3.31 — pobudzanie i propagacja fal
elektromagnetycznych, falowody
3.32 — plazma

29/1982

Anna Brahmer-Kacprzyńska

FUNKCJA GREENA DLA PŁASKIEGO FALOWODU WYPEŁNIONEGO PLAZMĄ ELEKTRONOWĄ

WARSZAWA 1982

ISSN 0208-5658

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych

Praca nr 191

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 marca 1982 r.

Zarejestrowana pod nr 29/1982

IPPT PAN

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark.wyd. 0,7. Ark.druk.1,25.
Oddano do drukarni w lipcu 1982 r.
Nr zamówienia 383/o/82   Z-87 .

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Anna Brahmer-Kacprzyńska
Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

FUNKCJA GREENA DLA PŁASKIEGO FALOWODU WYPEŁNIONEGO PLAZMĄ ELEKTRONOWĄ

W pracy skonstruowano funkcję Greena dla źródła umieszczonego w dyspersyjnej /elektronowej/ plazmie ograniczonej dwiema płaszczyznami doskonale przewodzącymi. Z całkowego przedstawienia tej funkcji otrzymano reprezentację w postaci sumy modów falowodowych. Dla rozważanej struktury prowadzącej wykazano ekwiwalentność przedstawienia pola jako sumy promieni czasowo-przestrzennych i jako sumy modów falowodowych.

I/ Wstęp

W badaniach jonosferycznych ważną grupę zagadnień stanowi analiza propagacji fal i sygnałów elektromagnetycznych w falowodach wypełnionych ośrodkiem plazmowym, którego główną cechą jest dyspersja czasowa.

Konwencjonalna metoda znajdowania rozkładu pola promieniowanego przez źródło umieszczone wewnątrz falowodu opiera się na przedstawieniu pola jako sumy modów /rodzajów/ falowodowych. Procedura ta napotyka na trudności przy bardziej złożonym rozkładzie źródeł. Alternatywną metodą jest konstruowanie pola według zasad optyki geometrycznej. Metodę promieni optyki geometrycznej rozwinięto [1] dla problemów promieniowania i rozpraszania wewnątrz niejednorodnego falowodu o ścianach impedancyjnych. Daje ona wystarczającą dokładność nie tylko dla fal krótkich, ale i dla stosunkowo dłuższych. W konkretnych zadaniach wyliczenie pola w strukturze prowadzącej może wymagać zsumowania wielu modów lub wielu promieni wielokrotnie odbitych. Trudności wiążących się z problemami sumowania pozwala uniknąć opracowana w grupie L.B. Felsena metoda hybrydowa, promieniowo-modowa. Odpowiednio dobrany zestaw modów i promieni optyki geometrycznej stanowi efektywną metodę dla obliczania pola i dostarcza nowych informacji fizycznych o mechanizmach propagacji oraz rozpraszania w strukturach prowadzących. Zestaw: promienie + mody wymaga uwzględnienia o wiele mniejszej ilości zarówno promieni jak i modów niż opis pola tylko przez mody lub tylko przez promienie. Teoria została najpierw stworzona dla jednej wklęsłej powierzchni impedancyjnej prowadzącej pole [2] , a następnie rozwinięta dla duktu o niejednorodnym współczynniku załamania, który powoduje wychwycenie pola w pobliżu płaskiej powierzchni [3] . Zastosowanie metody hybrydowej do analizy prowadzenia pola elektromegnetycznego przez dwie powierzchnie opracowano dla płaskiego, jednorodnie wypełnionego falowodu [4] . Wykazano, że kumulujący efekt promieni ulegających wielu odbiciom między dwoma ścianami może być reprezentowany przez odpowiednio dobraną ilość modów falowodowych blisko częstotliwości odcięcia.

W niniejszej pracy skonstruowano funkcję Greena dla źródła umieszczonego w falowodzie wypełnionym plazmą elektronową. Plazma jest ośrodkiem dyspersyjnym w którym do asymptotycznej analizy pola stosuje się metodę promieni czasowo-przestrzennych /space - time rays, STR/. Zmierza się do sformułowania hybrydowego, promieniowo - modowego, problemu prowadzenia fal w strukturze wypełnionej ośrodkiem dyspersyjnym. Otrzymaną w postaci całkowej funkcję Greena przedstawiono jako sumę modów. Następnie stosując wzór sumacyjny Poissona wykazano ekwiwalentność sumy promieni czasowo-

-przestrzennych i sumy modów.

