Bertrand Russell o nauczaniu matematyki.

W jednym ze swych szkiców popularnych p. t. The Study of mathematics, słynny filozof-matematyk broni stanowiska racjonalistycznego, a zarazem idealistycznego w nauczaniu. Stanowisko to jest dziś wielce niepopularne, tymbardziej jednak warto poznać argumenty, które za nim przemawiają. W tej myśli podajemy kilka charakterystycznych wyjątków z artykułu Russella.

Tradycja wymaga, by każdy wykształcony człowiek znał przynajmniej elementy matematyki, ale racje, dla których tradycja taka powstała, zostały zapomniane i pogrzebane pod stosem pomysłów pedantycznych i trywialnych. Jeśli spytamy o cel nauczania matematyki, usłyszymy zazwyczaj, że matematyka ułatwia budowanie maszyn, podróżowanie, zwyciężanie innych narodów zarówno na polu bitwy, jak w walce ekonomicznej. Jeżeli odpowiemy, że wszystkie te cele — których wartość jest zresztą dość problematyczna — nie dadzą się osiągnąć przez elementarne studja, usłyszymy zapewne, że matematyka kształci zdolność rozumowania. A jednak ci sami ludzie, którzy to mówią, nie chcą usunąć ze swych wykładów rozumowań, o których wiadomo że są błędne, które nawet inteligientny uczeń, o umyśle jeszcze niespaczonym, odrzuca instynktownie. Samą zdolność rozumowania pojmują ci ludzie zazwyczaj wprost tylko jako pomoc przy odkrywaniu reguł, któreby mogły kierować życiem praktycznym...

Matematyka, należycie rozumiana, odznacza się nie tylko prawdą, ale i najwyższym pięknem. Piękno to, jak w rzeźbie, jest zimne i surowe; nie odwołuje się ono do słabszych stron naszej natury, nie posiada błyskotliwości malarstwa lub muzyki, jest jednak niezwykle czyste, zdolne do takiej doskonałości, jaką tylko największe dzieła sztuki osiągnąć mogą... Warto nie tylko uczyć się najlepszych rzeczy w matematyce; warto je sobie przyswoić jako część codziennego myślenia, warto wciąż przywoływać je na myśl... Tę charakterystyczną doskonałość matematyki tam tylko znaleźć możemy, gdzie rozumowanie jest ściśle logiczne: prawidła logiki tym są dla matematyki, czym reguły budowy dla architektury. W najpiękniejszych dziełach matematycznych mamy łańcuch rozumowań, w którym każde ogniwo jest samo przez się ważne, w którym panuje wszędzie prostota i przejrzystość, a z założeń wyciągamy wnioski o wiele dalej idące, niż można byłoby przypuszczać, i to zapomocą środków, które robią wrażenie naturalnych i koniecznych...

Jak mamy wykładać matematykę, by zbliżyć ucznia jaknajwięcej do tego wysokiego ideału? Przewodnikiem naszym musi tu być w znacznym stopniu doświadczenie, niektóre jednak maksymy wyniknąć mogą z rozważania ostatecznych celów, które osiągnąć pragniemy.

Jednym z głównych celów dobrego wykładu matematyki jest obudzenie wiary w rozum, zaufania do prawdy dowiedzionej i do wartości dowodu. Spółczesne nauczanie do celu tego nie prowadzi, ale łatwo dostrzec, w jaki sposób można ten cel osiągnąć. Weźmy np. arytmetykę. Obecnie podają dziecku szereg reguł, które nie są dla niego ani prawdziwe, ani błędne, lecz są poprostu wyrazem woli nauczyciela, który, dla jakichś niezgłębionych racji, woli taki a nie inny sposób postępowania. Przy takich nawskroś praktycznych studjach jest to, do pewnego stopnia, nieuniknione, należałoby jednak możliwie najwcześniej wyłożyć racje tych reguł—posługując się, oczywiście, środkami, które najłatwiej znaleźć mogą oddźwięk w umysłach dziecinnych. W gieometrji, zamiast zbioru nudnych (i w dodatku błędnych) dowodów oczywistych twierdzeń, które stanowią początek „Elementów“, należy narazie pozwolić uczniowi na zakładanie prawdziwości wszystkiego, co jest oczywiste. Natomiast powinniśmy nauczyć go dowodzenia takich twierdzeń, które mogą go istotnie zaciekawić i zadziwić, a zarazem dadzą się łatwo sprawdzić zapomocą rysunku — np. twierdzeń, w których mowa o kilku prostych, przecinających się w jednym punkcie*). W ten sposób rodzi się wiara: uczeń widzi, że rozumowanie prowadzić może do zdumiewających wniosków, które

