

7.72 — plastyczność, lepko-plastyczność, reologia

Marian Grzymkowski

METODY ANALIZY PROCESÓW  
OBRÓBKI PLASTYCZNEJ METALI

Tom II

33/1982

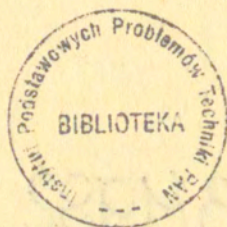


P.269

WARSZAWA 1982

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 5 kwietnia 1982 r.

Zarejestrowana pod nr 33/1982



57041



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 150 egz. Ark.wyd.11,9. Ark.druk.16,5.  
Oddano do drukarni w październiku 1982 r.  
Nr zamówienia 603/o/82|Z-39

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8

## R o z d z i a ł V

## WARUNKI PLASTYCZNOŚCI

## 5.1. Wiadomości ogólne

Przy rozwiązywaniu zagadnień teorii plastyczności niezbędna jest znajomość warunków przejścia materiału w stan plastyczny. Nasuwa się pytanie, od czego zależy przejście materiału w stan plastyczny, jakie warunki muszą być spełnione, aby materiał odkształcał się i aby to odkształcenie nie ustąpiło po cofnięciu obciążenia.

Warunki powstawania odkształceń plastycznych mogą być określone za pomocą związku fizycznego, czyli zależności naprężeń od odkształceń lub też za pomocą związku samych naprężeń.

Dla jednoosiowego rozciągania ( $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) lub ściskania ( $\sigma_3 < 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ) materiał przechodzi w stan plastyczny, gdy naprężenie rozciągające lub ścisające osiągnie wartość charakterystyczną dla danego materiału, zwaną granicą plastyczności  $\sigma_p$  (rys. 5.1). Warunek plastyczności dla jednoosiowego rozciągania ma postać

$$\sigma_1 = \sigma_p \quad \text{lub} \quad \sigma_1 - \sigma_p = 0. \quad (5.1)$$

Natomiast dla złożonego stanu naprężenia (np. płaskiego lub przestrzennego) przejście materiału w stan plastyczny zależy od kombinacji składowych tensora naprężenia lub od kombinacji

niezmienników stanu naprężenia. Kombinacje te nazywane są funkcją składowych stanu naprężenia lub wprost — warunkiem plastyczności. Za kryterium uplastycznienia materiału przyjmuje się funkcję stanu naprężenia, którą ogólnie można zapisać

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (5.2)$$

gdzie  $i, j = x, y, z$ .

Aby przejście materiału w stan plastyczny nie było zależne od układu osi współrzędnych, to warunek plastyczności uzależnia się od niezmienników tensora naprężenia

$$f(J_1, J_2, J_3) = 0. \quad (5.3)$$

Postulowane są różne formy warunku plastyczności, jedne nakładają pewne wymagania na energię, inne natomiast na naprężenia styczne. Dla materiału izotropowego i idealnie plastycznego przyjmuje się, że warunek plastyczności zależność będzie wyłącznie od naprężeń, nie będzie natomiast uwzględniał historii obciążenia. Funkcję  $f$  określa się w postaci hipotezy wywołującej założone zjawisko fizyczne w materiale i następnie sprawdza się jej zgodność z wynikami doświadczalnymi.

Istotnym spostrzeżeniem doświadczalnym, było stwierdzenie przez P.W.Bridgmana, że ciśnienie hydrostatyczne ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \pm p$ ), które jest zarazem tensorem kulistym stanu naprężenia i pierwszym niezmiennikiem stanu naprężenia, prawie nie wpływa na osiągnięcie stanu plastycznego metalu niezależnie od wartości tego ciśnienia, a o uplastycznieniu metalu decyduje wyłącznie dewiatorowa część tensora naprężenia. Wobec tego warunek plastyczności należy uzależnić od niezmienników dewiatora naprężenia

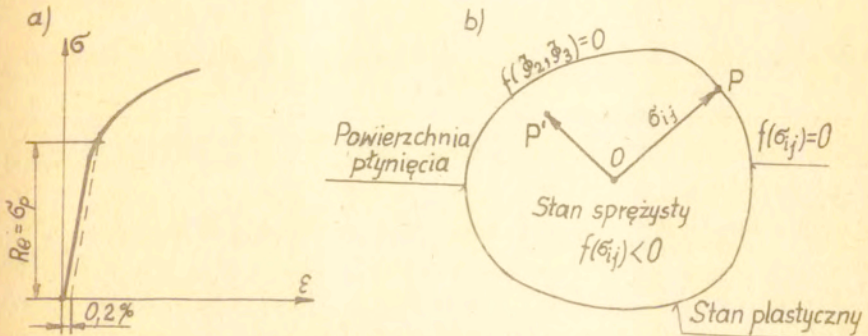
$$f(\tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3) = 0. \quad (5.4)$$

Pierwszy niezmiennik dewiatora naprężenia  $\tilde{\Phi}_1$  jest zawsze równy zeru.

Przyjmujemy również, że materiał idealnie plastyczny nie wykazuje efektu Bauschingera. Jest to równoważne założeniu, że

granica plastyczności przy rozciąganiu i następującym po nim ściskaniu jest taka sama. Mówiąc inaczej, jeśli materiał idealnie plastyczny obciążony jest do stanu uplastycznienia  $\sigma_{ij}$ , odciążony i następnie powtórnie obciążony do stanu  $-\sigma_{ij}$ , w którym jest znów plastyczny, to spełnia on ten sam warunek plastyczności.

Związki (5.2) i (5.4) w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń przedstawiają hiperpowierzchnię, mającą swój początek w początku układu współrzędnych (rys.5.1b). Powierzchnia ta nazywana jest powierzchnią plastyczności lub powierzchnią płynięcia.



Rys. 5.1. Geometryczna ilustracja przejścia materiału w stan plastyczny: a - jednoosiowe rozciąganie, b - złożony stan naprężenia

Dowolny stan naprężenia  $\sigma_{ij}$  w przestrzeni naprężeń może być przedstawiony jako wektor poprowadzony z punktu początkowego. Punkty  $P$  odpowiadające współrzędnym końca wektora, leżące wewnątrz powierzchni ( $f(\sigma_{ij}) < 0$ ), przedstawiają sprężysty stan materiału, natomiast punkty leżące na powierzchni płynięcia  $f(\sigma_{ij}) = 0$  przedstawiają plastyczny stan materiału. Dla materiału idealnie plastycznego punkt reprezentujący stan naprężenia w materiale

nie może leżeć na zewnątrz powierzchni płynięcia. Przy obciążeniu wektor naprężenia  $\underline{\sigma}_{ij}$  wędruje po powierzchni płynięcia, wówczas zmieniają się tylko składowe stanu naprężenia.

Dla materiałów wykazujących wzmocnienia początkowa powierzchnia plastyczności  $f(\underline{\sigma}_{ij})=0$  może ulegać rozszerzeniu  $f(\underline{\sigma}_{ij}, \partial l)=0$ , przesunięciu  $f(\underline{\sigma}_{ij}-\underline{\alpha}_{ij})=0$  lub też przesunięciu i równoczesnemu rozszerzeniu  $f(\underline{\sigma}_{ij}-\underline{\alpha}_{ij}, \partial l)=0$ . Uplastycznienie materiałów rzeczywistych zależy nie tylko od rodzaju materiału, ale również i od wielkości odkształcenia  $\underline{\epsilon}$ , prędkości odkształcenia  $\dot{\underline{\epsilon}}$  i od temperatury  $T$ , w której materiał jest odkształcany.

Powierzchnia plastyczności  $f(\underline{\sigma}_{ij})=0$  jest miejscem geometrycznym kombinacji składowych stanu naprężenia i określa przejście materiału ze stanu sprężystego w stan plastyczny. Zatem powierzchnia plastyczności jest geometrycznym obrazem warunku plastyczności.

Z doświadczeń wiemy, że własności wytrzymałościowe materiałów dość znacznie różnią się od siebie. Daje to przypuszczenie, że nie można będzie podać uniwersalnego kryterium uplastycznienia wszystkich materiałów. Istotnie, dla metali plastycznych musi być inny warunek plastyczności, a dla materiałów kruchych, takich jak żeliwo, beton, skała, grunt musi być inny warunek uplastycznienia.

Dla metali ciągliwych, dla których pierwszy niezmiennik tensora naprężenia  $J_1$  nie wpływa na uplastycznienie materiału, najprostszym warunkiem plastyczności będzie warunek zależny tylko od drugiego niezmiennika dwiatora naprężenia  $\underline{\mathfrak{J}}_2$

$$f(\underline{\mathfrak{J}}_2) = 0. \quad (5.5)$$

Natomiast dla materiałów kruchych, dla których pierwszy niezmiennik tensora naprężenia  $J_1$  ma bardzo istotny wpływ na uplastycznienie, to warunek plastyczności ogólnie można zapisać

$$f(J_1, J_2, J_3) = 0. \quad (5.6)$$

W dalszych rozważaniach rozpatrzmy dokładnie dwa najczęściej stosowane warunki plastyczności, określające przejście materiału ze stanu sprężystego w stan plastyczny, a mianowicie: warunek plastyczności Hubera-Misesa oraz warunek plastyczności Treski. Natomiast zostaną krótko omówione inne warunki plastyczności.

## 5.2. Warunek plastyczności Hubera-Misesa

W 1904 r. M.T.Huber, a następnie niezależnie od niego w 1913 r. R.von Mises i w 1924 r. H.Hencky sformułowali warunek plastyczności, który został nazwany warunkiem Hubera-Misesa lub warunkiem intensywności naprężeń stycznych. Warunek ten oparty jest na potwierdzonym doświadczalnie założeniu, że o uplastycznieniu materiału decyduje tylko wielkość <sup>sprężystej</sup> energii odkształcenia postaciowego niezależnie od rodzaju stanu naprężenia.

M.T.Huber przyjął, że miarą uplastycznienia materiału (osiągnięcie granicy plastyczności) jest <sup>sprężysta</sup> energia odkształcenia postaciowego. R.Mises natomiast ograniczył się tylko do formalnego przyrównania drugiego niezmiennika dwiatora naprężenia  $\Phi_2$  do pewnej wartości krytycznej zależnej od materiału  $k^2$ . H.Hencky powiedział, że ciała stałe mają ograniczoną pojemność energii odkształcenia postaciowego, po przekroczeniu której ulegają zniszczeniu.

Warunek plastyczności Hubera-Misesa dla ciał izotropowych ogólnie można napisać w postaci

$$\Phi_2 - k^2 = 0, \quad (5.7a)$$

gdzie  $k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$  jest granicą plastyczności przy czystym ściananiu,

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]$$

jest drugim niezmiennikiem dewiatora naprężenia. Równanie (5.7a)

można napisać tensorowo

$$S_{ij} S_{ij} = 2k^2 \quad (5.7b)$$

lub w postaci jawnej

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 6k^2 = 2\sigma_p^2 \quad (5.7c)$$

Z drugim niezmiennikiem dewiatora naprężenia  $\Phi_2$  związana jest wielkość nazywana intensywnością naprężeń stycznych  $\sigma_s = \sqrt{\frac{\Phi_2}{2}}$ , która dla przypadku czystego ścinania ( $\tau_{xy} = k$ , wszystkie pozostałe naprężenia równe są zeru) wynosi  $\sigma_s = k$ . Właśnie z tego powodu warunek plastyczności Hubera-Misesa nazywany jest warunkiem intensywności naprężeń stycznych. Granicę plastyczności na ścinanie  $k$  można wyznaczyć z próby skręcania cienkościennej rurki wykonanej z badanego materiału lub prościej - z próby jednoosiowego rozciągania. W tym ostatnim przypadku przyjmuje się;  $\sigma_x = \sigma_p$ , pozostałe naprężenia równe zeru i z równania (5.7c) otrzymujemy wartość granicy plastyczności na ścinanie  $k$  zależną od granicy plastyczności na rozciąganie  $\sigma_p$

$$\sigma_s = k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}} \approx 0,577\sigma_p \quad (5.8)$$

Warunek plastyczności Hubera-Misesa (5.7c) dla przypadku naprężeń głównych ma postać

$$2\sigma_p^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \quad (5.9)$$

Przy wykorzystaniu wyrażeń określających naprężenia styczne

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} ;$$

$$\tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} ;$$

$$\tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} ;$$

warunek plastyczności (5.9) przybiera postać



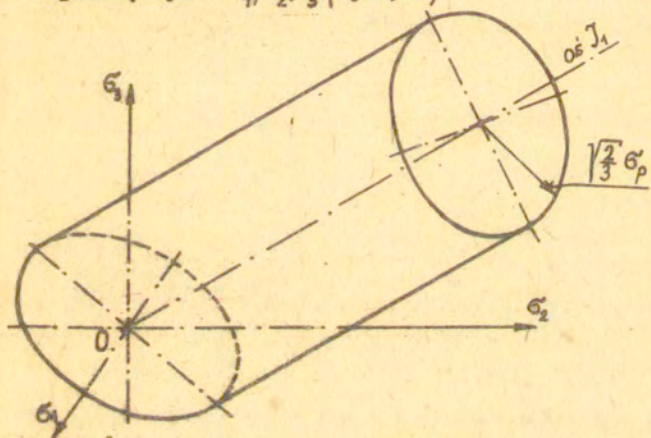
$$\sigma_p = \sqrt{2} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2} \quad (5.10)$$

Z równania (5.10) wynika, że o przejściu materiału w stan plastyczny decydują wszystkie trzy główne naprężenia styczne.

Dla zagadnień osiowo-symetrycznych warunków plastyczności Hubera-Misesa ma postać

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 6\tau_{12}^2 = 2\sigma_p^2 \quad (5.11)$$

W przestrzeni naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  warunek plastyczności Hubera-Misesa (5.9) przedstawia pobocznicę walca kołowego o promieniu  $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_p$  i osi  $J_1$ , jednakowo nachylonej do osi układu współrzędnych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (rys. 5.2).



Rys. 5.2. Reprezentacja warunku plastyczności Hubera-Misesa w przestrzeni naprężeń głównych

Ślad przecięcia poboczniczy walca (rys. 5.2) płaszczyzną dewiatorów (prostopadłą do osi walca  $J_1$ ) jest kołem, a płaszczyzną  $\sigma_3 = 0$  - elipsą opisaną na sześcioboku Treski (rys. 5.3b). Równanie tej elipsy otrzymamy, jeśli do wyrażenia (5.9) podstawimy  $\sigma_3 = 0$ :

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_p^2 \quad (5.12)$$

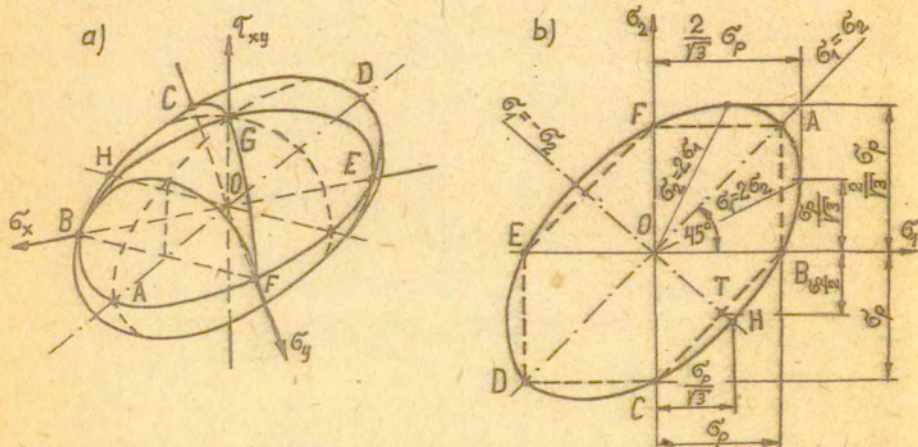
Równanie (5.12) przedstawia warunek plastyczności Hubera-Misesa dla płaskiego stanu naprężenia w osiach głównych  $\sigma_1, \sigma_2$ .

### 5.2.1. Warunek plastyczności Hubera-Misesa dla płaskiego stanu naprężenia

Płaski stan naprężenia to taki stan, w którym występują tylko naprężenia  $\sigma_x, \sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  ( $\sigma_z=0, \tau_{yz}=\tau_{zx}=0$ ). Warunek plastyczności Hubera-Misesa (5.7c) dla płaskiego stanu naprężenia w osiach współrzędnych  $x, y$  wyrazi się równaniem

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = 3k^2 = \sigma_p^2. \quad (5.13)$$

Równanie (5.13) przedstawia elipsoidę, która pokazana jest na rysunku 5.3a.



Rys. 5.3. Geometryczna ilustracja warunku plastyczności Hubera-Misesa w płaskim stanie naprężenia: a - elipsoida, b - elipsa

W celu przeprowadzenia doświadczeń przyjmujemy:

$\sigma_y=0, \sigma_x>0, \tau_{xy}>0$  - rozciąganie i skręcanie rurki lub  $\sigma_x=0,$

$\sigma_y>0, \tau_{xy}>0$  - rozpęczanie i skręcanie rurki. Założenia te po-

wodują przejście równania elipsoidy (5.13) w równanie elips o osiach  $\sigma_x - \tau_{xy}$  lub  $-\sigma_y - \tau_{xy}$ . Inaczej mówiąc - elipsoida (rys. 5.3a) jest przecięta płaszczyzną  $\sigma_y = 0$  lub też płaszczyzną  $\sigma_x = 0$ .

### 5.2.2. Warunek plastyczności Hubera-Misesa dla płaskiego stanu odkształcenia

Płaski stan odkształcenia to taki stan, dla którego  $\epsilon_z = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} = 0$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ . Geometryczny warunek  $\epsilon_z = 0$  cechujący płaski stan odkształcenia, prowadzi do związku między naprężeniami, mianowicie

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (5.14)$$

Związek (5.14) można otrzymać z równania (6.39)<sub>1</sub>, (6.49)<sub>3</sub> lub (6.76)<sub>3</sub>. Podstawiając związek (5.14) do równania (5.7c), otrzymamy warunek plastyczności Hubera-Misesa dla płaskiego stanu odkształcenia w składowych naprężeniach  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

$$\text{gdzie } k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}} \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \quad (5.15)$$

W układzie głównych naprężeń  $\sigma_1, \sigma_2$  związek (5.15) ma postać

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k \cong 1,15\sigma_p, \quad (5.16a)$$

dla zależności naprężeń  $\sigma_1 > \sigma_2$  lub

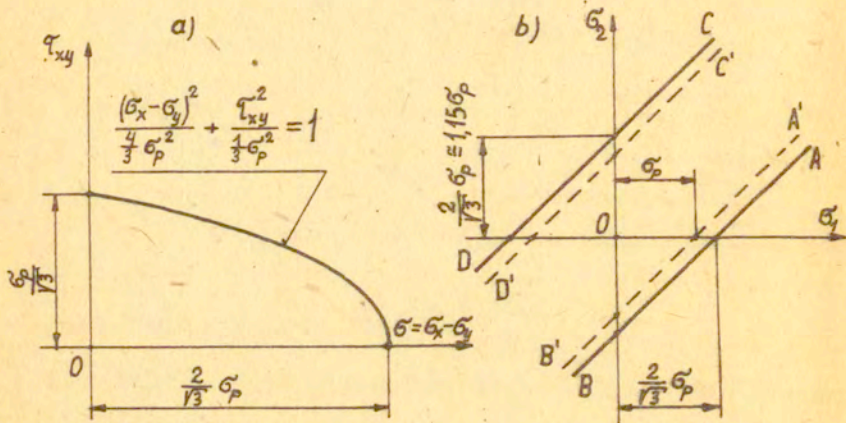
$$\sigma_1 - \sigma_2 = -2k \cong -1,15\sigma_p, \quad (5.16b)$$

dla naprężeń głównych  $\sigma_1 < \sigma_2$ . Równania (5.16) można otrzymać bezpośrednio z warunku (5.9) po podstawieniu zależności

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Odwzorowaniem geometrycznym związku (5.15) jest elipsa przedstawiona na rysunku 5.4a, a odwzorowaniem równania (5.16a)

jest prosta 'B, a równania (5.16b) jest prosta CD, przedstawiona na rysunku 5.4b. Równania (5.16) geometrycznie przedstawiają rzut powierzchni walca Hubera-Misesa na płaszczyznę  $\sigma_x, \sigma_y$  (rys.5.4b).



Rys.5.4. Geometryczna interpretacja warunku plastyczności Hubera-Misesa w płaskim stanie odkształcenia

W przestrzeni naprężeń  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  warunek plastyczności Hubera-Misesa dla płaskiego stanu odkształcenia (6.15) przedstawia nieskończenie długi walec eliptyczny o osi leżącej w płaszczyźnie  $\sigma_x, \sigma_y$ , będącej dwusieczną kąta między dodatnimi kierunkami (półosiami)  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$ . Walec ten pokazany jest na rysunku 5.10.

Wadą warunku plastyczności Hubera-Misesa jest jego złożona postać matematyczna, w związku z tym mogą występować trudności natury matematycznej przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień plastycznego kształtowania metali. Warunek plastyczności Treski ma prostszą postać, ale jego zgodność z wynikami doświad-

dczeń jest gorsza niż warunku energetycznego. Dla pogodzenia wad i zalet obu warunków plastyczności, może być warunek postaci

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta \sigma_p, \quad (5.17a)$$

gdzie  $\beta$  jest pewnym współczynnikiem równym

$$\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1}}.$$

Gdy przyjmiemy porządkującą umowę  $\sigma_1 \gg \sigma_2 \gg \sigma_3$ , to naprężenie pośrednie  $\sigma_2$  może być:

- $\sigma_2 = \sigma_1$ , to wówczas  $\beta = 1$ ,
- $\sigma_2 = \sigma_3$ , to wówczas  $\beta = 1$ ,
- $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ , to  $\beta = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,155$ .

Zatem współczynnik  $\beta$  ma wartość najmniejszą 1, a największą - 1,155. Możemy przyjąć wartość średnią 1,1, wówczas warunek (5.17a) będzie

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 1,1 \sigma_p. \quad (5.17b)$$

Geometryczną interpretacją warunku (5.17b) jest prosta równoległa do prostej warunku plastyczności Treski.

### 5.3. Warunek plastyczności Treski

W 1864 r. włoski inżynier H. Tresca opublikował wyniki swoich doświadczeń, na podstawie których doszedł do wniosku, że metale przechodzą w stan plastyczny wtedy, gdy maksymalne naprężenie styczne osiągnie pewną krytyczną wartość, charakterystyczną dla danego metalu. Warunek ten nosi nazwę warunku plastyczności Treski lub warunku maksymalnych naprężeń stycznych.

H. Tresca badał wpływ pośredniego naprężenia np.  $\sigma_2$  na up-

lastycznienie przy maksymalnej różnicy naprężeń pozostałych  $\sigma_1$  i  $\sigma_3$  i stwierdził, że nie wpływa ono na uplastycznienie metalu. O przejściu metalu w stan plastyczny decyduje tylko największa różnica naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . W związku z tym warunkiem plastyczności Treski, dla przypadku algebraicznie nieuporządkowanych naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , ogólnie można zapisać w postaci

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1| \} = 2k = \sigma_p \quad (2.18a)$$

lub krócej

$$\max \{ |\sigma_i - \sigma_k| \} = 2k, \quad (2.18b)$$

gdzie  $i, k = 1, 2, 3$ .

Należy podkreślić, że największe naprężenie styczne będące połową różnicy naprężenia największego  $\sigma_1$  i najmniejszego  $\sigma_3$

$$\tau_{max} = k = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (5.19a)$$

które spowoduje odkształcenia plastyczne (wzajemne przesunięcie płaszczyzn poślizgu) jest niezależne od rodzaju stanu naprężenia. Zatem wartość tego naprężenia stycznego możemy wyznaczyć z próby jednoosiowego rozciągania w chwili osiągnięcia granicy plastyczności. Mamy wówczas  $\sigma_1 = \sigma_p$ , a  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Największe naprężenie styczne (5.19a) odpowiadające temu stanowi będzie

$$\tau_{max} = k = \frac{\sigma_p}{2} = 0,5 \sigma_p. \quad (5.19b)$$

Wyrażenie (5.19b) podaje zależność między granicą plastyczności na ścinanie  $k$  a granicą plastyczności przy rozciąganiu  $\sigma_p$ .

Warunek plastyczności Treski (5.18b) można wyrazić w postaci

$$\sigma_i - \sigma_k = 2k \quad (5.20)$$

przy założeniu, że  $\sigma_i \gg \sigma_j \gg \sigma_k$ .

Dla  $i \neq k = 1, 2, 3$  zależność (5.20) przyjmie postać

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_2 &= \pm 2k = \pm \sigma_p, \\ \sigma_1 - \sigma_3 &= \pm 2k = \pm \sigma_p, \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \pm 2k = \pm \sigma_p.\end{aligned}\quad (5.21)$$

Porządkując naprężenie główne w sposób  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  warunek plastyczności Treski dla trójosiowego stanu naprężenia wyrazi się równaniem

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k = \sigma_p. \quad (5.22)$$

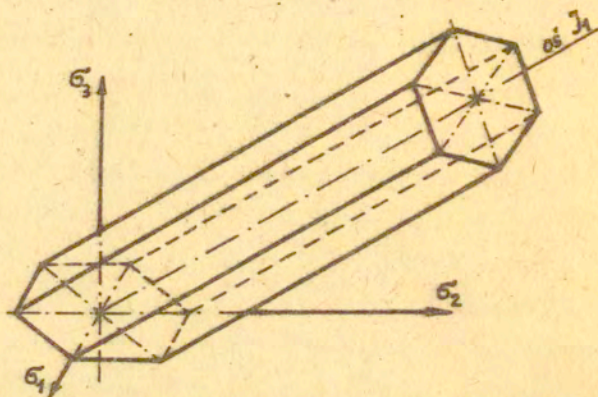
Warunek plastyczności Treski jest zgodny z wynikami doświadczeń P.W. Bridgmana, który wykazał, że wszechstronne równomierne ściskanie  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\rho$  nie wpływa na uplastycznienie, ponieważ naprężenia styczne są równe zero,  $\tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$ , przy dowolnie dużych wartościach naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Z rozważań tych wynika, że jeśli na dowolny istniejący stan naprężenia określony naprężeniami głównymi  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  nałożymy dowolny hydrostatyczny stan naprężenia, to warunek plastyczności (5.22) nie ulegnie zmianie.

Warunek plastyczności Treski wyrażony przy pomocy niezmienników dewiatora naprężeń  $\mathcal{J}_2$  i  $\mathcal{J}_3$  na bardzo złożoną postać, nieprzydatną w praktyce

$$4\mathcal{J}_2^3 - 27\mathcal{J}_3^2 - 36k^2\mathcal{J}_2^2 + 96k^4\mathcal{J}_2 - 64k^2 = 0. \quad (5.23)$$

W trójwymiarowej przestrzeni naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  warunek plastyczności Treski (5.21) przedstawia nieskończenie długi graniastosłup o przekroju sześcioboku foremnego i osi  $J_1$  jednakowo nachylonej do osi układu współrzędnych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (rys. 5.5). Pobocznicą tego graniastosłupa jest miejscem geometrycznym stanów plastycznych. Stany znajdujące się w środku graniastosłupa są stanami sprężystymi.

