energii w przestrzeni uogólnionych sił termodynamicznych X_i

$$(7.18) \quad F = \frac{1}{2} \rho \dot{D} ,$$

\dot{D} - funkcja gęstości entropii (7.6).

Zakładając, że potencjał dyssypacji jest funkcją różniczkowalną otrzymujemy równanie wzrostu mikrodefektów:

$$(7.19) \quad \dot{J}_i = \dot{\omega}_i = \lambda \frac{\partial F}{\partial X_i} , \quad \lambda > 0.$$

Skalarna funkcja $F(\underline{e}, \underline{R}, \theta)$ powinna zostać wyspecyfikowana na podstawie danych doświadczalnych, przy zachowaniu wymagania ciągłości wraz z pierwszą pochodną i mieć postać (7.7).

W przypadku materiałów idealnie plastycznych potencjał dyssypacji powinien redukować się do funkcji plastycznego płynięcia, w przypadku materiałów idealnie kruchych - przyjmować postać $F = F(R_1)$, gdzie R_1 oznacza siłę termodynamiczną skoniugowaną ze zmienną uszkodzenia.

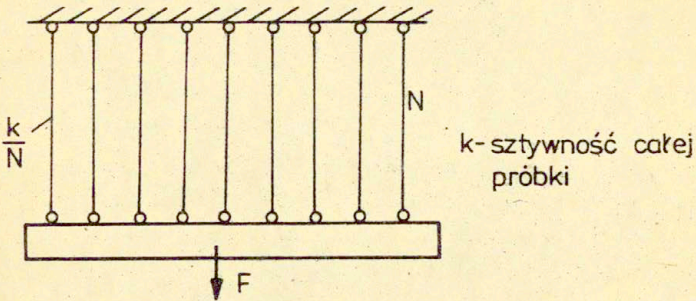
W rzeczywistości obserwuje się, że nawet w bardzo kruchych materiałach procesowi tworzenia się mikroszczelin towarzyszą odkształcenia plastyczne. W ogólności, potencjał dyssypacji F jest superpozycją dwóch członów odpowiadających tym stanom granicznym:

$$(7.20) \quad F = \alpha F^D(N_j, \eta_j, \theta) + \beta F^B(R_j, \omega_j, \theta) \quad , \quad \alpha = \alpha(\dot{\xi}, \theta) \\ \beta = \beta(\dot{\xi}, \theta).$$

W przeciwieństwie do [7], takie podejście pozwala uniknąć wielu założeń w odniesieniu do struktury równania wzrostu uszkodzenia, redukuje też liczbę stałych materiałowych. Zmienna uszkodzenia jest teraz bezpośrednio przypisana skoniugowanej sile termodynamicznej, przedtem była nieokreśloną zmienną stanu. Weryfikację poprawności tego modelu przedstawili Krajcinovic i Selvaraj [16] na przykładzie betonu ($\alpha=0$) i uzyskali zadowalającą zgodność teoretycznych krzywych $\underline{g}(\underline{\xi})$ z wynikami doświadczeń w próbie jednoosiowego ściskania oraz rozciągania. Przewidziano analitycznie zmianę znaku odkształceń objętościowych w jednoosiowym ściskaniu, otrzymano jakościową zbieżność w odniesieniu do wartości współczynnika Poissona w ściskaniu i rozciąganiu oraz do odkształceń objętościowych przy rozciąganiu.

Krajcinovic i Silva [17] sformułowali termodynamiczną teorię uszkodzenia kruchego i ciągliwego wprowadzając statystyczną (skalarną) zmienną uszkodzenia. Próbka poddana jednoosiowemu rozciąganiu modelowana była przez hipotetyczny system N równoległych belek, każda o wytrzymałości na zerwanie f_{Ri} , rys. 14. Fizyczna miarą uszkodzenia uznano liczbę zerwanych beleczek, która jest funkcją rozkładu prawdopodobieństwa wytrzymałości poszczególnych elementów systemu.

