

A. Szaniawski, Z. Lipnicki

PRZEPLYW LEPKI Z WYMIANĄ CIEPŁA
MIĘDZY REGULARNIE ROZMIESZCZONYMI
RÓWNOLEGLYMI CYLINDRAMI

29/1984

WARSZAWA 1984

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 5 czerwca 1984 r.

56977



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 160 egz. Ark.wyd. 1,2. Ark.druk.2,25.
Oddano do drukarni w lipcu 1984 r.
Nr zamówienia 479/84.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Andrzej Szaniawski

Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów IPPT

Zygmunt Lipnicki

Instytut Techniki WSP w Zielonej Górze

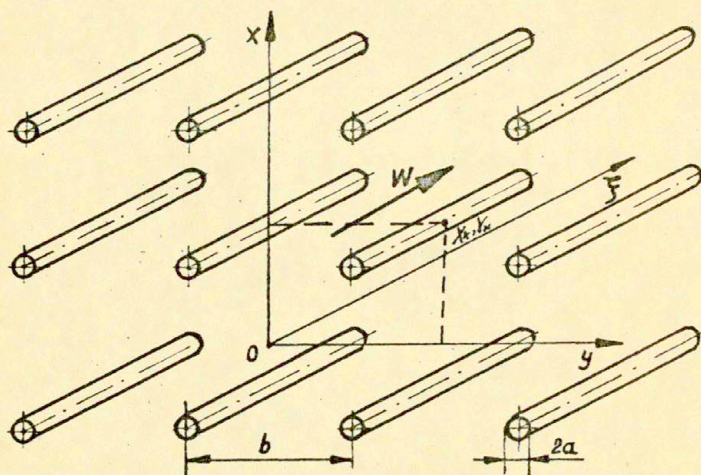
PRZEPŁYW LEPKI Z WYMIANA CIEPŁA
MIĘDZY REGULARNIE ROZMIESZCZONYMI
RÓWNOLEGŁYMI CYLINDRAMI

1. Sformułowanie problemu

Rozpatrujemy ustalony, laminarny przepływ lepkiego i przewodzącego ciepło płynu nieściśliwego wzdłuż równoległych, jednakowych, cienkich cylindrów o średnicy $2a$, rozmieszczonych regularnie w odległościach b tak, że punkty przebicia płaszczyzny prostopadłej do nich z ich osiami są rozmieszczone na wierzchołkach wieloboków foremnych /rys.1/.

Wzdłuż cylindrów temperatura ich powierzchni zmienia się liniowo i występuje ustalona wymiana ciepła z otaczającą cieczą. Rozpatrywane są układy z cylindrami jednakowo obciążonymi dynamicznie i cieplnie. Przyjmujemy, że w płynie gęstość ρ , ciepło właściwe c , współczynniki: lepkości μ i przewodnictwa cieplnego κ oraz wzdłużne składowe gradientów temperatury T i ciśnienia p są stałe, a w przekroju

poprzecznym temperatura na powierzchni cylindrów również



Rys. 1

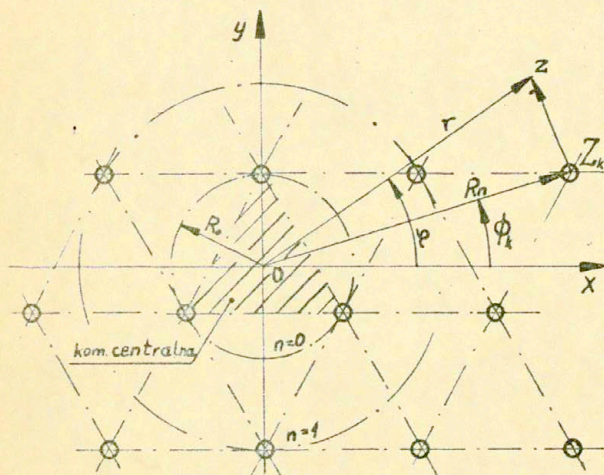
jest stała. Założenie cienkości cylindrów można wyrazić wprowadzeniem małego parametru

$$1/1 \quad \varepsilon = \frac{a}{b} \ll 1,$$

względem którego będziemy przeprowadzać szacowania, odrzucając małe wyższego rzędu.

Będziemy obierać kartezjańskie układy współrzędnych x, y, ξ o osi ξ równoległej do osi cylindrów i umieszczonej symetrycznie między cylindrami oraz będziemy oznaczać przez X_k, Y_k ($k=1, 2, \dots$) współrzędne osi cylindrów. W dalszym ciągu będziemy traktować współrzędne x, y jako bezwymiarowe, przyjmując dla

nich odległość między cylindrami b za jednostkę długości.
 Poza dwuwymiarowym kartezjańskim układem odniesienia x, y
 będziemy jednocześnie stosować współrzędne biegunowe r, ρ
 /rys.2/ zgodnie ze wzorami w zapisie zespolonym



Rys.2

$$|z| \quad z = x + iy = r e^{i\rho}, \quad z^* = x - iy = r e^{-i\rho}.$$

Dla rozpatrywanych konfiguracji regularnie rozmieszczonych
 cylindrów, parametry przepływu będą okresowymi funkcjami
 x i y .

Przy obiorze układów odniesienia, będziemy kierować się
 kryteriami symetrii, oraz wyborem elementarnej komórki

zwanej komórką centralną, w której będziemy wyznaczać pola prędkości i temperatur. Środek układu x, y będzie umieszczany w środku centralnej komórki o przekroju będącym wielobokiem foremnym utworzonym z punktów przebicia płaszczyzny $\xi=0$ z osiami najbliższej sąsiadujących cylindrów. Jeśli dla rozpatrywanej konfiguracji rozmieszczenia cylindrów istnieje kilka elementarnych komórek o różnych rozkładach prędkości i temperatur płynu, wówczas będziemy alternatywnie obierać środki odpowiednich układów kartezjańskich w środkach wszystkich tych komórek.

Dla wybranej komórki centralnej i obranego układu współrzędnych, będziemy grupowali cylindry według ich odległości od środka symetrii, oznaczając przez k numer cylindra a przez n numer kolejnej grupy cylindrów zgodnie z przyporządkowaniem:

k	$1, 2, \dots, K_0$	$k, k+1, \dots, K_1$	\dots	k_n, k_n+1, \dots, K_n
m_n	$m_0 = K_0$	$m_1 = K_1 - K_0$	\dots	$m_n = K_n - K_{n-1}$
n	0	1	\dots	n

gdzie m_n jest liczbą cylindrów zawartych w grupie n a $k_n = K_{n-1} + 1$ jest pierwszym cylindrem w grupie, przy czym w grupie $n=0$, $k_0=1$. Przez $n=N$ oznaczać będziemy ilość grup wziętych do obliczeń. Dwuwymiarowe współrzędne osi cylindrów w zapisie

zespolonym przedstawimy następująco /rys.2/:

$$/3/ \quad Z_k = X_k + i Y_k = R_n e^{i\phi_k}.$$

Wyznaczenie pola prędkości i temperatur w komórce centralnej otoczonej cylindrami należącymi do grupy $n=0$ o powierzchni S_0 i promieniu R_0 określonych wzorami

$$/4/ \quad S_0 = \frac{m_0}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{m_0} - \left(\frac{m_0}{2} - 1\right) \pi \varepsilon^2, \quad R_0 = \left(2 \sin \frac{\pi}{m_0}\right)^{-1},$$

będzie podstawowym zagadnieniem niniejszej pracy. Ze względu na periodyczne rozmieszczenie cylindrów, rozkład parametrów przepływu ma również periodyczny charakter i dlatego na wyznaczeniu tych parametrów w podstawowych komórkach centralnych można poprzestać.