Ślad przecięcia graniastosłupa Treski płaszczyzną  $\sigma_3 = 0$  daje sześciobok ABCDEF (rys. 5.6a), a ślad przecięcia graniastosłupa płaszczyzną prostopadłą do osi  $J_1$  (płaszczyzną oktaedryczną



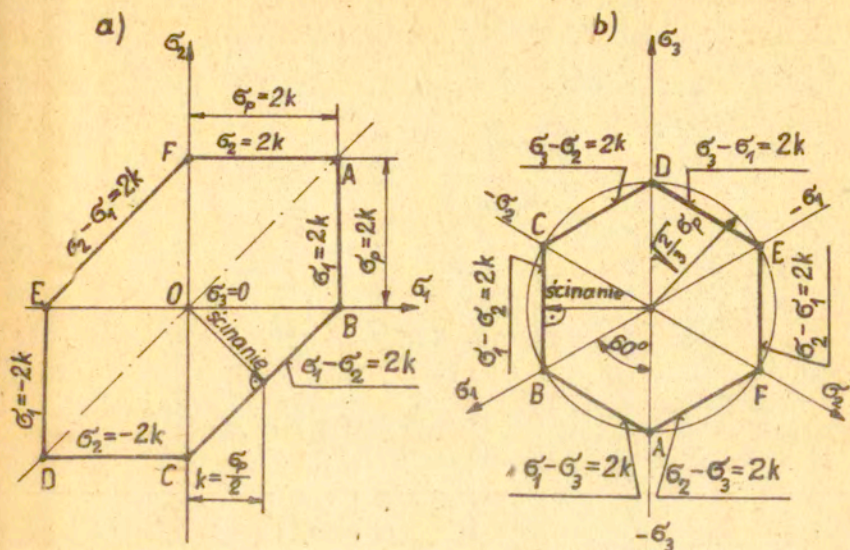
Rys. 5.5. Geometryczna interpretacja warunku plastyczności Treski

ryczną) daje sześciobok foremny przedstawiony na rysunku 5.6b. Poszczególne boki tych sześcioboków otrzymujemy z geometrycznego odwzorowania równań warunku plastyczności (5.21) lub (5.18). Płaszczyzna oktaedryczna tj. taka płaszczyzna, której normalna tworzy jednakowe kąty ze wszystkimi osiami układu.

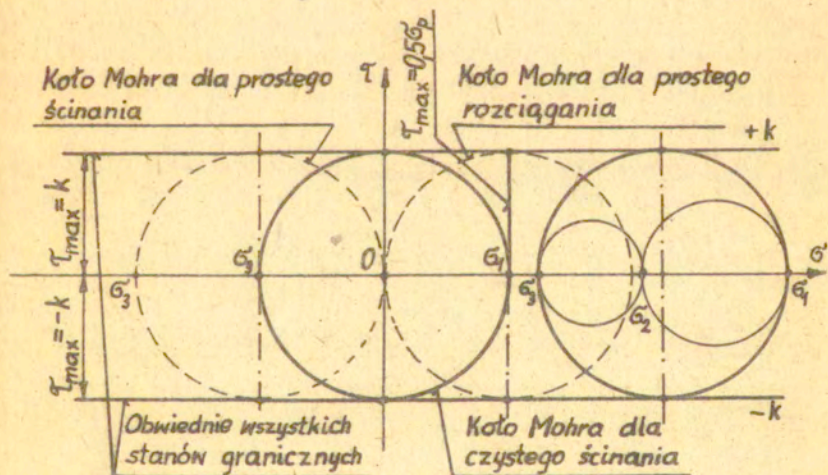
Korzystając z możliwości odwzorowywania stanu naprężenia w punkcie przy pomocy kół Mohra, warunek plastyczności Treski (5.20) lub (5.22) o uporządkowanych naprężeniach można również przedstawić na płaszczyźnie naprężeń  $\sigma - \tau$  (rys. 5.7).

Jeżeli graniastosłup Treski (rys. 5.5) przetniemy płaszczyzną  $\sigma_3 = \text{const} > 0$ , to otrzymamy sześciobok  $A^+B^+C^+D^+E^+F^+$ , a gdy przetniemy go płaszczyzną  $\sigma_3 = \text{const} < 0$ , to otrzymamy sześciobok  $A^-B^-C^-D^-E^-F^-$ . Przekroje te pokazane są na rysunku 5.8.





Rys. 5.6. Geometryczna ilustracja przekrojów graniastosłupa Treski: a - płaszczyzną  $\sigma_3 = 0$ , b - płaszczyzną oktaedryczną



Rys. 5.7. Odzworowanie warunku plastyczności Treski na płaszczyźnie  $\sigma, \tau$  za pomocą kół Mohra.

Równania naprężeń dla poszczególnych punktów i boków przekrojów graniastosłupa Treski są następujące:

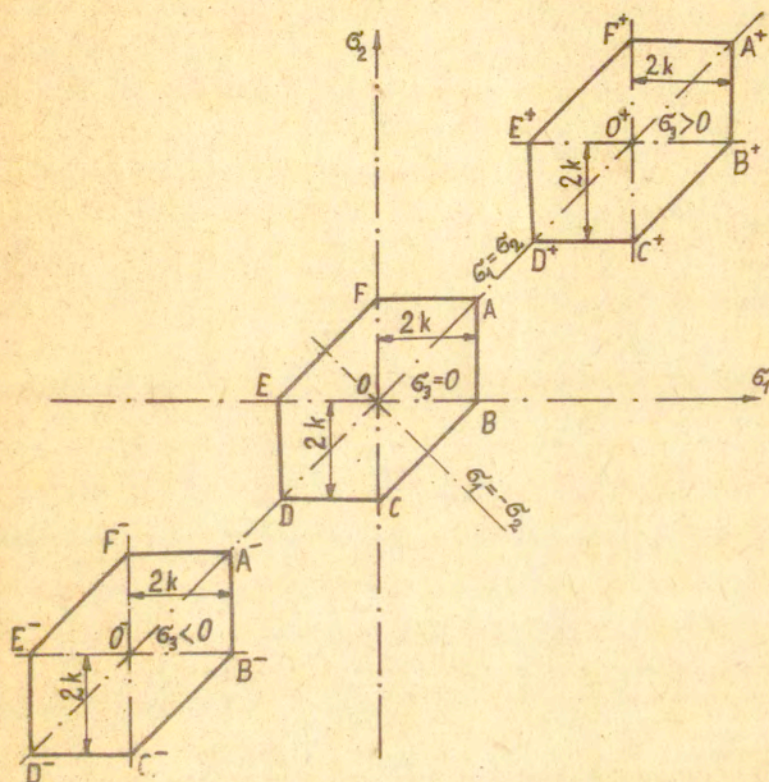
1. Dla przekroju płaszczyzną  $\sigma_3 = \text{const} > 0$  równoległą do płaszczyzny  $\sigma_1 \sigma_2$  :

- w punkcie  $A^+$  —  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 + 2k$ ,
- jw.  $B^+$  —  $\sigma_1 = \sigma_3 + 2k$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3$ ,
- jw.  $C^+$  —  $\sigma_1 = \sigma_2 + 2k$ ,  $\sigma_3 = \sigma_3$ ,
- jw.  $D^+$  —  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 - 2k$ ,
- jw.  $E^+$  —  $\sigma_1 = \sigma_3 - 2k$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3$ ,
- jw.  $F^+$  —  $\sigma_2 = \sigma_3 + 2k$ ,  $\sigma_1 = \sigma_3$ ,
- na boku  $A^+B^+$  —  $\sigma_1 = \sigma_3 + 2k$ ,  $\sigma_1 \gg \sigma_2 \gg \sigma_3$ ,
- jw.  $B^+C^+$  —  $\sigma_1 = \sigma_2 + 2k$ ,  $\sigma_1 \gg \sigma_3 \gg \sigma_2$ ,
- jw.  $C^+D^+$  —  $\sigma_2 = \sigma_3 - 2k$ ,  $\sigma_3 \gg \sigma_1 \gg \sigma_2$ ,
- jw.  $D^+E^+$  —  $\sigma_1 = \sigma_3 - 2k$ ,  $\sigma_3 \gg \sigma_2 \gg \sigma_1$ ,
- jw.  $E^+F^+$  —  $\sigma_2 = \sigma_1 - 2k$ ,  $\sigma_2 \gg \sigma_3 \gg \sigma_1$ ,
- jw.  $F^+A^+$  —  $\sigma_2 = \sigma_3 + 2k$ ,  $\sigma_2 \gg \sigma_1 \gg \sigma_3$ .

2. Dla przekroju płaszczyzną  $\sigma_3 = \text{const} < 0$  równoległą do płaszczyzny  $\sigma_1 \sigma_2$  :

- w punkcie  $A^-$  —  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 + 2k$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ,
- jw.  $B^-$  —  $\sigma_1 = \sigma_3 + 2k$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3$ ,  $\sigma_1 > \sigma_2$ ,
- jw.  $C^-$  —  $\sigma_2 = \sigma_3 - 2k$ ,  $\sigma_1 = \sigma_3$ ,  $\sigma_1 > \sigma_2$ ,
- jw.  $D^-$  —  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 - 2k$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3$ ,
- jw.  $E^-$  —  $\sigma_1 = \sigma_3 - 2k$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3$ ,  $\sigma_2 > \sigma_1$ ,
- jw.  $F^-$  —  $\sigma_2 = \sigma_3 + 2k$ ,  $\sigma_1 = \sigma_3$ ,  $\sigma_2 > \sigma_1$ ,
- na boku  $A^-B^-$  —  $\sigma_1 = \sigma_3 + 2k$ ,  $\sigma_1 > \sigma_2$ ,
- jw.  $B^-C^-$  —  $\sigma_1 = \sigma_2 + 2k$ ,  $\sigma_1 > \sigma_3$ ,
- jw.  $C^-D^-$  —  $\sigma_2 = \sigma_3 - 2k$ ,  $\sigma_1 < \sigma_3$ ,
- jw.  $D^-E^-$  —  $\sigma_1 = \sigma_3 - 2k$ ,  $\sigma_3 > \sigma_1$ ,
- jw.  $E^-F^-$  —  $\sigma_2 = \sigma_1 + 2k$ ,  $\sigma_2 > \sigma_1$ ,

- na boku  $F^-A^-$  -  $\sigma_2 = \sigma_3 + 2k$ ,  $\sigma_3 < \sigma_2$ .



Rys. 5.8. Przekroje graniastostłupa Treski płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny naprężeń  $\sigma_1, \sigma_2$

Warunek plastyczności Treski dla zagadnień osiowo-symetrycznych podobnie graficznie można przedstawić jak warunek plastyczności Treski w osiach głównych (rys. 5.5), przyjmując  $\sigma_1 = \sigma_r$ ,  $\sigma_2 = \sigma_\theta$ ,  $\sigma_3 = \sigma_z$ . Przekroje graniastostłupa i równania naprężeń są analogiczne do przedstawionych po zamianie wskaźników przy symbolu naprężenia  $\sigma$ . We współrzędnych walco-

wych występują naprężenia  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ . Z warunku osiowej symetrii wynika, że naprężenie obwodowe  $\sigma_\theta$  jest naprężeniem głównym. Naprężenie obwodowe  $\sigma_\theta$  w zależności od kinematyki płynięcia materiału równa się jednemu z naprężeń głównych  $\sigma_1$  lub  $\sigma_3$  ( $\sigma_\theta = \sigma_1 = \sigma_r$  lub  $\sigma_\theta = \sigma_3 = \sigma_z$ ).

Dla zagadnień ściskania walców lub pierścieni warunek plastyczności Treski ma postać

$$\sigma_r - \sigma_z = 2k. \quad (5.24)$$

Spełnia on warunki brzegowe dla naprężeń.

### 5.3.1. Warunek plastyczności Treski dla płaskiego stanu naprężenia

Płaski stan naprężenia to taki stan, w którym  $\sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$ , ale dla przypadku warunku Treski tylko  $\sigma_3 = 0$ . Warunek plastyczności Treski (5.18) lub (5.21) redukuje się do następujących równań:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_p, \\ \sigma_1 &= \pm \sigma_p, \\ \sigma_2 &= \pm \sigma_p. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Odwzorowaniem geometrycznym równań (5.25) jest sześciobok ABCDEF na płaszczyźnie naprężeń  $\sigma_1, \sigma_2$  przedstawiony na rysunku 5.6a i na rysunku 5.8.

Równania naprężeń dla poszczególnych punktów i boków tego przekroju graniastosłupa Treski są następujące:

- w punkcie A —  $\sigma_1 = \sigma_2 = 2k$ ,
- " — B —  $\sigma_1 = 2k$ ,
- " — C —  $\sigma_2 = -2k$ ,
- " — D —  $\sigma_1 = \sigma_2 = -2k$ ,
- " — E —  $\sigma_1 = -2k$ ,
- " — F —  $\sigma_2 = 2k$ ,

- na boku AB —  $\sigma_1 = 2k$ ,
- " BC —  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ ,
- " CD —  $\sigma_2 = -2k$ ,
- " DE —  $\sigma_1 = -2k$ ,
- " EF —  $\sigma_2 - \sigma_1 = 2k$ ,  $\sigma_1 - \sigma_2 = -2k$ ,
- " FA —  $\sigma_2 = 2k$ .

Dla osiowo-symetrycznego zagadnienia płaskiego,  $\sigma_z = 0$ , np. rozciągania pierścienia ciśnieniem  $q$  od wewnątrz, warunek plastyczności Treski /rys.5.9/ będzie miał postać

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k. \quad (5.26)$$

Naprężenie  $\sigma_r$  ma kierunek ciśnienia  $q$ , a więc jest ściskające czyli ujemne. Naprężenie obwodowe  $\sigma_\theta$  jest rozciągające czyli dodatnie. Naprężenie  $\sigma_\theta$  algebraicznie jest naprężeniem większym od naprężenia  $\sigma_r$ .

Warunek plastyczności Treski (5.22) po podstawieniu zależności na  $\sigma_1$  i  $\sigma_3$  ( $\sigma_z = 0$ )

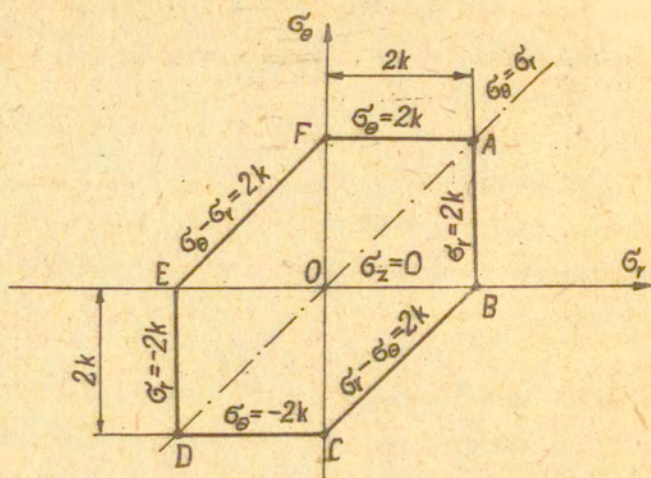
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2},$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2},$$

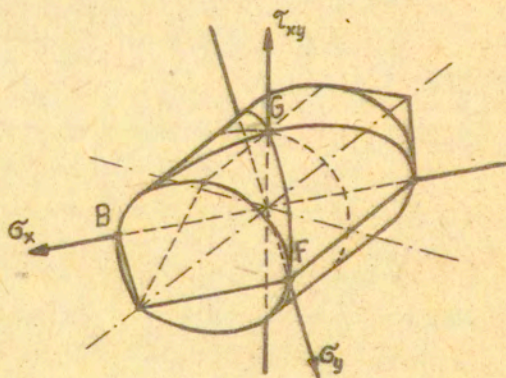
wynikających z koła Mohra, w osiach współrzędnych  $x, z$  będzie miał postać kwadratową

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2 = \frac{\sigma_p^2}{4} = k^2. \quad (5.27)$$

Równanie (5.27) przedstawia inną formę warunku plastyczności Treski w płaskim stanie naprężenia, a odwzorowaniem geometrycznym jego jest elipsa o równaniu  $\frac{(\sigma_x - \sigma_z)^2}{\sigma_p^2} + \frac{\tau_{xz}^2}{\frac{1}{4}\sigma_p^2} = 1$  na płaszczyźnie  $\sigma - \tau$ . Natomiast na płaszczyźnie  $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$  będzie to walec eliptyczny o osi skierowanej wzdłuż dłuższej



Rys. 5.9. Odwzorowanie geometryczne warunku plastyczności Treski dla płaskiego stanu naprężenia,  $\sigma_z = 0$  w warunkach osiowej symetrii



Rys. 5.10. Geometryczne odwzorowanie warunku plastyczności Treski dla płaskiego stanu naprężeń w przestrzeni naprężeń  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

osi elipsoidy (rys. 5.3a) zakończony eliptycznymi stożkami (rys. 5.10). Badania doświadczalne najczęściej przeprowadzane są wzdłuż elipsy BG (rys. 5.10). Próbkki w postaci rurek poddawane są jednoczesnemu rozciąganiu i skręcaniu.

### 5.3.2. Warunek plastyczności Treski dla płaskiego stanu odkształcenia

Warunek plastyczności Treski w warunkach płaskiego stanu odkształcenia redukuje się do równania liniowego w osiach głównych

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k, \quad (5.28)$$

a w przestrzeni naprężeń  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — do wyrażenia kwadratowego

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2. \quad (5.29)$$

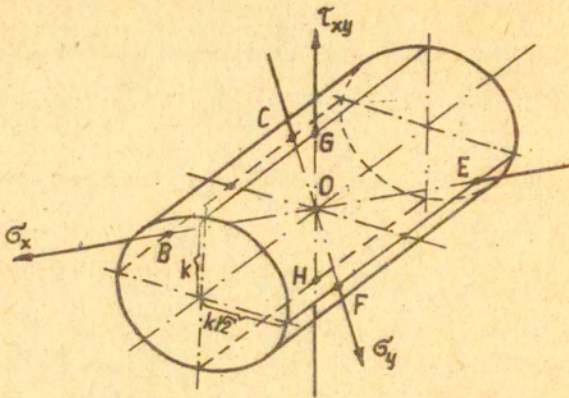
Odzworowaniem geometrycznym równania (5.29) w przestrzeni naprężeń  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  jest walec eliptyczny nieskończenie długi o osi leżącej w płaszczyźnie  $\sigma_x, \sigma_y$  i będącej dwusieczną kąta między tymi osiami. Na rysunku (5.11) przedstawiono odcinek tego walca w otoczeniu początku układu osi.

Na płaszczyźnie naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2$  warunek plastyczności Treski dla płaskiego stanu odkształcenia redukuje się do dwóch prostych i równoległych linii oddalonych od siebie o wartość  $2k\sqrt{2}$  (rys. 5.12).

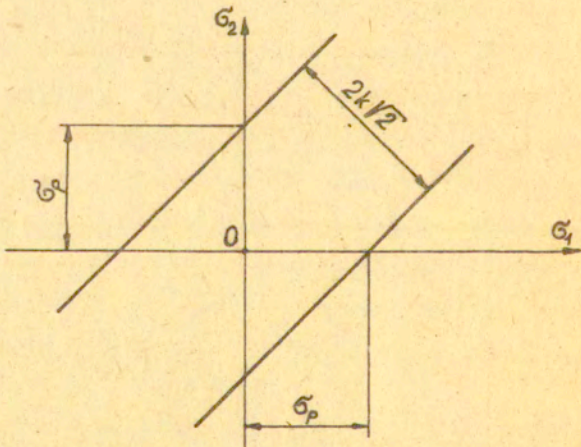
### 5.4. Porównanie warunku plastyczności Hubera-Misesa z warunkiem plastyczności Treski

Cechy wspólne

1. W obu warunkach plastyczności nie występuje średnie naprę-



Rys. 5.11. Geometryczne odwzorowanie warunku plastyczności Treski dla płaskiego stanu odkształcenia w przestrzeni naprężeń  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$



Rys. 5.12. Geometryczne odwzorowanie warunku plastyczności Treski dla płaskiego stanu odkształcenia na płaszczyźnie  $\sigma_1, \sigma_2$



zenie  $\sigma_3 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ .

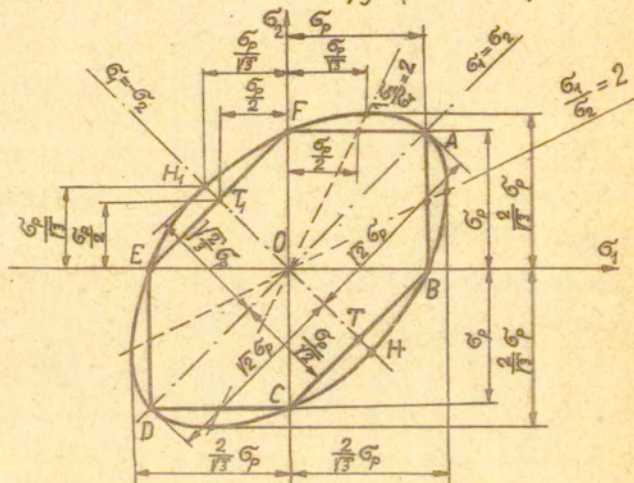
2. W obu warunkach plastyczności ciśnienie hydrostatyczne nie wpływa na osiągnięcie stanu plastycznego materiału.

#### Cechy różniące

1. Warunek plastyczności Treski wymaga znajomości naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  i ponadto wymaga ich uporządkowania np.  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , czego nie wymaga warunek plastyczności Hubera-Misesa.
2. Warunek plastyczności Treski np.  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_p$  jest warunkiem liniowym, a więc jest warunkiem prostszym od warunku plastyczności Hubera-Misesa (5.7c) lub (5.9), który jest warunkiem kwadratowym.
3. W warunku plastyczności Treski nie występuje naprężenie pośrednie  $\sigma_2$ . W warunku plastyczności Hubera-Misesa występują wszystkie składowe naprężenia.
4. Dla danej granicy plastyczności na rozciąganie  $\sigma_p$  granica plastyczności na ścinanie  $k$ , według warunku plastyczności Treski  $k = \frac{\sigma_p}{2}$ , jest ok. 15% mniejsza niż według warunku plastyczności Hubera-Misesa, gdzie  $k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$ . Ta największa różnica 15,47% między obydwoa warunkami plastyczności stanowi często przedmiot weryfikacji doświadczalnej mającej na celu sprawdzenie słuszności jednego bądź drugiego warunku plastyczności. Porównanie to odnosi się do czystego ścinania  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau, \sigma_2 = 0, \tau_{yz} = \tau_{xy} = \tau$  (rys. 5.7).
5. Warunek plastyczności Treski określony jest sześcioma odcinkami linii na płaszczyźnie  $\sigma_1, \sigma_2$  i z tego powodu jest niewygodny w stosowaniu, bo zawsze trzeba badać, na którym boku sześcioboku jesteśmy z naprężeniami, czego nie

trzeba robić dla warunku plastyczności Hubera-Misesa.

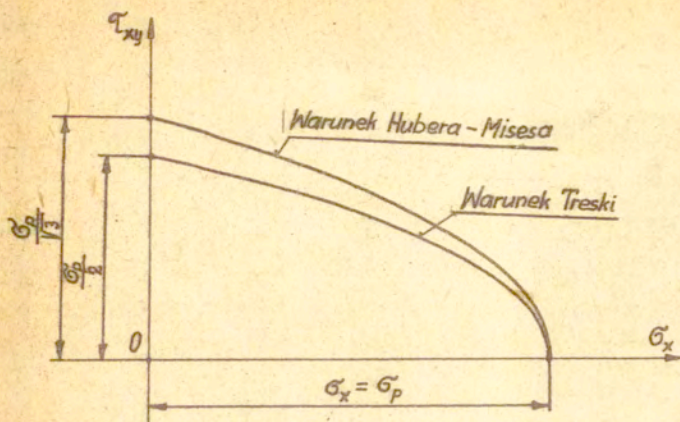
Dla płaskiego stanu naprężenia w płaszczyźnie naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2$  ( $\sigma_3 = 0$ ) warunek plastyczności Treski przedstawia sześciobok ABCDEF wpisany w elipsę, przedstawiającą warunek plastyczności Hubera-Misesa (rys. 5.13). Natomiast w płaszczyźnie naprężeń  $\sigma_x, \tau_{xy}$  ( $\sigma_y = 0$ ) lub  $\sigma_y, \tau_{xy}$  ( $\sigma_x = 0$ ) oba warunki plastyczności są nieliniowe i przedstawiają elipsę o równaniu  $\frac{\sigma_x^2}{4k^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{k^2} = 1$ , przy czym dla warunku Treski  $k = \frac{\sigma_p}{2}$ , a dla warunku Hubera-Misesa  $k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$  (rys. 5.14).



Rys. 5.13. Warunek plastyczności Treski i Hubera-Misesa dla płaskiego stanu naprężenia  $\sigma_3 = 0$  na płaszczyźnie naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2$

Dla płaskiego stanu odkształcenia w płaszczyźnie naprężeń  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  oba warunki plastyczności mają równanie

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \quad (5.28)$$



Rys. 5.14. Warunek plastyczności Treski i Hubera-Misesa dla płaskiego stanu naprężenia  $\sigma_y = 0, \sigma_z = 0$  na płaszczyźnie naprężeń  $\sigma_x, \tau_{xy}$

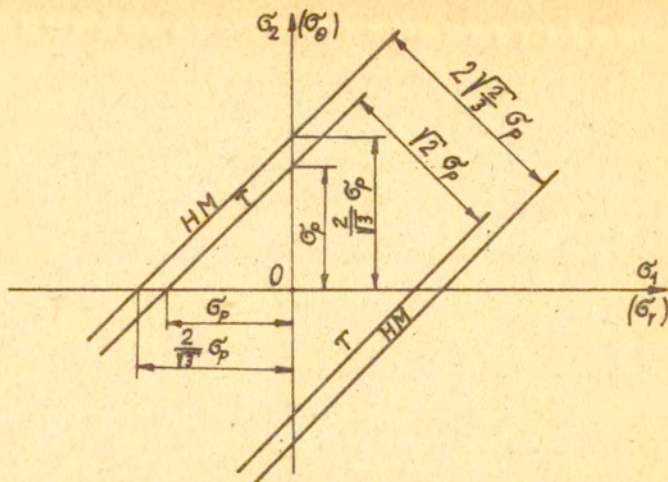
którego odwzorowaniem jest walec eliptyczny przedstawiony na rysunku 5.11. A zatem oba warunki są nieliniowe. Natomiast w płaszczyźnie naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2$  oba warunki plastyczności są liniowe i mają równanie

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k, \quad (5.29)$$

którego odwzorowaniem geometrycznym są linie proste przedstawione na rysunku 5.15.