II/ Przedstawienie całkowe funkcji Greena

Pierwszym, podstawowym etapem określenia pola w falowodzie wypełnionym ośrodkiem dyspersyjnym jest rozwiązanie zadania dwuwymiarowego: jedna zmienna przestrzenne i zmienna czasowa. Dalsze rozważania będą prowadzone dla takiego przypadku, uproszczonego, lecz zawierającego, nie rozpatrzony dotąd w formułowaniu metody hybrydowej, element dyspersji czasowej.

Propagację fal elektromagnetycznych w zimnej plazmie elektronowej w przypadku jednej zmiennej przestrzennej opisuje następujące równanie typu Kleina-Gordona:

/1/
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2\right)\right] g(z, z', t, t') = f(z, z', t, t')$$

Oznaczono: g - potencjał skalarny przez który można wyrazić pole

ω_p - częstość plazmowa

c - prędkość światła w próżni

Poszukujemy rozwiązania tego równania przy założeniu, że źródło umieszczone jest na płaszczyźnie $z=0$ i ma charakterystykę impulsową $\delta(t)$ czyli $f(z,z',t,t') = \delta(z)\delta(t)$.

Potencjał g powinien spełniać warunek przyczynowości:

/2/
$$g \equiv 0 \quad \text{dla} \quad t<0$$

Zakładamy, że plazma ograniczona jest dwoma doskonale przewodzącymi płaszczyznami: $z=0$ oraz $z=a$, na których funkcja g spełnia jednorodne warunki brzegowe typu Neumanna:

/3/ $$\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z = 0 \quad \text{oraz } z = a$$

Wprowadzamy przedstawienie Fouriera funkcji g :

/4/ $$g(z, z', t, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(z, z', \omega)\, e^{-i\omega(t-t')}\, d\omega$$

Podstawiając wyrażenie /4/ do równania /1/ i pamiętając iż

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t-t')}\, d\omega$$

otrzymujemy następujące równanie na funkcję $G(z,\omega)$ $z' = 0$:

/5/ $$\left[\frac{d^2}{dz^2} + (\omega^2 - \omega_p^2)\frac{1}{c^2}\right] G(z,\omega) = -\delta(z)$$

Funkcja $G(z,\omega)$ spełnia te same warunki brzegowe /3/ co funkcja $g(z,t)$, czyli szukamy rozwiązania równania /5/ dla obszaru $0 < z < a$ zakładając iż ω_p jest w tym obszarze stałe. Rozwiązanie to konstruujemy analogicznie do charakterystycznej funkcji Greena dla zagadnienia Sturma Liouwilla por. [5]

Dla wyjaśnienia prowadzonych dalej rozważań przypomnijmy, że wprowadza się dwie funkcje $\overleftarrow{G}(z,\omega)$ oraz $\overrightarrow{G}(z,\omega)$ spełniające jednorodne równania /5/. Funkcje te spełniają warunki brzegowe /3/ odpowiednio przy $z = z_1 = 0$ oraz $z = z_2 = a$

Rozwiązanie spełniające równanie /5/ dla $z \neq z'$ / z' - jest punktem, w którym znajduje się źródło, w naszym przypadku $z' = 0$ / i warunek ciągłości dla $z = z'$, ma postać

/6/ $$G(z, z', \omega) = A \overleftarrow{G}(Z_<) \overrightarrow{G}(Z_>)$$

Symbole $Z_<$ oraz $Z_>$ oznaczają mniejszą i większą spomiędzy wielkości z i z'.
Stałą A wybiera się z warunku na skok wielkości $\frac{dG}{dz}$ w p-cie źródła.
Ostatecznie wzór na funkcję Greena ma postać:

/7/ $$G(z, z', \omega) = -\frac{\overleftarrow{G}(Z_<)\overrightarrow{G}(Z_>)}{W(\overleftarrow{G}, \overrightarrow{G})}$$

gdzie W jest wronskianem, stałym dla wszystkich z.
W przypadku rozpatrywanego tu ośrodka jednorodnego, funkcje $\overleftarrow{G}$ oraz $\overrightarrow{G}$ mają postać funkcji wykładniczych:

/8a/ $$\overleftarrow{G}(z, \omega) = e^{-ikz} + R_o e^{ikz} \quad ; \quad k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