Poza bezwymiarowymi powierzchniami S_0 elementarnych komórek centralnych, wprowadzać będziemy jeszcze powierzchnię S przekroju poprzecznego, przypadającego średnio na jeden cylinder. Przy jej pomocy możemy określać objętościowy współczynnik wypełnienia

$$/5/ \quad \chi = \frac{\pi b^2}{S} \varepsilon^2.$$

Wielkości S , χ/ε^2 , S_0 są dla podstawowych konfiguracji cylindrów podane w tabeli 1.

Pole prędkości w i temperatury T będziemy przedstawiać

przy pomocy bezwymiarowych funkcji w i θ w postaci:

$$T = \frac{\partial T}{\partial \xi} \left[\xi - \frac{b^2 \rho c}{\mu \kappa} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \theta(x, y) \right] \quad i$$

/6/

$$W = -\frac{b^2}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} w(x, y).$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do podstawowych równań zachowania pędu i energii, otrzymamy układ dwóch równań Poissona:

$$/7/ \quad \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = -1, \quad ,$$

$$/8/ \quad \frac{\partial^2 \theta(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y)}{\partial y^2} = w(x, y).$$

Na konturach cylindrów ograniczających obszar przepływu prędkość w i temperatura θ winny spełniać warunki brzegowe

$$/9/ \quad w|_{z_k = \varepsilon} = 0 \quad i$$

$$/10/ \quad \theta|_{z_k = \varepsilon} = 0 \quad , \quad z_k = z - Z_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

W ten sposób postawiony problem został sprowadzony do kolejnego wyznaczenia najpierw pola prędkości w z równania /7/ przy warunkach brzegowych /9/ a następnie pola temperatur θ z równania /8/ z danymi warunkami brzegowymi /10/. Jak widać, do rozwiązania problemu drugiego potrzebne

jest wyznaczenie pola prędkości. Należy zwrócić uwagę, że równania /7/ i /8/ są liniowymi a warunki brzegowe /9/ i /10/ są jednorodnymi. Do rozwiązania postawionego problemu można więc stosować reguły superpozycji.

Postawiony wyżej pierwszy problem wyznaczenia pola prędkości został rozwiązany przez Emerslebena [1] , [2] , [3] dla siatki kwadratowej i innych dwuperiodycznych siatek otrzymanych przez superpozycję siatek kwadratowych, ale jedynie dla prętów o specjalnym profilu, wynikającym z postaci założonego rozwiązania o regularnie rozmieszczonych osobliwościach. Zagadnieniem tym zajmowali się również Sparrow i Loeffler [4] , [5] . W roku 1959 podali oni przybliżone rozwiązanie opływu trójkątnej i kwadratowej siatki cylindrów stosując metodę kolokacji brzegowej. Happel J. [6] rozwiązał problem podłużnego opływu siatki cylindrów metodą komórkową. Numeryczne wyznaczenie pola prędkości można znaleźć w pracach Schmida [8] , Szołochowa, Bulejewa, Gribanowa i Minamina [7] . W pracy ostatniej problem rozwiązano również przez modelowanie elektryczne. W pracach [10] i [11] wyznaczono przybliżone analityczne rozwiązanie pola prędkości dla bardzo cienkich walców metodą superpozycji rozwiązań.

Drugi problem wymiany ciepła rozwiązali Sparrow i Loeffler w roku 1961, stosując metodę kolokacji brzegowej, dla cylindrów ułożonych w siatkę trójkątną [5] . J.W.Yang w pracach [13] i [14] wykorzystał metodę stosowaną przez Sparrowa i

Loeflera dla wyznaczenia pola prędkości i wymiany ciepła w przepływie, w którym rozpatruje się wpływ siły wyporu na warunki przepływu.

W niniejszej pracy punktem wyjścia jest metoda stosowana w pracach [10] i [11], przy czym obecnie wprowadzony został wygodniejszy zapis wyników przy pomocy liczb zespolonych. Przedmiotem pracy jest przybliżone analityczne określenie najpierw pola prędkości a następnie pola temperatur, przy opływie regularnego układu bardzo cienkich cylindrów z uwzględnieniem wymiany ciepła. Po wyznaczeniu lokalnych rozkładów prędkości i temperatury zostanie zwrócona uwaga na globalne charakterystyki przeplywowo-ciepłne, czyli na przepuszczalność filtracyjną i na wymianę ciepła między płynem a cylindrami. Celem pracy jest zarówno omówienie stosowanej metody, jak i przedstawienie wyników opisujących zachodzące procesy wymiany dla poszczególnych przypadków siatek: trójkątnej, kwadratowej, sześciokątnej i ośmiokątno-kwadratowej.

2. Metoda wyznaczenia rozkładu prędkości

Poszukiwane pole prędkości wzdłużnych określone jest przy pomocy bezwymiarowej funkcji $W(x,y)$, która winna spełniać równanie Poissona /7/ oraz warunki brzegowe /9/ zerowania się prędkości na powierzchni nieruchomych cylindrów. Przybliżonego rozwiązania, które warunki brzegowe /9/ spełni jedynie dla małych wartości ε na ograniczonej liczbie K_N cylindrów, będziemy poszukiwali w postaci spełniającej równanie /7/ sumy

$$/11/ \quad \mathcal{W}(x, y; \varepsilon, N) = \hat{\mathcal{W}}(x, y) + \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon}{R^2} \left[\mathcal{A}(\varepsilon) + \sum_{n=0}^N \mathcal{W}_n(x, y) \right],$$

gdzie

$$/12/ \quad \hat{\mathcal{W}}(x, y) = \frac{R_0^2 - (x^2 + y^2)}{4} = \frac{R_0^2 - z z^*}{4} = \frac{R_0^2 - r^2}{4}$$

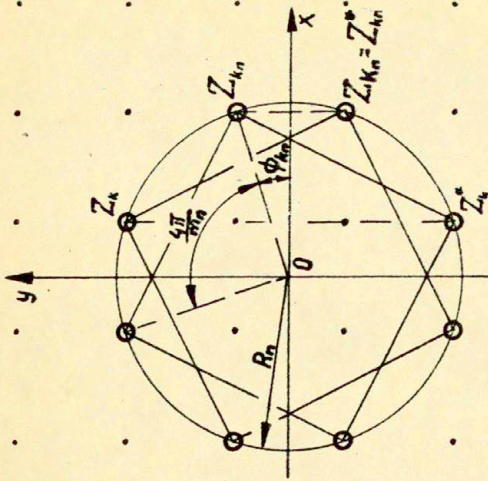
jest szczególnym rozwiązaniem równania Poissona /5/,

$$/13/ \quad \mathcal{W}_n(x, y) = A_n + B_n \sum_{k=k_n}^{K_n} \ln(z - Z_k)(z - Z_k)^*$$

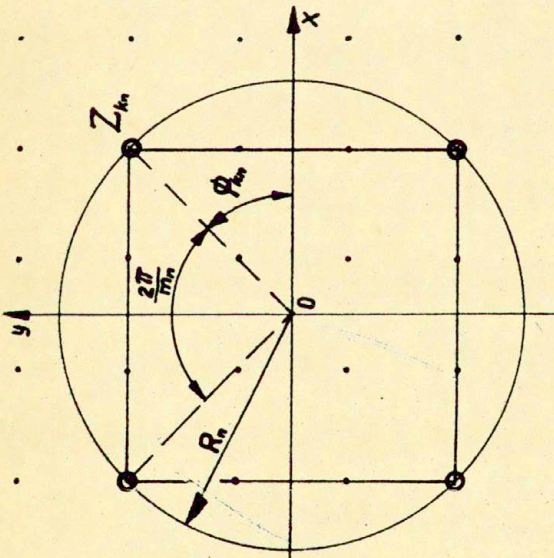
jest rozwiązaniem równania Laplace'a o $m_n = K_n - k_n + 1$ prostych biegunach umieszczonych w osiach cylindrów na obwodzie okręgu o promieniu R_n , a $\mathcal{A}(\varepsilon)$, A_n , B_n są tymczasem nie określonymi stałymi dowolnymi.

