Z powodu zadania 83.

Rozwiązanie zadania.

Podstawę iteracji ma stanowić funkcja $f(x)=\sin kx$; mamy zbadać zbieżność ciągu

$$f_1(x)=\sin kx,\ f_2(x)=\sin(k\sin kx), \ldots\ f_n(x)=\sin[kf_{n-1}(x)], \ldots$$

Uzasadnić możemy przedewszystkim:

Twierdzenie 1. Równanie $x=\sin kx$ posiada, przy wszelkiej wartości k, co najwyżej jedno rozwiązanie dodatnie i jedno, równe mu co do wartości bezwzględnej rozwiązanie ujemne, spełniające warunek

$$|f'(\pm a)| \leqq 1 \text{ czyli } |k\cos ka| \leqq 1 .$$

Łatwo sprawdzić zapomocą rachunku i uwidocznić na rysunku, że wartościom k, spełniającym warunek $0\leqq k\leqq 1$ odpowiada wogóle tylko jedno rozwiązanie (rzeczywiste) równania $x=\sin kx$, równe 0 i że mamy $k\cos k0=k$ a więc $\leqq 1$. Przy dalszym wzroście k aż do pewnej wartości, której tu bliżej nie określam, ale która napewno jest większa od 2π, występuje jeszcze wogóle tylko jedna para rozwiązań, równych co do wartości bezwzględnej, a przytym $k\cos k.0>1$. Potrzeba tedy dowodu ogólnego jedynie dla $k>2\pi$. Zaznaczę przytym raz na zawsze, że rozważamy tylko wartości $k\geqq 0$, ponieważ zastosowanie osiągniętych wyników do wypadku: $k<0$ dogodniej będzie podać na samym końcu.

Przypuśćmy na chwilę, że istnieją dwa rozwiązania dodatnie a i b równania $x=\sin kx$, dające: $|k\cos ka|\leqq 1$, $|k\cos kb|\leqq 1$. Mamy: $\sin ka-\sin kb=a-b$. Weźmy teraz dwie wartości x_0 i y_0, spełniające warunki: $0<kx_0\leqq\frac{\pi}{2}$, $0<ky_0\leqq\frac{\pi}{2}$ oraz: $\sin kx_0=\sin ka$, $\sin ky_0=\sin kb$. Mamy wtedy: $|kx_0-ky_0|\leqq|ka-kb|$ czyli: $|x_0-y_0|\leqq|a-b|$; $\sin ka-\sin kb=\sin kx_0-\sin ky_0=$ $=(x_0-y_0)k\cos k\xi$; gdzie ξ—odpowiednia wartość średnia, dająca oczywiście

$0 < k\cos k\xi < 1$, podobnie jak każda inna wartość x, należąca do (x_0, y_0), co wynika z elementarnych własności funkcji $y=\cos z$, stale malejącej w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraz warunków: $\cos kx_0 = |\cos ka|$ więc $k\cos kx_0 \leqq 1$ i tak samo $k\cos ky_0 \leqq 1$. (Znak $=$ może odpowiadać tylko jednej z dwu wartości, o ile x_0 nie równa się y_0, coby pociągnęło za sobą wbrew założeniu $a=b$). Wypadłoby tedy $|\sin ka - \sin kb| < |x_0 - y_0|$, a więc

$$|\sin ka - \sin kb| < |a-b|$$

wbrew założeniom. Zupełnie tak samo wykazalibyśmy istnienie tylko jednego rozwiązania ujemnego $-a$, spełniającego warunek $|k\cos(-ka)| \leqq 1$.

c. b. d. o.

Przed przystąpieniem do dalszych wniosków podaję wyrażenia pochodnych funkcji: $f(x)=\sin kx$ i $f_2(x)=\sin(k\sin kx)$

$$f'(x)=k\cos kx\,; \quad f''(x)=-k^2\sin kx\,; \quad f_2'(x)=\cos(k\sin kx).k^2\cos kx\,;$$

$$f_2''(x)=-k^3[\sin kx\cos(k\sin kx)+k(\cos kx)^2\sin(k\sin kx)]\,.$$

Dla wartości a, dającej $a=\sin ka$, mamy

$$f'(a)=k\cos ka, \; f''(a)=-k^2a; \text{ więc gdy } a>0, \; f''(a)<0\,.$$

$$f'_2(a)=k^2(\cos ka)^2=[f'(a)]^2\,; \quad f_2''(a)=-k^3a\cos ka(1+k\cos ka)\,.$$

Warunek $|k\cos ka| < 1$, czyli $|f'(a)| < 1$ daje:

$0 \leqq f'_2(a) < 1$; $f_2''(a)$ ma znak przeciwny znakowi $k\cos ka$. Przy $k\cos ka=1$ czyli $f'(a)=1$, mamy $f_2'(a)=1$, $f_2''(a)<0$ (o ile $a>0$); przy $k\cos ka=-1$ mamy $f_2'(a)=1$, $f_2''(a)=0$; sprawdzić można, że w tym wypadku $f_2'''(a)<0$.