Uszkodzenie metali, przybierające formę trójwymiarowych mikropustek rozważali Davison, Stevens i Kipp [15] powracając do idei skalarnej miary uszkodzenia. Obraz uszkodzenia charakteryzują w tym modelu dwa parametry: ilość mikropustek w jed-



Rys.14 , [17]

nostkowej objętości (N) oraz średnia objętość mikropustki

$$\bar{V} = \frac{\sum_i V_{(i)}}{N}.$$

Przyjęcie energetycznego aspektu uszkodzenia za punkt wyjścia do formułowania modeli teoretycznych pozwala wykorzystać istniejący aparat matematyczny termodynamiki procesów dyssypatywnych. Nie rozwiązuje to jednak problemu właściwej definicji zmiennej uszkodzenia.

8. Wnioski

Kontynualna mechanika uszkodzeń, mimo że ciągle w początkowym stadium rozwoju, doczekała się już pewnych opracowań przeglądowych [21,61,62,63,64,67,68]. Nie są to jeszcze szczególnie opracowania całościowe, dotyczą raczej wybranych typów i zagadnień uszkodzenia.

Nawet pobieżna analiza cytowanych prac prowadzi do wniosku, iż wśród autorów istnieje głęboka niejednoznaczność w sprawie definicji zmiennej uszkodzenia i jej natury matematycznej.

Usprawiedliwieniem tego stanu może być fakt, że uszkodzenie jest zjawiskiem bardzo niejednorodnym, bezpośrednio zależnym od rodzaju materiału, stanu naprężenia, typu obciążenia i warunków otoczenia. Poszukiwanie charakterystyki, która byłaby uniwersalna dla wszystkich obserwowanych typów uszkodzenia i opierała się wyłącznie o informacje mikroskopowe jest kwestionowane, jako nierealistyczne [14].

Mikrodefekty rozwijające się w trójwymiarowym ośrodku są w rzeczywistości przestrzennymi obiektami geometrycznymi i przez analogię do jego interpretacji geometrycznej - tensor II-rzędu posiadający trzy kierunki główne i trzy rzeczywiste wartości własne może być uznany za odpowiednią reprezentację uszkodzenia. Zmienna tensorowa pozwala ponadto uwzględnić anizotropowe cechy ewolucji uszkodzenia, które sygnalizują autorzy eksperymentów (rozd. 2). Każda zmienna uszkodzenia związana z pojedynczym mikrodefektem jest wielkością lokalną. Do równań konstytutywnych powinna być wprowadzona globalna chwilowa miara uszkodzenia, co wymaga opracowania efektywnej metody przejścia od opisu lokalnego do makroskopowej charakterystyki wewnętrznej deterioracji materiału, rozumianego już wtedy jako kontinuum o wyróżnionych kierunkach degradacji wytrzymałości, pokrywających się z kierunkami głównymi uśrednionego tensora $\underline{\Omega}$. Zauważmy przy tym, że wprowadzając parametr uszkodzenia w postaci uśrednionego tensora II-rzędu ograniczamy się co najwyżej do ortotropowego rozkładu mikrodefektów.

Podejścia odkształceniowe sugerowane przez Jansona i in. [10], Sawczuka i in. [11,12] oraz Nicholsona [69], w których zmienna uszkodzenia związana jest z makroskopową miarą deformacji pozwalają uniknąć trudności napotykaných przy formułowaniu "geometrycznych" tensorów uszkodzenia na poziomie mikrodefektów. Jednakże matematyczna struktura funkcji $\underline{\Omega} = \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{\epsilon}})$ pozostaje nadal niejasna.