Wykorzystując symetryczne rozmieszczenie punktów Z_k , możemy funkcję \mathcal{W}_n przedstawić w wygodniejszej postaci. W rozpatrywanych regularnych siatkach punkty te mogą być rozmieszczone albo jak w wariancie /a/ na wierzchołkach jednego wieloboku regularnego albo jak w wariancie /b/ na wierzchołkach dwóch identycznych wieloboków regularnych o położeniu symetrycznym względem osi współrzędnych /rys.3/. Dla wariantu /a/

$$Z_k = Z_{k_n} \cdot e^{i \frac{2\pi}{m_n} (k - k_n)}, \quad k_n \leq k \leq K_n, \quad n = 0, 1, \dots$$



variant „b”



variant „a”

Rys. 3

możemy występujące w /13/ sumy przekształcić według wynikających z algebry wzorów

$$\begin{aligned} /14/ \quad \sum_{k_n}^{K_n} \ln(z-Z_k)(z-Z)^* &= \ln \prod_{k_n}^{K_n} (z-Z_k)(z-Z)^* = \ln(z^{m_n} Z_{k_n}^{m_n})(z^{m_n} Z_{k_n}^{m_n})^* \\ &= \ln R_n^{2m_n} \left[1 - 2 \left(\frac{r}{R_n} \right)^{m_n} \cos m_n(p - \phi_{k_n}) + \left(\frac{r}{R_n} \right)^{2m_n} \right]. \end{aligned}$$

Dla wariantu /b/

$$Z_k = \begin{cases} Z_{k_n} e^{i \frac{4\pi}{m_n} (k - k_n)} & k_n \leq k \leq k_n + \frac{m_n}{2} - 1 \\ Z_{k_n} e^{i \frac{4\pi}{m_n} (K_n - k)} & k_n + \frac{m_n}{2} \leq k \leq K_n \end{cases}$$

połowa z ogólnej liczby punktów w danej grupie jest odbiciem zwierciadlanym względem osi symetrii x pozostałych punktów. Szereg /13/ możemy więc przekształcić następująco

$$\begin{aligned} /15/ \quad \sum_{k_n}^{K_n} \ln(z-Z_k)(z-Z)^* &= \sum_{k_n}^{k_n + \frac{m_n}{2} - 1} \ln(z-Z_k)(z-Z)^* + \sum_{k_n + \frac{m_n}{2}}^{K_n} \ln(z-Z_k)(z-Z)^* = \\ &= \ln R^{2m_n} \left[1 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^{m_n} \cos \frac{m_n}{2} (p - \phi_{k_n}) \left(\frac{r}{R_n} \right)^{m_n} \right] \left[1 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^{m_n} \cos \frac{m_n}{2} (p + \phi_{k_n}) \left(\frac{r}{R_n} \right)^{m_n} \right]. \end{aligned}$$

Suma $\mathcal{W}(x, y, \varepsilon, N)$ /11/ spełnia ściśle równania Navier-Stokes'a, sprowadzające się w rozpatrywanym przypadku do równania Poissona /7/, a występujące w niej stałe $\mathcal{A}(\varepsilon)$, A_n , B_n będziemy się starali tak dobierać, aby warunki brzegowe /9/ były możliwie jak najlepiej spełnione ze względu na mały parametr ε , na możliwie jak największej liczbie cylindrów otaczających komórkę centralną. Dokładne spełnienie

przez założoną postać rozwiązania /11/ warunku /9/ na wszystkich cylindrach nie wydaje się ani możliwe, ani celowe i dlatego, dla skończonej liczby cylindrów K_n , będziemy tak dobierać stałe $\mathcal{A}(\varepsilon)$, A_n , B_n , aby błąd uzyskanego przybliżenia wewnątrz komórki centralnej nie wzrastał z ε szybciej niż liniowo.

Wykorzystując na każdym cylindrze warunek równowagi sił

$$\mu \int_0^{2\pi} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \tau_k d\varphi = -S \frac{\partial p}{\partial \xi} \quad \tau_k = |z - Z_k| = \varepsilon$$

z dokładnością do wyrazów zerowego rzędu ze względu na ε , otrzymujemy

$$/16/ \quad B_n = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Warunek $W=0$ na dowolnym k -tym cylindrze $z - Z_k = \varepsilon \cdot e^{i\psi}$ można teraz przedstawić w postaci

$$/17/ \quad 0 = \frac{R_n^2}{4} - \frac{Z_k Z_k^* + \varepsilon (Z_k e^{-i\psi} + Z_k^* e^{i\psi}) + \varepsilon^2}{4} + \\ + \frac{S}{4\pi B^2} \left\{ \mathcal{A} + \sum_{n=0}^N A_n + \sum_{l=1}^{K_n} \ln \left[|z - Z_l| |z - Z_l|^* + \varepsilon (|z - Z_l| e^{i\psi} + |z - Z_l|^* e^{-i\psi}) + \varepsilon^2 \right] \right\}$$

Zwróćmy uwagę, że jedno z wyrażeń o wskaźniku $l=k$ dla $\varepsilon \rightarrow 0$ staje się osobliwe i aby usunąć osobliwość, wprowadzimy

$$/12/ \quad A = - \ln \varepsilon^2 .$$

Powyższa zależność pozwala spełnić warunek /17/ na każdym cylindrze z dokładnością do wyrazów najniższego rzędu ze względu na ξ . Natomiast obierając

$$A_0 = - \sum_{l=2}^{K_0} \ln (Z_l - Z_l)(Z_l - Z_l)^* = -2 \ln (m_0 R_0^{m_0 - 1}) \quad n=0$$

$$/19/ \quad A_n = - \sum_{l=kn}^{K_n} \ln (Z_l - Z_l)(Z_l - Z_l)^* = -2 m_n \ln R_n -$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln \left[i - 2 \left(\frac{R_0}{R_n} \right)^{m_n} \cos m_n (\phi_l - \phi_{kn}) + \left(\frac{R_0}{R_n} \right)^{2m_n} \right] \quad (a) \\ \ln \left[1 - 2 \left(\frac{R_0}{R_n} \right)^{\frac{m_n}{2}} \cos \frac{m_n}{2} (\phi_l - \phi_{kn}) + \left(\frac{R_0}{R_n} \right)^{m_n} \right] \left[1 - 2 \left(\frac{R_0}{R_n} \right)^{\frac{m_n}{2}} \cos \frac{m_n}{2} (\phi_l + \phi_{kn}) + \left(\frac{R_0}{R_n} \right)^{m_n} \right] \quad (b) \end{array} \right.$$

$n = 1, 2, \dots$

spełnimy warunek /17/ na cylindrach centralnej komórki o numerze $n=0$ z dokładnością do dwóch wyrazów najniższego rzędu ze względu na ξ .