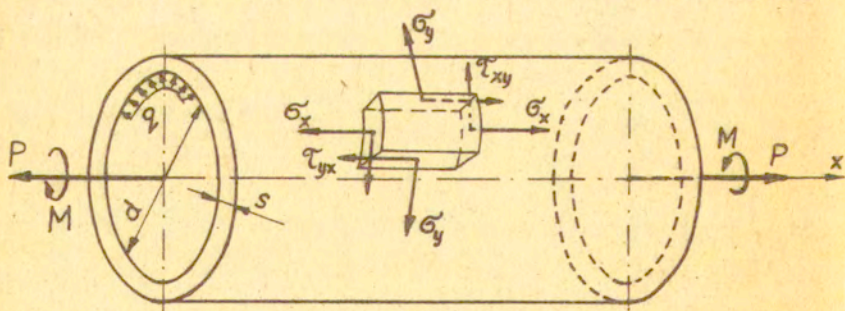
### 5.5. Doświadczalna weryfikacja warunków plastyczności

Badania doświadczalne, mające na celu potwierdzenie słuszności teoretycznych założeń warunków plastyczności, najłatwiej jest przeprowadzić dla płaskiego stanu naprężenia. W płaskim stanie naprężenia występują tylko naprężenia  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , pozostałe składowe stanu naprężenia są równe zeru. Próby przeprowadza się na cienkościennych rurkach wykonanych z różnych



Rys. 5.15. Warunek plastyczności Treski i Hubera-Misesa dla płaskiego stanu odkształcenia w płaszczyźnie naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2$

materiałów, obciążonych jednocześnie kombinacją osiowego rozciągania siłą  $P$ , skręcania momentem  $M$  i rozpeczęcia ciśnieniem  $q$ . Dobierając odpowiednio wartości tych obciążeń można otrzymać w ściance rurki dowolną kombinację naprężeń  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ . Ponieważ rurka jest o małej grubości ścianki  $s$  w stosunku do jej



Rys. 5.16. Próbkę rurkowa do badań w płaskim stanie naprężenia i sposób jej obciążenia.

średnicy  $d$  ( $\frac{s}{d} = 1:10 = 1:50$ ) to naprężenie wzdłuż grubości ścianki rurki nie ulega zmianie i wówczas rozkład naprężeń  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  jest jednorodny.

Jednorodny stan naprężenia w próbce obliczamy ze wzorów:

1. Jeśli próbka jest jednocześnie rozciągana siłą  $P$  (powoduje powstanie naprężeń osiowych) i skręcana momentem  $M$  (powoduje powstanie naprężeń stycznych), to

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi s(d+s)}, \quad \sigma_y \cong 0, \quad \tau_{xy} = \frac{2M}{\pi s d(d+s)}. \quad (5.30)$$

2. Jeśli próbka jest jednocześnie rozciągana siłą  $P$  i rozpęczana ciśnieniem  $q$  (powoduje powstanie naprężeń obwodowych  $\sigma_\theta = \sigma_y$ ), to

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi s(d+s)} + \frac{q d^2}{4s(d+s)}, \quad \sigma_y = \frac{q d^2}{4s(d+s)}, \quad \tau_{xy} \cong 0. \quad (5.31)$$

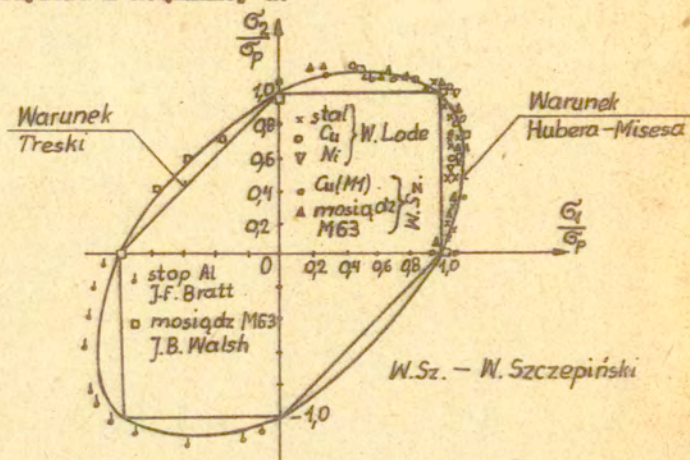
3. Jeśli próbka jest jednocześnie rozciągana siłą  $P$ , rozpęczana ciśnieniem  $q$  i skręcana momentem  $M$ , to

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi s(d+s)} + \frac{q d^2}{4s(d+s)}, \quad \sigma_y = \frac{q d^2}{4s(d+s)}, \quad \tau_{xy} = \frac{2M}{\pi s d(d+s)}. \quad (5.30)$$

Pierwsze badania doświadczalne zostały przeprowadzone w 1926 r. przez W. Lodego. Badania te były przeprowadzone na rurkowych próbkach, wykonanych ze stali, miedzi i niklu, obciążonych jednocześnie siłą osiową  $P$  i ciśnieniem wewnętrznym  $q$ . Punkty doświadczalne, odpowiadające osiągniętym stanom plastycznym otrzymane przez Lodego leżą blisko teoretycznej elipsy Hubera-Misesa (rys. 5.17). Badania przeprowadzone przez J. Miastkowskiego i W. Szczepińskiego również potwierdzają słuszność warunku plastyczności Hubera-Misesa.

Dla pierwszego przypadku obciążenia ( $P + M$ ) warunek plastyczności Treski i Hubera-Misesa odwzorowane są elipsami róż-

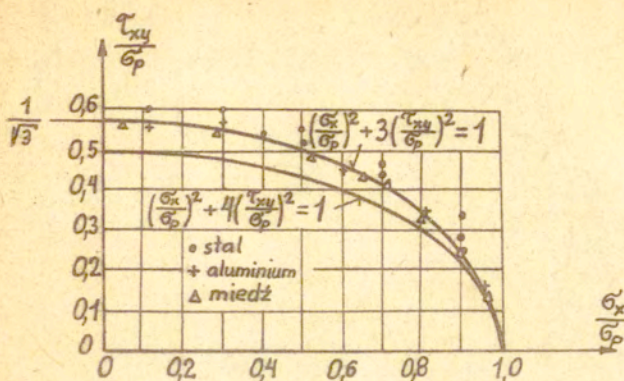
niącymi się jedynie długością półosi krótszej. Na rysunku 5.18 pokazano czwartą część tych elips z naniesionymi wynikami badań G.J.Taylora i H.Quinney'a.



Rys. 5.17. Doświadczalna weryfikacja warunków plastyczności Hubera-Misesa i Treski w przestrzeni naprężeń  $\sigma_1, \sigma_2$  wykonana na próbkach rurkowych.

Wszystkie znane wyniki doświadczalne są bardzo bliskie warunkowi plastyczności Hubera-Misesa dla wszystkich badanych metali. Uważa się powszechnie, że warunek plastyczności Hubera-Misesa dobrze opisuje zachowanie się metali. Jednakże i warunek plastyczności Treski daje niezły przybliżony opis własności plastycznych metali.

W.Lode w 1926 r. badał wpływ głównego naprężenia pośredniego  $\sigma_2$  na uplastycznienie metalu. Naprężenie  $\sigma_2$  w warunku plastyczności Treski  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_p$  nie wpływa na przejście materiału w stan plastyczny, natomiast w warunku plastyczności Hubera-Misesa ma wpływ. Naprężenie  $\sigma_2$  wpływa na rozbieżność między obu



Rys. 5.18. Wyniki badań G.J.Taylor'a i H.Quinney'a

warunkami plastyczności. Dla scharakteryzowania wpływu pośredniego naprężenia  $\sigma_2$  na przejście materiału w stan plastyczny przy założeniu  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  Lode przyjął parametr  $m_\sigma$  określony wzorem

$$m_\sigma = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad (5.33)$$

skąd wyznaczamy

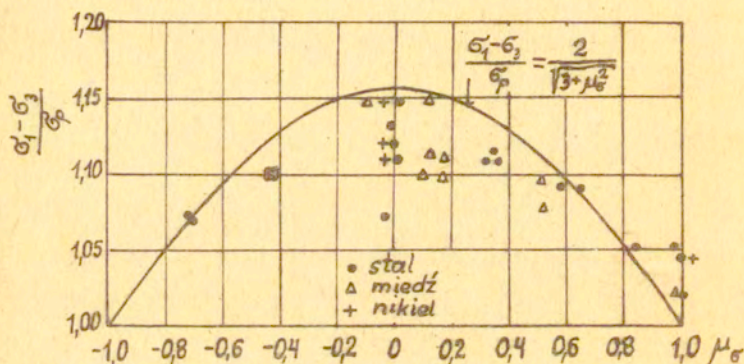
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + m_\sigma \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (5.34)$$

Podstawiając wyrażenie (5.34) do warunku plastyczności Hubera-Misesa (5.9) i po dokonaniu przekształceń otrzymamy

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_p} = \frac{2}{\sqrt{3 + m_\sigma^2}}. \quad (5.35)$$

W układzie bezwymiarowych współrzędnych  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_p}$ ,  $m_\sigma$  warunek plastyczności Treski  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_p} = 1$ , przedstawiony jest prostą o stałej rzędnej równej jedności ( $0.5 m_\sigma$ ), a warunek plastyczności Hubera-Misesa z parametrem  $m_\sigma$  (5.35) przedstawiony jest krzywą (rys.5.19). Dla  $m_\sigma = \pm 1$  krzywa ta ma te same rzędne, co waru-

nek plastyczności Treski, a dla  $\mu_{\sigma} = 0$  osiąga maksimum równe  $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1,155$ . Na rysunku 5.17 podane są również wyniki badań Lodogo, które wskazują na większą ich zgodność z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa. Badania A. Eichingera i M. Ros'a (1929r.) potwierdzają wyniki badań Lodogo.



Rys. 5.19. Wyniki badań Lodogo

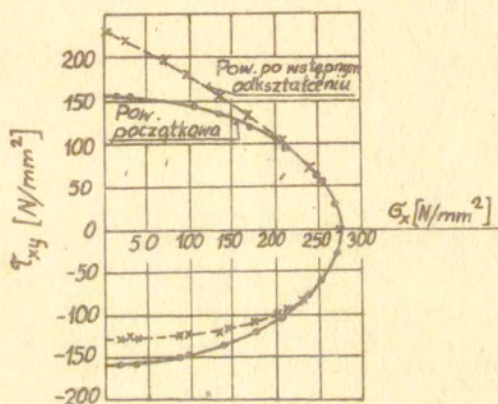
### 5.6. Wpływ odkształceń plastycznych na warunek plastyczności

Po przekroczeniu granicy plastyczności dalszy proces odkształcenia wpływa na zmianę kształtu początkowej powierzchni pęknięcia. W matematycznej teorii plastyczności przyjmuje się, że powierzchnia pęknięcia rozszerza się, zachowując swój kształt początkowy (wzmocnienia izotropowe) lub też przemieszcza się jak bryła sztywna (wzmocnienia kinetyczne).

W dotychczasowych badaniach nie uwzględniono wpływu odkształceń początkowych na dalszy proces odkształcenia. Skutki odkształcenia początkowego usuwano przez wytarzanie rekrytali-



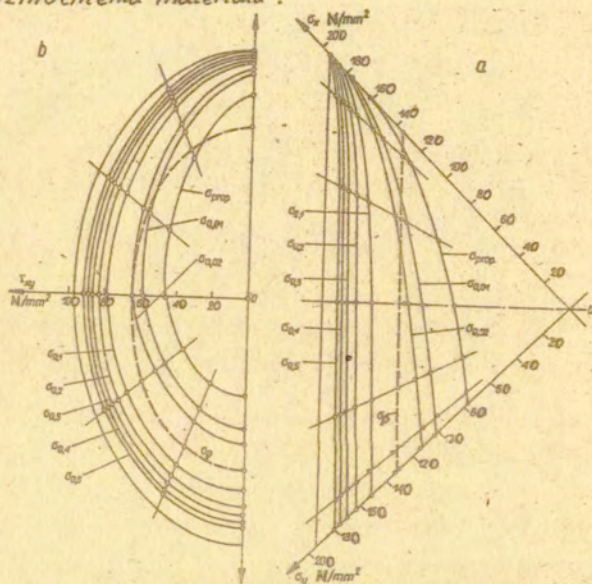
zacyjne. Problem wpływu wzmocnienia początkowego, wynikłego z odkształcenia, bada się na próbkach rurkowych i płaskich. Efekt wzmocnienia uzyskuje się, jeśli próbkę obciążymy siłą rozciągającą lub momentem skręcającym aż do wywołania trwałych odkształceń, odciążymy ją i następnie obciążamy do wywołania odkształceń, ale wówczas siła potrzebna do odkształcenia będzie większa niż przy pierwszym obciążeniu. Dla każdej takiej próby należy sporządzić wykres wydłużania w zależności od siły obciążającej.



Rys. 5.20. Wpływ wstępnego odkształcenia na powierzchnię plastyczności dla stopu aluminiowego.

Na rysunku 5.20 przedstawiono wyniki badania rurkowych próbek wykonanych ze stopu aluminium. Próbki najpierw były odkształcone przez skręcanie powyżej początkowej granicy plastyczności na ścinanie, a następnie po odciążeniu były obciążane jednocześnie siłą osiową  $P$  i momentem skręcającym  $M$ . W czasie próby sporządzano wykres naprężenie - odkształcenie i natychmiast po pojawieniu się zakrzywienia wykresu przerywano obciążenie.

Badania na próbkach płaskich przeprowadza się w ten sposób, że najpierw z arkusza wycina się dużą próbkę, obciążają się do wywołania odkształcenia trwałego np. 2%, a następnie wycina się z niej mniejsze próbki pod różnymi kątami do kierunku osi  $x$  i rozciąga się je zdejmując wykres naprężenie - odkształcenie i wyznacza granicę plastyczności. W ten sposób W. Szczepiński zbadał elipsę BF na elipsoidzie plastyczności dla płaskiego stanu naprężenia (rys. 5.3). Wyniki jego doświadczeń przedstawione są na rysunku 5.21, które wskazują na potwierdzenie hipotezy izotropowego wzmocnienia materiału.

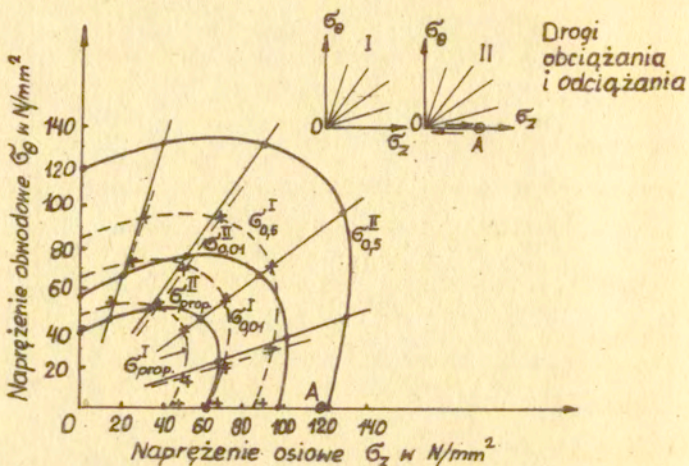


Rys. 5.21. Wpływ odkształcenia plastycznego jednoosiowym rozciąganiem naprężeniami  $\sigma_x$  na zmianę kształtu początkowej elipsy z rys. 5.3. Linia przerywana pokazano krzywą plastyczności  $\sigma_p$  materiału początkowego. Liniami ciągłymi przedstawiono krzywe plastyczności materiału wstępnie odkształconego. Poszczególne krzywe przedstawiają stany naprężenia wywołujące różne odkształcenia trwałe przy obciążeniu poczynając od zerowego dla krzywej  $\sigma_{p,0,01}$  przez 0,01% dla krzywej  $\sigma_{p,0,01}$  aż do 0,5% dla  $\sigma_{p,0,5}$ ; a/ rzut z góry na płaszczyznę  $\sigma_x, \sigma_y$ , b/ rzut na płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny  $\sigma_x, \sigma_y$  a przechodzącej przez BF.

J. Miastkowski przeprowadził między innymi badania [4] na rurkowych próbkach wykonanych z mosiądzu M63 (CuZn37). Próbki przed odkształceniem były wyżarzone rekrytalizująco. Obciążenie próbek odbywało się wzdłuż promieni zaznaczonych na rysunku 5.22. Odkształcenia natomiast były mierzone po ich ustabilizowaniu (po 5 minutach) za pomocą elektrycznych tensometrów oporowych naklejanych na próbki. Z otrzymanych wyników pomiarów obliczono intensywność naprężeń  $\sigma_i$  i intensywność odkształceń  $\epsilon_i$  i sporządzono wykres  $\sigma_i - \epsilon_i$ . Z wykresu dla  $\epsilon_i^p = 0,01; 0,02; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$  wyznaczono naprężenie  $\sigma_i$ , które oznaczano odpowiednio  $\sigma_{0,01}, \sigma_{0,02}, \dots, \sigma_{0,5}$  i nanoszono na płaszczyznę naprężeń  $\sigma_\theta - \sigma_z$ . Najpierw wyznaczono krzywe płynięcia dla próbek wstępnie nieodkształconych plastycznie, a następnie - dla próbek wstępnie odkształconych plastycznie o określonej wielkości. Na rysunku 5.22 pokazano porównanie krzywych dla materiału odkształconego wstępnie (indeks II) z krzywymi dla materiału nieodkształconego wstępnie (indeks I) dla jednego (wzdłuż drogi OA) z wielu możliwych przypadków obciążenia. Dla przejrzystości do porównania wzięto tylko krzywe odpowiadające  $\sigma_{prop}, \sigma_{0,01}$  i  $\sigma_{0,5}$ .

Z porównania krzywych wynika, że różnią się one w sposób zasadniczy. Krzywe  $\sigma_{prop}$  i  $\sigma_{0,01}$  potwierdzają dość dobrze hipotezę wzmocnienia kinematycznego, natomiast krzywa  $\sigma_{0,5}$  niezbyt wiele odbiega od elipsy otrzymanej przez równomierne rozszerzanie elipsy Hubera-Misesa. Dla innych dróg obciążania wstępnego, odciążania i następnie ponownego obciążania skutki umocnienia materiału mogą być zlikwidowane. Zjawisko to zależy od drogi obciąż-

żania i wielkości obciążenia zarówno pierwotnego jak i wtórnego.



Rys. 5.22. Powierzchnia płynięcia plastycznego dla mosiądzu M63:  
 † — — — — powierzchnie początkowe bez wstępnego obciążenia,  
 O — — — — powierzchnie odpowiadające wstępnemu i wtórnemu obciążeniu na drodze OA

### 5.7. Inne warunki plastyczności

W praktyce inżynierskiej spotykane są również inne warunki plastyczności, a mianowicie:

- warunek największego naprężenia zredukowanego,
- warunek Johansena, który stosowany jest w teorii płyt,
- warunek Coulomba-Mohra,
- warunek plastyczności dla materiałów anizotropowych.

#### 5.7.1. Warunek plastyczności największego naprężenia zredukowanego

Warunek plastyczności największego naprężenia zredukowa —

nego można ogólnie zapisać w postaci

$$\max[|\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|] = C, \quad (5.36)$$

gdzie  $C$  jest stałą wyznaczaną z próby jednoosiowego rozciągania,  $\sigma_3 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  jest naprężeniem średnim.

Dla płaskiego stanu naprężenia,  $\sigma_3 = 0$ , warunek ten będzie miał postać:

- gdy  $\sigma_1 - \sigma_3 = C$  ( $\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{2}{3}\sigma_1 - \frac{1}{3}\sigma_2 = C$ ,

dla  $\sigma_1 = \sigma_p$ ,  $\sigma_2 = 0$  to  $C = \frac{2}{3}\sigma_p$ ), otrzymujemy

$$|2\sigma_1 - \sigma_2| = 2\sigma_p, \quad (5.37a)$$

- gdy  $\sigma_2 - \sigma_3 = C$ , to otrzymujemy

$$|2\sigma_2 - \sigma_1| = 2\sigma_p, \quad (5.37b)$$

- gdy  $\sigma_3 - \sigma_1 = C$ , to otrzymujemy

$$|-\sigma_1 - \sigma_2| = 2\sigma_p. \quad (5.37c)$$

Na płaszczyźnie  $\sigma_1$   $\sigma_2$  równania (5.37a - 5.37c) utworzą sześciobok (rys. 5.23).

### 5.7.2. Warunek plastyczności Coulomba-Mohra

Uplastycznienie materiałów kruchych np. żeliwa, betonu, skał lub gruntów zależy od pierwszego niezmiennika naprężenia

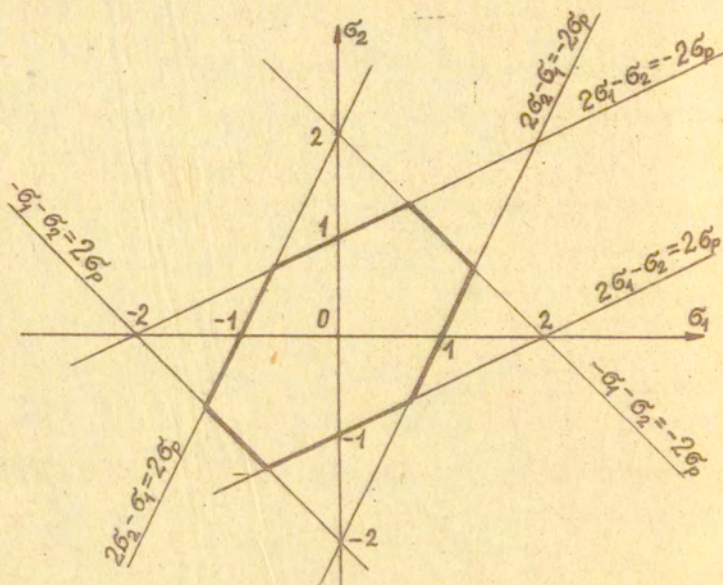
$$f(J_1, J_2, J_3) = 0, \quad (5.38)$$

gdzie  $J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ ,  $J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$ ,  $J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ .

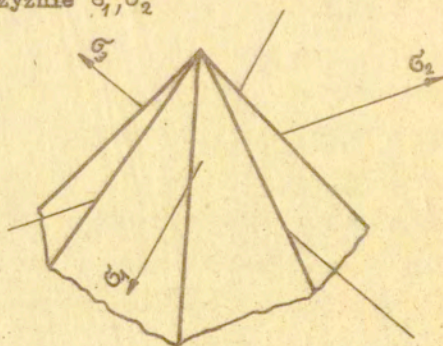
W przestrzeni naprężeń głównych warunek plastyczności Coulomba-Mohra przedstawia ostrosłup o podstawie sześciokąta i osi pokrywającej się z linią hydrostatycznego ciśnienia oraz wierzchołką w punkcie  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c \cdot \text{ctg } \varphi$  (rys. 5.24).

Warunek ten po raz pierwszy został sformułowany przez G.A. Coulomba. Zakłada on liniową postać funkcji Mohra  $f(\rho, k) = 0$ , a mianowicie

$k - p \sin \varphi - c \cos \varphi = 0,$  (5.39)  
 gdzie  $k = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$ ,  $p = -\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$ ,  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$   
 oznaczają kolejno maksymalne, pośrednie i minimalne naprężenia



Rys. 5.23. Warunek plastyczności największego naprężenia zredukowanego na płaszczyźnie  $\sigma_1, \sigma_2$



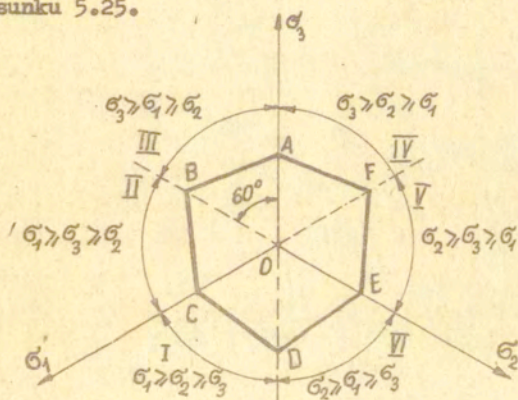
Rys. 5.24. Powierzchnia graniczna dla warunku Coulomba w przestrzeni naprężeń głównych

główne ( $\sigma_1 \gg \sigma_{II} \gg \sigma_{III}$ ). W przypadku, gdy naprężenia główne są nieuporządkowane, to warunek plastyczności (5.39) można zapisać

kolejno dla każdej z sześciu ścian ostrosłupa:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi - c \cdot \cos \varphi &= 0, \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sin \varphi - c \cdot \cos \varphi &= 0, \\ \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_3 + \sigma_2}{2} \sin \varphi - c \cdot \cos \varphi &= 0, \\ \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} + \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \sin \varphi - c \cdot \cos \varphi &= 0, \\ \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} + \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} \sin \varphi - c \cdot \cos \varphi &= 0, \\ \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \sin \varphi - c \cdot \cos \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Przekrój powierzchni granicznej (rys. 5.24) płaszczyzną prostopadłą do osi  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const} < c \cdot \text{tg} \varphi$  daje sześciokąt przedstawiony na rysunku 5.25.



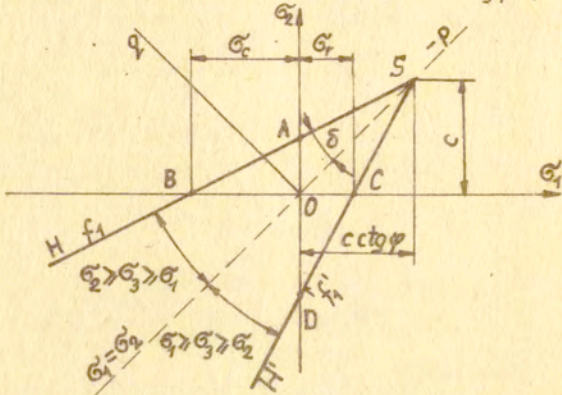
Rys. 5.25. Przekrój powierzchni dla warunku Coulomba płaszczyzną  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const}$

W rzucie na płaszczyznę  $\sigma_1, \sigma_2$  warunek plastyczności Coulomba-Mohra sprowadza się do dwóch linii prostych,  $f_1$  i  $f_1^I$  o równaniach (rys. 5.26)

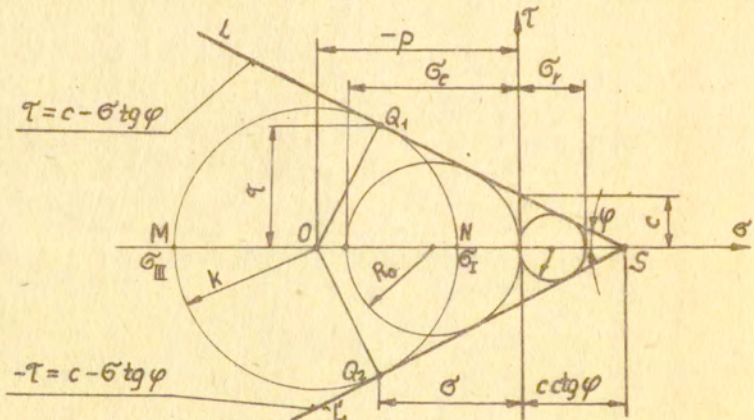
$$f_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} + \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} \sin \varphi - c \cdot \cos \varphi = 0, \quad (5.41)$$

$$f'_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sin \varphi - c \cdot \cos \varphi = 0.$$

Na płaszczyźnie naprężeń  $\sigma$   $\tau$  warunek (5.39) stanowi prostoliniową obwiednię kół Mohra o równaniu  $|\tau| = c - \sigma \operatorname{tg} \varphi$  (rys. 5.27).