A. Stosując bezpośrednio twierdzenie podstawowe II, 2) wraz ze szczegółami, podanemi w dowodzie, stwierdzamy, że dla $k \leqq 1$ i wszelkiego x

$$\lim_{n=\infty} f_n(x)=0$$

$$\left(\text{wartości } x=0, \; \pm\frac{\pi}{k}, \; \pm\frac{2\pi}{k}, \; \ldots \; \pm\frac{2\pi m}{k}, \ldots\right.$$

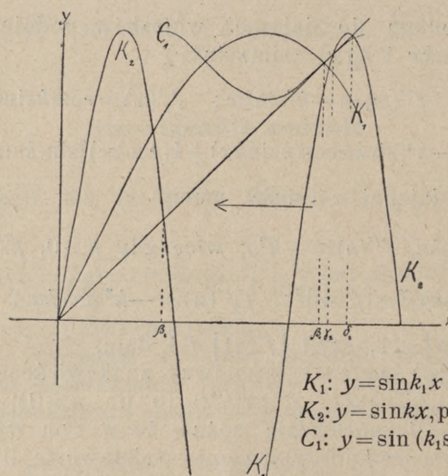
$$\left.\text{dają } f_1=f_2=\ldots=f_n=\ldots=0\right)\,.$$

Przed przejściem do pozostałych możliwości uprzytomnijmy sobie omawiane stosunki zapomocą wykresu funkcji $y=x$ i $y=\sin kx$, nie przybierając przytym dla krótkości odpowiednich rozumowań, których dokładność nietrudno sprawdzić, w szatę ściśle analityczną. Wzrastaniu parametru k odpowiada równomierne kurczenie się krzywej $y=\sin kx$ w kierunku, równoległym do osi x-ów. Przy zmianie k od 1 do pewnej wartości k_1, równej w przybliżeniu 2,26 ..., mamy, oznaczając przez β rozwiązanie dodatnie równania $x=\sin kx$, zmianę $k\cos k\beta$ od $+1$ do -1. *Oznaczając zawsze przez a rozwiązanie dodatnie* równania $x=\sin kx$, *dające* $|k\cos ka| \leqq 1$, możemy napisać $\beta=a$. Przy k jeszcze większym $|k\cos k\beta|$ staje się >1, przy pewnej wartości $k_2>k_1$ (rzecz oczywista, że $k_2 \neq k_1$) „kurcząca się“ krzywa dotyka prostej $y=x$

z lewej strony następnego wzniesienia — mamy, oznaczając odpowiednią wartość x przez γ, $k_2 \cos k_2 \gamma = 1$, $\gamma = \sin k_2 \gamma$, $\gamma = a$. W dalszym ciągu zamiast γ występują dwa rozwiązania: γ i δ, z których $\delta (> \gamma)$ daje $k \cos k\delta < 1$, więc $\delta = a$; potym $k \cos k\delta$ staje się $= 0$, dalej ujemne, i dla pewnej wartości $k = k_3$ mamy $k_3 \cos k_3 \delta = -1$. Pewnemu przedziałowi (k_3, k_4), z wyłączeniem końców, odpowiada znowu*) *nieistnienie rozwiązań równania* $x = \sin kx$, dających $|k \cos kx| \leqq 1$, potym występują rozwiązania ε i μ o tych samych własnościach co γ i δ i t. d.

Ogólnie

B. Istnieje nieskończona liczba takich przedziałów (k_{2n+1}, k_{2n+2}) wartości $k (> 1)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, że dla wartości k, zawartych wewnątrz nich równanie $x = \sin kx$ nie posiada żadnego rozwiązania, dającego $|k \cos kx| \leqq 1$.



K_1: $y = \sin k_1 x$
K_2: $y = \sin kx$, przy $k > k_2$
C_1: $y = \sin(k_1 \sin k_1 x)$

Rys. 1.