Wykorzystując wyrażenia /14/, /15/, /17/, /18/, i /19/ sprowadzimy ω_n /13/ w zapisie zespolonym do postaci

$$/20/ \quad \omega_n = \begin{cases} \ln \frac{R_0^2}{m^2} + \ln [1 - (\frac{z}{z_0})^{m_0}] [1 - (\frac{z^*}{z_0^*})^{m_0}] & n=0 \\ \ln \frac{[1 - (\frac{z}{z_{kn}})^{m_n}] [1 - (\frac{z^*}{z_{kn}^*})^{m_n}]}{[1 - (\frac{z}{z_{kn}})^{m_n}] [1 - (\frac{z^*}{z_{kn}^*})^{m_n}]} & (a) \\ \ln \frac{[1 - (\frac{z}{z_{kn}})^{\frac{m_n}{2}}] [1 - (\frac{z^*}{z_{kn}^*})^{\frac{m_n}{2}}] [1 - (\frac{z}{z_{kn}})^{\frac{m_n}{2}}] [1 - (\frac{z^*}{z_{kn}^*})^{\frac{m_n}{2}}]}{[1 - (\frac{z}{z_{kn}})^{\frac{m_n}{2}}] [1 - (\frac{z^*}{z_{kn}^*})^{\frac{m_n}{2}}] [1 - (\frac{z}{z_{kn}})^{\frac{m_n}{2}}] [1 - (\frac{z^*}{z_{kn}^*})^{\frac{m_n}{2}}]} & (b) \end{cases} \quad n=1,2,\dots$$

Wykorzystując /12/, /13/, /14/, /16/, /17/, /18/ i /19/, otrzymujemy przybliżone rozwiązanie /11/ we współrzędnych biegunowych τ, φ w postaci

$$/21/ \quad \omega(\tau, \varphi; \varepsilon, N) = \frac{R_0^2 - r^2}{4} + \frac{5}{4\pi b^2} \left[-\ln \varepsilon^2 + \sum_{n=0}^N \omega_n(\tau, \varphi) \right]$$

gdzie

$$/22/ \quad \omega_n = \begin{cases} \ln \frac{R_0^2}{m^2} + \ln [1 - 2(\frac{r}{R_0})^{m_0} \cos m_0(\varphi - \varphi_0) + (\frac{r}{R_0})^{2m_0}] & n=0 \\ \ln \frac{1 - 2(\frac{r}{R_n})^{m_n} \cos m_n(\varphi - \varphi_{kn}) + (\frac{r}{R_n})^{2m_n}}{1 - 2(\frac{R_n}{R_n})^{m_n} \cos m_n(\varphi_0 - \varphi_{kn}) + (\frac{R_n}{R_n})^{2m_n}} & (a) \\ \ln \frac{[1 - 2(\frac{r}{R_n})^{\frac{m_n}{2}} \cos \frac{m_n}{2}(\varphi - \varphi_{kn}) + (\frac{r}{R_n})^{m_n}] [1 - 2(\frac{r}{R_n})^{\frac{m_n}{2}} \cos \frac{m_n}{2}(\varphi + \varphi_{kn}) + (\frac{r}{R_n})^{m_n}]}{[1 - 2(\frac{R_n}{R_n})^{\frac{m_n}{2}} \cos \frac{m_n}{2}(\varphi_0 - \varphi_{kn}) + (\frac{R_n}{R_n})^{m_n}] [1 - 2(\frac{R_n}{R_n})^{\frac{m_n}{2}} \cos \frac{m_n}{2}(\varphi_0 + \varphi_{kn}) + (\frac{R_n}{R_n})^{m_n}]} & (b) \end{cases} \quad n=1,2,\dots$$

Rozwiązanie to spełnia ściśle równanie Poissona /7/, ale warunki brzegowe /9/ spełnia jedynie w przybliżeniu na cylindrach komórki centralnej z błędem mogącym liniowo wzrastać z ξ .

Wzory /21/ i /22/ przedstawiają w wygodniejszym zapisie wyniki otrzymane uprzednio w [10]. Otrzymane stąd rozkłady prędkości dla kilku ξ i N pokazane są dla siatki kwadratowej w [10] a dla siatki trójkątnej i sześciokątnej w [11].

Znając rozkład prędkości w komórkach centralnych możemy wyznaczyć średnią prędkość przepływu w każdej z tych komórek

$$/23/ \quad \bar{w} = -\frac{b^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial \xi} \bar{w} \quad , \quad \bar{w} = \frac{1}{S_0} \iint_{S_0} \omega(r, \varphi) r dr d\varphi .$$

Obliczenia całki $\iint_{S_0} \omega(r, \varphi) r dr d\varphi$ i wynikającej stąd przepuszczalności podłużnej dla różnych siatek zamieszczone są w dodatku, a wyniki pokazane w tab. 2.

3. Metoda wyznaczenia pola temperatur

Poszukiwane pole temperatury określone jest przy pomocy bezwymiarowej funkcji $\theta(x, y)$ spełniającej równanie Poissona /8/ i warunki brzegowe /19/ zerowania się temperatury na powierzchni cylindrów. Zmienna prawa strona $\omega(x, y)$ równania /7/ określona jest wzorem /21/ w poprzedniej części pracy.

Przybliżonego rozwiązania tego zadania będziemy poszukiwali w postaci sumy

$$/24/ \quad \Theta(x, y; \varepsilon, N) = \hat{\Theta}(x, y) + \frac{S}{4\pi b^2} \left[C(\varepsilon) + \sum_{n=0}^N (\hat{\Theta}_n + \Theta_n) \right],$$

gdzie

$$/25/ \quad \hat{\Theta}(x, y) = \frac{R_0^2 - r^2}{64} (r^2 - 3R_0^2) + \frac{S}{4\pi b^2} \mathcal{A}(\varepsilon) \frac{r^2 - R_0^2}{4}$$

i

$$/26/ \quad \hat{\Theta}_n(x, y) = A_n \frac{r^2 - R_0^2}{4} + \sum_{k=k_n}^{K_n} \frac{(z - Z_k)(z - Z_k)^*}{4} [\ln(z - Z_k)(z - Z_k)^* - 2] + C_n$$

są szczególnymi rozwiązaniami równań Poissona:

$$/27/ \quad \frac{\partial^2 \hat{\Theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Theta}}{\partial y^2} = \hat{\omega}(x, y) + \frac{S}{4\pi b^2} \mathcal{A}(\varepsilon)$$

i

$$/28/ \quad \frac{\partial^2 \hat{\Theta}_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Theta}_n}{\partial y^2} = \omega_n(x, y),$$

a

$$/29/ \quad \Theta_n = D_n + E_n \sum_{k=k_n}^{K_n} \ln(z - Z_k)(z - Z_k)^*$$

jest rozwiązaniem równania Laplace'a o m_n prostych biegunach umieszczonych w osiach cylindrów należących do grupy n . Stałe A_n określone są wzorami /19/. Stałe C , C_n , D_n i E_n muszą być tak dobrane, aby błąd uzyskanego przybliżenia był możliwie najmniejszy.

Rozwiązanie /24/ spełnia ściśle równanie Poissona /8/, ale nie może dokładnie spełniać warunków brzegowych /10/. Występujące w nim nieznane stałe C , C_n , D_n i E_n postaramy się tak dobrać, aby spełniało ono w przybliżeniu warunki bilansu energii, oraz warunki brzegowe /10/ na powierzchni cylindrów komórki centralnej.