/8b/ $$\overrightarrow{G}(z, \omega) = e^{ikz} + R_a e^{-ikz}$$

Przy jednorodnych warunkach brzegowych /3/ otrzymano

$$R_o = 1 \quad , \quad R_a = e^{2ika}$$

Dla źródła umieszczonego na płaszczyźnie $z = 0$ zachodzi:

$$\overleftarrow{G}(z, \omega) = 2 \quad ; \quad W = 2ik(1 - R_a)$$

Wobec tego w rozpatrywanym przypadku wyrażenie /7/ przybiera postać:

/8c/ $$G(z,z',k) = \frac{e^{ikz} + e^{-ik(z-2a)}}{k(1-e^{2ika})}$$

W liczniku wyrażenia /8c/ występuje suma dwu składników. Przy zależności od czasu $e^{-i\omega t}$ pierwszy z nich odpowiada fali rozchodzącej się w kierunku dodatniej osi z, a drugi - fali odbitej od granicy z = a i rozchodzącej się w kierunku ujemnej osi z. Ponieważ impuls został wysłany ze źródła na płaszczyźnie z = 0 w chwili t = 0, to fala odbita pojawia się w punkcie obserwacji z po czasie $t \geqslant \frac{2a-z}{c}$. Zasadę przyczynowości dla konstruowanej w powyższy sposób funkcji Greena należy więc przyjąć jak następuje:

/8d/ $$g(z,t) = 0 \qquad \text{dla} \quad t < \frac{2a-z}{c}, \quad 0 \leqslant z \leqslant a$$

Obowiązuje ona dla obu rodzajów fal.
Ostatecznie przedstawienie całkowe poszukiwanej funkcji g, (z, t) można zapisać (z', t' = 0):

(9) $$g(z,z',t,t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(t-\frac{2a}{c})}\left[e^{ikz} + e^{-ik(z-2a)}\right]}{k(1-e^{2ika})} \, d\omega$$

gdzie $$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

Funkcja podcałkowa posiada bieguny w punktach ω_m gdzie zachodzi:

(10) $$k(1 - e^{2ika}) = 0$$

Funkcja podcałkowa jest parzystą funkcją k, więc nie musimy omawiać jej punktów rozgałęzienia.

Kontur całkowania na płaszczyźnie zmiennej zespolonej dobieramy tak, aby obejmował rzeczywiste bieguny $\omega = \pm\omega_m$ od góry tzn. przebiegał bezpośrednio nad osią rzeczywistą.

Jeśli $t \geqslant \frac{2a - z}{c}$ kontur można zamknąć w dolnej płaszczyźnie półokręgiem C_R o dużym $(|\omega| \to \infty)$ promieniu bez zmiany wartości całki i zastosować wzór całkowy Cauchy'ego.

Znikanie całki po C_R można prześledzić dla przypadku granicznego $\omega \gg \omega_p$.

Dla $\omega = -i|\omega|$ funkcja podcałkowa zachowuje się jak:

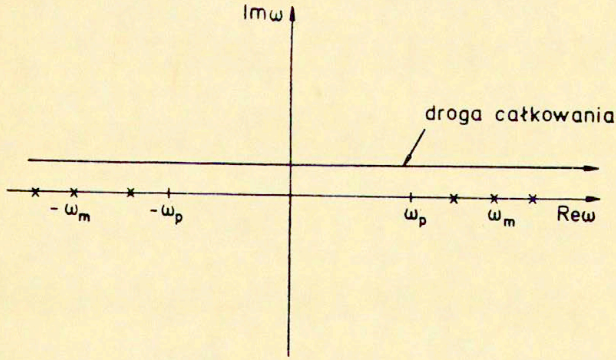
$$v(\omega)\left(e^{-|\omega|(t-\frac{z}{c})} + e^{-|\omega|(t-\frac{2a-z}{c})}\right).$$

Zgodnie z lematem Jordana (całka) po C_R znika jeśli $t-\frac{2a-z}{c} > 0$.

Ponieważ $0<z<a$ do znikania tej całki wystarczy warunek $t > \frac{a}{c}$.

Dla $t < \frac{2a - z}{c}$ kontur zamykamy w dolnej półpłaszczyźnie.

Rys.1.: Droga całkowania i bieguny na płaszczyźnie zmiennej zespolonej



III/ Przedstawienie funkcji Greena jako sumy modów /rodzajów/ falowodowych.