Takim wartościom k odpowiadać mogą jedynie takie ciągi zbieżne, w szerszym znaczeniu tego słowa, które są utworzone, poczynając od pewnego wskaźnika, z wyrazów, równych $0, \pm\beta$, $\pm\gamma$ i t. d. Odpowiednie wartości x równają się albo $0, \pm\beta$, $\pm\gamma$, ... i t. d., albo wynikom, powstałym z jednorazowego lub wielokrotnego stosowania do tych liczb symbolu operacyjnego

$$\frac{\text{arc sin}}{k},$$

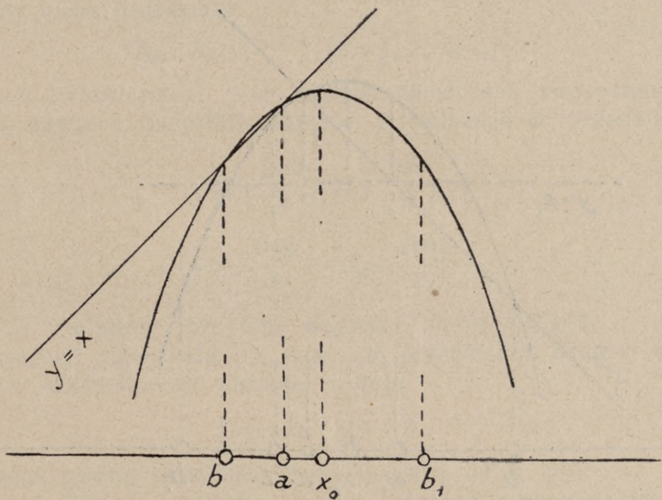
któremu nadajemy w każdym wypadku dowolne z możliwych określeń, zatrzymując ciąg kolejnych działań jedynie wtedy, kiedy otrzymujemy wartość,

*) Rozwiązania: β, γ, δ maleją wraz ze wzrostem k, a więc $|k \cos k\beta|$, $|k \cos k\gamma|$, $|k \cos k\delta|$ wzrastają, pozostając wciąż > 1; to samo zachodzi, powyżej odpowiedniej wartości k, ze wszystkiemi nowemi rozwiązaniami równania $x = \sin kx$.

większą co do wartości bezwzględnej od jedności. Nie trudno stwierdzić, że zbiór takich wartości jest *przeliczalny*. Zgodnie z twierdz. podst. II, 1) pozostałym wartościom x, tworzącym zbiór *mocy continuum*, nie mogą odpowiadać ciągi *zbieżne* iteracji $f_n(x)$, *w żadnym* znaczeniu tego słowa.

Pozostają do zbadania przedziały: (k_{2n}, k_{2n+1}) wartości k ($n=0, 1, 2, 3, \ldots$ $k_0=1$, $k_1=2, 26 \ldots, \ldots$). Oznaczając zawsze przez a rozwiązanie równ. $x=\sin kx$, dające $|k\cos ka| \leqq 1$ i przez b, drugie rozwiązanie, najbardziej zbliżone do a (oczywiście $<a$) oraz zakładając, w razie gdy $k\cos ka=1$, $b=a$ (co odpowiada punktowi styczności krzywych $y=x$ i $y=\sin kx$), możemy uzasadnić:

Twierdzenie 2. Wszelkiej wartości x, zawartej wewnątrz przedziału (b, b_1) lub ogólniej wewnątrz któregokolwiek z przedziałów: $\left(b \pm \frac{2\pi n}{k}, b_1 \pm \frac{2\pi n}{k}\right)$, gdzie $n=0, 1, 2, \ldots$, a b_1 oznacza najbliższą wartość x, większą od b, dającą $\sin kb_1=b$, odpowiada ciąg zbieżny iteracji $f_n(x)$, dążący do a.



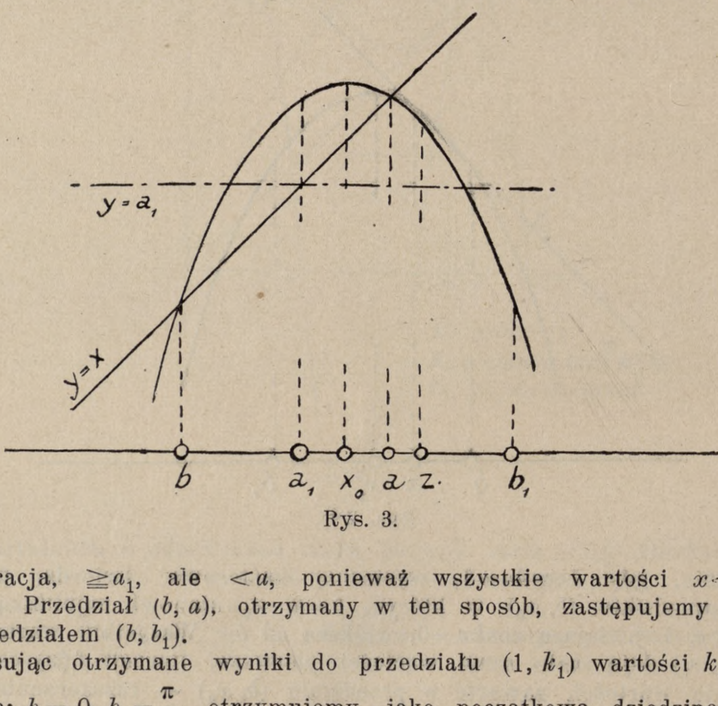
Rys. 2*).