Literatura cytowana w tekście

- [1]. KACZANOW, L.M., O wremeni razruszenija w usłowiach połzuczestii, Izv. Ak. Nauk CCCP, Otd. Techn. Nauk, nr.8, 1958, 26-31.
- [2]. DYSON, B.F., McLEAN, F.A., Creep of Nimonic 80A in torsion and tension, Metal. Sci., Vol.11, 1977, 37-45.
- [3]. HAYHURST, D.R., LECKIE, F.A., The effect of creep constitutive and damage relationships upon the rupture time of solid circular torsion bar, J. Mech. Phys. Solids, Vol.21, 1973, 431-446.
- [4]. LECKIE, F.A., HAYHURST, D.R., Constitutive equations for creep rupture, Acta Metal., Vol.25, 1977, 1059-1070.
- [5]. KACZANOW, L.M., Osnowy mechaniki razruszenija, Nauka, 1974.
- [6]. DAVISON, L., STEVENS, A.L., Thermomechanical constitution of spalling elastic bodies, J. Appl. Phys., Vol.44, 1973, 667-674.
- [7]. KRAJCIKOVIC, D., FONSEKA, G.U., The continuous damage theory of brittle materials, Part I, II, J. Appl. Mech., Vol.48, 1981, 809-824.
- [8]. MURAKAMI, S., OHNO, N., Creep damage analysis in thin-walled tubes, in Inelastic Behaviour of Pressure Vessel and Piping Components, (ed. Chang, T.Y., Krempl, E.), PVP-PB-028, ASME, New York, 1978, 55-69.
- [9]. MURAKAMI, S., OHNO, N., A continuum theory of creep and creep damage, Proc. IUTAM Symp., Creep in Structures, Leicester U.K., Springer 1981, 422-444.
- [10]. JANSON, J., HULT, J., Fracture mechanics and damage mechanics - a combined approach, J. Méc. Appl., Vol.1, no.1, 1977, 69-84.
- [11]. SAWCZUK, A., On anisotropic continuum damage mechanics in relation to nonlinear structural response, Proc. 8th Int. Ship Struct. Congress, Sept. 1-3, 1982, Paris.
- [12]. SAWCZUK, A., SADOWSKI, T., On anisotropic continuum damage of elastic-plastic plates in flexure, J. Engng. Struct., Vol.5, 1983, 234-238.
- [13]. JALINIER, J.M., SCHMITT, J.H., Damage in sheet metal forming, Part I, II, Acta Metal., Vol.30, 1982, 1789-1809.

- [14]. KRAJCINOVIC,D., Constitutive equations for damaging materials, *J. Appl. Mech.*, Vol.50, 1983, 355-360.
- [15]. DAVISON,L.,STEVENS,A.L.,KIPP,M.E., Theory of spall damage accumulation in ductile metals, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.25, 1977, 11-28.
- [16]. KRAJCINOVIC,D.,SELVARAJ,S., Constitutive equations for concrete, *Proc. Inter. Conf. on Constitutive Laws for Engineering Materials*, Tucson, USA, 1983, (to appear).
- [17]. KRAJCINOVIC,D.,SILVA,M.A.G., Statistical aspects of the continuous damage theory, *Int. J. Solids & Structures*, Vol.18, no. 7, 1982, 551-562.
- [18]. JAEGER,J.C.,COOK,N.G., *Fundamentals of Rock Mechanics*, III-rd Edition, Chapman & Hall, 1979.
- [19]. NEVILLE,A.M., *Properties of Concrete*, Wiley & Sons, 1963.
- [20]. KNOTT,J.F., *Fundamentals of Fracture Mechanics*, Butterworth, 1973.
- [21]. MURAKAMI,S., Anisotropic damages in metals, *Proc. Coll. Inter. CNRS*, June 1983, Villard-de-Lans, (to appear).
- [22]. SCHMITT,J.H.,JALINIER,J.M.,BAUDELET,B., Analysis of damage and its influence on the plastic properties of copper, *J. Mater. Sci.*, Vol.16, 1981, 95-101.
- [23]. SCHMITT,J.H.,ARGEMI,R.,JALINIER,J.,BAUDELET,B., On the existence of initial damage in sheet metal, *J.Mater.Sci.* Vol.16, 1981, 2004-2008.
- [24]. DUFAILY,J.,LEMAITRE,J.,JALINIER,J.M.,SCHMITT,J.H.,BAUDELET,B., Determination of the relative density changes in the presence of high strain gradient, *J. Mater. Sci. Letters*, Vol.15, 1980, 3162-3165.
- [25]. DYSON,B.F.,LOVEDAY,M.S.,RODGERS,M.J., Grain boundary cavitation under various states of applied stress, *Proc. Roy. Soc. London*, A 349, 1976, 245-259.
- [26]. LEMAITRE,J.,CHABOCHE,J.L., Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement, *J. Méc. Appl.*, Vol.2, 1978, 317-365.
- [27]. LEMAITRE,J., Damage modelling for prediction of plastic or creep fatigue failure in structures, in T.A.Jaeger and B.A.Boley ed., *Trans. 5th Int. Conf. SMRiT*, North-Holland, 1979, paper no. L5/1b.