Wykorzystując na każdym cylindrze warunek bilansu energii dla elementu siatki

$$/30/ \quad -\kappa \int_0^{2\pi} \frac{\partial T}{\partial r_k} r_k d\varphi = \rho c \frac{\partial T}{\partial \xi} \bar{W} S$$

z dokładnością do wyrazów zerowego rzędu ze względu na ε , otrzymamy

$$/31/ \quad E_n = \bar{W} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Warunek $\theta = 0$ na cylindrze komórki centralnej $|z - Z_k| = \varepsilon$ / ze względu na prawo symetrii warunek spełniony jest automatycznie na pozostałych cylindrach komórki centralnej /można

przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{R_0^2 - [Z_n Z_n^* + \varepsilon(Z_n e^{i\psi} + Z_n^* e^{-i\psi}) + \varepsilon^2]}{64} [Z_n Z_n^* + \varepsilon(Z_n e^{-i\psi} + Z_n^* e^{i\psi}) + \varepsilon^2 - 3R_0^2] + \\
 &+ \frac{5}{4\pi B^2} A(\varepsilon) \frac{Z_n Z_n^* + \varepsilon(Z_n e^{-i\psi} + Z_n^* e^{i\psi}) + \varepsilon^2 - R_0^2}{4} + \frac{5}{4\pi B^2} \left[C(\varepsilon) + \frac{Z_n Z_n^* + \varepsilon(Z_n e^{-i\psi} + Z_n^* e^{i\psi}) + \varepsilon^2 - R_0^2}{4} \sum_{n=0}^N A_n + \right. \\
 132/ \quad &\left. \sum_{n=0}^N \left\{ \sum_{k=k_n}^{K_n} \frac{(Z_n Z_k)(Z_n^* Z_k^* + \varepsilon[Z_n Z_k e^{i\psi} + (Z_n^* Z_k^*) e^{-i\psi}]) + \varepsilon^2}{4} \ln \left\langle \frac{(Z_n Z_k)(Z_n^* Z_k^* + \varepsilon[Z_n Z_k e^{i\psi} + (Z_n^* Z_k^*) e^{-i\psi}]) + \varepsilon^2}{4} \right\rangle + \right. \\
 &\left. - \frac{m_0}{2} [Z_n Z_n^* + \varepsilon(Z_n e^{i\psi} + Z_n^* e^{-i\psi}) + \varepsilon^2 + R_n^2] + C_n + D_n + \bar{w} \sum \ln \left\langle \frac{(Z_n Z_k)(Z_n^* Z_k^* + \varepsilon[Z_n Z_k e^{i\psi} + (Z_n^* Z_k^*) e^{-i\psi}]) + \varepsilon^2}{4} \right\rangle \right\}
 \end{aligned}$$

Obierając

$$133/ \quad C(\varepsilon) = -\bar{w} \ln \varepsilon^2,$$

$$\begin{aligned}
 134/ \quad C_0 &= \sum_{k=1}^{m_0} \frac{(Z_n Z_k)(Z_n^* Z_k^*)}{4} \ln (Z_n Z_k)(Z_n^* Z_k^*) + m_0 R_0^2 & n=0 \\
 C_n &= \sum_{k=k_n}^{K_n} \frac{(Z_n Z_k)(Z_n^* Z_k^*)}{4} \ln (Z_n Z_k)(Z_n^* Z_k^*) + \frac{m_0}{2} (R_0^2 + R_n^2) & n=1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
 135/ \quad D_0 &= -\bar{w} \sum_{k=2}^{m_0} \ln (Z_n Z_k)(Z_n^* Z_k^*) & n=0 \\
 D_n &= -\bar{w} \sum_{k=k_n}^{K_n} \ln (Z_n Z_k)(Z_n^* Z_k^*) & n=1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

spełniamy /32/ dla $n=0$ z dokładnością do wyrazów rzędu $\varepsilon \ln \varepsilon$.

Wykorzystując wyrażenia /20/, /25/, /26/, /29/, /33/, /34/, /35/ otrzymujemy przybliżone rozwiązanie /24/ we współrzędnych biegunowych r, φ w postaci

$$/36/ \quad \Theta(r, \varphi; \varepsilon, N) = \frac{R_0^2 - r^2}{64} (r^2 - 3R_0^2) + \frac{S}{4\pi b^2} \left[\frac{R_0^2 - r^2}{4} - \bar{\omega} \right] \ln \varepsilon^2 \sum_{n=0}^N \left[\hat{\Theta}_n + \Theta_n \right],$$

gdzie

$$/37/ \quad \hat{\Theta}_0 = A_0 \frac{r^2 - R_0^2}{4} + R_0^2 \sum_{k=1}^{m_0} \left[\left[1 - 2\frac{r}{R_0} \cos(\varphi - \phi_k) + \frac{r^2}{R_0^2} \right] \ln R_0^2 \left[1 - 2\frac{r}{R_0} \cos(\varphi - \phi_k) + \frac{r^2}{R_0^2} \right] + \right. \\ \left. - [2 - 2\cos(\phi_1 - \phi_k)] \ln R_0^2 [2 - 2\cos(\phi_1 - \phi_k)] \right] - \frac{m_0}{2} (r^2 - R_0^2) \quad n=0$$

$$\hat{\Theta}_n = A_n \frac{r^2 - R_0^2}{4} + R_n^2 \sum_{k=k_n}^{k_n} \left[\left[1 - 2\frac{r}{R_n} \cos(\varphi - \phi_k) + \frac{r^2}{R_n^2} \right] \ln R_n^2 \left[1 - 2\frac{r}{R_n} \cos(\varphi - \phi_k) + \frac{r^2}{R_n^2} \right] + \right. \\ \left. - \left[1 - 2\frac{R_0}{R_n} \cos(\phi_1 - \phi_k) + \frac{R_0^2}{R_n^2} \right] \ln R_n^2 \left[1 - 2\frac{R_0}{R_n} \cos(\phi_1 - \phi_k) + \frac{R_0^2}{R_n^2} \right] \right] - \frac{m_n}{2} (r^2 - R_0^2) \quad n=1, 2, \dots$$

1

$$/38/ \quad \Theta_n = \bar{\omega} \omega_n \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Przykład rozkładu pola temperatury /36/, dla siatki kwadratowej, pokazano na rys. 5. Jak widać, podobnie, jak przy rozkładzie prędkości [10], [11], dla niezbyt grubych cylindrów, otrzymany wynik wydaje się zadawalającym przybliżeniem nawet przy niewielkiej liczbie uwzględnianych cylindrów otaczających komórkę centralną.

Znając $\Theta(x, y)$ możemy wyznaczyć średnią temperaturę.

$$\bar{T} = \frac{\partial T}{\partial \xi} \left[\xi - \frac{b^2 s c}{\mu x} \frac{\partial p}{\partial \xi} \bar{\theta} \right],$$

/39/

$$\bar{\theta} = \frac{\iint \theta \omega r dr d\varphi}{\iint \omega r dr d\varphi}$$

i średni strumień ciepła przez powierzchnię cylindrów

$$/40/ \quad \bar{q} = -\alpha \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=\xi} = \frac{b^2 s c}{2\pi a \mu} \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} r \right|_{r=\xi} d\varphi.$$

Wprowadzając współczynnik α przejmowania ciepła między cylindrami a płynem zgodnie ze wzorem

$$\bar{q} = \alpha [T_{r=a} - \bar{T}]$$

oraz liczbę Nusselta $Nu = \frac{\alpha \cdot \sqrt{x}}{\lambda}$, po uwzględnieniu /23/, /39/, /40/ i wykorzystaniu warunku bilansu energii dla elementu siatki /30/, otrzymujemy

$$/41/ \quad Nu = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \frac{\bar{\omega}}{\bar{\theta}} \frac{5}{b^2}$$

a stąd, po podstawieniu przybliżonych wartości $\bar{\omega}$ i $\bar{\theta}$, od-
rzucając wielkości małe wyższego rzędu otrzymujemy wyrażenie

$$/42/ \quad Nu = \frac{2\sqrt{\frac{\pi}{x}}}{\ln \frac{x}{b^2} - \ln \frac{5}{b^2}} + \dots$$

4. Wnioski

Przedmiotem pracy jest opływ wzdłużny regularnie rozmieszczonych równoległych cylindrów i towarzysząca temu opływowi wymiana ciepła. Ponieważ warunki hydrodynamiczne mają tu decydujący wpływ na przebieg zjawisk termicznych, więc dla zbadania wymiany ciepła między cylindrami a otaczającą cieczą, należy uprzednio wyznaczyć przepływ tej cieczy. Wynika to z tego, że w cieczy zarówno pole prędkości jak i pole temperatur winny spełniać takie same równanie Poissona ale z innymi prawymi stronami, przy czym dla temperatury występuje z prawej strony funkcja opisująca uprzednio wyznaczony rozkład prędkości.