Istotnie, gdy $k\cos ka=1$, wystarczy zastosować twierdz. podst. II, 3) b) do przedziału (b, x_0) w którym $b=a$, x_0 stanowi najbliższą wartość maksymalną, t. j. dającą $\cos kx=0$, większą od b. Wszystkie wartości przedziału (x_0, b_1) dają takie same wartości pierwszej iteracji $f_1(x)=\sin kx$, jak odpowiednie wartości, zawarte w przedziale (b, x_0) — rozszerzenie zakresu zbieżności aż do (b, b_1) jest tedy uzasadnione. Gdy $1>k\cos ka\geqq 0$, wystarczy zauważyć, że wartość średnia ξ, którą wprowadzimy, oznaczając przez x_1 jakąś wartość, zawartą wewnątrz przedziału (b, a), musi dać $k\cos k\xi<1$, ponieważ wzniesienie prostej, łączącej punkty krzywej $y=\sin kx$, odpowiadające wartościom $x=x_1$, i $x=a$, jest <1. Można tedy do całego przedziału (b, x_0)

*) Prosta pozioma na rys. 1 (i 3-im) nie jest osią x-ów, lecz równoległą do niej.

z wyjątkiem wartości b zastosować rozumowanie podane w twierdz. podstaw. II, $2)$—(b, x_0) zastępujemy, jak poprzednio, przedziałem (b, b_1).

Gdy $0 > k\cos ka \geqq -1$, udowodnić można, że w całym przedziale (x_0, a) $f_2'(x)$ pozostaje $\leqq 1$, ale $\geqq 0$ i $a = \lim f_{2n}(x)$ dla dowolnej wartości x, należącej do tego przedziału, x_0 oznacza najbliższą wartość, dającą maximum $f(x)$ mniejszą od a). Stosując rozumowanie, rozwinięte w twierdz. podst. II, 3) b) stwierdzamy, że ten sam przedział jest zakresem zbieżności również dla ciągu iteracji funkcji $f(x)$. Oznaczając przez a_1 wartość, dającą: $x_0 - a_1 = a - x_0$ zastępujemy z łatwością przedział (x_0, a) przedziałem (a_1, a). Ciągi iteracji, odpowiadające przedziałowi (b, a_1) z wyjątkiem końca b, muszą „wkraczać" do przedziału (a_1, a). Istotnie, przy $b < x < a_1$, iteracje $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... $f_m(x)$, należące jeszcze do przedziału (b, a_1), stanowią ciąg rosnący skończony, ponieważ wzniesienia krzywej w punktach, odpowiadających potrzebnym przy porównaniu z $b = f(b)$ wartościom średnim, są większe niż $1 + r$ (r-pewna liczba określona, > 0); po ostatniej, mniejszej, niż a_1, następuje iteracja, $\geqq a_1$, ale $< a$, ponieważ wszystkie wartości $x < a_1$ dają $\sin kx < a$. Przedział (b, a), otrzymany w ten sposób, zastępujemy bez trudności przedziałem (b, b_1).



Rys. 3.

Stosując otrzymane wyniki do przedziału $(1, k_1)$ wartości k, któremu odpowiada: $b = 0$, $b_1 = \frac{\pi}{k}$, otrzymujemy, jako początkową dziedzinę zbieżności, przedział x-ów $\left(0, \frac{\pi}{k}\right)$ — ponieważ jednak wszystkie możliwe inne wartości x dają ciągi takie same, jak odpowiednie wartości przedziału $\left(0, \frac{\pi}{k}\right)$ lub ciągi o wyrazach, różniących się tylko znakiem, przeto:

C. Przy $1 < k \leqq k_1$ $(k_1 = 2,262 \ldots)$
ciąg iteracji o podstawie $f(x) = \sin kx$

$$f_1(x),\ f_2(x) \ldots f_n(x) \ldots$$

jest zawsze ciągiem zbieżnym; granica jego dla wartości x, spełniających warunek

$$\frac{2n\pi}{k} < x < \frac{(2n+1)\pi}{k}; \quad [n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots]$$

równa się jedynemu dodatniemu rozwiązaniu a równania $x = \sin kx$; wartościom, spełniającym warunek: $\frac{(2n+1)\pi}{k} < x < \frac{(2n+2)\pi}{k}$, odpowiada granica ciągu, równa $-a$. Wartości x o postaci

$$x = \frac{\pi r}{k}; \quad [r=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots]$$