*) Przy tej sposobności zwracamy uwagę na artykuł p. Z. Straszewicza: *Szkic propedeutyki gieometrji*, drukowany w I tomie „Wektora“. Autor artykułu zajmuje stanowisko odmienne od Russella, w dziedzinie jednak nauczania propedeutycznego dochodzi do podobnych wniosków praktycznych.

jednak faktycznie sprawdzają się. Tą drogą zwalczamy stopniowo instynktowną nieufność do wszystkiego, co oderwane. Twierdzenia takie są zwykle trudne; należy je najpierw podać jako ćwiczenia z rysunku gieometrycznego, a dopiero gdy uczeń dokładnie pozna figurę i oswoi się z nią, przyjemnie mu będzie dowiedzieć się o związku logicznym między różnemi prostemi czy kołami figury. Należy też pamiętać, by wszystkie figury, ilustrujące twierdzenie, były rysowane we wszelkich możliwych kształtach i przypadkach: w ten sposób oderwane związki, z któremi ma do czynienia gieometrja, same wynurzą się z tej pozornej różnorodności, jako elementy podobne. Oderwane dowody powinny stanowić drobną cząstkę nauczania; należy je podawać dopiero wówczas, gdy uczeń oswoił się już z konkretnemi ilustracjami i czuje, że dowód jest tylko naturalnym wcieleniem widocznych faktów. Na tym poziomie nauczania nie należy podawać dowodów z pedantyczną zupełnością, natomiast należy odrazu, od pierwszych początków, wykluczyć stanowczo metody błędne, np. metodę nakładania figur. O ile w poszczególnych przypadkach trudno byłoby podać dowód poprawny, należy zapomocą ilustracji skłonić ucznia do przyjęcia twierdzenia, podkreślając jednak wyraźnie, że ilustracja nie jest dowodem.

Początki algiebry przedstawiają wogóle znaczne trudności, nawet dla bardzo inteligientnych dzieci. Posługiwanie się literami jest czymś tajemniczym, co w oczach dziecka nie ma chyba żadnego celu, prócz mistyfikacji. Z początku dziecko nie może oprzeć się myśli, że każda litera oznacza pewną szczególną liczbę, że nauczyciel tylko nie chce powiedzieć, *jaką mianowicie* liczbę. Chodzi o to, że w algiebrze po raz pierwszy uczymy dziecko badania prawd ogólnych, o których twierdzimy, że dotyczą nie tej lub innej rzeczy, lecz całej grupy rzeczy. Panowanie umysłu nad światem rzeczy aktualnych i możliwych polega na zdolności rozumienia i odkrywania takich prawd ogólnych; wykształcenie matematyczne powinno właśnie rozwinąć tę zdolność operowania prawdami ogólnemi. Jak rzadko jednak nauczyciel potrafi dziś wytłumaczyć, co za przepaść dzieli algiebrę od arytmetyki, jak mało pomocy znajduje uczeń, gdy sili się na zrozumienie tego! Zazwyczaj stosują tę samą metodę, co przy nauczaniu arytmetyki: podają reguły bez należytego uzasadnienia, przyzwyczajają ucznia do ślepego operowania temi regułami i w rezultacie, gdy uczeń umie znajdować żądane przez nauczyciela odpowiedzi na zadania, uważa, że opanował przedmiot. A tymczasem zrozumienia zastosowanych metod niema ani śladu.