Rys. 5.26. Warunek Coulomba dla płaskiego stanu odkształcenia

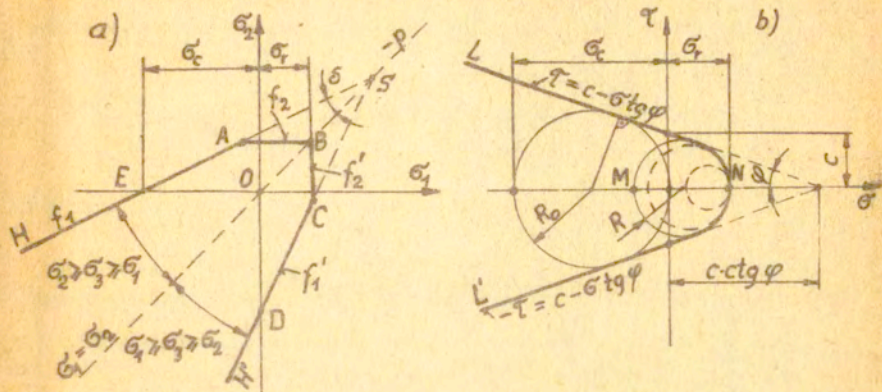


Rys. 5.27. Odzworowanie warunku Coulomba na płaszczyźnie naprężeń  $\sigma$   $\tau$

W praktyce stosowany jest zmodyfikowany warunek plastyczności Coulomba, którego geometryczną interpretację dla płaskiego stanu odkształcenia na płaszczyźnie naprężeń  $\sigma$   $\tau$



rężeń  $\sigma_1, \sigma_2$  przedstawiono na rysunku 5.28a, a na płaszczyźnie naprężeń  $\sigma, \tau$  — na rysunku 5.28b.



Rys. 5.28. Zmodyfikowany warunek Coulomba: a - dla płaskiego stanu odkształcenia na płaszczyźnie  $\sigma_1, \sigma_2$ , b - obwiednia granicznych kół Mohra

### 5.7.3. Warunek plastyczności dla materiału anizotropowego

Materiały, których własności mechaniczne zależą od kierunku siły obciążającej nazywamy anizotropowymi. Anizotropię wykazuje blacha walcowana na zimno, posiadająca trzy wzajemnie ortogonalne osie  $x, y, z$  w każdym punkcie materiału. Oś  $x$  jest poświadana w kierunku walcowania, oś  $y$  jest prostopadła do kierunku walcowania, a oś  $z$  jest prostopadła do płaszczyzny arkusza blachy.

Warunek plastyczności dla materiału anizotropowego podał R.Hill w analogii do warunku plastyczności Hubera-Misesa, ma on postać

$$F(\sigma_x - \sigma_y)^2 + G(\sigma_y - \sigma_z)^2 + H(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 2L\tau_{xy}^2 + 2M\tau_{yz}^2 + 2N\tau_{zx}^2 = 1. \quad (5.42)$$

Współczynniki  $F, G, H, L, M, N$  w równaniu (5.42) są parametrami charakteryzującymi płynięcie plastyczne materiału anizotropowego, określanymi przez wartości granicy plastyczności w trzech głównych kierunkach anizotropii.

Dla przypadku płaskiego stanu naprężenia,  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ , warunek plastyczności (5.42) ma postać

$$(F+H)\sigma_x^2 + (F+G)\sigma_y^2 - 2F\sigma_x\sigma_y + 2L\tau_{xy}^2 = 1. \quad (5.43)$$

Przyjmując za współczynniki  $F=G=H=\frac{L}{3}=\frac{M}{3}=\frac{N}{3}=\frac{1}{2\sigma_p^2}$  warunek plastyczności dla ciała anizotropowego (5.42) sprowadza się do warunku plastyczności Hubera-Misesa

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_p^2.$$

#### Literatura do rozdziału V

1. Praca zbiorowa pod red. W.Olszaka, P.Perzyny i A.Sawczuka. Teoria plastyczności. PWN, Warszawa, 1965.
2. W.Szczepiński. Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej. PWN, Warszawa, 1967.
3. O. Hoffman, G.Sachs. Wprowadzenie do teorii plastyczności. PWT, Warszawa, 1959.
4. J.Miastkowski. Wpływ historii obciążania na powierzchnię plastyczności. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 2,4 (1966).
5. Z.Marciniak. Odkształcenia graniczne przy tłoczeniu blach. WNT, Warszawa, 1971.
6. R.J.Izbicki, Z.Mróz. Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał. PWN, Warszawa, 1976.

## Rozdział VI

### PRAWA PLASTYCZNEGO PŁYNIĘCIA

W ramach teorii plastyczności rozpatrywane są teorie (związki fizyczne) plastycznego płynięcia:

- a/ teoria małych odkształceń sprężysto-plastycznych zwana inaczej teorią odkształceniową lub teorią deformacyjną, lub też teorią Hencky-Iliuszina,
- b/ teoria plastycznego płynięcia zwana również teorią przyrostową.

Teoria deformacyjna wiąże ze sobą składowe stanu naprężenia ze składowymi stanu odkształcenia. Jest ona uogólnieniem teorii sprężystości przy przejściu poza stan sprężysty. Może ona być stosowana tylko do ciał poddanych obciążeniu prostemu lub bardzo do niego zbliżonemu. Do rozpatrywania procesów obróbki plastycznej metali nie należy stosować równań fizycznych teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych.

Teoria plastycznego płynięcia, inaczej nazywana teorią przyrostową, wiąże składowe prędkości odkształcenia lub składowe przyrostów odkształcenia z odpowiednimi składowymi naprężeniami. Teoria przyrostowa formułuje związki fizyczne dla materiału sprężysto-idealnie plastycznego i dla materiału sztywno-idealnie plastycznego. Prawo płynięcia plastycznego dla materiału sprężysto-idealnie plastycznego nosi nazwę związków fizycznych Prandtla-Reussa. Natomiast do prawa plastycznego płynięcia dla materiału sztywno-idealnie plastycznego należy pra-

wo Levy-Misesa oraz stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia. Równania fizyczne Prandtla-Reussa są bardziej złożone niż równania fizyczne Levy-Mises-a, ale opisują one dokładniej proces plastycznego płynięcia, gdyż uwzględniają odkształcenia sprężyste. Teoria Levy-Misesa jest szczególnym przypadkiem teorii Prandtla-Reussa.

W teorii plastycznego płynięcia w miejsce przyrostów np. przemieszczeń  $du_i$ , odkształceń  $d\varepsilon_{ij}$ , naprężeń  $dS_{ij}$ , pracy plastycznej  $dL_p$  wprowadza się ich prędkości

$$\frac{du_i}{dt} = \dot{u}_i, \quad \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad \frac{dS_{ij}}{dt} = \dot{S}_{ij}, \quad \frac{dL_p}{dt} = \dot{L}_p = D. \quad (6.1)$$

Z pozycji teorii plastycznego płynięcia odkształcanie się plastyczne materiału /ośrodka/ traktuje się jako stan ruchu. Natomiast z punktu widzenia teorii deformacyjnej odkształcenia plastyczne ośrodka ciągłego rozpatrywane są jako stan statyczny. Dla procesu bardzo powolnego oraz dla prostego obciążenia związki fizyczne teorii odkształceniowej i teorii plastycznego płynięcia okazują się identyczne.

Procesy obróbki plastycznej metali nie mogą być rozpatrywane według teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych. Poniżej zostaną omówione następujące prawa:

- Uogólnione prawo Hooke'a.
- Prawo Hencky-Iliuszina.
- Prawo Levy-Misesa.
- Prawo Prandtla-Reussa.
- Stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia.

Pomimo, że prawo Hooke'a nie dotyczy procesu plastycznego płynięcia, to jednak musi być omówione na samym początku, gdyż wyprowadzone równania fizyczne sprężystości oraz prawo sprę-

zycznej zmiany objętości i prawo sprężystej zmiany postaci występują jako aksjomaty przy omawianiu teorii Hencky-Iliuszina, Levy-Misesa i Prandtla-Reussa.

### 6.1. Uogólnione prawo Hooke'a

Prawo fizyczne liniowej sprężystości zakłada, że składowe naprężenia zależą wyłącznie od składowych odkształcenia w następujący sposób:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} , \quad (6.2)$$

$i, j, k, l = 1, 2, 3,$

gdzie  $D_{ijkl}$  jest macierzą sprężystości, jest to tensor modułów materiałowych czwartego rzędu i dla symetrycznych tensorów  $\sigma_{ij}$  i  $\varepsilon_{kl}$  jest symetryczny. Najbardziej ogólny tensor izotropowy rzędu czwartego ma postać

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \xi (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) ,$$

gdzie  $\lambda, \mu, \xi$  są skalarnymi mnożnikami.

Podstawiając tensor  $D_{ijkl}$  do prawa fizycznego (6.2) otrzymamy uogólnione prawo Hooke'a

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} ,$$

w którym  $\mu$  i  $\lambda$  są stałymi materiałowymi określającymi sprężyste własności materiału izotropowego. Stałe materiałowe  $\mu$  i  $\lambda$  wyrażają się przez konwencjonalne moduły Younga  $E$  i Kirchhoffa  $G$  oraz współczynnik Poissona  $\nu$  w następujący sposób:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} , \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} .$$

Ostatecznie uogólnione prawo Hooke'a można napisać w postaci

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} . \quad (6.3)$$

Działając tensorem jednostkowym  $\delta_{ij}$  na obie strony równania (6.3), otrzymamy

$$\sigma_{ij} \delta_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} \delta_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \delta_{ij} ,$$

$$\sigma_{ii} = 2G \varepsilon_{ii} + 3\lambda \varepsilon_{ii} ,$$

$$\sigma_{ii} = 3K \varepsilon_{ii} , \quad (6.4a)$$

gdzie  $2G + 3\lambda = \frac{E}{1-2\nu} = 3K$ , bo  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$

i jest modułem ścisłościwości materiału. Równanie (6.4a) wyraża prawo sprężystej zmiany objętości materiału. Z matematycznego punktu widzenia prawo sprężystej zmiany objętości (6.4a) mówi, że składowe kulistego tensora naprężeń  $\sigma_{ii}$  są proporcjonalne do składowych kulistego tensora odkształceń  $\varepsilon_{ii}$ . Prawo to można również zapisać przy pomocy średnich naprężeń  $\sigma_s$  i średnich odkształceń  $\varepsilon_s$  w sposób

$$\sigma_s = 3K \varepsilon_s \quad (6.4b)$$

lub w postaci

$$\begin{vmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{vmatrix} = 3K \begin{vmatrix} \varepsilon_s & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_s \end{vmatrix} . \quad (6.4c)$$

Wykorzystując definicję dewiatora naprężenia i dewiatora odkształcenia i wstawiając prawo sprężystej zmiany objętości (6.4a) do równania ogólnego Hooke'a (6.3), otrzymamy prawo sprężystej zmiany postaci materiału

$$\begin{aligned} S_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} &= 2G(e_{ij} + \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}) + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} , \\ S_{ij} &= 2G e_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \left( \frac{2G + 3\lambda}{3K} - 1 \right) , \\ S_{ij} &= 2G e_{ij} . \end{aligned} \quad (6.5a)$$

Prawo sprężystej zmiany postaci mówi, że występuje proporcjonalna zależność między odpowiednimi składowymi dewiatora naprężenia  $S_{ij}$  i odkształcenia  $e_{ij}$ . Równanie (6.5a) można przedstawić w postaci macierzy

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_s & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_s & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_s \end{vmatrix} = 2G \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_s & \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} \\ \frac{\mu}{2} & \varepsilon_y - \varepsilon_s & \frac{\mu}{2} \\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & \varepsilon_z - \varepsilon_s \end{vmatrix}, \quad (6.5b)$$

gdzie  $\sigma_s = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ ,  $\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$ .

Podstawiając zależność (6.4a) do równania (6.3) i posługując się konwencjonalnymi stałymi sprężystości  $E$  i  $\nu$  uogólnione prawo Hooke'a dla ciała izotropowego wyrazi się następująco (również otrzymujemy z  $\varepsilon_{kl} = H_{ijkl} \sigma_{ij}$ , gdzie  $H_{ijkl} = (D_{ijkl})^{-1} = \frac{1-\nu}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl}$ ):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}]. \quad (6.6)$$

Rozpisując równanie (6.6), otrzymamy znane związki między odkształceniami i naprężeniami ważne w granicach sprężystości materiału

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [(1+\nu) \sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] = \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (6.7)$$

oraz odkształcenia postaciowe sprężyste

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G} \tau_{yz}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2G} \tau_{zx}, \\ \alpha \quad d_{xy}^p = 2\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \text{ itd.} \end{aligned}$$

Równanie (6.7) możemy zapisać przy pomocy macierzy

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ d_{xy}^p \\ d_{yz}^p \\ d_{zx}^p \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (6.8a)$$

lub symbolicznie

$$\{\varepsilon^s\} = [D^s]^{-1} \{\sigma^s\}. \quad (6.8b)$$

Dla obliczeń numerycznych wygodniejsza jest zależność między naprężeniami i odkształceniami dla zakresu sprężystego.

Prawo fizyczne sprężystości ogólnie można zapisać w postaci tensorowej (otrzymujemy z równ. (6.3) po uwzględnieniu zależności za  $\lambda$  i  $G$ ,

$$\sigma_{ij}^s = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-2\nu)\epsilon_{ij}^s + \nu \epsilon_{kk}^s \delta_{ij}] \quad (6.9a)$$

$i, j = x, y, z$

lub w postaci macierzowej

$$\{\sigma^s\} = [D^s] \{\epsilon^s\}, \quad (6.9b)$$

gdzie  $[D^s]$  jest symetryczną konstytutywną macierzą sprężystości.

Równanie (6.9b) dla przestrzennego stanu naprężenia można napisać w konkretnej postaci

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (6.10)$$

Dla płaskiego stanu naprężenia  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ , macierz przybiera postać

$$[D^s] = \frac{2G}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym.} & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Dla płaskiego stanu odkształcenia  $\epsilon_z = 0$ ,  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ , macierz sprężysta  $[D^s]$  ma postać

$$[D^s] = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & 0 \\ \text{sym.} & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$



Wyrażając tensor naprężenia (rów.6.9a) w układzie współrzędnych  $x, y, z$  mamy następujące zależności naprężenia od odkształcenia:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2G}{1-2\lambda} [(1-2\lambda)\epsilon_x + \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)] = \frac{2G}{1-2\lambda} [(1-\lambda)\epsilon_x + \lambda(\epsilon_y + \epsilon_z)], \\ \sigma_y &= \frac{2G}{1-2\lambda} [(1-\lambda)\epsilon_y + \lambda(\epsilon_x + \epsilon_z)], \\ \sigma_z &= \frac{2G}{1-2\lambda} [(1-\lambda)\epsilon_z + \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y)], \\ \tau_{xy} &= \frac{2G}{1-2\lambda} \frac{1-2\lambda}{2} \delta_{xy} = G \delta_{xy}, \\ \tau_{yz} &= G \delta_{yz}, \\ \tau_{zx} &= G \delta_{zx}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Związki fizyczne liniowej sprężystości (6.13) można wprost otrzymać z zapisu macierzowego (6.10).

## 6.2. Teoria deformacyjna Hencky-Iliuszina

Teoria deformacyjna plastyczności nazywana jest również teorią odkształceniową lub teorią małych odkształceń sprężysto-plastycznych. Opracowana ona została przez A.Nádaia, H.Hencky'ego i A.A.Iliuszina. Podaje ona związki fizyczne między naprężeniami i małymi odkształceniami. A zatem jest ona uogólnieniem równań teorii sprężystości na stan poza-sprężysty, czyli opisuje proces sprężysto-plastyczny nie uwzględniając parametru czasu.

Weźmy rzeczywisty wykres jednoosiowego rozciągania  $\sigma - \epsilon$  uzyskany na drodze eksperymentalnej (rys.6.1). Dla mało zaawansowanych odkształceń ( $\epsilon < \epsilon^s$ ) występuje liniowa zależność między naprężeniami i odkształceniami

$$\sigma = E \epsilon,$$

gdzie  $E = tg \alpha$  i jest stycznym modułem sprężystości. Dla zakresu, w którym występują odkształcenia plastyczne możliwa jest zależność

$$\sigma = E_p \varepsilon,$$

gdzie  $E = tg \beta$  jest modułem plastycznym zależnym od własności materiału i wielkości odkształcenia. Natomiast dla przestrzennego stanu naprężenia i odkształcenia możliwa jest zależność

$$\sigma_i = E_p \varepsilon_i \quad (6.14)$$

napisana w analogii do liniowej teorii sprężystości  $\sigma_i = E \varepsilon_i$ .

Funkcję  $E_p$  dla stanu jednoosiowego i dla stanu przestrzennego utożsamiamy ze sobą i możemy wyrazić zależnością

$$E_p = \frac{\Phi(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}.$$

W związku z tym, wykresy  $\sigma - \varepsilon$  i  $\sigma_i - \varepsilon_i$  są takie same.

Słuszność przyjęcia związku (6.14) potwierdzona jest doświadczeniem, a znaczenie jego polega na tym, że dowolny stan naprężenia daje się jakoby sprowadzić do prostego rozciągania

lub ściskania przy przyjęciu prostej drogi obciążania

( $\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij}{}^0 \cdot C(t)$ , gdzie  $\sigma'_{ij}{}^0 = \text{constans}$  — składowe tensora naprężenia są stałe, a  $C(t)$  jest współczynnikiem skalarnym zależnym od czasu).

Sformułujmy zależność między modułem Younga  $E$ , a modułem plastyczności  $E_p$ . Z rysunku 6. 1 bezpośrednio wynika

$$\sigma_i = \varepsilon_i tg \alpha - \overline{CD}. \quad (6.15)$$

Długość odcinka  $\overline{CD}$  zależy od intensywności odkształcenia  $\varepsilon_i$

i jest z reguły jego rosnącą funkcją,  $\overline{CD} = \varphi(\varepsilon_i)$ . Uwzględniając, że  $tg \alpha = E$  wyrażenie (6.15) możemy napisać

$$\sigma_i = E \varepsilon_i \left( 1 - \frac{\varphi(\varepsilon_i)}{E \varepsilon_i} \right) = E \varepsilon_i [1 - \omega(\varepsilon_i)],$$

gdzie  $\omega(\varepsilon_i) = \frac{\varphi(\varepsilon_i)}{E \varepsilon_i} = \frac{\overline{CD}}{E \varepsilon_i}$ . Wyznaczając punkt D na linii wzmocnienia ( $\varepsilon_i > \varepsilon_p$ ) otrzymamy odcinek  $\overline{CD}$

$$\overline{CD} = \overline{CG} - \overline{DF} - \overline{FG} = E \varepsilon_i - E_1(\varepsilon_i - \varepsilon_p) - E \varepsilon_p,$$

$$\overline{CD} = \mathcal{X} \left(1 - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_i}\right) E \varepsilon_i, \quad (6.16)$$

gdzie  $\mathcal{X} = \frac{E - E_1}{E}$  jest parametrem wzmocnienia. Funkcja  $\omega(\varepsilon_i)$  wyrazi się zatem zależnością

$$\omega(\varepsilon_i) = \mathcal{X} \left(1 - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_i}\right), \quad (6.17)$$

a moduł odkształcenia plastycznego będzie

$$E_p = E \left[1 - \mathcal{X} \left(1 - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_i}\right)\right]. \quad (6.18)$$

Prawo fizyczne dla rozpatrywanego modelu będzie miało postać

$$\sigma_i = E \varepsilon_i \left[1 - \mathcal{X} \left(1 - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_i}\right)\right]. \quad (6.19)$$

Moduł odkształcenia postaciowego  $G_p$  można wyrazić podobnie jak  $E_p$

$$G_p = G \left[1 - \omega(\varepsilon_i)\right]. \quad (6.20)$$

Wychodząc z zależności  $G_p = \frac{E_p}{2(1+\nu_p)}$  (gdzie  $\nu_p = 0,5$ ), otrzymamy

$$G_p = \frac{E_p}{3} = \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}. \quad (6.21)$$

Teoria deformacyjna Hencky-Iliuszina opiera się na następujących założeniach:

— istnienia współosiowości kierunków głównych tensora naprężenia  $\sigma_{ij}$  i tensora odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$ ,

— zakłada ścisłość materiału w zakresie sprężystym

$$\sigma_s = 3K \varepsilon_s = \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_s, \quad (6.22)$$

i nieściśliwość w zakresie plastycznym

$$\varepsilon_{ii} = 0, \quad (6.23)$$

— całkowite odkształcenie  $\varepsilon_{ij}$  jest sumą odkształcenia sprężystego  $\varepsilon_{ij}^s$  i plastycznego  $\varepsilon_{ij}^p$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^s + \varepsilon_{ij}^p \quad (6.24a)$$

lub podobnie w dewiatorach

$$e_{ij} = e_{ij}^s + e_{ij}^p, \quad (6.24b)$$

- obciążenie jest proste ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 c(t)$ ,  $\sigma_{ij}^0 = \text{constans}$ ),
- zakłada istnienie proporcjonalnej zależności między składowymi dewiatora odkształcenia sprężystego  $e_{ij}^s$  a składowymi dewiatora naprężenia  $S_{ij}$

$$e_{ij}^s = \frac{1}{2G} S_{ij}. \quad (6.25)$$

Składowe dewiatora odkształcenia plastycznego  $e_{ij}^p$  są proporcjonalne do składowych dewiatora naprężenia  $S_{ij}$

$$e_{ij}^p = \lambda S_{ij}, \quad (6.26)$$

gdzie  $\lambda = \frac{L_p}{2k^2}$  jest mnożnikiem zależnym od pracy plastycznej  $L_p = S_{ij} e_{ij}^p$  i granicy plastyczności na ścinanie  $k$ . Za-  
tem równanie fizyczne teorii odkształceniowej (zgodnie z 6.24b) można napisać w postaci

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} S_{ij} + \lambda S_{ij} = \left( \frac{1}{2G} + \frac{L_p}{2k^2} \right) S_{ij}. \quad (6.27)$$

Dla obciążenia (praca plastyczna  $L_p > 0$ ) prawo deformacji ma postać (6.27), a dla odciążenia ( $L_p = 0$ ) prawo deformacji (6.27) przyjmuje postać

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} S_{ij}$$

i dotyczy materiału liniowo-sprężystego.

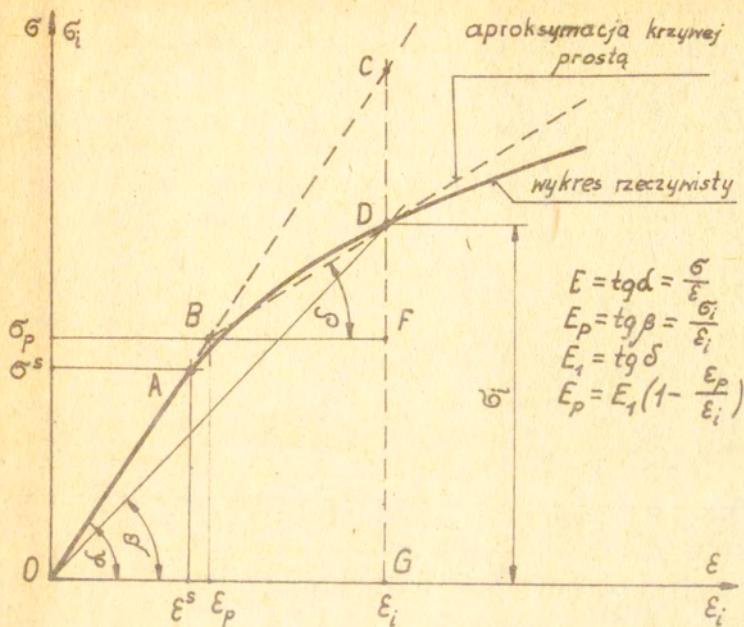
Wprowadzając oznaczenie

$$\frac{1}{\psi} = \frac{1}{2G} + \frac{L_p}{2k^2}$$

możemy napisać prawo deformacji

$$e_{ij} = \frac{1}{\psi} S_{ij}, \quad (6.28)$$

gdzie  $\psi$  jest modułem ściecznym ( $\psi = \text{tg } \beta$ ).



Rys. 6.1. Wykres zależności  $\sigma - \varepsilon$  i  $\sigma_i - \varepsilon_i$

Dla potrzeb teorii odkształceniowej zależność między składowymi dwiectora naprężenia a składowymi dwiectora odkształcenia możemy napisać w postaci

$$S_{ij} = 2G_p e_{ij} = 2 \frac{G_i}{3 \varepsilon_i} e_{ij} \quad (6.29)$$

Równanie (6.29) po rozpisaniu przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_s &= \frac{2}{3} \frac{G_x}{\varepsilon_x} (\varepsilon_x - \varepsilon_s), \\ \sigma_y - \sigma_s &= \frac{2}{3} \frac{G_y}{\varepsilon_y} (\varepsilon_y - \varepsilon_s), \\ \sigma_z - \sigma_s &= \frac{2}{3} \frac{G_z}{\varepsilon_z} (\varepsilon_z - \varepsilon_s), \\ \tau_{xy} &= \frac{2}{3} \frac{G_i}{\varepsilon_i} \frac{d_{xy}^i}{2}, \\ \tau_{yz} &= \frac{2}{3} \frac{G_i}{\varepsilon_i} \frac{d_{yz}^i}{2}, \\ \tau_{zx} &= \frac{2}{3} \frac{G_i}{\varepsilon_i} \frac{d_{zx}^i}{2}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

gdzie  $G_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2} + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$ ,

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2} + \frac{3}{2} (d_{xy}^i{}^2 + d_{yz}^i{}^2 + d_{zx}^i{}^2),$$

$$\sigma_s = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad \varepsilon_s = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Równanie konstytutywne teorii odkształceniowej (6.29)

macierzowo można zapisać w postaci

$$\{S\} = 2G_p \{e\}, \quad (6.31)$$

gdzie  $\{S\} = \{\sigma - \sigma_s\}$  jest kolumnową macierzą składowych dwiectora naprężenia,  $\{e\} = \{\varepsilon - \varepsilon_s\}$  jest kolumnową macierzą składowych dwiectora odkształcenia. Macierze te w postaci jawnej można napisać

$$\{S\} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ S_{xy} \\ S_{yz} \\ S_{zx} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3 & 0 & 0 \\ & & & & 3 & 0 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = [d_n] \{\sigma\}, \quad (6.32)$$

*sym.*

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ e_{xy} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3 & 0 & 0 \\ & & & & 3 & 0 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = [d_0] \{\varepsilon\}. \quad (6.33)$$

Odształcenie średnie można zapisać przy pomocy macierzy i wektora kolumnowego

$$\varepsilon_s = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = [0_s] \{\varepsilon\} \quad (6.34)$$

i podobnie można zapisać naprężenie średnie  $\sigma_s = [n_s] \{\sigma\}$ , przy czym  $[n_s] = [0_s]$ .