dają $$\lim f_n(x) = f_n(x) = 0 .$$

Zbadajmy teraz przedziały

$$(k_{2n},\ k_{2n+1}) \qquad [n=1, 2, 3, \ldots] .$$

Zgodnie z twierdzeniem 2-em zakres zbieżności, odpowiadający takim wartościom k, zawiera wszystkie wartości x, należące do przedziałów

$$\left(b + \frac{2\pi n}{k},\ b_1 + \frac{2\pi n}{k}\right)$$

$$\left(-b + \frac{2\pi n}{k},\ -b_1 + \frac{2\pi n}{k}\right) .$$

Liczbie n nadajemy przytem wartości: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, przedziałom pierwszej kategorji odpowiada $\lim f_n(x) = a$, przedziałom drugiej kategorji — $\lim f_n(x) = -a$. Wszystkie te wartości x dają

$$|k \cos kx| \leqq 1 + \delta ,$$

gdzie δ oznacza pewną określoną liczbę, zależną od k, $\geqq 0$.

Twierdzenie 3-cie. Jeżeli k należy do jednego z przedziałów (k_{2n}, k_{2n+1}), w dowolnym przedziale wartości x-ów znaleźć można wartości, które dają ciąg zbieżny iteracji, dążący do $+a$ lub $-a$. Inaczej: wartości takie stanowią mnogość wszędziegęstą w przedziale $(-\infty, +\infty)$.

O ile $k \neq k_{2n}$, dowód jest łatwy. Oznaczmy przez x_1 i x_2 końce rozważanego, dowolnego przedziału. Przypuśćmy, że twierdzenie jest błędne; w takim razie żadna z iteracji kolejnych, odpowiadających wartościom, należącym do przedziału (x_1, x_2) nie daje

$$|k \cos[k f_n(x)]| \leqq 1 + \delta$$

(bo inaczej $f_n(x)$ należałoby do znanego zakresu zbieżności).

Mamy ogólnie (ponieważ $f'(z) = k \cos kz$)

$$f_n(x_1) - f_n(x_2) = f[f_{n-1}(x_1)] - f[f_{n-1}(x_2)] =$$

$$= [f_{n-1}(x_1) - f_{n-1}(x_2)] \cdot k \cos k\tau_n .$$

We wzorze tym τ_n oznacza pewną wartość średnią, zawartą pomiędzy

$f_{n-1}(x_1)$ a $f_{n-1}(x_2)$; z własności ogólnych funkcji ciągłych wynika, iż w przedziale (x_1, x_2) istnieje taka wartość ξ_n, że $\tau_n = f_{n-1}(\xi_n)$. Mamy tedy, podług uczynionych założeń

$$|k \cos k\tau_n| > 1+\delta \; ; \quad \text{i stąd}$$

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| > |f_{n-1}(x_1) - f_{n-1}(x_2)|(1+\delta) \, .$$

Wysnuwamy stąd łatwo wniosek

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| > (1+\delta)^n . |x_1 - x_2| \, .$$

Ponieważ $\delta \neq 0$, przy pewnej wartości n otrzymalibyśmy

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| > 2 \, ,$$

co jest oczywiście niedorzecznością, ponieważ wartości wstaw jakichś dwu liczb mogą się różnić tylko o liczbę $\leqq 2$.

c. b. d. o.

Aby posunąć się dalej, rozpatrzmy iteracje funkcji

$$F(x) = \frac{\text{arc} \sin x}{k} \, ,$$

określonej w ten sposób, że $F(b) = b$.

W przedziale $(-b, +b)$ mamy stale

$$0 < F'(x) \leqq 1$$

($=1$ tylko przy $x = b$ i $x = -b$, o ile $b = a$, t. j. gdy $k = k_{2n}$). Innego rozwiązania równania $x = F(x)$ przedział ten nie zawiera — możemy tedy, stosując twierdz. podst. II 2) lub 3), napisać

$$b = \lim_{n=\infty} F_n(x)$$

o ile $-b < x < b$.

Podobnież, oznaczając przez h dowolne rozwiązanie równania $x = f(x)$ i przez $\Phi(x)$ funkcję $\frac{\text{arc} \sin x}{k}$, spełniającą warunek $\Phi(h) = h$, stwierdzamy, że dla tych samych wartości x

$$\lim_{n=\infty} F_n(x) = h \qquad (*)$$

Weźmy w szczególności

$$\Psi(x) = \frac{\text{arc} \sin x}{k} ; \; \Psi(0) = 0 \, .$$

Łatwo stwierdzić w sposób nader elementarny, że przy takiem określeniu $\frac{\text{arc} \sin x}{k}$, mamy, o ile tylko $-1 \leqq x \leqq 1$ a $k > 2$ (warunek spełniony w danym razie gdyż $k > k_1$, $k_1 = 2, 26 \ldots$)