Do przybliżonego rozwiązania postawionego problemu zastosowano metodę polegającą na ograniczeniu się do wykorzystania skończonej liczby dostatecznie cienkich cylindrów rozmieszczonych symetrycznie dokoła komórki centralnej, wewnątrz której wyznaczony jest rozkład parametrów przepływu. Trójwymiarowe zadanie daje się tu sprowadzić do dwuwymiarowego zadania płaskiego, dla którego do przeprowadzenia obliczeń wygodne było wprowadzenie płaszczyzny zmiennej zespolonej. Poszukiwane rozkłady prędkości i temperatury spełniają ściśle równania przepływu i wymiany ciepła, natomiast warunki brzegowe na powierzchniach cylindrów spełniają one w przybliżeniu, z błędem zależnym w mało istotny sposób zarówno od liczby uwzględnianych cylindrów jak i przede wszystkim od stosunku ich grubości do odległości między nimi. Dla dostatecznie cienkich cylindrów błędy nie są znaczne.

Poza analizą przepływu i wymiany ciepła w skali lokalnej, dla rozkładu lokalnego prędkości i temperatury, na główną uwagę zasługują charakterystyki w skali globalnej dla przepuszczalności hydrodynamicznej i dla globalnej wymiany ciepła między cylindrami a otaczającą cieczą.

Porównując wyniki badań przepuszczalności podłużnej układów prętów cylindrycznych, mogliśmy się przekonać, że zależy ona bardzo słabo od geometrycznej konfiguracji rozmieszczenia cylindrów. Jeśli bowiem wprowadzimy w prawie Darcy'ego bezwymiarowy współczynnik przepuszczalności podłużnej $\frac{F''}{S}$ odniesiony do średniej powierzchni S przypadającej na jeden cylinder, to okazuje się, że współczynnik ten silnie zależy od objętościowego współczynnika wypełnienia χ natomiast jego wartości dla różnych rozmieszczeń cylindrów nie różnią się między sobą w istotny sposób /rys.4/. Nasuwa się więc pytanie, czy globalna wymiana ciepła nie posiada podobnych własności.

Globalną wymianę ciepła określa się liczbą Nusselta Nu , dla której możemy również wprowadzić powierzchnię S jako kwadrat wymiaru charakterystycznego, a otrzymane w niniejszej pracy wyniki mogą być wówczas przedstawione w postaci wykresów pokazanych na rys. 6. I tu również okazuje się, że dla układu cylindrów obrazująca przekazywanie ciepła liczba Nusselta Nu zależy silnie jedynie od współczynnika objętościowego wypełnienia χ , a od konfiguracji rozmieszczenia cylindrów zależy jeszcze słabiej niż przepuszczalność podłużna. Wykresy pokazane na rysunkach 4 i 6 dla kilku regularnych konfiguracji cylin-

drów sugerują przypuszczenie, że współczynnik wypełnienia χ jest najbardziej istotnym parametrem określającym globalne charakterystyki przeplywowo--cieplne w cieczy oplywającej wzdużnie układ równoległych cylindrów, a sposób rozmieszczenia tych cylindrów odgrywa drugorzędną rolę. Ponieważ wyznaczenie tych charakterystyk dla dowolnych układow jest bardzo trudne, więc możliwość wykorzystania przybliżonych wyników otrzymanych dla prostych konfiguracji rozmieszczeń cylindrów byłoby tu bardzo użyteczne. Wydaje się, że otrzymane wyżej wyniki dla kilku szczególnych układow regularnych mogłoby być wykorzystane również i dla innych układow o zadawalająco równomiernie, choć nie koniecznie regularnie rozmieszczonych cylindrach.

DołącznikObliczanie wartości średniej $\bar{\omega}$ /23/

Wykorzystując wzór /21/, możemy wartość średnią przedstawić w postaci

$$\bar{\omega} = \frac{1}{S_0} \iint_{S_0} \omega(r, \varphi) r dr d\varphi = -\frac{S}{4\pi b^2} \ln \varepsilon^2 + \frac{1}{S_0} \iint \hat{\omega} ds + \frac{S}{4\pi b^2} \frac{1}{S_0} \sum_{n=0}^N \iint \omega_n(r, \varphi) r dr d\varphi.$$

Z całek występujących po prawej stronie powyższej równości jedynie obliczenie całki

$$\iint_{S_0} \omega_n(r, \varphi) r dr d\varphi$$

przedstawia pewną trudność. Dlatego dla ułatwienia obliczeń wymienioną całkę będziemy obliczać jako sumę m_n całek funkcji osiowo-symetrycznych /11/ wychodzących z biegunów k -tych cylindrów w obrębie grupy n po obszarze S_0 :

$$\iint_{S_0} \omega_n(r, \varphi) r dr d\varphi = \sum_{k=k_n}^{K_n} \iint_{S_0} \omega_k ds + A_n S_0 = \sum_{k=k_n}^{K_n} \iint \ln r_k^2 r_k d r_k d \varphi_k + A_n S_0.$$

Przepuszczalność podłużna $F_{||} = b^2 \bar{\omega}$, określona zgodnie ze wzorem Darcy, odniesiona do powierzchni przypadającej na jeden cylinder po wprowadzeniu upakowania χ przyjmuje postać

$$\frac{F_{||}}{S} = \frac{1}{4\pi} \left[\ln \frac{1}{\chi} + \ln \frac{\pi b^2}{S} + 4\pi \frac{b^2}{S_0 S} \iint \hat{\omega} ds + \sum_{n=0}^N \left[\frac{1}{S_0} \sum_{k=k_n}^{K_n} \iint \omega_k ds + A_n \right] \right].$$

Obszar całkowania nie obejmuje powierzchni przekroju cylindrów, jako małych ze względu na ε^2 .

Przykładowe obliczenia dla siatki kwadratowej:

- całka rozwiązania szczególnego

$$\iint_{S_0} \hat{\omega} ds = \iint_{S_0} \frac{R_0^2 - r^2}{4} r dr d\varphi = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \frac{R_0^2 - r^2}{4} r dr = \frac{1}{12} = 0,0833$$

- całka $\iint_{S_0} \omega_n(r, \varphi) r dr d\varphi$

$n=0$

$$\iint_{S_0} \omega_0(r, \varphi) r dr d\varphi = 4 \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \ln r^2 \cdot r dr + A_0 \cdot 1 = 8 \left[\frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{\cos\varphi} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\cos\varphi} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} +$$

$$+ A_0 = 8 \left(\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \right) - \ln 2 = -3,6374,$$

itd.

Tabela 1.