Do obliczeń numerycznych wygodny jest związek wiążący tensor naprężenia i tensor odkształcenia

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}. \quad (6.35)$$

Podstawiając wyprowadzone wyżej zależności macierzowe, otrzymamy

$$\{S\} + \sigma_s = 2G_p [d_0] \{\varepsilon\} + \frac{E}{1-2\lambda} [0_s] \{\varepsilon\},$$

$$\{\sigma\} = \left[ 2G_p [d_0] + \frac{E}{1-2\lambda} [0_s] \right] \{\varepsilon\} \quad (6.36a)$$

lub symbolicznie

$$\{\sigma\} = [D^{sp}] \{\varepsilon\}. \quad (6.36b)$$

Macierz  $[D^{sp}]$  jest konstytutywną macierzą sprężysto-plastyczną uwzględniającą prawo fizyczne, wynikające z teorii małych od-

kształceń sprężysto-plastycznych. Po wykonaniu zwykłych operacji na macierzach  $[d_0]$  i  $[o_s]$  oraz uwzględnienia zależności  $G_p = G(1 - \omega)$  i  $E = 2G(1 + \nu)$  otrzymamy macierz sprężysto-plastyczną w postaci jawnej

$$[D^{sp}] = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(1-\nu) & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(1-\nu) & 0 \\ \text{sym.} & & & & & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} - 2G\omega[d_0]. \quad (6.37a)$$

lub symbolicznie

$$[D^{sp}] = [D^s] - [D^p]. \quad (6.37b)$$

Macierz  $[D^s]$  jest znaną macierzą konstytutywną sprężystości (6.10) zaś macierz  $[D^p]$  jest nieliniową macierzą plastyczności i ma postać

$$[D^p] = \frac{G}{3}\omega \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & 3 & 0 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}, \quad (6.38)$$

gdzie  $\omega = 1 - \frac{\sigma_i}{E \epsilon_i}$  jest funkcją intensywności naprężenia i odkształcenia. Łatwo zauważyć, że dla stanu sprężystego  $\omega = 0$  i macierz  $[D^p] = 0$ .

Dla małych odkształceń sprężysto-plastycznych zależności między odkształceniami i naprężeniami często przyjmuje się w analogii do równań liniowej teorii sprężystości zamieniając

jedynie  $E$  na  $E_p$  i  $\nu$  na  $m$  ( $m$  jest liczbą Poissona dla odkształceń plastycznych i równa się  $m = -\frac{\varphi_1(\text{wzdłużne})}{\varphi_2(\text{poprzeczne})} = -\frac{2\varphi_2}{\varphi_2} = -2$ , bo  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$ ,  $\varphi_1 = -\varphi_2 - \varphi_3 = -2\varphi_2$ ,  $\varphi_2 = \varphi_3$ )



i mają one postać

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{1}{E_p} \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \right), \\ \varphi_2 &= \frac{1}{E_p} \left( \sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{m} \right), \\ \varphi_3 &= \frac{1}{E_p} \left( \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m} \right).\end{aligned}\tag{6.39}$$

Z równań (6.39) otrzymujemy warunek stałej objętości

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{1}{E_p} \frac{m-2}{m} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

gdym = 2, to  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$

oraz

$$\frac{1}{E_p} = \frac{\varphi_1}{\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}} = \frac{\varphi_2}{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}} = \frac{\varphi_3}{\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}}.$$

Tworząc wyrażenie typu

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_3} - 1 = \frac{\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}}{\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}} - 1,$$

otrzymamy

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_3}{\varphi_3} = \frac{\frac{3}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}},$$

skąd

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\varphi_1 - \varphi_3} = \frac{2}{3} E_p.\tag{6.40}$$

Z równania (6.40) otrzymujemy znane zależności między głównymi naprężeniami i głównymi odkształceniami

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_2 &= \frac{2}{3} E_p (\varphi_1 - \varphi_2), \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \frac{2}{3} E_p (\varphi_2 - \varphi_3), \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \frac{2}{3} E_p (\varphi_3 - \varphi_1),\end{aligned}\tag{6.41a}$$

a przyjmując, że  $E_p = 3G_p$ , otrzymamy

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_2 &= 2G_p(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= 2G_p(\varphi_2 - \varphi_3), \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= 2G_p(\varphi_3 - \varphi_1).\end{aligned}\tag{6.41b}$$

### 6.3. Prawo plastycznego płynięcia Levy-Misesa

Prawo to często nazywane jest teorią plastycznego płynięcia Saint Venanta - Levy - Misesa. Saint Venant zbudował podstawowe równania tej teorii dla zagadnień płaskich, Levy w 1871 r. i Mises w 1913 r. niezależnie od siebie uogólnili te równania do stanu przestrzennego.

Prawo to dotyczy materiału sztywno-idealnie plastycznego. Dla zbudowania związków fizycznych teorii plastycznego płynięcia przyjmuje się:

- materiał nieściśliwy,  $\dot{\epsilon}_{ii} = 0$ , co powoduje  $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij}$ ,
- materiał izotropowy (kierunki główne tensora naprężenia i tensora odkształcenia pokrywają się).

M. Levy i R. Mises zaproponowali - niezależnie od siebie - proporcjonalną zależność między tensorem przyrostu odkształcenia plastycznego i dwiatorem naprężenia w postaci

$$d\epsilon_{ij}^P = d\lambda S_{ij}\tag{6.42}$$

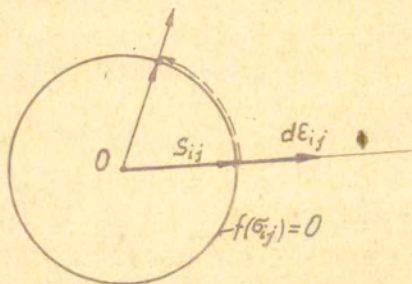
W zapisie prędkościowym równanie (6.42) ma postać ( $d\varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} dt$ )

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda S_{ij}, \quad (6.43)$$

gdzie  $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \partial u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \partial u_i \right)$  jest tensorem prędkości odkształcenia

$$\left( v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad v_j = \frac{\partial u_j}{\partial t}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right), \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

jest dewiatorem naprężenia,  $\lambda$  jest współczynnikiem proporcjonalności zależnym od <sup>prędkości</sup> odkształcenia. Z równania (6.43) wynika, że główne osie naprężenia i główne osie prędkości odkształcenia plastycznego pokrywają się.



Rys.6.2. Ilustracja geometryczna równania (6.43)

Aktualny stan naprężenia wyznacza kierunek wektora przyrostu odkształcenia  $d\varepsilon_{ij}$ , który jest współosiowy z wektorem naprężenia. Współosiowość ta jest również zachowana przy poruszaniu się wektora naprężenia  $S_{ij}$  po powierzchni plastyczności  $f(\sigma_{ij}) = 0$  (rys.6.2).

Biorąc równanie dysypacji  $D = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$ , równanie (6.43) i warunek plastyczności Hubera-Misesa  $S_{ij} \cdot S_{ij} = 2k^2$ , otrzymamy

$$D = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = S_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda S_{ij} \cdot S_{ij} = \lambda 2k^2, \quad (6.44)$$

$$\lambda = \frac{D}{2k^2}$$

Współczynnik  $\lambda$  jest zmienny, bo  $D$  jest zmienna w procesie deformacji. Stosując ponownie równanie (6.43) i intensywność prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}_i = \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}$  współczynnik proporcjonalności wyrazi się

$$\lambda^2 = \frac{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}{2 k^2} = \frac{\dot{\epsilon}_i^2}{4 k^2},$$

$$\lambda = \frac{\dot{\epsilon}_i}{2 k}. \quad (6.45)$$

Współczynnik  $\lambda$  musi być większy od zera, gdy  $\lambda < 0$ , to w procesie energia by się regenerowała, co fizycznie jest niemożliwe.

W układzie współrzędnych kartezjańskich  $x, y, z$  równania plastycznego płynięcia Levy-Misesa (6.42) wyrażają się następująco:

$$\begin{aligned} d\epsilon_x &= d\lambda S_x = d\lambda \left[ \sigma_x - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{d\lambda}{3} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z), \\ d\epsilon_y &= d\lambda S_y = d\lambda \left[ \sigma_y - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{d\lambda}{3} (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z), \\ d\epsilon_z &= d\lambda S_z = d\lambda \left[ \sigma_z - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{d\lambda}{3} (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y), \\ d\tau_{xy} &= d\lambda \tau_{xy}, \\ d\tau_{yz} &= d\lambda \tau_{yz}, \\ d\tau_{zx} &= d\lambda \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Z prawa plastycznego płynięcia Levy-Misesa (rów. 6.46) wynikają następujące zależności:

$$\begin{aligned} d\epsilon_1 - d\epsilon_2 &= d\lambda (\sigma_1 - \sigma_2), \\ d\epsilon_2 - d\epsilon_3 &= d\lambda (\sigma_2 - \sigma_3), \\ d\epsilon_3 - d\epsilon_1 &= d\lambda (\sigma_3 - \sigma_1), \end{aligned} \quad (6.47)$$

z których można wyznaczyć współczynnik proporcjonalności

$$d\lambda = \frac{d\epsilon_1^p - d\epsilon_2^p}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{d\epsilon_2^p - d\epsilon_3^p}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{d\epsilon_3^p - d\epsilon_1^p}{\sigma_3 - \sigma_1}. \quad (6.48)$$

Podstawiając zależności wynikające z prawa płynięcia Levy-Misesa

$$\dot{\epsilon}_x = \lambda S_x, \quad \dot{\epsilon}_y = \lambda S_y, \quad \dot{\epsilon}_z = \lambda S_z, \quad \dot{\epsilon}_{xy} = \lambda S_{xy} \text{ itd.}$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = 2\lambda S_{xy}, \quad \dot{\gamma}_{yz} = 2\lambda S_{yz}, \quad \dot{\gamma}_{zx} = 2\lambda S_{zx}$$

do intensywności prędkości odkształceń postaciowych

$$\dot{\epsilon}_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2 + \frac{3}{2}(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)},$$

otrzymamy

$$\dot{\epsilon}_i = \lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(S_x - S_y)^2 + (S_y - S_z)^2 + (S_z - S_x)^2 + 6(S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2)}.$$

Przyjęcie nieściśliwości materiału  $\dot{\epsilon}_{ii} = 0$  prowadzi do równości

$\dot{\epsilon}_{ij} = S_{ij}$ . Daje to zależność intensywności prędkości odkształceń postaciowych  $\dot{\epsilon}_i$  od intensywności naprężeń stycznych  $\sigma_i$  w postaci

$$\dot{\epsilon}_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda \sqrt{6} \sigma_i = 2\lambda \sigma_i, \quad (6.49)$$

z której otrzymany współczynnik proporcjonalności  $\lambda$  wyraża się wzorem

$$\lambda = \frac{\dot{\epsilon}_i}{2\sigma_i}. \quad (6.50)$$

#### 6.4. Prawo plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa

Teoria plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa dotyczy płynięcia materiału sprężysto-idealnie plastycznego. L. Prandtl w 1924 r. zaproponował związek fizyczny tej teorii dla stanu płaskiego, a A. Reuss w 1930 r. uogólnił go dla stanu przestrzennego. Do związku fizycznego wzięte są odkształcenia zarówno plastyczne jak i sprężyste. Związek ten podaje zależność

ności między prędkościami odkształceń sprężystych, plastycznych, a naprężeniami  $S_{ij}$  i prędkościami wzrostu naprężeń  $\dot{S}_{ij}$ . Równanie Prandtla-Reussa jest rozszerzonym o człon sprężysty równaniem Levy-Misesa.

Do zbudowania tej teorii przyjęto następujące założenia:

- nieściśliwość materiału w zakresie plastycznym,  $d\varepsilon_{ii}^P = 0$  implikuje  $d\varepsilon_{ij}^P = de_{ij}^P (d\varepsilon_{ij} = de_{ij} + \frac{1}{3}d\varepsilon_{kk}\delta_{ij})$ . Ściśliwość materiału występuje tylko w zakresie sprężystym,  $d\varepsilon_{ii}^S = \frac{1}{3K}dG_{ii} = \frac{1-2\nu}{E}dG_{ii}$ ,
- materiał izotropowy, a więc pokrywanie się kierunków głównych tensora naprężenia i dewiatora przyrostu (prędkości) odkształcenia,
- występowanie oddziaływalności przyrostów odkształceń  $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^S + d\varepsilon_{ij}^P$  oraz  $de_{ij} = de_{ij}^S + de_{ij}^P$ ,
- odkształcenia sprężyste i plastyczne są tego samego rzędu,
- współosiowość (pokrywanie się kierunku) tensora przyrostu odkształcenia plastycznego  $d\varepsilon_{ij}^P$  z dewiatorem naprężenia  $S_{ij}$ .

Plastyczny przyrost tensora odkształcenia  $d\varepsilon_{ij}^P$  przyjmowany jest zgodnie z prawem Levy-Misesa

$$d\varepsilon_{ij}^P = de_{ij}^P = d\lambda S_{ij} \quad (6.51)$$

lub zgodnie ze stowarzyszonym prawem plastycznego płynięcia

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial G_{ij}} \quad (6.52)$$

Sprężystą część odkształcenia  $d\varepsilon_{ij}^S$  można rozłożyć na część powodującą zmianę postaci  $de_{ij}^S$  i na część powodującą zmianę objętości  $d\varepsilon_s^S$

$$d\varepsilon_{ij}^S = de_{ij}^S + d\varepsilon_s^S \delta_{ij} \quad (6.53)$$

Dla materiału izotropowego, podlegającego prawu Hooke'a, dewiator odkształcenia sprężystego  $de_{ij}^S$  przyjmuje zależność

$$de_{ij}^S = \frac{1}{2G} dS_{ij} \quad (6.54)$$

natomiast sprężyste odkształcenie objętościowe

$$d\varepsilon_s^s = \frac{1}{3K} d\sigma_s = \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_s. \quad (6.55)$$

Przyrost całkowitego odkształcenia sprężystego wyrazi się zależnością

$$d\varepsilon_{ij}^s = \frac{dS_{ij}}{2G} + \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_s \delta_{ij}. \quad (6.56)$$

Zależność (6.56) można przedstawić również przy pomocy przyrostu naprężenia

$$d\varepsilon_{ij}^s = \frac{1}{2G} \left[ d\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma_s \delta_{ij} \right], \quad (6.57)$$

gdzie  $d\sigma_s = \frac{1}{3} d\sigma_{kk}$ ,  $d\sigma_{ij} = dS_{ij} + d\sigma_s \delta_{ij}$ .

Ostatecznie równanie fizyczne Prandtla-Reussa wyrazi się zależnością

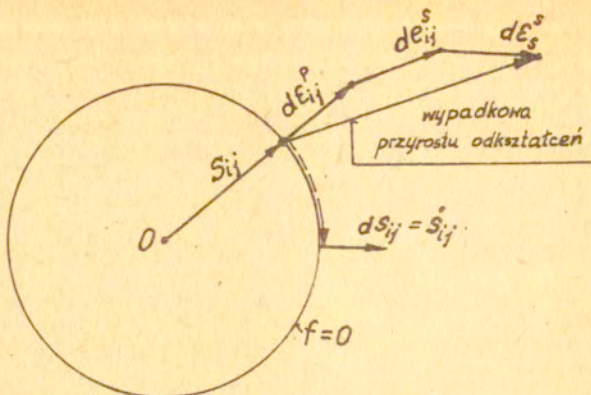
$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda S_{ij} + \frac{dS_{ij}}{2G} + \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_s \delta_{ij}. \quad (6.58)$$

Równanie (6.58) można przedstawić przy pomocy prędkości odkształceń (zachodzi addytywność prędkości odkształceń) i prędkości naprężeń

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda S_{ij} + \frac{\dot{S}_{ij}}{2G} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{\sigma}_s \delta_{ij}, \quad (6.59)$$

gdzie  $\dot{S}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}_s \delta_{ij}$  jest dewiatorem prędkości wzrostu naprężenia,  $\delta_{ij}$  jest deltą Kroneckera,  $\dot{\sigma}_s = \frac{1}{3} \dot{\sigma}_{kk}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ii} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}$ .

Przyrost odkształcenia  $d\varepsilon_{ij}$  (rów. 6.58) określony jest przez istniejący stan naprężenia  $S_{ij}$  i przez prędkość wzrostu naprężeń  $dS_{ij} = \dot{S}_{ij} dt$  i  $d\sigma_s = \dot{\sigma}_s dt$ . Teoria plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa określa stan odkształcenia w zależności od aktualnego stanu naprężenia i od historii obciążania i jest poprawna dla małych odkształceń, gdyż wówczas strumień naprężenia (prędkość wzrostu naprężenia) jest obiektywny.



Rys. 6.3. Interpretacja graficzna równania (6.58, 6.52, 6.53)

W rozważaniach praktycznych w równaniu (6.58) lub (6.59) często pomijany jest człon sprężystego odkształcenia objętościowego  $\frac{1-2\nu}{E} d\sigma_s \delta_{ij}$ . Równanie fizyczne Prandtla-Reussa wówczas przyjmuje postać w przyrostach

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^s = d\lambda S_{ij} + \frac{dS_{ij}}{2G} \quad (6.60)$$

lub w prędkościach

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^s = \lambda S_{ij} + \frac{\dot{S}_{ij}}{2G} \quad (6.61)$$

Mnożąc obustronnie równanie (6.61) przez  $S_{ij}$  otrzymamy współczynnik proporcjonalności  $\lambda$  wyrażony przy pomocy mocy plastycznej  $\dot{L}_p = D = S_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$  oraz granicy plastyczności na ścinanie  $k$

$$\lambda = \frac{\dot{L}_p}{2k^2} = \frac{D}{2k^2} \quad (6.62)$$

Należy zauważyć, że iloczyn  $S_{ij} \dot{S}_{ij} = 0$ . Wynika on z różniczkowania warunku plastyczności Hubera-Misesa  $\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} - k^2 = 0$ . Moc sprężysta  $\dot{L}^s = D^s = S_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^s$  dla ciała sztywno-idealnie plastycznego jest równa zero.

Jeśli przyjmiemy intensywność prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}_i = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}$  i intensywność naprężeń stycznych  $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}$ ,



to współczynnik proporcjonalności wyrazi się zależnością

$$\lambda = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_i}{\dot{\sigma}_i} .$$

Równanie (6.61) Prandtla-Reussa dla materiału sztywno-idealnie plastycznego ( $G \rightarrow \infty$ ) ma postać równania Levy-Misesa,  $\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda S_{ij}$ . Przy odciążeniu,  $\lambda = 0$ , zachowane jest prawo sprężystej zmiany postaci,  $\dot{\epsilon}_{ij}^s = \frac{\dot{S}_{ij}}{2G}$ . Dewiator prędkości wzrostu naprężeń wyraża się następująco:

$$\dot{S}_{ij} = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_x - \dot{\sigma}_s & \dot{\tau}_{xy} & \dot{\tau}_{xz} \\ \dot{\tau}_{yx} & \dot{\sigma}_y - \dot{\sigma}_s & \dot{\tau}_{yz} \\ \dot{\tau}_{zx} & \dot{\tau}_{zy} & \dot{\sigma}_z - \dot{\sigma}_s \end{bmatrix} ,$$

gdzie  $\dot{\sigma}_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial t}$ ,  $\dot{\sigma}_s = \frac{\partial \sigma_s}{\partial t}$ ,  $\dot{\tau}_{xy} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t}$  itd.

Z równania (6.61) bezpośrednio wynikają konkretne zależności między prędkością odkształcenia a naprężeniami. Za człon drugi czyli człon sprężystej zmiany postaci należy przyjąć uogólnione związki Hooke'a, a za człon plastyczny - zależności wynikające z prawa Levy-Misesa lub też ze stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia,  $\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ . Za funkcję  $f$  przyjmujemy warunek plastyczności Treski lub Hubera-Misesa ( $f = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) - \sigma_p^2$ ). Dla tego ostatniego przypadku równanie (6.61) będzie miało następującą postać:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \lambda(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) + \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] , \\ \dot{\epsilon}_y &= \lambda(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) + \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] , \\ \dot{\epsilon}_z &= \lambda(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) + \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] , \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= 6\lambda\tau_{xy} + \frac{\tau_{xy}}{G} = 6\lambda\tau_{xy} + \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} , \\ \dot{\epsilon}_{yz} &= 6\lambda\tau_{yz} + \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} , \\ \dot{\epsilon}_{zx} &= 6\lambda\tau_{zx} + \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx} . \end{aligned} \tag{6.63}$$

### 6.5. Stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia

Teoria plastycznego płynięcia oparta jest na założeniu istnienia potencjału plastycznego. Zakładamy, że potencjał plastyczny istnieje i z niego wynikają związki fizyczne opisujące materiał. Potencjału plastycznego nie da się wyprowadzić na drodze matematycznej analizy fizycznych własności materiałów plastycznych.

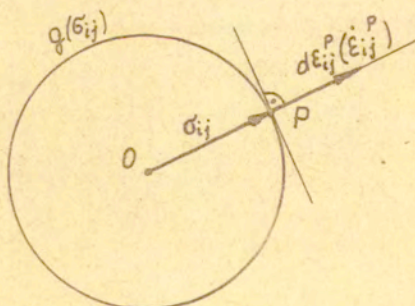
Dla ciał idealnie plastycznych R.Mises jako pierwszy przyjął, że potencjał plastyczny jest funkcją naprężeń  $g(\sigma_{ij})$ . Jeśli funkcja  $g(\sigma_{ij})$  jest potencjałem, to musi spełniać warunek ortogonalności wektora prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}_{ij}$  <sup>powierzchni</sup> do potencjału plastycznego  $g(\sigma_{ij}) = 0$ , bo to wynika z geometrii różniczkowej. Analitycznie warunek ten można zapisać zależnością

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6.64a)$$

lub w przyrostach

$$d\epsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6.64b)$$

Na rysunku 6.4 przedstawiono interpretację graficzną równania (6.64).



Rys. 6.4. Interpretacja graficzna równania (6.64)

Dalszym założeniem ograniczającym jest utożsamienie potencjału plastycznego  $g(\sigma_{ij})$  z warunkiem plastyczności  $f(\sigma_{ij})$ ,  $g(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij})$ . Jest to założenie oczywiste i bardzo ułatwiające interpretację potencjału. Związek (6.64) będzie miał teraz postać

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6.65)$$

i będzie nazywany stowarzyszonym prawem plastycznego płynięcia. Jeśli potencjałem plastycznym nie jest warunek plastyczności  $f(\sigma_{ij}) = 0$ , a jakaś inna funkcja naprężeń  $g(\sigma_{ij}) = 0$ , to związek fizyczny

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6.66)$$

jest nazywany niestowarzyszonym prawem plastycznego płynięcia. Wielkość  $\lambda$  jest współczynnikiem proporcjonalności między składowymi tensora prędkości odkształcenia plastycznego a odpowiednimi pochodnymi potencjału plastycznego. Współczynnik  $\lambda$  musi być dodatni, ponieważ wynika to z mocy plastycznej, która jest dodatnia ( $D = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_{ij} \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} > 0$ ).

Materiał uplastycznia się, gdy stan naprężenia osiągnie wartość graniczną, którą nazywamy warunkiem plastyczności i oznaczamy przez  $f(\sigma_{ij}) = 0$ . Funkcja  $f(\sigma_{ij})$  w przestrzeni naprężeń przedstawia powierzchnię gładką i wypukłą lub obszarami gładką z punktami osobliwymi w postaci krawędzi lub naroży. Powierzchnia ta nazywana jest powierzchnią plastyczności lub powierzchnią plastycznego płynięcia.

Gdy punkt P przedstawiający stan naprężenia istniejący w materiale leży na powierzchni płynięcia, co można matematycznie zapisać

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (6.67)$$

to ten materiał jest uplastyczniony, gdy natomiast znajduje się

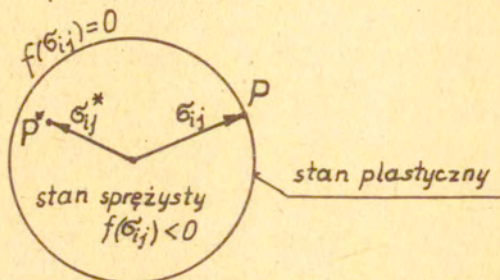
on wewnątrz obszaru ograniczonego powierzchnią płynięcia, co można zapisać

$$f(\sigma_{ij}) < 0, \quad (6.68)$$

to materiał ten jest w stanie sprężystym. Dla materiału idealnie plastycznego nie ma stanu, który można zapisać

$$f(\sigma_{ij}) > 0. \quad (6.69)$$

Zależności (6.67) i (6.68) przedstawiono na rysunku 6.5.



Rys. 6.5. Interpretacja graficzna stanu plastycznego i stanu sprężystego materiału

Jeśli przyjmijemy funkcję  $f(\sigma_{ij}) = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_p)$  jako ciągłą i różniczkowalną

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} d\sigma_3 = 0, \quad (6.70)$$

to stwierdzimy, że przyrost tej funkcji  $df$  na powierzchni płynięcia ma wartość równą zero. Jeśliby przyrosty naprężeń głównych  $d\sigma_i$  spowodowały ujemny przyrost funkcji  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_p)$ , to wówczas nastąpiłby proces odciążenia w rozpatrywanym punkcie ciała,  $df < 0$  (6.68). Przyrost  $df$  nie może być większy od zera dla materiału idealnie plastycznego (6.69). Dzieląc przyrost  $df$  funkcji  $f$  przez przyrost czasu  $dt$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \dot{\sigma}_1 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \dot{\sigma}_2 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} \dot{\sigma}_3 = 0, \quad (6.71)$$

otrzymamy iloczyn skalarny wektora o składowych określonych po-

chodnymi cząstkowymi uwikłanej funkcji  $f$   $\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_3}$  i wektora prędkości zmiany naprężenia  $\dot{\sigma}_i$  składowych  $\dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \dot{\sigma}_3$  równy zeru. Z geometrii różniczkowej wiemy, że pochodna cząstkowa (gradient powierzchni)  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  uwikłanej funkcji  $f$  jest wektorem normalnym do powierzchni utworzonej przez tę funkcję  $f$ . W związku z tym z równania (6.71) jednoznacznie wynika, że wektor prędkości zmiany naprężenia  $\dot{\sigma}_i$  musi być prostopadły do normalnej w rozpatrywanym punkcie na powierzchni płynięcia, a więc musi leżeć w płaszczyźnie stycznej w tym punkcie do powierzchni płynięcia (rys. 6.6a).