- [28]. CORDEBOIS, J.P., SIDOROFF, F., Damage induced elastic anisotropy, in Proc. Euromech Coll. 115: Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids, Villard-de-Lans, 1979.
- [29]. CORDEBOIS, J.P., SIDOROFF, F., Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité, J. Méch. Théor. Appl., Numero Spécial, 1982, 45-60.
- [30]. LITEWKA, A., SAWCZUK, A., Experimental evaluation of the overall anisotropic material response at continuous damage, Proc. Euromech Coll. 147, Cachan, 1981.
- [31]. CHEN, I.W., ARGON, A.S., Creep cavitation in 304 Stainless Steel, Acta Metal., Vol.29, 1981, 1321-1333.
- [32]. LANGEBOG, R., Creep: Mechanisms and Theories, in J. Brissers ed. Creep and Fatigue in High Temperature Alloys, Applied Science, 1981, 41-71.
- [33]. HAYHURST, D.R., TRAMPCZYŃSKI, W.A., LECKIE, F.A., Creep rupture under non-proportional loading, Acta Metal., Vol. 28, 1980, 1171-1183.
- [34]. TRAMPCZYŃSKI, W.A., HAYHURST, D.R., Creep deformation and rupture under non-proportional loading, in A.R.S. Ponter and D.R. Hayhurst ed., Creep in Structures, Springer, 1981, 388-404.
- [35]. TRAMPCZYŃSKI, W.A., HAYHURST, D.R., LECKIE, F.A., Creep rupture of copper and aluminium under non-Proportional loading J. Mech. Phys. Solids, Vol.29, 1981, 353-374.
- [36]. JOHNSON, A.E., Complex-stress creep of metals, Metal. Review, Vol.5, no.20, 1960, 447-506.
- [37]. KACZANOW, L.M., Creep and fracture at complex loading, Problemy Proczności, no. 6, 1977, 3-5.
- [38]. RABOTNOW, Y.N., Creep Problems in Structural Members, North-Holland, Amsterdam, 1969.
- [39]. SIDOROFF, F., Description of anisotropic damage application to elasticity, in J.Hult and J.Lemaitre ed., Physical Non-linearities in Structural Analysis, Springer, 1981, 237-244.
- [40]. VAKULENKO, A.A., KACZANOW, M.L. (jr), Kontynualnaja teorija sredy s treszczinami, Mechanika Twerdogo Teła, no.4, 1971 159-166.
- [41]. KACZANOW, M.L. (jr), O kontynualnoj teorii sredy s treszczinami, Mechanika Twerdogo Teła, no.2, 1972, 54-59.