---

*) O ile $\Phi'(x) < 0$, należy uwzględnić własności funkcji $\Phi_2(x)$.

$$|\Psi(x)|<\frac{2|x|}{k}$$

i ogólniej

$$|\Psi_n(x)|<\frac{2^n.|x|}{k^n}$$

a więc
$$\lim_{n=\infty}\Psi_n(x)=0\ .$$

Stąd wynika w szczególności, że jakaś wartość ξ, należąca do (b, b_1) i <1, daje jakąś iterację $\Psi_{n_1}(\xi)=\tau$, mniejszą od b. Ponieważ $\lim\limits_{n=\infty} F_n(\tau)=b$, przeto istnieje takie n_2, że $F_{n_2}(\tau)=\eta$ rożni się dowolnie mało od b. Otóż mamy $\lim f_n(\xi)=a$; a że $\tau=f_{n_2}(\eta)$; $\xi=f_{n_1}(\tau)=f_{n_1+n_2}(\eta)$ przeto również: $\lim\limits_{n=\infty} f_n(\eta)=a$. Stosując tę samą metodę w innych wypadkach, otrzymujemy:

Twierdzenie 4. W dowolnym przedziale wartości x, spełniających warunek $|x|\leqq b$, którego koniec stanowi jedno z rozwiązań równania $x=f(x)$, nie równe $\pm a$ (zastrzeżenie „nie równe $\pm a$“ zbyteczne, gdy $k=k_{2n}$, $b=a$) znaleźć można zawsze wartość η_1, dającą: $\lim f_n(\eta_1)=a$, i wartość η_2, dającą: $\lim f_n(\eta_2)=-a$ *).

Twierdzenie 4, które zresztą zużytkujemy również nieco dalej, pozwala dopiero rozciągnąć twierdz. 3 na wypadek: $k=k_{2n}$.

Że zbiór wszędziegęsty, czyli pantachiczny wartości x, dających

$$\lim f_n(x)=a \quad \text{lub} \quad \lim f_n(x)=-a$$

nie wypełnia całej dziedziny liczb rzeczywistych, wynika z istnienia innych rozwiązań równania $x=f(x)$: $\pm b, \pm c, \pm d, \ldots$, a także wartości które możemy otrzymać, stosując dowolnie i w dowolnym porządku, skończoną liczbę razy (w każdym wypadku) działania, wskazane przez którekolwiek z określeń funkcji

$$\frac{\text{arc sin}\, x}{k}$$

do którejkolwiek z wartości $\pm b, \pm c, \pm d, \ldots$ Otrzymujemy w ten sposób zbiór *przeliczalny* wartości x, dla których przy $n>$od pewnej określonej liczby n', zależnej od x

$$f_n(x)=b \quad \text{lub} \quad -b\ ,$$

$$c \quad \text{lub} \quad -c \quad \text{i t. d.}$$

Należy jeszcze rozstrzygnąć pytanie, czy istnieją wartości, dla których ciąg

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)\ \ldots\ f_n(x),\ \ldots$$

nie jest ciągiem zbieżnym, w żadnym znaczeniu tego słowa?

---

*) Możemy jeszcze dodać warunek, że ciąg $f_n(\eta_1)$ nie powinien zawierać wyrazów równych a, a ciąg $f_n(\eta_2)$ — wyrazów równych $-a$. Zastrzeżenie to jest konieczne przy dowodzie istnienia liczb τ (str. 236), o ile tylko $b=a$, t. j. $k=k_{2n}$.

Na pytanie to odpowiemy w sposób twierdzący, dając metodę określenia takiej wartości.

Obierzmy sobie dowolny ciąg wielkości dodatnich, malejących aż do 0

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots \varepsilon_n, \dots; \quad \lim \varepsilon_n = 0 .$$

Weźmy następnie jakikolwiek z przedziałów, wskazanych w twierdzeniu 4-em, nadając mu długość, mniejszą niż ε_1; w takim przedziale istnieją wartości $x=\xi'$ i $x=\eta'$, dające

$$\lim f_n(\xi') = a , \quad \lim f_n(\eta') = -a .$$

[O ile $b=a$, t. j. $k=k_{2n}$, uwzględniamy zastrzeżenie, podane w ods. na stronicy 234].