W każdym punkcie gładkiej i wypukłej powierzchni płynięcia można poprowadzić jednoznacznie określoną płaszczyznę styczną i obliczyć pochodną cząstkową  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ . Pochodna cząstkowa wyznacza kierunek wektora plastycznego płynięcia  $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ , wielkość tego wektora otrzymujemy z prawa plastycznego płynięcia stowarzyszonego z warunkiem plastyczności  $f(\sigma_{ij})$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6.72)$$

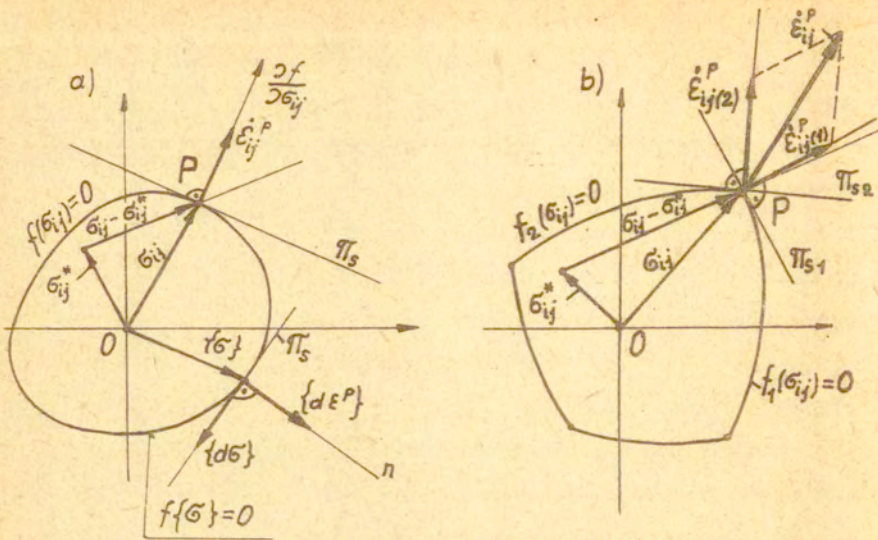
Stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia w przyrostach macierzowo (rys. 6.6a - dół) możemy zapisać

$$\{d\epsilon^P\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \quad (6.72a)$$

W przypadku, gdy stan naprężenia przedstawiony jest punktem osobliwym utworzonym przez przecięcie kilku segmentów powierzchni płynięcia  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , to stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia ma postać

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (6.73)$$

gdzie  $k$  jest numerem segmentu powierzchni i jednocześnie wskaźnikiem sumacyjnym. Związki fizyczne (6.72) i (6.73) graficznie przedstawiono na rysunku 6.6.



Rys.6.6. Interpretacja geometryczna związków (6.72) i (6.73) oraz nierówności  $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij}^P \geq 0$  : a - regularna powierzchnia płynięcia, b - powierzchnia płynięcia z punktami osobliwymi

Z równań (6.72) i (6.73) wypływają następujące wnioski:

- powierzchnia plastyczności  $f(\sigma_{ij})=0$  jest potencjałem dla prędkości odkształceń,
- powierzchnia plastyczności  $f(\sigma_{ij})=0$  określa, kiedy materiał uplastyczni się i podaje mechanizm płynięcia. Mechanizm płynięcia polega na tym, że wektor  $\dot{\epsilon}_{ij}^P$  dotyka powierzchni płynięcia, jest do niej prostopadły i że składowe wektora prędkości odkształcenia określone są gradientem powierzchni  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ ,
- odkształcenie plastyczne związane jest z powierzchnią płynięcia przez stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia, do którego wychodzi się z dodatniości pracy plastycznej, wypukłości powierzchni płynięcia i mechanizmu płynięcia określonego gradientem powierzchni płynięcia  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ .

6.5.1. Stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia dla warunku plastyczności Hubera-Misesa

Przyjmijmy warunek plastyczności Hubera-Misesa dla stanu przestrzennego w postaci

$$f = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) - \sigma_p^2 = 0 \quad (6.74)$$

i obliczamy jego pochodne cząstkowe

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} &= 2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z, & \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} &= 2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z, & \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} &= 2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y, \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} &= 3\tau_{xy}, & \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} &= 3\tau_{yz}, & \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}} &= 3\tau_{zx}, & \frac{\partial f}{\partial \sigma_p} &= -2\sigma_p. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Przy różniczkowaniu funkcji  $f$  względem naprężeń stycznych np.

$\tau_{xy}$  wzięto pod uwagę, że wyraz  $\tau_{xy}^2$  jest połową sumy  $\tau_{xy}^2 + \tau_{yx}^2 =$

$2\tau_{xy}^2$ , ponieważ warunek plastyczności został utworzony przy założeniu

równości naprężeń stycznych  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Naprężenia  $\tau_{xy}$  prawem

plastyczności łączymy z odpowiednimi prędkościami odkształceń

$\dot{\epsilon}_{xy}$ . Formalnie należałoby różniczkować funkcję  $f$  względem

$\tau_{xy}$  i  $\tau_{yx}$  i odnosić do odpowiednich prędkości odkształceń

$\dot{\epsilon}_{xy}$ ,  $\dot{\epsilon}_{yx}$ . Wstawiając obliczone pochodne cząstkowe do równania

(6.72), otrzymamy prędkości odkształceń

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \lambda(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) = 3\lambda(\sigma_x - \sigma_s), \\ \dot{\epsilon}_y &= \lambda(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) = 3\lambda(\sigma_y - \sigma_s), \\ \dot{\epsilon}_z &= \lambda(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) = 3\lambda(\sigma_z - \sigma_s), \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= 3\lambda\tau_{xy}, \\ \dot{\epsilon}_{yz} &= 3\lambda\tau_{yz}, \\ \dot{\epsilon}_{zx} &= 3\lambda\tau_{zx}, \\ \dot{\epsilon}_p &= -2\lambda\sigma_p. \end{aligned} \quad (6.76)$$

gdzie  $\sigma_s = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$  jest średnim naprężeniem,

$$\sigma_p = \sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

jest intensywnością naprężenia,

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2 + \frac{3}{2} (\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)}$$

jest intensywnością prędkości odkształcenia plastycznego.

Po wyeliminowaniu współczynnika proporcjonalności  $\lambda$  z równań (6.76) otrzymujemy prawo plastycznego płynięcia stowarzyszone z warunkiem Hubera-Misesa dla stanu przestrzennego

$$\frac{\dot{\epsilon}_x}{\sigma_x - \sigma_s} = \frac{\dot{\epsilon}_y}{\sigma_y - \sigma_s} = \frac{\dot{\epsilon}_z}{\sigma_z - \sigma_s} = \frac{\dot{\epsilon}_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{\dot{\epsilon}_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{\dot{\epsilon}_{zx}}{\tau_{zx}} = -\frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_i}{\sigma_i} \quad (6.77)$$

Jeśli przyjmiemy warunek plastyczności Hubera-Misesa dla płaskiego stanu naprężenia ( $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ) w postaci

$$f = \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 - \sigma_p^2 = 0 \quad (6.78)$$

i obliczymy jego pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = 2\sigma_x - \sigma_y, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = 2\sigma_y - \sigma_x, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} = 3\tau_{xy}, \quad (6.79)$$

to z równania (6.72) wyznaczmy prędkości odkształceń

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \lambda(2\sigma_x - \sigma_y) = 3\lambda(\sigma_x - \sigma_s), \\ \dot{\epsilon}_y &= \lambda(2\sigma_y - \sigma_x) = 3\lambda(\sigma_y - \sigma_s), \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= 3\lambda\tau_{xy}. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Wektor prędkości odkształcenia utworzony ze składowych (6.80) jest prostopadły do powierzchni płynięcia. Z równań (6.80) bezpośrednio wynika zależność między prędkościami odkształceń plastycznych a naprężeniami dla warunku plastyczności Hubera-Misesa i płaskiego stanu naprężenia w osiach współrzędnych kartezjańskich  $x$  i  $y$

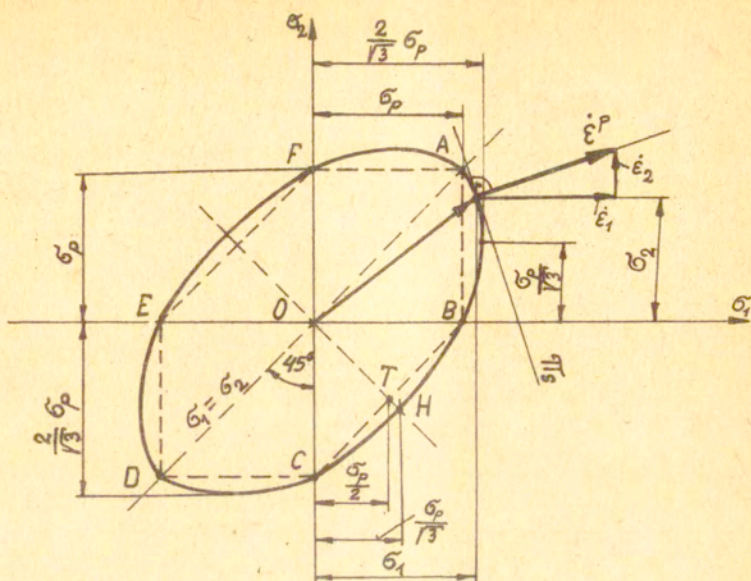
$$\frac{\dot{\epsilon}_x}{2\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\dot{\epsilon}_y}{2\sigma_y - \sigma_x} = \frac{\dot{\epsilon}_{xy}}{3\tau_{xy}} \quad (6.81)$$

lub w osiach głównych

$$\frac{\dot{\epsilon}_1}{2\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\dot{\epsilon}_2}{2\sigma_2 - \sigma_1} \quad (6.82)$$

Na rysunku (6.7) na płaszczyźnie naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2$  pokazano geometryczną interpretację stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia.





Rys. 6.7. Elipsa Hubera-Misesa dla płaskiego stanu naprężenia i wektor prędkości odkształcenia plastycznego  $\dot{\epsilon}^P$

Stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia dla płaskiego stanu odkształcenia ( $\dot{\epsilon}_z = 0, \dot{\epsilon}_{yz} = 0, \dot{\epsilon}_{zx} = 0, \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \sigma_x \neq 0, \sigma_y \neq 0, \sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \tau_{xy} \neq 0$ ) i warunku plastyczności Hubera-Misesa

$$f = \frac{3}{4} \sigma_x^2 - \frac{3}{2} \sigma_x \sigma_y + \frac{3}{4} \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 - \sigma_p^2 = 0 \quad (6.83)$$

lub

ma postać

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \text{ gdzie } k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\dot{\epsilon}_x}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\dot{\epsilon}_y}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{\dot{\epsilon}_{xy}}{2\tau_{xy}} \quad (6.84a)$$

lub

$$\frac{\dot{\epsilon}_x}{\sigma_x - \sigma_s} = \frac{\dot{\epsilon}_y}{\sigma_y - \sigma_s} = \frac{\dot{\epsilon}_{xy}}{\tau_{xy}}, \quad (6.84b)$$

gdzie  $\sigma_s = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ .

Przyjmując warunek plastyczności Hubera-Misesa dla osiowej symetrii w postaci ogólnej

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 3\tau_{xy}^2 = 6k^2$$

i po podstawieniu zależności  $k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$  i uporządkowaniu otrzymujemy postać warunku plastyczności nadającą się do różniczkowania

$$f = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_r)^2 + 3\tau_{xy}^2 - \sigma_s^2 = 0. \quad (6.85)$$

Po obliczeniu pochodnych cząstkowych  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_r}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_\theta}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_z}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \tau_{rz}}$  i podstawieniu do równania (6.72) otrzymamy prędkości odkształceń plastycznych

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \lambda(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z), \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \lambda(2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z), \\ \dot{\epsilon}_z &= \lambda(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta), \\ \dot{\epsilon}_{rz} &= 3\lambda\tau_{rz}. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Z równań (6.86) bezpośrednio wynika stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia w warunkach osiowej symetrii dla warunku plastyczności Hubera-Misesa

$$\frac{\dot{\epsilon}_r}{2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z} = \frac{\dot{\epsilon}_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z} = \frac{\dot{\epsilon}_z}{2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta} = \frac{\dot{\epsilon}_{rz}}{3\tau_{rz}} \quad (6.87a)$$

lub w postaci

$$\frac{\dot{\epsilon}_r}{\sigma_r - \sigma_s} = \frac{\dot{\epsilon}_\theta}{\sigma_\theta - \sigma_s} = \frac{\dot{\epsilon}_z}{\sigma_z - \sigma_s} = \frac{\dot{\epsilon}_{rz}}{\tau_{rz}}, \quad (6.87b)$$

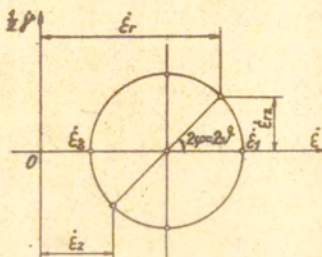
gdzie  $\sigma_s = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3}$  jest średnim naprężeniem.

Korzystając z konstrukcji koła Mohra dla naprężeń i dla prędkości odkształceń (rys. 6.8) łatwo możemy znaleźć zależności między naprężeniami głównymi a naprężeniami w układzie r, z

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2}, \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2}, \\ \sigma_2 &= \sigma_\theta \end{aligned} \quad (6.88)$$

oraz zależności między głównymi prędkościami odkształceń a prędkościami odkształceń w układzie  $r, z$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{\dot{\xi}_r + \dot{\xi}_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\dot{\xi}_r - \dot{\xi}_z)^2 + 4\dot{\xi}_{rz}^2}, \\ \dot{\xi}_3 &= \frac{\dot{\xi}_r + \dot{\xi}_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\dot{\xi}_r - \dot{\xi}_z)^2 + 4\dot{\xi}_{rz}^2}, \\ \dot{\xi}_2 &= \dot{\xi}_\theta = \frac{v_r}{r}. \end{aligned} \quad (6.89)$$



Rys. 6.8. Koło Mohra dla prędkości odkształceń

Prędkości odkształceń w osiach współrzędnych  $r, \theta, z$  dla osiowej symetrii można zapisać zależnościami

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_r &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \dot{\xi}_\theta = \frac{v_r}{r}, \quad \dot{\xi}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \dot{\xi}_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad \dot{\xi}_{rz}^* = 2 \dot{\xi}_{rz} \end{aligned} \quad (6.90)$$

gdzie  $v_r$  i  $v_z$  są liniowymi prędkościami płynięcia w układzie współrzędnych walcowych.

### 6.5.2. Stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia dla warunku plastyczności Treski

Warunek plastyczności Treski posiada krawędzie (dla stanu przestrzennego) i punkty (dla stanu płaskiego) osobliwe, na których wektor prędkości odkształcenia może przyjmować dowolny kierunek, ale zawarty między normalnymi do przyległych boków.

W punktach osobliwych występuje nieciągłość funkcji i pochodna jest niejednoznacznie określona.

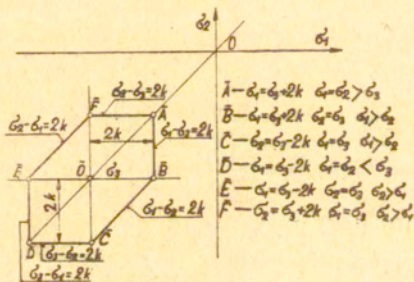
Weźmy warunek plastyczności Treski przedstawiony na rysunku 6.9 i rozważmy równania naprężeń na boku  $\bar{A}\bar{B}$ , boku  $\bar{B}\bar{C}$  i w punkcie osobliwym  $\bar{B}$ .

Na boku  $\bar{A}\bar{B}$  mamy funkcję

$$f_1 = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_p = 0, \quad (6.91)$$

której pochodne cząstkowe są następujące:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3} = -1. \quad (6.92)$$



Rys. 6.9. Graniastosłup Treski przecięty płaszczyzną  $\sigma_3 = const.$

Podstawiając pochodne (6.92) do równania (6.72) otrzymamy główne prędkości odkształceń plastycznych

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1^P &= \lambda_1, & \dot{\epsilon}_2^P &= 0, & \dot{\epsilon}_3^P &= -\lambda_1, \\ \dot{\epsilon}_1^P &= -\dot{\epsilon}_3^P. \end{aligned} \quad (6.93)$$

Z równań (6.93) wynika, że prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon}_2^P$  w kierunku naprężenia  $\sigma_2$  jest równa zero czyli nie występuje odkształcenie plastyczne, a to dowodzi, że ogólny stan odkształcenia przeszedł w płaski stan odkształcenia. Jest to przypadek czystego ścinania w płaszczyźnie głównych osi  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ .

Rozważmy teraz funkcję naprężeń  $f_2$  występującą na boku  $\bar{B}\bar{C}$  w postaci

$$f_2 = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_p = 0. \quad (6.94)$$

Po obliczeniu pochodnych cząstkowych  $\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_1}$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_2}$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_3}$  i wstawieniu do równania (6.72) otrzymujemy główne prędkości odkształceń

$$\dot{\epsilon}_1^P = \lambda_2, \quad \dot{\epsilon}_2^P = -\lambda_2, \quad \dot{\epsilon}_3^P = 0, \quad (6.95)$$

które również przedstawiają przypadek czystego ścinania w płaszczyźnie głównych osi  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ .

Kierunki i znaki głównych prędkości odkształceń plastycznych dla wszystkich punktów sześcioboku Treski pokazano na rysunku 6.10.

W punkcie osobliwym  $\bar{B}$  warunku Treski (rys. 6.9) mamy dwa równania naprężeń

$$f_1 = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_p = 0, \quad (6.96)$$

$$f_2 = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_p = 0.$$

Zgodnie ze stowarzyszonym prawem plastycznego płynięcia (6.73) mamy następujące prędkości odkształceń

$$\dot{\epsilon}_1^P = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_1} = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$\dot{\epsilon}_2^P = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_2} = 0 - \lambda_2 = -\lambda_2, \quad (6.97)$$

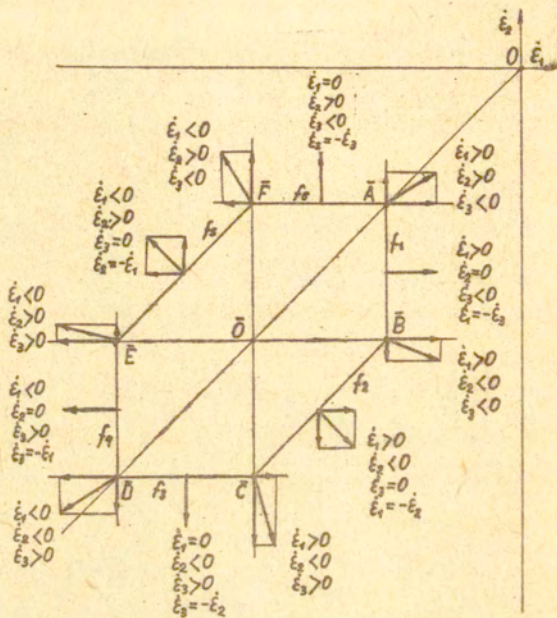
$$\dot{\epsilon}_3^P = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_3} = -\lambda_1 + 0 = -\lambda_1.$$

Należy zaznaczyć, że współczynniki proporcjonalności  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są dodatnie, a zatem główne prędkości odkształceń mają znaki

$$\dot{\epsilon}_1^P > 0, \quad \dot{\epsilon}_2^P < 0, \quad \dot{\epsilon}_3^P < 0. \quad (6.98)$$

Z analizy głównych prędkości odkształceń plastycznych wynika, że dla wszystkich punktów warunku plastyczności Treski spełniony jest warunek nieściśliwości materiału

$$\dot{\epsilon}_1^P + \dot{\epsilon}_2^P + \dot{\epsilon}_3^P = 0. \quad (6.99)$$



Rys. 6.10. Znaki głównych prędkości odkształceń

### 6.6. Kryteria obciążania, odciążania i procesu neutralnego

Kryteria procesu obciążania i odciążania można sformułować dla materiału idealnie plastycznego i dla materiału wykazującego umocnienie.

Dla materiału idealnie plastycznego o warunku plastyczności  $f(\sigma_{ij}) = 0$  za kryterium obciążania przyjmuje się związek

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0, \quad \lambda > 0, \quad (6.100)$$

gdzie  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  jest wektorem gradientu powierzchni płynięcia,  $\dot{\sigma}_{ij}$  jest wektorem prędkości zmiany naprężenia i leży na płaszczyźnie stycznej  $\Pi_s$  do powierzchni płynięcia. Przy obciążaniu musi istnieć przyrost odkształcenia plastycznego  $d\varepsilon_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p dt$ . Iloczyn skalarny wektora  $\dot{\sigma}_{ij}$  i wektora  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  jest równy zeru ( $\dot{\sigma}_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$ ) i jest warunkiem ortogonalności wektorów  $\dot{\sigma}_{ij}$  i  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ .

Dysypacja plastyczna przy obciążaniu jest zawsze dodatnia

$$D = \dot{L}_p = \dot{\sigma}_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^p > 0. \quad (6.101)$$

Prędkość odkształcenia plastycznego  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  wynika z prawa plastycznego płynięcia stowarzyszonego z warunkiem plastyczności

$f(\sigma_{ij}) = 0$ . Współczynnik proporcjonalności  $\lambda$  jest dodatni, bo praca jest dodatnia.

Stan obciążania czyli proces czynny możemy zapisać macierzowo, gdy jest on zdefiniowany iloczynem skalarnym

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} = 0 \quad (6.102)$$

lub przyrostem energii dysypacji

$$dL_p = \{\sigma\}^T \{d\varepsilon^p\} > 0. \quad (6.103)$$

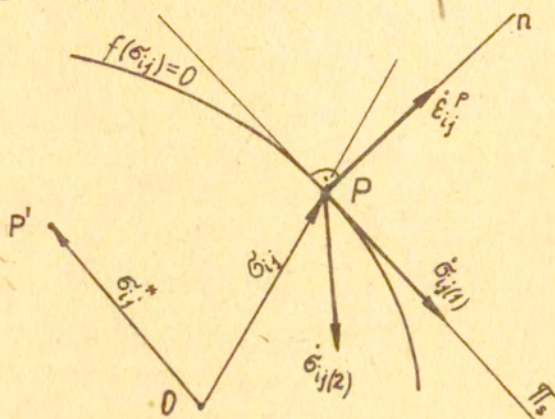
Proces odciążania dla materiału idealnie plastycznego

$f(\sigma_{ij}) = 0$  definiowany jest związkami

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\sigma}_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0, \dot{\epsilon}_{ij}^P = 0, \lambda = 0. \quad (6.104)$$

Wektor prędkości zmiany naprężenia  $\dot{\sigma}_{ij}$  jest skierowany do wewnątrz powierzchni płynięcia. Przy odciążaniu moc dysypowana jest równa zero,  $D = 0$ .

Proces obciążania i odciążania dla materiału idealnie plastycznego pokazany jest na rysunku 6.11.



Rys. 6.11. Interpretacja geometryczna procesu obciążania  $\dot{\sigma}_{ij(1)}$  i odciążania  $\dot{\sigma}_{ij(2)}$  dla materiału idealnie plastycznego

Dla materiału umacniającego się funkcja plastyczności  $f$  zależna jest od naprężeń jak również od parametru wzmocnienia  $\alpha$

$$f(\sigma_{ij}, \alpha) = 0. \quad (6.105)$$

Parametr wzmocnienia  $\alpha$  musi być tak dobrany, aby dla materiału, który jeszcze nie doznaje odkształceń, był równy zero. Dla materiału izotropowego powinien on powodować stopniowe rozszerzanie się powierzchni płynięcia.

Parametr wzmocnienia  $\alpha$  można określić z pracy plastycznej



$$\mathcal{H} = L_p = \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} \tilde{\sigma}_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (6.106)$$

lub też z intensywności odkształcenia plastycznego

$$\mathcal{H} = \varepsilon_i^p = \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_i^p. \quad (6.107)$$

Z równań (6.106) i (6.107) wynika, gdy  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$ , to  $\mathcal{H} = 0$ . Parametr umocnienia  $\mathcal{H}$  zależy od wielkości odkształcenia plastycznego.

Często funkcję plastyczności  $f$ , uwzględniającą umocnienie materiału uzależnia się od naprężeń  $\tilde{\sigma}_{ij}$  i odkształceń plastycznych  $\varepsilon_{ij}^p$ , co ogólnie można zapisać w postaci

$$f(\tilde{\sigma}_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0. \quad (6.108)$$

Rozważmy teraz zmianę funkcji  $f$  w czasie. Obliczmy jej pochodną względem czasu

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} \dot{\tilde{\sigma}}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (6.109)$$

Procesy, w których przyrost funkcji  $df < 0$  i przyrost odkształcenia  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$ , nazywamy procesami odciążania. Matematycznie proces odciążania można zapisać

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} \dot{\tilde{\sigma}}_{ij} < 0, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0, \quad f(\tilde{\sigma}_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0, \quad \lambda = 0. \quad (6.110)$$

Jeśli iloczyn skalarny wektora  $\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}$  ortogonalnego do powierzchni płynięcia i wektora  $\dot{\tilde{\sigma}}_{ij}$  jest mniejszy od zera, to oznacza, że wektor  $\dot{\tilde{\sigma}}_{ij}$  jest skierowany do wewnątrz powierzchni płynięcia.

Jeśli zmiana stanu naprężenia powoduje zmianę stanu odkształcenia, ale bez przyrostu odkształcenia  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$  i powierzchnia płynięcia nie ulega zmianie  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , to taki proces nazywamy procesem neutralnym i matematycznie zapisujemy

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} \dot{\tilde{\sigma}}_{ij} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0, \quad f(\tilde{\sigma}_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0, \quad \lambda = 0. \quad (6.111)$$

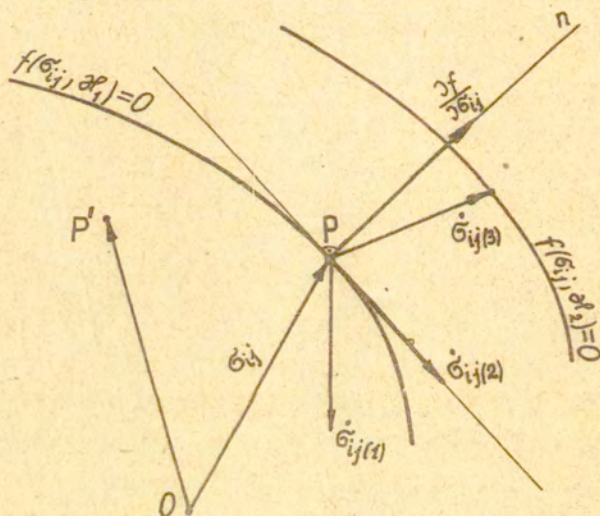
Oznacza to, że droga obciążania jest styczna do aktualnej powierzchni płynięcia. Wektor przyrostu naprężenia  $d\tilde{\sigma}_{ij} = \dot{\tilde{\sigma}}_{ij}$  jest styczny do powierzchni płynięcia (rys. 6.12).

Proces obciążania występuje wówczas, gdy pojawiają się przyrosty odkształcenia plastycznego  $d\varepsilon_{ij}^P$  i występuje zmiana powierzchni płynięcia w czasie z  $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij(1)}^P) = 0$  do  $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij(2)}^P) = 0$ , to proces obciążania matematycznie można zapisać następująco:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^P > 0, \quad \lambda > 0, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P) = 0. \quad (6.112)$$

Przy obciążaniu wektor prędkości zmiany naprężenia  $\dot{\sigma}_{ij}$  skierowany jest na zewnątrz powierzchni płynięcia (rys. 6.12).

Interpretacja geometryczna procesu odciążania, procesu neutralnego i procesu obciążania jest prosta i pokazana na rysunku 6.12. Podobna interpretacja jest dla powierzchni płynięcia z punktami osobliwymi.



Rys. 6.12. Interpretacja geometryczna kryteriów procesu:

- 1 - odciążania,
- 2 - neutralnego,
- 3 - obciążania.