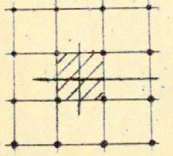
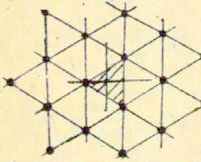
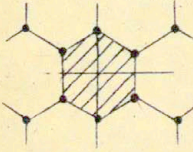
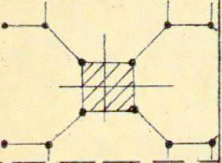
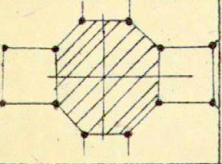
Rodzaj siatki	$\frac{S}{b^2}$	S_0	$\frac{\chi}{\varepsilon^2}$	$\int_{S_0}^1 \omega ds$	$\frac{F_{II}}{S}$
kwadratowa 	1	1	$\bar{\chi}$	$\frac{1}{12} = 0,0833$	$\frac{1}{4\pi} [\ln \frac{1}{\chi} - 1,4723]$
trójkątna 	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{64} = 0,0271$	$\frac{1}{4\pi} [\ln \frac{1}{\chi} - 1,4718]$
sześciokątna 	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$	$\frac{7\sqrt{3}}{32} = 0,3789$	$\frac{1}{4\pi} [\ln \frac{1}{\chi} - 1,3481]$
ośmiokątno - kwadratowa kom. centr. ośmiok. kom. centr. kwadr.		1		$\frac{1}{12} = 0,0833$	$\frac{1}{4\pi} [\ln \frac{1}{\chi} - 2,0689]$
		$\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$	$2(1+\sqrt{2})$	$\frac{4\pi}{3+2\sqrt{2}}$	$\frac{10\sqrt{2}+13}{24} = 1,1309$
przepuszczalność podłużna wypadkowa: $\frac{F_{II}}{S} = \frac{1}{4\pi} [\ln \frac{1}{\chi} - 1,1596]$					

Tabela 2

	n	m_n	K_n	R_n	$\operatorname{tg} \phi_{kn}$	wariant	A_n	$\sum_{k=0}^n \int \int \omega_k ds$	$\int \int \omega_n ds$	$\sum_{k=0}^n \int \int \omega_n ds$
siatka kwadratowa	0	4	4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	a	-0,6931	-2,9443	-3,6374	-3,6374
	1	8	12	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\frac{1}{3}$	b	-7,3777	7,3334	-0,0443	-3,6817
	2	4	16	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	1	a	-5,9915	6,0164	0,0248	-3,6569
	3	8	24	$\sqrt{\frac{13}{2}}$	$\frac{1}{5}$	b	-14,9811	14,9738	-0,0073	-3,6642

siatka trójkatna	0	3	3	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	a	0	-1,5409	-1,5409	-1,5409
	1	3	6	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	0	a	-1,0986	0,3843	-0,0944	-1,6323
	2	6	12	$\sqrt{\frac{7}{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{5}$	b	-4,9698	2,1963	0,0493	-1,5830
	3	6	18	$\sqrt{\frac{13}{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{7}$	b	-8,7980	3,8096	-0,0004	-1,5831

siatka sześciokatna	0	6	6	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	a	-3,5835	-0,2338	-9,5440	-9,5440
	1	6	12	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	a	-8,2863	21,6102	0,0818	-9,4622
	2	12	24	$\sqrt{7}$	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	b	-23,3509	60,6675	0,0004	-9,4621

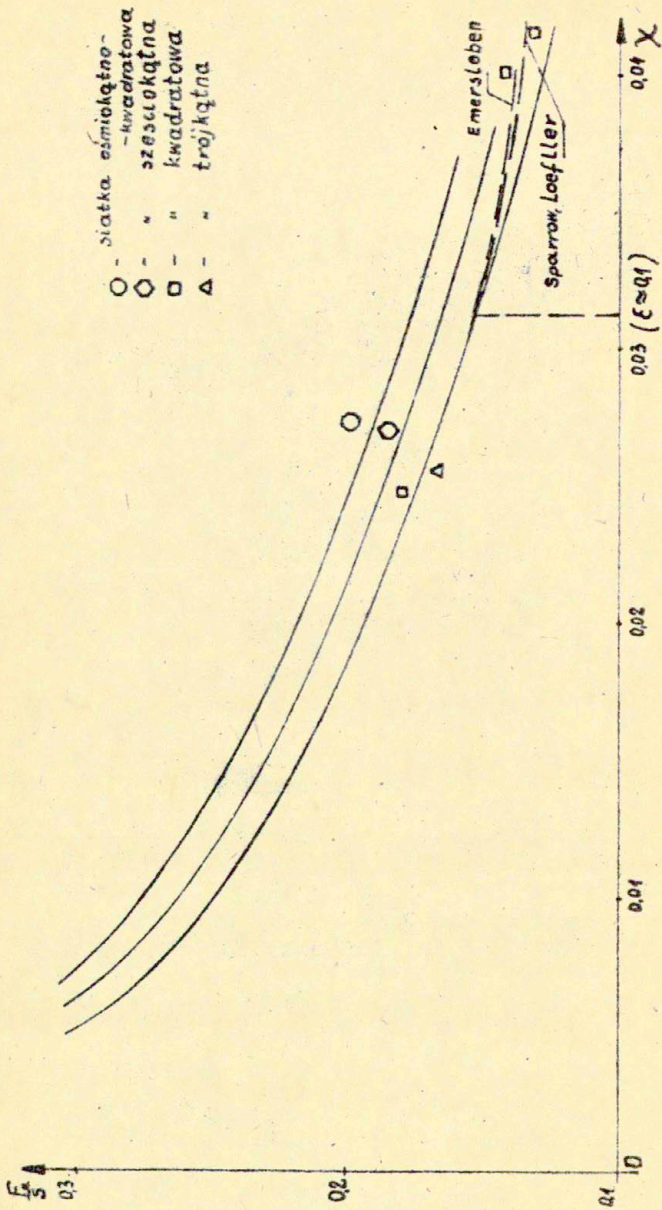
Siatka osmiokrotnie-kwadratowa kom. centralna osmiok. kom. centralna kwadrat	0	4	4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	a	-0,6931	-2,9443	-3,6374	-3,6374
	1	4	8	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	a	-4,2186	4,2784	0,0598	-3,5776
	2	8	16	$\frac{\sqrt{14+8\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$	b	-14,7498	14,7601	0,0103	-3,5673
	3	4	20	$\frac{3\sqrt{2}}{2} + 1$	1	a	-9,1007	9,1060	0,0053	-3,5620

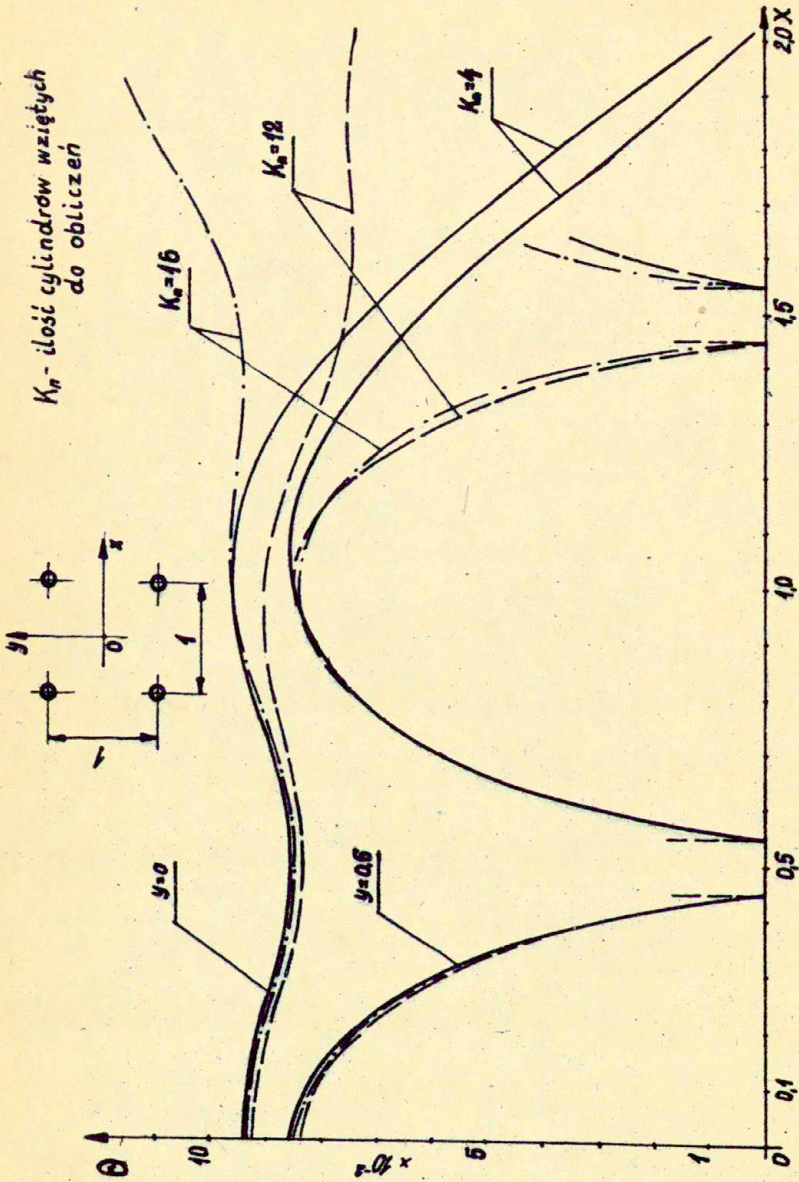
	0	8	8	$\sqrt{1 + \frac{1}{2}}$	$\sqrt{2}-1$	a	-7,9029	20,1104	-18,0482	-18,0482
	1	8	16	$\frac{\sqrt{12+6\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{2}}{7}$	b	-13,0621	62,9499	-0,1195	-18,1677
	2	8	24	$\frac{\sqrt{20+4\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	a	-18,3785	88,7546	0,0154	-18,1523