Możemy znaleźć taką liczbę n_1, że

$$f_{n_1}(\xi') > b , \quad f_{n_1}(\eta') < -b .$$

Jest to zupełnie oczywiste, gdy $a>b$ $(k_{2n}<k\leqq k_{2n+1})$. Gdy $a=b$, istnieje liczba n', dająca $f_{n'}(\xi')>b$, i liczba n'', dająca $f_{n''}(\eta')<-b$ — istotnie, przypuszczenie, że np. niema liczby n', pociągnęłoby za sobą istnienie ciągu zbieżnego iteracji, dla którego b byłoby granicą wyższą. Wniosek taki łatwo da się obalić zapomocą dowodu, użytego w twierdzeniu podstawowem II, 1) Otóż, w tym wypadku $n>n'$ daje również $f_n(\xi')>b$ i $n>n''$ daje $f_n(\eta')<-b$; można tedy wziąć za n_1 dowolną liczhę n, $>n'$ i $>n''$.

W przedziale (ξ', η') funkcja $f_{n_1}(x)$ przechodzi przez wszystkie rozwiązania równania $x=f(x)$ (ewentualnie oprócz $+a$ i $-a$) — weźmy dwie wartości ξ_1 i η_1, dla których $f_{n_1}(x)$ równa się odpowiednio dwu jakimkolwiek następującym po sobie bezpośrednio co do wielkości, rozwiązaniom równania $x=f(x)$, np. c i d, w ten sposób, że dla $\xi_1<x<\eta_1$ mamy stale: $f_{n_1}(x)$ należy do przedziału $[f_{n_1}(\xi_1), f_{n_1}(\eta_1)]$, jako wartość wewnętrzna. Możliwość takiego wyboru wynika z ogólnych własności funkcji ciągłych. W przedziale (ξ_1, η_1), spełniającym warunek $\eta_1-\xi_1<\varepsilon_1$, możemy znowu, na zasadzie twierdzenia 4-go, obrać dwie wartości ξ'_2 i η'_2, których różnica jest mniejsza niż ε_2, dające przy odpowiedniem n_2 $(>n_1)$

$$f_{n_2}(\xi'_2)>b, \; f_{n_2}(\eta'_2)<-b .$$

Dobieramy znowu ξ_2 i η_2 $(\xi_2<\eta_2)$ w przedziale (ξ'_2, η'_2), podobnie jak poprzednio ξ_1, η_1 w przedziale (ξ', η'). Ogólnie zakładamy

$$|\xi'_p-\eta'_p|<\varepsilon_p, \; f_{n_p}(\xi'_p)>b, \; f_{n_p}(\eta'_p)<-b ,$$

w przedziale (ξ'_p, η'_p) obieramy $\xi_p<\eta_p$ tak, by wartości $f_{n_p}(\xi_p)$ i $f_{n_p}(\eta_p)$ równały się odpowiednio dwom następującym po sobie rozwiązaniom równania $x=f(x)$ i by dla $\xi_p<x<\eta_p$ miano również: $f_{n_p}(x)$ w przedziale $[f_{n_p}(\xi_p), f_{n_p}(\eta_p)]$ stanowi wartość wewnętrzną, t. j. nie równą $f_{n_p}(\xi_p)$ ani $f_{n_p}(\eta_p)$.

Ciągi

$$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_p, \dots$$

$$(\xi_1<\xi_2< \dots <\xi_p< \dots)$$

$$\text{i} \qquad \eta_1, \eta_2, \dots \eta_p, \dots$$

$$(\eta_1>\eta_2> \dots >\eta_p \dots >\xi_p>\xi_{p-1}>\dots)$$

zdążają do tej samej granicy τ.

Przypuszczenia, że $\lim f_n(\tau) = \pm a$ oraz że istnieje n, dla którego $f_n(\tau)$ równa się któremukolwiek z rozwiązań ($\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ i t. d.) równania $x = f(x)$, muszą być uchylone:

1) Gdyby np. $\lim f_n(\tau) = a$, to jak wykazaliśmy, musiałoby istnieć takie n', że $n > n'$ daje

$$f_n(\tau) > b$$

i w szczególności dla jakiejś liczby $n_p > n'$ mielibyśmy: $f_{n_p}(\tau) > b$, a tymczasem, jak wynika z dowodu, mamy dla wszelkiego wskaźnika p

$$-b < f_{n_p}(\tau) < b \;.$$

2) Gdyby np. $f_n(\tau) = d$, to mielibyśmy również przy $n_p > n$

$$f_{n_p}(\tau) = d$$

a tymczasem, ponieważ τ należy do przedziału (ξ_{n_p}, η_{n_p}), jako wartość wewnętrzna, musimy mieć: $f_{n_p}(\tau)$ należy, jako wartość wewnętrzna do

$$[f_{n_p}(\xi_{n_p}), f_{n_p}(\eta_{n_p})], \text{ a że } f_{n_p}(\xi_{n_p}), f_{n_p}(\eta_{n_p})$$

są równe dwu następującym po sobie bezpośrednio co do wielkości rozwiązaniom równania $x = f(x)$, przeto $f_{n_p}(\tau)$ nie może się równać żadnemu z tych rozwiązań.

o. b. d. o.