Po wyuczeniu się pierwszych początków algiebry, dalsza droga jest gładka, aż do chwili, gdy natrafiamy na zagadnienia, w których wypada stosować pojęcie nieskończoności... Prawdopodobnie największą zdobyczą spółczesnej nauki jest rozwiązanie trudności, któremi dawniej otoczone było pojęcie nieskończoności w matematyce. Trudności te były znane od początków myśli greckiej; w każdym stuleciu najwybitniejsze umysły napróżno starały się odpowiedzieć na pozornie nierozwiązalne zagadnienia, postawione przez Zenona i Eleatów. Wreszcie Georg Cantor znalazł odpowiedź i przez to zdobył dla myśli ludzkiej nową i obszerną dziedzinę, w której dotąd panowały mrok i chaos. Dopiero Cantor i Dedekind obalili mniemanie, uważane dawniej za oczywiste, że jeśli z jakiegoś zbioru przedmiotów usuniemy niektóre, wówczas liczba pozostałych przedmiotów będzie mniejsza od pierwotnej ich liczby. Twierdzenie takie słuszne jest tylko w zastosowaniu do zbiorów skończonych, tam zaś, gdzie chodzi o zbiory nieskończone, okazało się, że odrzucenie tego twierdzenia usuwa odrazu wszystkie trudności, na jakie umysł ludzki w tych zagadnieniach natrafiał. Ten fakt zdumiewający powinien wywołać przewrót na wyższym stopniu nauczaniu matematyki: zwiększa on niezmiernie wartość kształcącą przedmiotu, daje nareszcie sposób traktowania ze ścisłością logiczną wielu gałęzi nauki, które do ostatnich czasów tonęły w błędach i ciemnościach. Ci, którzy sami kształcili się w dawnych pojęciach, uważają ten nowy kierunek za strasznie trudny i niezrozumiały; zresztą trzeba przyznać, że twórca jego, jak to często z wynalazcami bywa, sam ledwie się wydobył z mgły, którą światło jego umysłu starało się rozproszyć. W gruncie jednak nowa nauka o nieskończoności, zdaniem każdego człowieka nieuprzedzonego i badawczego, ogromnie ułatwiła opanowanie matematyki wyższej. Dotąd trzeba było nałamywać się do tego, by po długich sofistycznych wywodach zgadzać się na rozumowania, które narazie—i zupełnie słusznie — uważano za bałamutne. W ciągu dwuch wieków ubiegłych studja matematyczne nie wytwarzały niezachwianej wiary w rozum, nie przyzwyczajały do odrzucania tego, co nie spełnia wymagań logiki. Przeciwnie, studja matematyczne zachęcały raczej do mniemania, że trzeba uznać wiele rzeczy dlatego tylko, że są „praktycznie" użyteczne, jakkolwiek ścisłe badanie musiałoby je odrzucić jako mylne. Wskutek tego tam, gdzie tylko rozum powinien był panować, wytwarzał się albo bojaźliwy, kompromisowy nastrój, albo wiara w jakieś tajemnice, niepojęte dla profana. Pora już to wszystko usunąć z nauczania. Kto chce przeniknąć arkana matematyki, powinien odrazu uczyć się p r a w d z i w e j teorji, w całej jej czystości logicznej...

Jeżeli matematykę uważamy za cel sam w sobie, nie zaś za ćwiczenie dla przyszłych inżenierów, wówczas musimy dbać o zachowanie czystości i ścisłości rozumowań. Wskutek tego ci, którzy już oswoili się z łatwiejszemi działami matematyki, powinni zawrócić wstecz i od twierdzeń, które poprzednio uznawali za oczywiste, wznieść się do bardziej podstawowych zasad, z których można logicznie wysnuć te twierdzenia. Należy im pokazać— a teorja nieskończoności daje do tego wiele okazji — że przy bliższym badaniu bardzo często okazują się mylnemi twierdzenia, które na pierwszy rzut oka wydawały się oczywiste... Na tym poziomie nauczania dobrze jest powrócić do matematyki elementarnej, pytając już nie tylko o to, czy dane twierdzenie jest prawdziwe, lecz o to również, w jaki sposób wynika ono z zasad logiki. Na te pytania można już na tym poziomie dać odpowiedź ścisłą i pewną — co było dawniej niemożliwe — w łańcuchu zaś rozumowań, które w tym celu wypadnie przeprowadzić, uwidoczni się najlepiej jedność wszystkich gałęzi matematyki.

W większości podręczników matematycznych brak zupełnie jednolitej metody i systematycznego rozwinięcia jednego, głównego tematu. Dowodzą tam najróżnorodniejszych twierdzeń zapomocą pierwszej lepszej metody, którą autor uważa w danym wypadku za najprzystępniejszą. Wiele też miejsca udzielają ciekawostkom, które w niczym nie popierają głównego łańcucha rozumowań. Natomiast przy czytaniu dzieł prawdziwie wielkich czujemy wszędzie jedność i konieczność, jak w dramacie: w założeniach podaje nam autor przedmiot do badania, w każdym zaś następnym ogniwie rozumowań czyni jakiś krok, który go zbliża do poznania natury tego przedmiotu.