Wykaz literatury

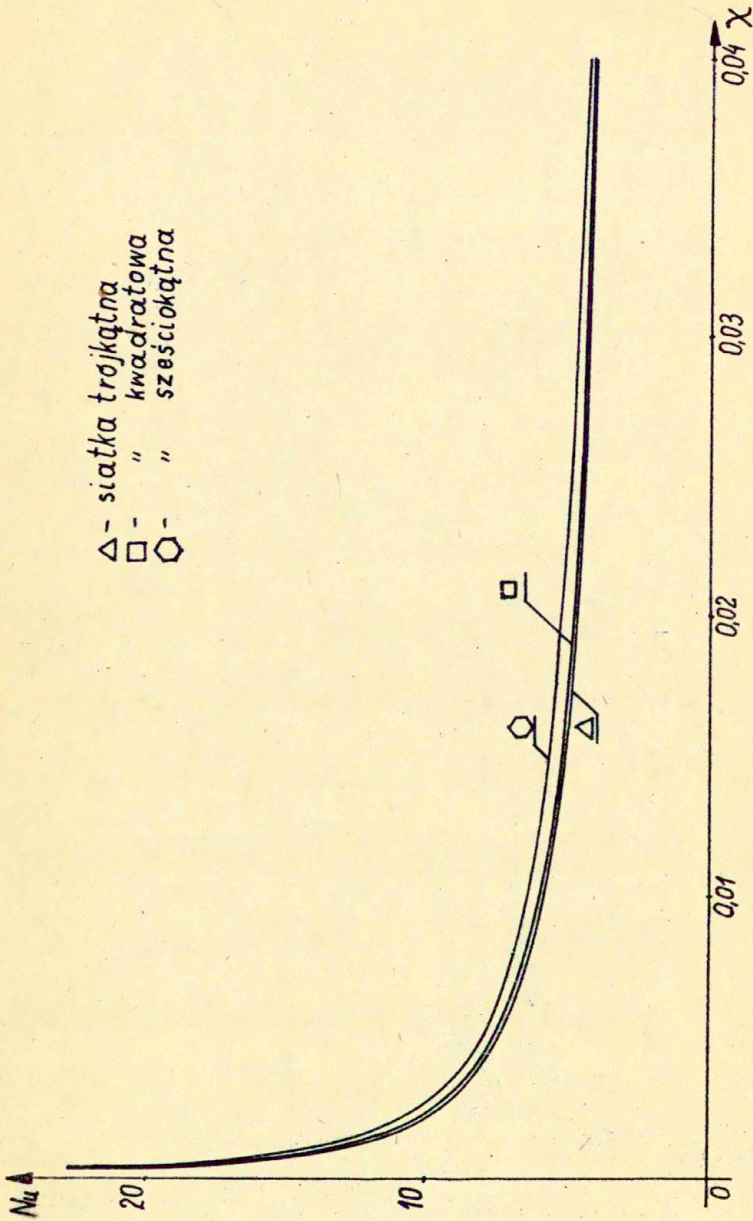
- [1] Emersleben O., Das Darcysche Filtergesetz, Physik. Zeitschr., vol. 26, 1925.
- [2] Emersleben O., Über eine exakt berechnete Paralleströmung zäher Flüssigkeiten zwischen gleichmässig verteilten Zylinderflächen sowie deren Anwendungen, Anwendungen der Mathematik, nr 2 Greifswald 1957.
- [3] Emersleben O., Paralleströmung zäher Flüssigkeiten durch unendlich vielfach zusammenhängende in 2 Richtungen periodische Strömungsbetten und deren Porösität. Z. angew. Math. und Mech., vol. 44, nr 12, 1964.
- [4] Sparrow E.M., Loeffler A.L., Longitudinal laminar flow between cylinders arranged in regular array. A.I.Ch.E. Journal, vol. 5, nr 3, 1959.
- [5] Sparrow E.M., Loeffler A.L., Heat transfer to longitudinal laminar flow between cylinders. J. Heat Transfer, vol. 83, p.415, 1961.
- [6] Happel I., Viscous flow relative to arrays of cylinders. A.I.Ch.E. Journal, vol. 5, nr 2, 1959.
- [7] Szołochow A.A., Bulejew N.I., Gribanow I.I., Minamin W.E., Prodcnlnye laminarnoje tieczeniye židkosti w pucskie steržniej. Inż. Fiz. Żur, vol 14, nr 3, 1967.
- [8] Schmid I., Longitudinal laminar flow in an array of

- circular cylinders. Int.J.Heat Mass Transfer, vol.9, nr 99,1966.
- [9] Sullivan R.R., Specific surface measurement on compact bundles of paraller fibers. J. Appl. Physics, vol.13, 1942.
- [10] Szaniawski A., Kołodziej I.A., Ustalony laminarny przepływ płynu lepkiego nieściśliwego wzdłuż równoległego układu prętów. Prace IPPT,38/1972.
- [11] Kołodziej I.A., Ustalony laminarny przepływ płynu lepkiego nieściśliwego wzdłuż trójkątnej i sześciokątnej siatki równoległych cienkich prętów cylindrycznych. Zeszyty Naukowe Pol. Pozn., 15/1974.
- [12] Landau L., Lifszyc E., Mechanika ośrodków ciągłych. Warszawa, PWN, 1958.
- [13] Yang I.W., Analysis of combined convection heat transfer in infinite rod arrays. Heat Transfer, vol. 1, p. 49, 1978.
- [14] Yang I.W., Heat transfer and fluid flow in regular rod arrays with opposing flow. Prace U.S. Department of Nuclear Energy, p.149,1979;
- [15] Ochęduszek S., Termodynamika Stosowana. Warszawa,WNT, 1974.


 Rys. 4 Zależności przepuszczalności podłużnej $\frac{F}{S}$ od upakowania χ .



Rys. 5 Pole temperatury dla siatki kwadratowej ($\epsilon = 0,05$).



Rys. 6 Zależność liczby Nusselta Nu od obrotowego współczynnika wypełnienia χ .