Literatura do rozdziału VI

1. Praca zespołowa pod red. W.Olszaka, P.Perzyny i A.Sawczuka. Teoria plastyczności. PWN, Warszawa, 1965.
2. W.Szczepiński. Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej. PWN, Warszawa, 1967.
3. Л.М.Качанов. Основы теории пластичности. Изд. „Наука”, Москва, 1969.
4. Н.Н.Малинин. Прикладная теория пластичности и ползучести. Изд. „Машиностроение”, Москва, 1975.

Rozdział VII

PRACA I MOC ODKSZTAŁCENIA PLASTYCZNEGO

7.1. Praca odkształcenia plastycznego

Dla dowolnego stanu naprężenia przyrost jednostkowej pracy odkształcenia plastycznego jest równy iloczynowi tensora naprężenia i przyrostu tensora odkształcenia plastycznego

$$dL_p = \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij}^p, \quad (7.1)$$

a po rozpisaniu tensorów przyjmuje postać

$$dL_p = \sigma'_x d\varepsilon_x^p + \sigma'_y d\varepsilon_y^p + \sigma'_z d\varepsilon_z^p + 2\sigma'_{xy} d\varepsilon_{xy}^p + 2\sigma'_{yz} d\varepsilon_{yz}^p + 2\sigma'_{zx} d\varepsilon_{zx}^p,$$

gdzie  $2d\varepsilon_{xy}^p = d\gamma_{xy}^p$ ,  $2d\varepsilon_{yz}^p = d\gamma_{yz}^p$ ,  $2d\varepsilon_{zx}^p = d\gamma_{zx}^p$ .

Cała praca odkształcenia plastycznego przypadająca na jednostkę objętości jest całką z przyrostu jednostkowej pracy plastycznej (rys. 7.1a)

$$L_p = \int_{\varepsilon_{ij}^1}^{\varepsilon_{ij}^2} \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij}^p. \quad (7.2a)$$

W interpretacji geometrycznej praca plastyczna jest polem pod krzywą procesu odkształcenia plastycznego. Pracę odkształcenia plastycznego<sup>w</sup> całej objętości /całego ciała/ można wyrazić wzorem

$$L_p^c = \int_V L_p dV = \int_V \int_{\varepsilon_{ij}^1}^{\varepsilon_{ij}^2} \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij}^p dV. \quad (7.2b)$$

Pracę odkształcenia  $L$  można podzielić na pracę odkształcenia sprężystego  $L_s$  i na pracę odkształcenia plastycznego  $L_p$

$$L = \int_0^{\varepsilon_{ij}^A} \sigma_{ij}^s d\varepsilon_{ij} = \int_0^{\varepsilon_{ij}^A} \sigma_{ij}^s d\varepsilon_{ij}^s + \int_0^{\varepsilon_{ij}^A} \sigma_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p, \quad (7.3)$$

ponieważ całkowite odkształcenie  $\varepsilon_{ij}$  składa się z odkształcenia sprężystego  $\varepsilon_{ij}^s$  i odkształcenia plastycznego  $\varepsilon_{ij}^p$ ,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^s + \varepsilon_{ij}^p$ .

Pracę dysypowaną (rozproszoną) w procesie deformacji plastycznej można również obliczyć ze wzoru

$$L_p^c = \int_V \int_0^{\varphi} \sigma_p(\varphi, \dot{\varphi}, T) d\varphi dV. \quad (7.4)$$

Naprężenie  $\sigma$  powodujące odkształcenie jest funkcją odkształcenia plastycznego  $\varphi$ , prędkości odkształcenia  $\dot{\varphi}$  i temperatury  $T$ . Pracę odkształcenia plastycznego przypadającą na jednostkę objętości można również wyrazić (rys. 7.1b)

$$L_p = \int_0^{\varphi_i^A} \sigma_p(\varphi_i) d\varphi_i \quad (7.5a)$$

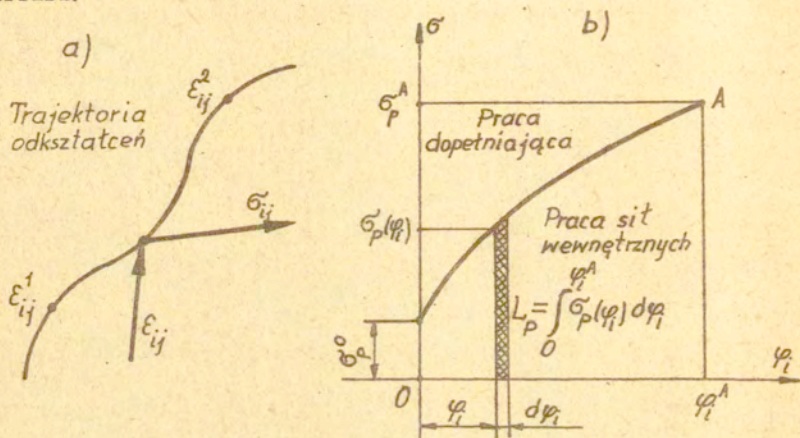
a dla całej objętości  $V$

$$L_p^c = \int_V \int_0^{\varphi_i^A} \sigma_p(\varphi_i) d\varphi_i dV. \quad (7.5b)$$

Dla przypadku jednorodnego odkształcenia w całej objętości i gdy nie mamy równania krzywej umocnienia, a jedynie wykres umocnienia, to wygodnie jest wprowadzić pojęcie współczynnika wykresu  $\lambda = \frac{\int_0^{\varphi_i^A} \sigma_p(\varphi_i) d\varphi_i}{\sigma_p^A \varphi_i^A}$  i wówczas wzór (7.5b) przyjmie postać

$$L_p^c = V \lambda \sigma_{ps} \varphi_i, \quad (7.5c)$$

gdzie  $\sigma_{ps} = \frac{1}{2} (\sigma_p^o + \sigma_p^k)$  jest średnim naprężeniem uplastyczniającym,  $\varphi_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}$  jest zastępczym odkształceniem logarytmicznym;  $\varphi_1 = \ln \frac{b}{a_0}$ ,  $\varphi_2 = \ln \frac{b}{b_0}$ ,  $\varphi_3 = \ln \frac{c}{c_0}$ , a, b, c są wymiarami prostopadłościanu, V jest objętością materiału.



Rys. 7.1. a/ Trajektoria odkształceń i przyporządkowanie wodzącemu wektorowi odkształcenia  $\epsilon_{ij}$  wektora naprężenia  $\sigma_{ij}$ , b/ Geometryczna interpretacja pracy

Pracę odkształcenia plastycznego można wyrazić za pomocą intensywności naprężenia  $\sigma_i$  i intensywności odkształcenia  $\epsilon_i$

$$dL_p = \sigma_i(\epsilon_i) d\epsilon_i, \quad L_p = \int_0^{\epsilon_i} \sigma_i(\epsilon_i) d\epsilon_i,$$

$$L_p^c = \int \int_V \int_0^{\epsilon_i} \sigma_i(\epsilon_i) d\epsilon_i dV, \quad (7.6)$$

gdzie  $\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}$ ,

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)}$$

Pracę odkształcenia sprężystego odniesioną do jednostki objętości wyraża się równaniem

$$L = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (7.7a)$$

a wykorzystując definicję dwiatora naprężenia i dwiatora odkształcenia, otrzymamy podział pracy sprężystej na pracę odkształcenia postaci  $L_d$  i na pracę odkształcenia objętości  $L_v$

$$L = \frac{1}{2} (S_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}) (e_{ij} + \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}) = \frac{1}{2} S_{ij} e_{ij} + \frac{1}{6} \varepsilon_{kk} \sigma_{kk} \quad (7.7b)$$

ponieważ  $S_{ij} \delta_{ij} = \sigma_{ij} \delta_{ij} = 0$ . Dla naprężeń i odkształceń głównych pracę odkształcenia sprężystego można zapisać

$$L = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \quad (7.7c)$$

### Przykład 1

Obliczyć pracę potrzebną do spęczania bloku lub walca jak na rysunku 7.2.

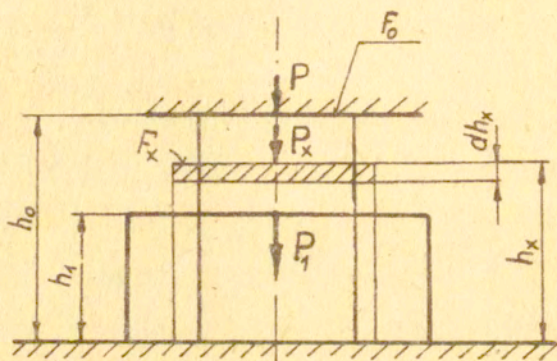
### Rozwiązanie

Przyrost pracy plastycznej można napisać

$$dL = \sigma_x F_x dh_x = P_x dh_x,$$

a całkowitą pracę potrzebną do spęczenia próbki

$$L = \int_{h_0}^{h_1} \sigma_p F_x dh_x . \quad (7.8)$$



Rys. 7.2. Ilustracja procesu spęczenia próbki

Wychodząc z warunku stałej objętości  $F_0 h_0 = F_x h_x$ ,  $F_x = \frac{V_0}{h_x}$ ,  
równanie na pracę przyjmie postać

$$L = \int_{h_0}^{h_1} \sigma_p \frac{V_0}{h_x} dh_x = \sigma_p V_0 \int_{h_0}^{h_1} \frac{dh_x}{h_x} = \sigma_p V_0 \ln h_x \Big|_{h_0}^{h_1} ,$$

$$L = \sigma_p V_0 \ln \frac{h_1}{h_0} = \sigma_p V_0 |\varphi| . \quad (7.9)$$

Dla materiału sprężysto-idealnie plastycznego naprężenie w prociesie odkształcenia jest stałe i równe  $\sigma_p$ . Dla materiału podlegającego wzmocnieniu trzeba wyznaczyć naprężenie średnie z naprężenia początkowego i końcowego

$$\sigma_{ps} = \frac{\sigma_{p1} + \sigma_{p2}}{2} .$$

Wówczas praca odkształcenia plastycznego przyjmie postać



$$L_p = \sigma_{ps} V_0 |\varphi| = \sigma_{ps} V_x, \quad (7.10)$$

gdzie  $V_x$  jest objętością przemieszczoną.

Z pojęciem pracy odkształcenia plastycznego nierozłącznie wiąże się praca kształtowania  $L_k$  tj. praca procesu technologicznego np. walcowania, kucia itp. Praca kształtowania  $L_k$  - to praca sił zewnętrznych składająca się z pracy odkształcenia plastycznego  $L_p$  i pracy tarcia  $L_t$

$$L_k = L_p + L_t. \quad (7.11)$$

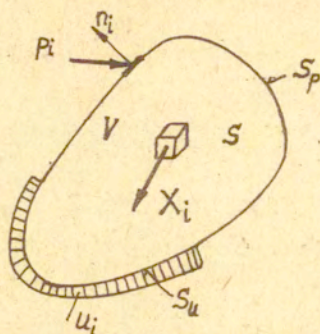
Praca tarcia jest to praca zużyta na przemieszczanie się materiału odkształcanego po powierzchni narzędzia.

## 7.2. Zasada pracy wirtualnej

Praca wirtualna jest to praca mogąca zaistnieć, możliwa, spodziewana według teoretycznych obliczeń.

Przyjrzyjmy się ciału o objętości  $V$  ograniczonemu powierzchnią  $S$ . Niech na części powierzchni  $S_p$  działają siły powierzchniowe  $p_i$ , a na części  $S_u$  - przemieszczenia  $u_i$ .

Załóżmy, że w ciele istnieje statycznie dopuszczalne pole naprężeń  $\sigma_{ij}^s$  (spełniające równania równowagi  $\sigma_{i,j}^s + X_i = 0$  i warunki brzegowe  $\sigma_{ij}^s n_j = p_i$ ) i dowolne pole przemieszczeń kinetycznie dopuszczalne  $u_i^k$ , które na powierzchni  $S_u$  spełnia warunek  $u_i^k = u_i^0$ .



Rys. 7.3. Badane ciało.  $X_i$  - siły objętościowe (ciężkości),  
 $n_i$  - wektor jednostkowy

Z pola przemieszczeń  $u_i^k$  możemy obliczyć pole odkształceń kinematycznie dopuszczalne

$$\varepsilon_{ij}^k = U_{(i,j)}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^k}{\partial x_i} \right), \quad (7.12)$$

które jest symetryczną częścią gradientu pola przemieszczeń

$$U_{i,j}^k = \varepsilon_{ij}^k + \omega_{ij}^k = \frac{1}{2} (U_{i,j}^k + U_{j,i}^k) + \frac{1}{2} (U_{i,j}^k - U_{j,i}^k),$$

gdzie  $\omega_{ij}^k = U_{[i,j]}^k$  jest antysymetryczną częścią gradientu.

Pomiędzy naprężeniami  $\sigma_{ij}^s$  a odkształceniami  $\varepsilon_{ij}^k$  istnieje związek fizyczny wynikający z prawa Hooke'a,  $\sigma_{ij}^s = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ , gdzie  $D_{ijkl}$  jest macierzą sprężystości.

Pracę wirtualną (inaczej przygotowaną) określamy jako całkę z iloczynu symetrycznego tensora naprężenia  $\sigma_{ij}^s$  i symetrycznego tensora odkształcenia  $\varepsilon_{ij}^k$ .

$$L_{virt.} = \int_V \sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij}^k dV. \quad (7.13)$$

Sumowanie odbywa się po wszystkich indeksach. Gdy zastosujemy całkowanie przez części ( $\int u dv = uv - \int v du$ ) to równanie (7.13) będzie miało postać ( $u_{i,j}^k = \xi_{ij}^k + \omega_{ij}^k$  tensor  $\xi_{ij}^k$  jest symetryczny,  $\xi_{ij}^k \omega_{kj} = 0$ )

$$\int_V \xi_{ij}^s \xi_{ij}^k dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\xi_{ij}^s u_i^k) dV - \int_V \frac{\partial \xi_{ij}^s}{\partial x_j} u_i^k dV,$$

następnie stosując wzór Gaussa na zmianę całki objętościowej na powierzchniową ( $\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dV = \int_S \varphi n_j dS$ ) i po podstawieniu za  $\frac{\partial \xi_{ij}^s}{\partial x_j} = -X_i$  (z równania równowagi  $\xi_{ij,j}^s + X_i = 0$ ) otrzymamy

$$\int_V \xi_{ij}^s \xi_{ij}^k dV = \int_S \xi_{ij}^s u_i^k n_j dS + \int_V X_i u_i^k dV.$$

Wprowadzając za  $\xi_{ij}^s n_j = p_i$  (nacisk jednostkowy) i uwzględniając to, że powierzchnia całkowita  $S = S_p + S_u$ , na powierzchni  $S_p$  znane są naprężenia  $p_1 = p_1^0$ , a na powierzchni  $S_u$  znane są przemieszczenia  $u_1^k = u_1^0$ , to otrzymamy ostateczne równanie na pracę przygotowaną

$$\int_V \xi_{ij}^s \xi_{ij}^k dV = \int_{S_p} p_i^0 u_i^k dS_p + \int_{S_u} p_i u_i^0 dS_u + \int_V X_i u_i^k dV. \quad (7.14)$$

Dla procesu odkształcenia plastycznego (nieodwracalnego) lewa strona równania (7.14) określa całkowitą pracę dysypowaną wewnątrz ciała, prawa natomiast - przedstawia pracę sił zewnętrznych i sił ciężkości.

Równanie (7.14) przedstawia zasadę pracy przygotowanej, a sens jego jest taki: praca dysypowana wewnątrz ciała jest równa pracy sił (obciążeń) zewnętrznych i sił ciężkości. Równanie (7.14) jest ważne dla dowolnych pól naprężeń i dowolnych przemieszczeń spełniających jedynie równania równowagi, związki między przemieszczeniami i odkształceniami oraz warunki brzegowe.

### 7.3. Moc odkształcenia plastycznego

Przyrost jednostkowej pracy plastycznej  $dL_p$  zachodzący w jednostce czasu nazywamy mocą odkształcenia plastycznego

$$\frac{dL_p}{dt} = \dot{L}_p = D. \quad (7.15)$$

Moc odkształcenia plastycznego inaczej zwana mocą dysypowaną (dysypacja jest to rozproszenie energii w ciele) lub funkcją dysypacji określana jest iloczynem tensora naprężenia i tensora prędkości odkształcenia plastycznego

$$D = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p. \quad (7.16)$$

Jest to moc dysypowana na jednostkę objętości. Moc odkształcenia plastycznego w całej objętości jest równa

$$D^c = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dV. \quad (7.17)$$

Jeśli funkcję dysypacji  $D$  zróżniczkujemy względem prędkości odkształcenia plastycznego  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ , to otrzymamy naprężenie

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}^p} = \sigma_{ij}. \quad (7.18)$$

Funkcja dysypacji jest tu potencjałem plastycznym dla naprężeń, a więc związku konstytutywnego  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\dot{\epsilon}_{ij}^p)$ . Potencjałem plastycznym nazywamy wielkość fizyczną mogącą spowodować stan plastyczny materiału.

Odształcenie  $\epsilon_{ij}$  generuje naprężenie  $\sigma_{ij}$  w myśl prawa

$$\sigma'_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (7.19)$$

Natomiast naprężenie  $\sigma'_{ij}$  generuje prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon}_{ij}$ , ale

tylko co do kierunku, a nie co do wielkości.

Moc odkształcenia plastycznego dla jednostki objętości można również wyrazić przy pomocy intensywności naprężeń i intensywności prędkości odkształceń

$$D = \sigma_i \dot{\epsilon}_i \quad (7.20)$$

Jeśli weźmiemy prawo płynięcia Levy-Misesa  $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda S_{ij}$  i materiał, dla którego  $\epsilon_{ii} = 0$ ,  $\sigma_{ii} = 3k\epsilon_{ii}$ , warunek plastyczności Hubera-Misesa  $S_{1j}S_{1j} = 2k^2$ ,  $k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$  oraz intensywność prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}_i = \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}$  i obliczymy parametr  $\lambda = \frac{\dot{\epsilon}_i}{2k}$

( $\lambda = \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{S_{ij}} = \frac{\dot{\epsilon}_{ij} S_{ij}}{S_{ij} S_{ij}} = \frac{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}{\lambda 2k} = \frac{\dot{\epsilon}_i^2}{2\lambda 2k}$ ) to całkowitą moc odkształcenia plastycznego wyrazimy przy pomocy naprężenia uplastyczniającego  $\sigma_p$  i intensywności prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}_i$ .

Biorąc moc odkształcenia plastycznego dla całej objętości (7.17), otrzymamy

$$D^c = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V S_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V \frac{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}{\lambda} dV = \int_V \frac{\dot{\epsilon}_i^2}{2 \dot{\epsilon}_i} \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}} dV$$

i ostatecznie

$$D^c = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}} \int_V \dot{\epsilon}_i dV \quad (7.21)$$

Funkcję dysypacji można wyrazić za pomocą dewiatorów.

Gdy przyjmiemy, że pierwsze niezmienniki dewiatora naprężenia i prędkości odkształcenia są równe zeru,  $S_{ii} = 0$ ,  $\dot{\epsilon}_{ii} = 0$ , i to, że iloczyn skalarny tensorów jednostkowych

$$\delta_{ij} \delta_{ij} = 3 \quad (\delta_{ij} \delta_{ij} = \delta_{ii} = 1+1+1=3),$$

funkcja dysypacji ma postać

$$D = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = (S_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}) (\dot{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij}) = S_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \dot{\epsilon}_{kk} \quad (7.22)$$

Dla materiału nieściśliwego,  $\dot{\epsilon}_{kk} = 0$ , funkcja dysypacji będzie przedstawiała się następująco:

$$D = S_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (7.23)$$

Równanie (7.23) w osiach głównych po rozpisaniu dziewięciu przyjmuje postać

$$D = S_{11} \dot{\epsilon}_{11} + S_{22} \dot{\epsilon}_{22} + S_{33} \dot{\epsilon}_{33} \quad (7.24)$$

Rozkładając tensor naprężeń w osiach głównych na tensor kulisty i dewiator otrzymamy

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\sigma}_s & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_s & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 - \bar{\sigma}_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \bar{\sigma}_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \bar{\sigma}_s \end{vmatrix},$$

gdzie  $\bar{\sigma}_s = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$  jest naprężeniem średnim, dewiator

$$\text{naprężeń: } S_{11} = \sigma_1 - \bar{\sigma}_s = \frac{3\sigma_1}{3} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3},$$

$$S_{22} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3}, \quad S_{33} = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}.$$

Podobnie można wyrazić dewiator prędkości odkształceń.

Podstawiając główne dewiatory naprężeń i prędkości odkształceń do równania (7.24) otrzymamy funkcję dysypacji w osiach głównych

$$D = \left( \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \right) \left( \frac{2\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3}{3} \right) + \left( \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} \right) \left( \frac{2\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}{3} \right) + \left( \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \right) \left( \frac{2\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2}{3} \right),$$

$$D = \frac{1}{3} (2\sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + 2\sigma_2 \dot{\epsilon}_2 + 2\sigma_3 \dot{\epsilon}_3 - \sigma_1 \dot{\epsilon}_2 - \sigma_1 \dot{\epsilon}_3 - \sigma_2 \dot{\epsilon}_1 - \sigma_2 \dot{\epsilon}_3 - \sigma_3 \dot{\epsilon}_1 - \sigma_3 \dot{\epsilon}_2). \quad (7.25)$$

### 7.3.1. Postać funkcji dysypacji dla warunku plastyczności Treski

Przyjmijmy warunek plastyczności Treski w postaci

$$\sigma_i - \sigma_k = 2k \quad (7.26)$$

o interpretacji graficznej jak na rysunku (7.4a), stowarzyszone prawo płynięcia plastycznego

$$\dot{\epsilon}_{ik} = \lambda_j \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_{ik}} \quad (7.27)$$

oraz moc dysypowaną na jednostkę objętości w osiach głównych dla materiału ściśliwego

$$D = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3 \quad (7.28)$$

Dla przykładu obliczmy jednostkową moc dysypowaną w punkcie  $\bar{C}$  warunku plastyczności Treski (rys. 7.4a). W punkcie  $\bar{C}$  schodzą się płaszczyzny warunku plastyczności o równaniach

$$f_2 = \sigma_1 - \sigma_2 - 2k, \quad f_3 = \sigma_3 - \sigma_2 - 2k.$$

Stosując stowarzyszone prawo płynięcia plastycznego (7.27) dla płaszczyzny  $f_2$ , otrzymamy:  $\dot{\epsilon}_1 = \lambda_2$ ,  $\dot{\epsilon}_2 = -\lambda_2$ , a dla płaszczyzny  $f_3$  —  $\dot{\epsilon}_3 = \lambda_3$ ,  $\dot{\epsilon}_2 = -\lambda_3$ .

W punkcie  $\bar{C}$  mamy główne prędkości odkształceń:

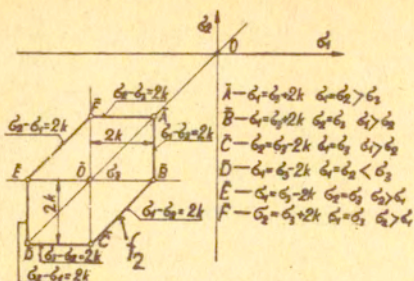
$$\dot{\epsilon}_1 = \lambda_2, \quad \dot{\epsilon}_2 = -\lambda_2 - \lambda_3 = -(\lambda_2 + \lambda_3), \quad \dot{\epsilon}_3 = \lambda_3.$$

Podstawiając obliczone główne prędkości odkształceń do równania (7.28) i stosując warunki plastyczności dla tych płaszczyzn, otrzymamy

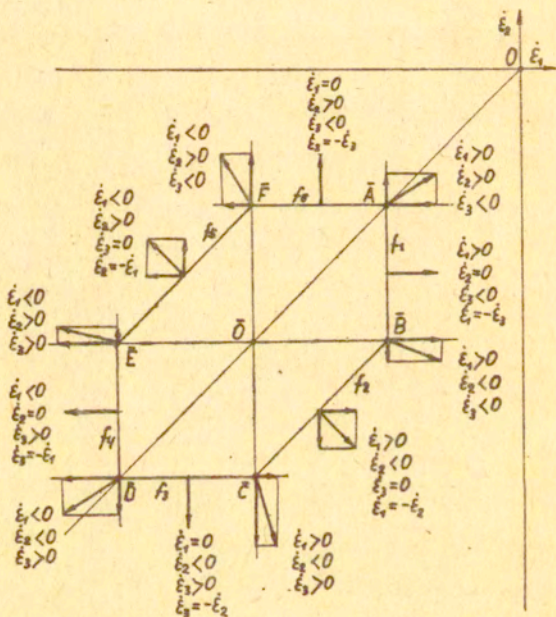
$$D = \sigma_1 \lambda_2 - \sigma_2 (\lambda_2 + \lambda_3) + \sigma_3 \lambda_3 = -2k \dot{\epsilon}_2 \quad (7.29)$$

Postępując podobnie znajdziemy równania dysypacji dla pozostałych punktów warunku plastyczności Treski (rys. 7.4a).

W tabelicy 7.1 podano równania dysypacji jednostkowej i główne prędkości odkształceń dla warunków plastyczności Treski (rys. 7.4b).