Po określeniu konturu całkowania, możemy zastosować twierdzenie o residuach:

$$/11/ \quad g(z,z',t,t') = 2\pi i \sum_m \operatorname{Res} G(z,\omega_m)\, e^{-i\omega_m\left(t-\frac{2a}{c}\right)}$$

czyli

$$/12/ \quad g = \sum_m g_m \qquad \text{dla} \quad t \geqslant \frac{2a-z}{c}$$

gdzie każdy składnik sumy odpowiada rodzajowi falowodowemu /czasowo-przestrzennemu/(por.[4])

Ze związku /10/ otrzymamy

dla $m = 0$

$$/13a/ \quad k = 0 \quad \text{czyli} \quad \omega_0 = \pm\omega_p$$

i dla $m \neq 0$

$$/13b/ \quad k_m = \frac{m\pi}{a} \quad \text{czyli} \quad \omega_m = \pm\sqrt{\omega_p^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 c^2}$$

Obliczając residua w odpowiednich punktach ω_m otrzymamy

$$/14/ \quad g_m \sim \frac{1}{\pm\omega_m} \cos\left[(z-a)\frac{m\pi}{a}\right] e^{\pm i\omega_m\left(t-\frac{2a}{c}\right)}$$

Sumując parami dla dwu znaków ω_m dostajemy

$$/15/ \quad g_m \sim \cos\left[(z-a)\frac{m\pi}{a}\right] \sin\omega_m\left(t-\frac{2a}{c}\right).$$

IV/ Przedstawienie funkcji Greena przez sumę promieni przestrzenno-czasowych.

W przypadku ośrodka dyspersyjnego asymptotyczną analizę propagacji fal elektromagnetycznych przeprowadza się metodą promieni przestrzenno-czasowych. Podstawy matematycznie tej metody dał R. Lewis [6] jako metody rozwiązywania równań hiperbolicznych dyspersyjnych. Interpretacja fizyczna promieni przestrzenno-czasowych i ich powiązanie z krzywymi dyspersyjnymi ośrodka zostały głęboko przeanalizowane przez L.B. Felsena [5] ,

W rozdziale tym skonstruujemy rozwiązanie problemu /1/ - /3/ metodą promieni przestrzenno-czasowych /oznaczanych dalej symbolem STR - space - time - rays /. Rozwiązanie to można przedstawić jako sumę promieni ulegających wielokrotnym odbiciom między dwoma płaszczyznami. Kumulujący efekt takich promieni można zapisać jako sumę skończoną modów.

Dla ośrodka jednorodnego promienie będą prostymi. Jeśli źródło umieszczone jest w punkcie $(z,t)=(0,0)$, wychodzące one z początku układu współrzędnych. Dla ω_p = const rozwiązanie /1, 2/ dla wolnej przestrzeni są funkcjami Bessela, $J_0\left(\omega_p\sqrt{t^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2}\right)$. Funkcje te w metodzie asymptotycznej służą jako rozwiązania problemów kanonicznych. Rozwiązanie problemu /1, 2/ z warunkami brzegowymi /3/ można otrzymać metodą obrazów jako sumę funkcji Bessela. Ze sposobu tego w tym miejscu nie korzystamy, ponieważ, choć przyjęliśmy założenie jednorodności ośrodka, chcemy przedstawić ideę metody postępowania słusznej również dla bardziej złożonych problemów /ośrodki niejednorodne/ i pokazać możliwość tworzenia opisu pola w sformułowaniu hybrydowym t.j.: promieniowo-modowym.

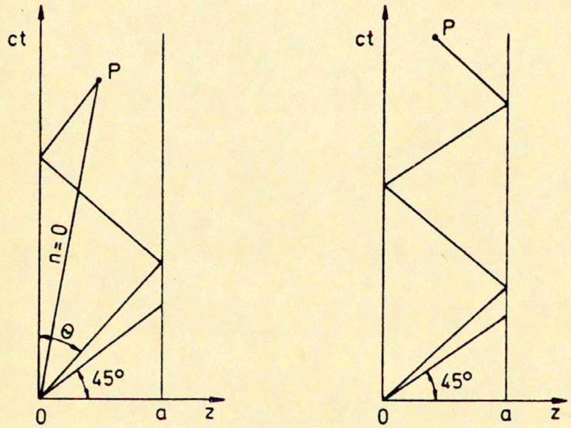
Liczba odbić w falowodzie przestrzenno-czasowym jest ograniczona gdyż zgodnie z zasadą przyczynowości $v_g \leq c$, czyli kąt pod którym promienie wychodzą ze źródła $\Theta \leq 45^0$.