Zamiłowanie do systemu, do odszukiwania związku wewnętrznego stanowi może najgłębszą istotę impulsu myślowego, nigdzie zaś zamiłowanie to nie ma takiego pola do rozwoju, jak w matematyce. Ucznia, który odczuwa taki impuls, nie należy zrażać przez szereg beztreściwych przykładów ani odrywać jego uwagi przez ciekawe błahostki. Przeciwnie, należy go zachęcać do zatrzymywania się nad głównemi zasadami, do przyswojenia sobie budowy teorji, które przed nim rozwijamy... W ten sposób kształcimy, że tak powiem, dobry ton umysłu, przyzwyczajamy go do skupiania uwagi na rzeczach ważnych i istotnych...

W nauczaniu jest rzeczą pożądaną nie tylko przekonać ucznia o prawdziwości ważnego twierdzenia, lecz zarazem przekonać go, że obrana droga jest sama przez się najpiękniejszą z możliwych dróg. Najciekawsza strona dowodu nie leży wyłącznie w jego wyniku, jak możnaby sądzić z tradycyjnych sposobów wykładu. Gdzie takie przesunięcie zainteresowania ma miejsce, należy to uważać za brak, któremu trzeba, o ile możności, zaradzić przez takie uogólnienie każdej fazy dowodu, by stała się ona sama przez się ważną. Rozumowanie, które służy tylko do dowiedzenia jednego wniosku, jest jak bajeczka podporządkowana morałowi: jeśli rozumowanie ma osiągnąć doskonałość estetyczną, żadna jego część nie powinna być wyłącznie środkiem. Duch praktyczności, chęć szybkiego posuwania się naprzód, żądza podboju nowych dziedzin są odpowiedzialne za zbytni nacisk na wyniki, który dziś kładą przy nauczaniu matematyki. O wiele lepiej byłoby dawać uczącemu się temat do badania—w gieometrji, jakąś figurę o ciekawych własnościach, w analizie, funkcję, której zbadanie otwierałoby nowe horyzonty, i t. d. Ilekroć dowód opiera się tylko na niektórych cechach badanego przedmiotu, należy te cechy wyodrębnić i poddać osobnemu badaniu. Albowiem używanie większej liczby przesłanek, niż tego wymaga dany wniosek, jest błędem: to, co matematycy nazywają wytwornością, wynika z posługiwania się tylko istotnemi zasadami, z których wynika prawdziwość danej tezy. Euklides posuwa się, jak może najdalej, nie uciekając się do pewnika o równoległych; jest to wielka jego zasługa nie dlatego, jak sądzą niektórzy, by pewnik ten w istocie swej podlegał zarzutom, lecz dlatego, że w matematyce każdy nowy pewnik zmniejsza ogólność wniosków, my zaś powinniśmy przedewszystkim dążyć do tej ogólności.

O wpływie matematyki pisano więcej, niż o jej własnym ideale. Wpływ jej na filozofję był bardzo znaczny i rozmaity... O tym, co będzie w przyszłości, trudno prorokować, prawdopodobnie jednak w jednym kierunku będzie miała matematyka wpływ zbawienny... ...Zbyt często słyszymy, że niema prawdy bezwzględnej, że są tylko mniemania i sądy prywatne, że poglądy każdego człowieka są uwarunkowane przez jego właściwości, gusta i cele, że niema zewnętrznego królestwa prawdy, do którego moglibyśmy ostatecznie otrzymać wstęp dzięki cierpliwości i dyscyplinie, że istnieją tylko prawdy moja, twoja, każdej poszczególnej osoby. Taki nałóg myślowy przeczy jednemu z głównych celów wysiłków ludzkich... Matematyka jest żywym potępieniem takiego sceptycyzmu, gdyż gmach jej prawd stoi niewzruszony i niezdobyty przez ten wątpiący cynizm.

Surowe cnoty wywierają na życie moralne, na uszlachetnienie ducha wieku i narodu wpływ o wiele większy, niż cnoty, nie oświecone i nie oczyszczone przez myśl. Śród tych cnót surowych główną jest miłość prawdy...

Każde wielkie badanie jest nietylko celem samo dla siebie, lecz zarazem środkiem do wytworzenia i podtrzymania wzniosłego sposobu myślenia. Ten właśnie cel powinniśmy zawsze mieć na oku przy nauczaniu i uczeniu się matematyki.