Zapomocą odpowiedniego podporządkowania zbioru wartości τ zbiorowi ułamków nieskończonych, mniejszych od 1, wyrażonych we właściwym układzie cyfrowym (W. Sierpiński. Zarys teorji mnogości str. 37, 71), przekonywamy się bez trudności, że zbiór wszystkich takich wartości w $(-\infty, +\infty)$ *posiada moc continuum.*

Ostatecznie:

D) Przy $k_{2n} \leq k \leq k_{2n+1}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ t. j. przy wartościach k, dla których równanie $x = f(x)$ czyli $x = \sin kx$ posiada dwa rozwiązania $\pm a$, dające: $|f'(a)| \leq 1$, t. j. $|k \cos ka| \leq 1$ wszystkie wartości rzeczywiste dają się podzielić na 4 klasy:

I. Mnogość mocy continuum wartości, dla których

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = a \;.$$

II. Mnogość mocy continuum wartości, dla których

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = -a \;.$$

III. Mnogość przeliczalna wartości, dających pewną określoną iterację, o wskaźniku zależnym od x, równą jednemu z pozostałych rozwiązań $\pm b$, $\pm c$, $\pm d$, ... równania $x = f(x)$. Inaczej każdej z tych wartości odpowiada taka liczba n', że $n > n'$ daje

$$f_n(x) = +b, \text{ lub } -b, \text{ albo } \pm c \text{ i t. d.}$$

IV. Mnogość mocy continuum wartości, dla których ciąg

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x) \ldots f_n(x)\,, \ldots$$

nie jest ciągiem zbieżnym.

Mnogość, złożona z wartości obu pierwszych kategorji, jest w dziedzinie wszystkich liczb rzeczywistych wszędziegęsta; jak łatwo wywnioskować z twierdz. 3-go, każda z pozostałych mnogości musi być w tym samym obszarze „nigdziegęsta". (W. Sierpiński „Zarys t. m." str. 121).

Należy jeszcze dodać kilka słów o wypadku, w którym $k<0$. Oznaczmy przez $\overline{f_n(x)}$ n-tą iterację przy podstawie $\overline{f(x)} = \sin(-kx)$. Jak łatwo sprawdzić, mamy ogólnie

$$\overline{f_n(x)} = f_n(x) \text{ przy } n \text{ parzystym}$$

$$\overline{f_n(x)} = -f_n(x) \text{ przy } n \text{ nieparzystym.}$$

Zauważmy, iż wobec tego zbieżność ciągu iteracji $f_n(x)$ pociąga za sobą oscylowanie ciągu $\overline{f_n(x)}$ pomiędzy dwiema granicami: $\lim f_n(x)$ i $-\lim f_n(x)$. Gdy $\lim f_n(x) = 0$, $\lim \overline{f_n(x)} = 0$ — i wynik, podany w ustępie A, da się zastosować wogóle do $|k| \leqq 1$. Przy $k<-1$, ciąg $f_n(x)$ nie może być wogóle zbieżnym (o ile nie posiada nieskończonej liczby wyrazów, równych 0), dopóki k nie osiągnie pewnej wartości $-k_1'$ przy której występuje, oprócz zera, jeszcze para rozwiązań równania $x = f(x)$. Dalej powtarza się to samo, co jużeśmy wyjaśnili poprzednio: wnioski, podane w ustępie B stosują się do przedziałów $(-k'_{2n},\ k'_{2n+1})$. $[n = 1, 2, 3, \ldots]$, a treść ustępu D — do przedziałów $(-k'_{2n-1},\ -k'_{2n})$. Przedziały $(k'_{2n-1},\ k'_{2n})$ muszą leżeć całkowicie wewnątrz przedziałów $(k_{2n-1},\ k_{2n})$ — i naodwrót, przedziały $(k_{2n},\ k_{2n+1})$ wewnątrz $(k'_{2n},\ k'_{2n+1})$, ponieważ inaczej dla jakiejś wartości k wszystkie wartości x, dające ciągi $f_n(x)$ dążące do $+a$ i $-a$, dałyby ciągi $\overline{f_n(x)}$, należące do kategorji IV. (D), co jest niedorzeczne, gdyż w ten sposób mnogość tych wartości była by jednocześnie wszędziegęstą i nigdziegęstą. Otrzymujemy kolej następującą

$$0,\ 1,\ k_1,\ k'_1,\ k'_2,\ k_2,\ k_3,\ k'_3,\ k'_4,\ k_4,\ \ldots$$

T. Łazowski.

Redaktor i Wydawca **Wł. Wojtowicz.**

Czcionkami Drukarni Naukowej, Warszawa, Mazowiecka 8, tel. 186-40.