Funkcję Greena dla problemu /1/ - /3/ możemy zapisać jako sumę promieni:

/16/ $$g=\sum_{i=1}^{4} g^i=\sum_{i=1}^{4}\sum_{n=0}^{N_{max}}(STR)_n^i$$

Wskaźnik ,n' oznacza liczbę odbić w falowodzie $n=N_{max}$ - maksymalną liczbę odbić. Zauważmy iż N_{max} odpowiada prędkości po promieniu, czyli prędkości grupowej, bliskiej prędkości światła. W przypadku tym, zwykłe rozwinięcie asymptotyczne promieni przestrzenno-czasowych należy zastąpić rozwinięciem jednolitym. Problem ten wymaga osobnego rozważenia. Wskaźnik „i" oznacza rodzaj promieni który rozważamy. W naszym problemie będziemy mieli cztery rodzaje promieni: dwie grupy w zależności od znaku ω w rozwiązaniu /wiąże się to z dwiema gałęziami krzywej dyspersyjnej dla wybranego modelu plazmy/ i dwie grupy różniące się drogą w falowodzie tzn. różniące się tym, od której płaszczyzny promień został ostatni raz odbity /przed osiągnięciem punktu obserwacji/. Dalsze rozważania tego rozdziału będą prowadzone dla jednego rodzaju promieni:

Rys.2.: Promienie /STR/ w falowodzie przestrzenno-czasowym



Zgodnie z ogólną teorią, asymptotycznych rozwiązań równań hiperbolicznych dyspersyjnych poszukuje się w postaci rozwinięcia

$$g(\underline{R},t) \approx e^{i\nu\Psi(\underline{R},t)} \sum_{m=0}^{\infty} (i\nu)^{-m} u_m(\underline{R},t) \qquad /17/$$

duży parametr v wprowadza się przez skalaryzację zmiennych, lub przyjmując że ω_p jest wielkością dużą.
W dalszych rozważaniach będziemy używać tylko pierwszego wyrazu rozwinięcia $(m=0)$.
Promieniami przestrzenno-czasowymi są charakterystyki równania dyspersyjnego:

/18/ $$(\nabla_R \psi)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 + \frac{\omega_p^2(R)}{c^2} = 0 .$$

Wprowadzając oznaczenia

/19a/ $$\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

/19b/ $$\underline{K} = \nabla_R \psi$$

otrzymujemy związek

/20/ $$\omega(\underline{K}, \underline{R}) = \pm [K^2c^2 + \omega_p^{\ 2}(R)]^{1/2}$$

Równanie /18/ typu Hamiltona-Jacobiego można rozwiązać przez wprowadzenie równań charakterystycznych definiujących promienie

/21a/ $$\frac{d\underline{R}}{dt} = \nabla_K \omega$$

/21b/ $$\frac{d\underline{K}}{dt} = -\nabla_R \omega$$

Dla rozpatrywanego przypadku: ośrodek jednorodny, źródło w punkcie $(t,z) = (0,0)$
równanie promieni ma postać

/22/ $$z = \frac{Kc^2}{\omega} \cdot t = \upsilon_g \cdot t$$ gdzie υ_g - **prędkość grupowa**

Dla ośrodka jednorodnego wielkości ω, K, υ_g są stałe na promieniu. Funkcja fazy ψ jest dana wzdłuż promienia przez równanie

/23/ $$\psi(z,t) - \psi(z_1, t_1) = \int_{z_1}^{z} K dz - \omega(t-t_1) = K(z-z_1) - \omega(t-t_1)$$

Amplituda g_0 znaleziona z odpowiedniego równania transportu ma postać

/24/ $$g_0(z,t) \sim t^{-1/2} g_0(z_1,t_1)$$

Wartości początkowe g_0 oraz ψ znajduje się z rozwiązania problemu kanonicznego. Dalej opuszczamy wskaźnik „o" .
Dla "płytki" plazmowej z warunkami brzegowymi

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \qquad \text{dla } z = 0, \; z = a$$

oblicza się fazy i amplitudy na odbitych promieniach.
Współczynnik odbicia $\Gamma = +1$
Z formalnego rozwinięcia /16/ na sumę promieni możemy otrzymać sformułowanie hybrydowe promieniowo-modowe przez obcięcie sumy na wyrazie np. N .
Dla jednego rodzaju promieni otrzymamy:

/25/ $$\sum_{n=0}^{N_{max}} g_n = \sum_{n=0}^{N} g_n + \sum_{N+1}^{N_{max}} g_n \; ; \qquad N_{max} = M$$

Do drugiego wyrazu /reszty/ stosujemy częściowy wzór sumacyjny Poissona [7] :

$$/26/ \quad \sum_{N+1}^{M} g_n = -\frac{1}{2} g_{N+1} - \frac{1}{2} g_{M+1} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi(N+1)}^{2\pi(M)} \left[g_\varkappa e^{iv\psi_\varkappa(z,t) - i\varkappa l} \right] d\varkappa$$

$g_\varkappa$ - otrzymujemy z g_n przez zamianę $n = \frac{\varkappa}{2\pi}$

Asymptotyczną wartość całki we wzorze /26/ można znaleźć metodą punktu siodłowego. Główne przyczynki do całki pochodzą od punktów siodłowych w przedziale całkowania i od punktów końcowych.

Punkty siodłowe są określone przez

$$/27/ \qquad \frac{d}{d\varkappa} \psi(\varkappa) = \frac{l}{v}$$

Dla pierwszego rodzaju promieni , funkcja ψ po odbiciach ma postać

$$/28/ \qquad \psi = K\left(Z + \frac{\varkappa a}{\pi}\right) - \omega t$$

Z warunku na punkt siodłowy otrzymamy:

$$/29/ \qquad K_l = \frac{l\pi}{av}$$

$$/30/ \qquad \omega_l = \sqrt{\left(\frac{l\pi}{av}\right)^2 c^2 + \omega_p^2}$$

Jest to taki sam warunek, jak otrzymamy z przedstawienia całkowego warunek /13/. /W zapisie pojawił się duży parametr ν , który można wprowadzić do /13/ przez odpowiednie skalowanie/.
Pokazaliśmy, że stosując formalne rozwinięcie funkcji Greena na sumę promieni, można otrzymać sformułowanie hybrydowe

$$/31/ \qquad g \sim \sum_{n=0}^{N} (STR)_n + \sum_{l=N+1}^{M} (mody)_l + R_{NM}$$

W kolejnym etapie pracy należy znaleźć R_{NM} - przyczynki od punktów końcowych całki we wzorze /26/ i nadać im interpretację fizyczną.

Możliwość otrzymania przedstawienia funkcji Greena w postaci hybrydowej na podstawie jedynie związków geometrycznych dla promieni przestrzenno-czasowych jest użyteczna w bardziej złożonych problemach, gdzie skonstruowanie przedstawienia całkowego może być trudne /ośrodki niejednorodne, obiekty rozpraszające wewnątrz falowodu/.

Zakończenie.

Kolejnym etapem pracy nad sformułowaniem hybrydowym funkcji Greena dla falowodu wypełnionego plazmą będzie rozwinięcie mianownika w przedstawieniu całkowym na szereg geometryczny, usunięcie w ten sposób biegunów i otrzymanie sumy całek. Całki te oblicza się asymptotycznie metodą punktu siodłowego, każda z nich daje przyczynek, który można interpretować jako pole wzdłuż promieni. Porównując różne przedstawienia funkcji Greena sformułuje się głębszą interpretację zapisu promieniowo-modowego.

LITERATURA

[1] D.V. BATORSKY, L.B. FELSEN, Radio Science, 6 /1971/ pp. 911 - 923.

[2] T. ISHIHARA, L.B. FELSEN, IEEE Trans. AP27 /1979/ pp. 172 - 179.

[3] L.B. FELSEN, T. ISHIHARA, J. Acoust. Soc. Am. 65 /1979/ pp. 595 - 607.

[4] L.B. FELSEN, A. KAMEL, Hybrid Ray-Mode Formulation of Parallel Plane Waveguide Green's Functions - w przygotowaniu.

[5] L.B. FELSEN, N. MARCUVITZ, Radiation and Scattering of Waves, Prentice Hall, N.J. 1973.

[6] R. LEWIS, Asymptotic methods for the solution of dispersive hyperbolic equations. W tomie: Asymptotic solutions of differential equations and their aplications, Wilcox, New York 1964.

[7] P.M. MORSE, H. FESHBACH, Methods of Theoretical Pysics, Mc Graw Hill Co, 1953.