- [42]. KACZANOW, M.L. (jr), Continuum model of medium with cracks, J. Engng. Mech. Div., Trans. ASCE, EM5, Vol.106, 1980, 1039-1051.
- [43]. WANG, C.C., A new representation theorem for isotropic functions, Part I, II, Corrigendum, Arch. Rat. Mech. An., Vol. 36, 1970, 166-223; Arch. Rat. Mech. An., Vol.43, 1971, 392-395.
- [44]. SMITH, G.F., On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors, Int. J. Engng. Sci., Vol.9, 1971, 899-916.
- [45]. BOEHLER, J.P., Lois de comportement des milieux continus, J. Méc., Vol.17, no.2, 1978, 153-190.
- [46]. MURAKAMI, S., Private communication.
- [47]. MURAKAMI, S., IMAIZUMI, T., Mechanical description of creep damage state and its experimental verification, J. Méc. Théor. Appl., no.1, 1982, 743-761.
- [48]. RIVLIN, R.S., ERICKSEN, J.L., Stress-deformation relations for isotropic materials, J. Rat. Mech. An., Vol.4, 1955, 323-425.
- [49]. BETTEN, J., Damage tensors in continuum mechanics, J. Méch. Théor. Appl., no.1, 1982.
- [50]. BETTEN, J., Net-stress analysis in creep mechanics, Ing. Archiv, Vol. 52, 1982, 405-419.
- [51]. LECKIE, F.A., ONAT, T.E., Tensorial nature of damage measuring internal variables, in J.Hult and J.Lemaitre ed. Physical Non-linearities in Structural Analysis, Springer 1981.
- [52]. CHABOCHE, J.L., The concept of effective stress applied to elasticity and viscoplasticity in the presence of anisotropic damage, in Proc. Euromech Coll. 115, Mech. Behaviour of Anisotropic Solids, Villard-de-Lans, 1979.
- [53]. CHABOCHE, J.A., Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement, Thèse, Université P. et M. Curie, Paris, 1978.
- [54]. DRAGON, A., On phenomenological description of rock-like materials with account of kinetics of brittle fracture, Arch. Mech. Stos., Vol.28, 1976, 13-30.
- [55]. DRAGON, A., MRÓZ, Z., A continuum model for plastic-brittle behaviour of rock and concrete, Int. J. Engng. Sci., Vol. 17, 1979, 121-137.

- [56]. RICE, J.R., TRACEY, D.M., On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.17, 1969, 201-217.
- [57]. RICE, J.R., Inelastic constitutive relation for solids: an internal variable theory and its application to plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.19, 1971, 433-455.
- [58]. DOUGILL, J.W., Some remarks on path independence in the small in plasticity, *Quart. Appl. Math.*, Vol.33, 1975, 233-243.
- [59]. DOUGILL, J.W., On stable progressively fracturing solids, *ZAMP*, Vol.27, 1976, 423-437.
- [60]. KRAJČINOVIC, D., Continuous Damage Mechanics revisited: basic concepts and definitions (to appear).
- [61]. LEMAITRE, J., So many definitions of damage, *J. Méc. Théor. Appl.*, no.1, 1982.
- [62]. MURAKAMI, S., Notion of continuum damage mechanics and its application to anisotropic creep damage theory, *ASME J. Engng. Mat. Tech.*, no.155, 1983, (in print).
- [63]. HULT, J., CDM-Capabilities, limitations and promises, in K.E.Easterling ed. *Mechanisms of Deformation and Fracture*, Pergamon, 1979, 233-247.
- [64]. CHABOCHE, J.L., Continuous Damage Mechanics - a tool to describe phenomena before crack initiation, *Nucl. Eng. Design*, Vol.61, 1981.
- [65]. CHRZANOWSKI, M., Swedish Solid Mechanics Report, Gothenburg, 1973.
- [66]. CHRZANOWSKI, M., Use of the damage concept in describing creep-fatigue interaction under prescribed stress, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.18, 1976, 69-73.
- [67]. LEMAITRE, J., How to use damage mechanics, *Proc. SMRiT 7*, Chicago, 1983, (to appear).
- [68]. KRAJČINOVIC, D., Continuum Damage Mechanics - a theory for materials with microfractured structure, (to appear in *Appl. Mech. Review*).
- [69]. NICHOLSON, D.W., Constitutive model for rapidly damaged structural materials, *Acta Mech.*, Vol.39, 1981, 195-205.

Streszczenie

Praca niniejsza jest syntetycznym przeglądem opublikowanych do tej pory teorii kontynuального uszkodzenia materiałów kruchych i ciągliwych.

Zebrane i omówione zostały wyniki doświadczeń dotyczących zjawiska powstawania i rozwoju mikrodefektów podczas procesu odkształcania.

Przedstawiono uwagi krytyczne wobec cytowanych prac teoretycznych i wskazano na istniejącą wśród autorów niejednoznaczność w sprawie definicji zmiennej uszkodzenia i jej natury matematycznej.