Rys.7.4a. Graniastośćup Treski przecięty płaszczyzną  $\sigma_3 = \text{const.}$



Rys.7.4b. Znaki głównych prędkości odkształceń



Równania dysypacji jednostkowej i główne prędkości odkształceń dla warunku plastyczności Treski

| L.p. | Warunek plastyczności Treski |  | Główne prędkości odkształceń   | Równanie dysypacji          |
|------|------------------------------|--|--|-----------------------------|
|      | miejsce                      | równanie   |  |                             |
| 1    | $\bar{A}$                    | $\sigma_1 = \sigma_2 + 2k, \sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$           | $\dot{\epsilon}_1 > 0, \dot{\epsilon}_2 > 0, \dot{\epsilon}_3 < 0$                                       | $D_0 = -2k\dot{\epsilon}_3$ |
| 2    | $\bar{B}$                    | $\sigma_1 = \sigma_2 + 2k, \sigma_2 = \sigma_3, \sigma_1 > \sigma_3$ | $\dot{\epsilon}_1 > 0, \dot{\epsilon}_2 < 0, \dot{\epsilon}_3 < 0$                                       | $D_0 = -2k\dot{\epsilon}_1$ |
| 3    | $\bar{C}$                    | $\sigma_2 = \sigma_3 - 2k, \sigma_1 = \sigma_2, \sigma_1 > \sigma_3$ | $\dot{\epsilon}_1 > 0, \dot{\epsilon}_2 < 0, \dot{\epsilon}_3 > 0$                                       | $D_0 = -2k\dot{\epsilon}_2$ |
| 4    | $\bar{D}$                    | $\sigma_1 = \sigma_2 - 2k, \sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3$           | $\dot{\epsilon}_1 < 0, \dot{\epsilon}_2 < 0, \dot{\epsilon}_3 > 0$                                       | $D_0 = 2k\dot{\epsilon}_1$  |
| 5    | $\bar{E}$                    | $\sigma_1 = \sigma_2 - 2k, \sigma_2 = \sigma_3, \sigma_2 > \sigma_1$ | $\dot{\epsilon}_1 < 0, \dot{\epsilon}_2 > 0, \dot{\epsilon}_3 > 0$                                       | $D_0 = -2k\dot{\epsilon}_1$ |
| 6    | $\bar{F}$                    | $\sigma_2 = \sigma_3 + 2k, \sigma_1 = \sigma_2, \sigma_2 > \sigma_1$ | $\dot{\epsilon}_1 < 0, \dot{\epsilon}_2 > 0, \dot{\epsilon}_3 < 0$                                       | $D_0 = 2k\dot{\epsilon}_2$  |
| 7    | Bok $\bar{A}\bar{B}$         | $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$   | $\dot{\epsilon}_1 > 0, \dot{\epsilon}_2 = 0, \dot{\epsilon}_3 < 0, \dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_2$ | $D_0 = 2k\dot{\epsilon}_1$  |
| 8    | Bok $\bar{B}\bar{C}$         | $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$   | $\dot{\epsilon}_1 > 0, \dot{\epsilon}_2 < 0, \dot{\epsilon}_3 = 0, \dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_2$ | $D_0 = 2k\dot{\epsilon}_1$  |
| 9    | Bok $\bar{C}\bar{D}$         | $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$   | $\dot{\epsilon}_1 = 0, \dot{\epsilon}_2 < 0, \dot{\epsilon}_3 > 0, \dot{\epsilon}_2 = -\dot{\epsilon}_3$ | $D_0 = 2k\dot{\epsilon}_2$  |
| 10   | Bok $\bar{D}\bar{E}$         | $\sigma_2 - \sigma_1 = 2k$   | $\dot{\epsilon}_1 < 0, \dot{\epsilon}_2 = 0, \dot{\epsilon}_3 > 0, \dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_3$ | $D_0 = 2k\dot{\epsilon}_2$  |
| 11   | Bok $\bar{E}\bar{F}$         | $\sigma_2 - \sigma_1 = 2k$   | $\dot{\epsilon}_1 < 0, \dot{\epsilon}_2 > 0, \dot{\epsilon}_3 = 0, \dot{\epsilon}_2 = -\dot{\epsilon}_1$ | $D_0 = 2k\dot{\epsilon}_2$  |
| 12   | Bok $\bar{F}\bar{A}$         | $\sigma_2 - \sigma_3 = 2k$   | $\dot{\epsilon}_1 = 0, \dot{\epsilon}_2 > 0, \dot{\epsilon}_3 < 0, \dot{\epsilon}_2 = -\dot{\epsilon}_3$ | $D_0 = 2k\dot{\epsilon}_2$  |

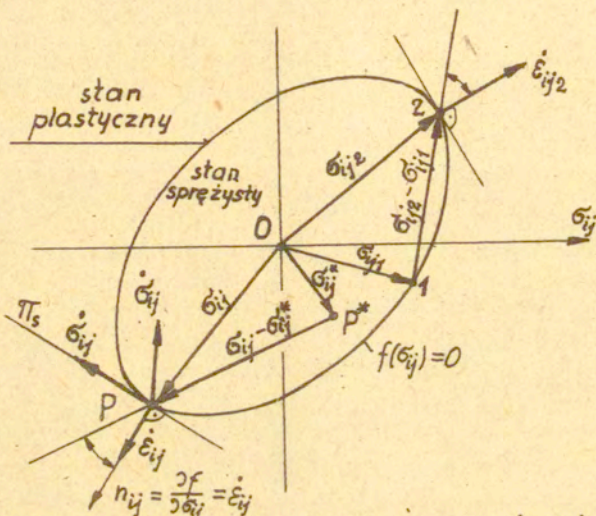
7.4. Zasada największej mocy dysypowanej

Zasada największej mocy dysypowanej podana została przez R. Misesa w 1928 r., niezależnie od niego przez R. Hilla w 1948 r. i również niezależnie od poprzedników sformułował tę zasadę D.C. Drucker w 1951 r.

Przyjmijmy warunek plastyczności  $f(\sigma_{ij}) = 0$  przedstawiający w przestrzeni naprężeń wypukłą powierzchnię. Punkty znajdujące się wewnątrz obszaru ( $f(\sigma_{ij}) < 0$ ) ograniczonego powierzchnią o równaniu  $f(\sigma_{ij}) = 0$  przedstawiają stan sprężysty materiału, natomiast punkty na powierzchni granicznej  $f(\sigma_{ij}) = 0$  przedstawiają plastyczny stan materiału (rys. 7.5). W punktach P na powierzchni granicznej można poprowadzić płaszczyznę styczną  $\Pi_s$ , do której wektor jednostkowy  $n_{ij}$  jest prostopadły. Ten wektor jednostkowy, jak wiemy z geometrii różniczkowej, jest gradientem powierzchni  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  w punkcie P. Iloczyn skalarny wektora  $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)$  i wektora normalnego  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  jest dodatni lub równy zeru i tak będzie zawsze, gdy powierzchnia

$f(\sigma_{ij})=0$  będzie wypukła i kąt między tymi wektorami będzie ostry.  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  jest tensorem gradientu funkcji  $f(\sigma_{ij})=0$  (powierzchni granicznej). Iloczyn ten możemy zapisać

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \geq 0 \quad (7.30)$$



Rys.7.5. Interpretacja geometryczna związków (7.33), (7.31), (7.32), (7.35)

W przypadku obciążenia punkt  $P^*$ , przedstawiający sprężysty stan naprężenia, przechodzi na powierzchnię graniczną  $f(\sigma_{ij})=0$ , powodując uplastycznienie materiału. Dalsze obciążenie powoduje zmianę naprężenia, w konsekwencji czego punkt  $P$  porusza się po powierzchni  $f(\sigma_{ij})=0$ . Fakt obciążania czyli proces aktywny, matematycznie możemy zapisać następująco:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad (7.31)$$

Warunek (7.31) geometrycznie oznacza, że wektor prędkości naprężenia  $\dot{\sigma}_{ij} = d\sigma_{ij}$  jest styczny do powierzchni granicznej. Dla przypadku odciążania warunek (7.31) przyjmuje postać

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \quad (7.32)$$

Wykorzystując zależność między tensorem prędkości odkształcenia i tensorem gradientu  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  funkcji  $f(\sigma_{ij})$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  (współczynnik  $\lambda$  zmienia się w procesie odkształcenia), nierówność (7.30) przyjmuje postać

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0 \quad (7.33)$$

Nierówność ta nosi nazwę zasady największej mocy dysypowanej i można ją wyrazić następująco:

$$D = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} \quad (7.34)$$

Równanie (7.34) oznacza, że jednostkowa moc dysypowana podczas plastycznego płynięcia jest zawsze większa od mocy dowolnego stanu naprężenia  $\sigma_{ij}^*$  nie przekraczającego warunku stanu granicznego na zadanym polu prędkości odkształceń. Moc dysypowana jest dodatnia  $D > 0$ , gdy  $\lambda > 0$ , co geometrycznie oznacza, że wektor prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}_{ij}$  skierowany jest na zewnątrz powierzchni granicznej.

Zasada największej mocy dysypowanej generuje wypukłość funkcji  $f(\sigma_{ij}) = 0$  i normalność wektora  $\dot{\epsilon}_{ij}^P$  do powierzchni  $f(\sigma_{ij}) = 0$ . Znaczy to, że jeżeli założymy te warunki, to udowodnimy zasadę największej mocy dysypowanej. W tym celu weźmy ogólne równanie wypukłości funkcji ( równanie stycznej w punkcie 2)  $f(x_2) - f(x_1) - (x_2 - x_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} > 0$  i przenieśmy je na funkcję dysypacji  $D(\dot{\epsilon}_{ij}^P) = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P$  w punkcie 2, wówczas mamy

$$D(\dot{\xi}_{ij2}^P) - D(\dot{\xi}_{ij1}^P) - (\dot{\xi}_{ij2}^P - \dot{\xi}_{ij1}^P) \frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}_{ij1}^P} > 0,$$

gdzie  $\frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}_{ij1}^P} = \sigma_{ij1}$ ,  $D(\dot{\xi}_{ij1}^P) = \sigma_{ij1} \dot{\xi}_{ij1}^P$ ,  $D(\dot{\xi}_{ij2}^P) = \sigma_{ij2} \dot{\xi}_{ij2}^P$ .

Po podstawieniu i zredukowaniu otrzymamy zależność w punkcie 2 (rys.7.5)

$$\sigma_{ij2} \dot{\xi}_{ij2}^P - \sigma_{ij1} \dot{\xi}_{ij2}^P > 0,$$

$$(\sigma_{ij2} - \sigma_{ij1}) \dot{\xi}_{ij2}^P > 0 \quad (7.35)$$

i analogicznie w punkcie 1 będzie następująca nierówność

$$(\sigma_{ij1} - \sigma_{ij2}) \dot{\xi}_{ij1}^P > 0. \quad (7.36)$$

Warunki (7.35) i (7.36) są identyczne z warunkiem (7.33).

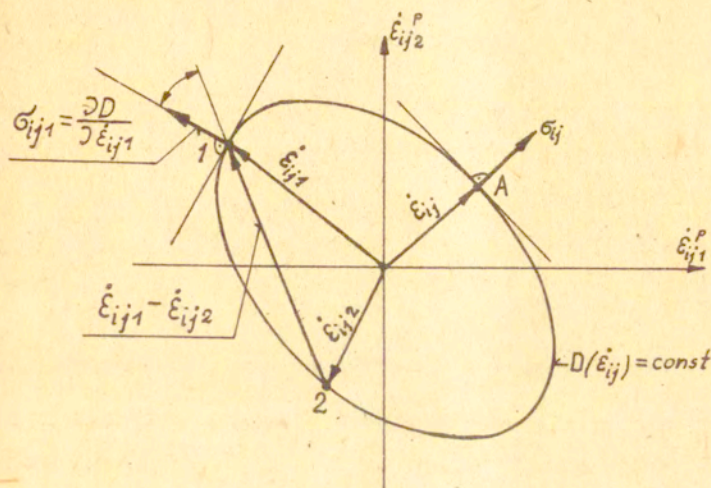
Gdy funkcję stałej dysypacji  $D = \text{const}$  przedstawimy w przestrzeni prędkości odkształceń  $\dot{\xi}_{ij}$ , to wektor naprężeń  $\sigma_{ij}$  będzie ortogonalny do powierzchni  $D = \text{const}$  (rys.7.6).

Jeśli powierzchnia graniczna  $f(\sigma_{ij})=0$  jest wypukła i regularna, to i powierzchnia stałej mocy dysypowanej  $D(\dot{\xi}_{ij}) = \text{const}$  jest również wypukła i regularna.

W analogii do związku (7.36) możemy napisać zależność

$$(\dot{\xi}_{ij1} - \dot{\xi}_{ij2}) \sigma_{ij1} > 0, \quad (7.37)$$

która bezpośrednio wynika z rysunku 7.6. Równanie (7.37) przedstawia wypukłą powierzchnię stałej mocy dysypowanej  $D(\dot{\xi}_{ij}) = \text{const}$ .



Rys.7.6. Interpretacja geometryczna związku (7.37)

### 7.5. Materiał stateczny i niestateczny

Pojęcie materiału statecznego zostało wprowadzone przez D.C. Druckera. Materiał stateczny to taki, dla którego przy wzroście odkształcenia plastycznego  $d\epsilon^P$  występuje wzrost naprężenia  $d\sigma$  (rys.7.7a).

Rozpatrzmy zależność między naprężeniem  $\sigma$  i odkształceniem  $\epsilon$  przedstawioną na rysunku 7.7a. Jeśli próbkę obciążoną do punktu 1 (naprężenie  $\sigma$ ), odciążymy do punktu 2 (naprężenie  $\sigma^*$ ) i następnie obciążymy do nowego zwiększonego naprężenia  $\sigma + d\sigma$  (punkt 3) i znów odciążymy do naprężenia początkowego  $\sigma^*$  (punkt 5), to w wyniku obciążania i odciążania przyrost naprężenia  $d\sigma$  spowodował przyrost odkształcenia plastycznego  $d\epsilon^P$ ,

dając przyrost pracy plastycznej  $d\sigma d\varepsilon^P > 0$ . Jeśli przy obciążaniu i odciążaniu materiał wykona pracę plastyczną, wynikającą z poniższego wzoru

$$(\sigma - \sigma^*) d\varepsilon^P > 0 \quad ; \quad d\sigma d\varepsilon^P > 0, \quad (7.38)$$

to taki materiał nazywamy statecznym. Graficznie równanie (7.38) przedstawia pola 1-2-5-4-, 1-3-4 zakreskowane na rysunku 7.7a. Nierówności (7.38) uogólnione na złożone stany naprężenia mają decydujące znaczenie dla budowania związków fizycznych uwzględniających wzmocnienie materiału.

Dla materiału niestatecznego przedstawionego na rysunku 7.7b energia zużyta na jednostkę objętości materiału odkształconego jest

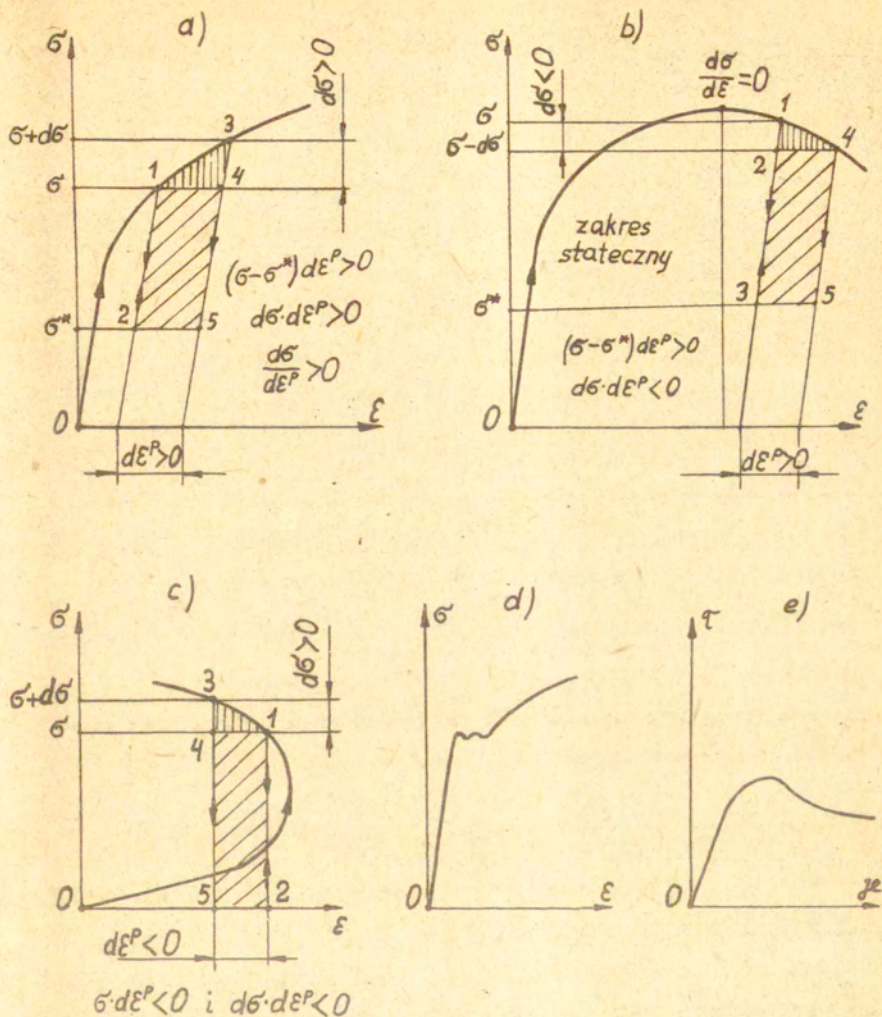
$$(\sigma - \sigma^*) d\varepsilon^P > 0, \quad d\sigma d\varepsilon^P < 0. \quad (7.39)$$

Z rysunku widać, że przy spadku naprężenia ( $d\sigma < 0$ ) otrzymujemy przyrost odkształcenia plastycznego  $d\varepsilon^P > 0$ , co daje ujemną pracę plastyczną  $d\sigma d\varepsilon^P < 0$ . Materiałem niestatecznym jest piasek ubity /zagęszczony/ poddany ścinaniu (rys. 7.7e) oraz w początkowym okresie płynięcia miękka stal (rys. 7.7d).

Materiał przedstawiony na rysunku 7.7c wykazuje, że ze wzrostem naprężenia  $\sigma + d\sigma$  odkształcenie plastyczne maleje, gdyż występuje ujemny przyrost odkształcenia plastycznego  $d\varepsilon^P < 0$ .

Energia wykonana przez naprężenia  $\sigma$  na ujemnym przyroście odkształceń  $d\varepsilon^P < 0$ , jak i energia wykonana przez przyrost naprężenia  $d\sigma$  na ujemnym przyroście odkształcenia  $d\varepsilon^P < 0$  jest ujemna

$$\sigma d\varepsilon^P < 0 \quad ; \quad d\sigma d\varepsilon^P < 0. \quad (7.40)$$



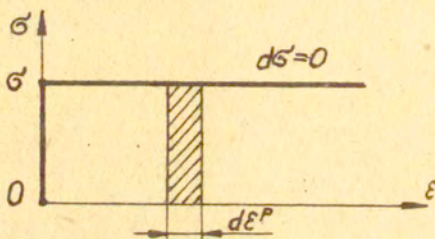
Rys.7.7. Rodzaje materiałów: a - materiał stateczny, b - materiał niestateczny, c - materiał fikcyjny, d - miękka stal, e - zagęszczony (ubity) piasek ścinany

Równanie (7.40) przeczy prawu zachowania energii i wskazuje na to, że takiego materiału nie może być, ponieważ np. przy rozciąganiu próbki nie zachodzi jej wydłużenie, a nawet występuje jej skrócenie.

Materiał sztywno-idealnie plastyczny jest nowym materiałem, gdyż

$$\begin{aligned} \sigma d\varepsilon^p &> 0, \\ d\sigma d\varepsilon^p &= 0, \end{aligned} \quad (7.41)$$

przy stałym naprężeniu  $\sigma$  otrzymujemy przyrost odkształceń  $d\varepsilon^p$ .



Rys.7.8. Wykres materiału sztywno-idealnie plastycznego dla ilustracji równań (7.41)

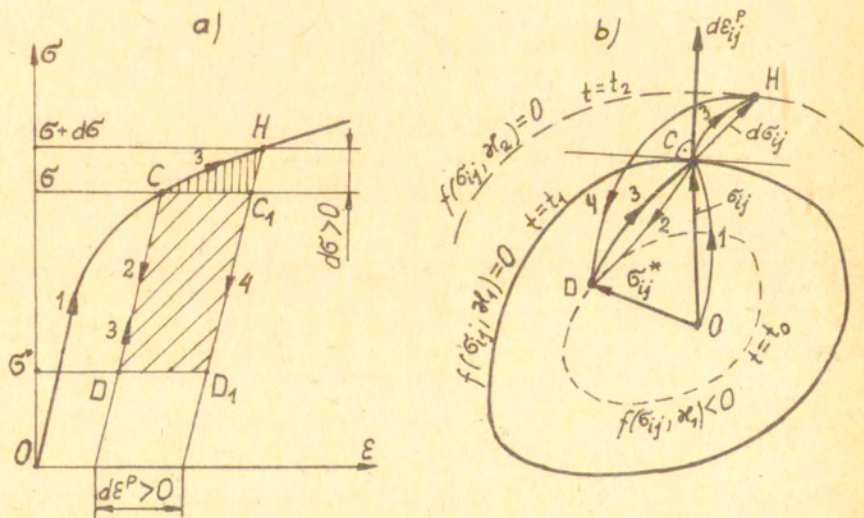
#### 7.6. Postulat D.C.Druckera

D.C. Drucker definicję jednoosiowego stanu naprężenia (rów.7.38) dla materiału statecznego (rys. 7.9a) uogólnił na złożone stany naprężenia (rys. 7.9b). Definicję tę sformułował następująco: praca wykonana przez siły zewnętrzne na wytworzonych przyrostach odpowiednich składowych wektora przemieszczenia musi być nieujemna (dodatnia lub równa zero). Postulat Druckera można wyrazić w postaci matematycznej



$$\int_{t=0}^{t_k} \left\{ \int_S dP_i du_i dS + \int_V dX_i du_i dV \right\} dt \geq 0, \quad (7.42)$$

gdzie  $dP_i = P_i - P_i^*$ ,  $dX_i = X_i - X_i^*$ ,  $du_i = u_i - u_i^*$ ,  $P_i^*$ ,  $X_i^*$ ,  $u_i^*$  jest siłą zewnętrzną, siłą objętościową i przemieszczeniem odnoszonymi się do stanu początkowego  $t = t_0$ ,  $P_i$ ,  $X_i$ ,  $u_i$  odnoszą się do stanu zmiennego w czasie  $t_1 < t < t_2$ , w którym zachodzą odkształcenia plastyczne,  $t$  oznacza czas cyklu obciążenia od punktu C do H (rys. 7.9b). Przy przejściu z punktu C do D mamy tylko odkształcenie sprężyste  $d\varepsilon_{ij}^s$ .



Rys.7.9. Interpretacja graficzna dróg obciążenia i odciążenia dla: a - jednoosiowego stanu naprężenia, b - złożonego stanu naprężenia

Przy wykorzystaniu zasady prac przygotowanych /siły powierzchniowe, siły objętościowe i prędkości zastąpione są naprężeniami i prędkościami odkształceń/ wyrażenie (7.42) przyjmie postać

$$\int_{t=0}^{t_k} \left\{ \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij} dV \right\} dt \geq 0. \quad (7.43)$$

Praca wykonana przez naprężenie na odkształceniach sprężystych  $d\varepsilon_{ij}^s$  ( $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^s$ ) podczas całego programu obciążenia  $0 < t < t_k$  będzie równa zeru, bo odkształcenia sprężyste są odwracalne,  $\oint d\varepsilon_{ij}^s = 0$ . Praca plastyczna całkowita, na jednostkę objętości, sił zewnętrznych jest równa pracy naprężeń na odkształceniach plastycznych  $d\varepsilon_{ij}^p$ , zachodzących w części programu  $t_1 < t < t_2$  ( $\frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt} = \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ ) jest nieujemna i można ją zapisać w postaci

$$D^p = \int_{t_1}^{t_2} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dt \geq 0. \quad (7.44)$$

Równanie (7.44) można przedstawić przy pomocy szeregu Taylora ( $y = f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$ , a jest punktem, w którym funkcja  $f/x$  jest określana) w punkcie  $t_1$  dla przypadku obciążenia i odciążenia ( $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ij}^*$ )

$$\int_{t_1}^{t_2} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dt = D^p(t_2) - D^p(t_1) = \frac{1}{1!} \dot{D}^p|_{t_1} dt + \frac{1}{2!} \ddot{D}^p|_{t_1} (dt)^2 + \dots, \quad (7.45)$$

gdzie  $\dot{D}^p = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ ,  $\ddot{D}^p = (\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^p + (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \ddot{\varepsilon}_{ij}^p$ ,  
 $(\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^*) = \Delta \dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} = d\sigma_{ij}$ ,  $t_2 = t_1 + dt$ .

Nierówność (7.44) jest spełniona, gdy pierwsze wyrazy rozwinięcia (7.45) będą dodatnio określone, a więc

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (7.46)$$

lub w przypadku  $\tilde{\sigma}_{ij}^* = \tilde{\sigma}_{ij}$

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{ij} \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}^P \geq 0. \quad (7.47)$$

Nierówności (7.46) i (7.47) wyrażają postulat Druckera definiujący materiał stateczny. Z postulatu tego wynika, że powierzchnia plastyczności jest wypukła, gdyż wektory  $\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}^*$  i  $\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}^P$  tworzą kąt ostry. Wektor  $\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}^P$  jest ortogonalny do powierzchni gładkich. Dla powierzchni posiadających punkty nieciągłości (naraża) wektor  $\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}^P$  zawiera się między normalnymi do powierzchni w tym punkcie.

L.M.Kaczanow podaje, że zgodnie z postulatem Druckera praca przyrostu naprężeń  $d\tilde{\sigma}_{ij}$  i otrzymanych odkształceń plastycznych wyraża się całką zamkniętą

$$\oint (\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}^*) d\tilde{\epsilon}_{ij}^P \geq 0. \quad (7.48)$$

Ponieważ odkształcenia plastyczne zachodzą na nieskończenie małym odcinku C - H = dl ( $d\tilde{\epsilon}_{ij}^P = \frac{d\tilde{\epsilon}_{ij}^P}{dl} dl$ , a dla parametru czasu dt,  $d\tilde{\epsilon}_{ij}^P = \frac{d\tilde{\epsilon}_{ij}^P}{dt} dt = \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij}^P dt$ ), to równanie (7.48) przyjmuje postać

$$(\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}^*) d\tilde{\epsilon}_{ij}^P \geq 0. \quad (7.49)$$

Z rysunku 7.9b widać, że gdy  $dt = t_2 - t_1 \rightarrow 0$ , to powierzchnia  $f(\tilde{\sigma}_{ij}, \mathcal{H}_2) = 0$  dąży do powierzchni  $f(\tilde{\sigma}_{ij}, \mathcal{H}_1) = 0$  i wówczas zachodzi równanie (7.49). Jeśli wektor naprężenia  $\tilde{\sigma}_{ij}^* = \tilde{\sigma}_{ij}$  (stan początkowy jest plastyczny) to zachodzi nierówność (dla cyklu C - H - C)

$$d\tilde{\sigma}_{ij} d\tilde{\epsilon}_{ij}^P \geq 0. \quad (7.50)$$

Nierówności (7.46) i (7.47) mają podstawowe znaczenie przy wyprowadzeniu związków fizycznych między tensorem naprężenia  $\tilde{\sigma}_{ij}$  i tensorem odkształcenia  $\tilde{\epsilon}_{ij}$  dla ciał wykazujących

cych wzmocnienie materiału oraz potrzebne są do udowodnienia podstawowych twierdzeń w teorii plastyczności.

Nierówność (7.46) niezależnie od Druckera była wyprowadzona przez J.F.W.Bishopa i R.Hilla, którzy odkształcenia plastyczne traktowali jako wynik poślizgów w pojedynczych kryształach materiału polikrystalicznego. Najogólniejszą drogą postępowania w celu wyprowadzenia podstawowych postulatów teorii plastyczności i ich interpretacji fizycznej powinna być analiza termodynamiki odkształcenia plastycznego.

#### Literatura do rozdziału VII

1. Praca zbiorowa pod red. W.Olszaka, P.Perzyny, A.Sawczuka. Teoria plastyczności PWN, Warszawa, 1965.
2. W.Szczepiński. Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej. PWN, Warszawa, 1967.
3. R.J.Izbicki, Z.Mróz. Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał. PWN, Warszawa, 1976.

## Rozdział VIII

### TWIERDZENIA TEORII NOŚNOŚCI GRANICZNEJ I WŁASNOŚCI POWIERZCHNI NIECIĄGŁOŚCI

#### 8.1. Wstęp

Trafne wyznaczenie sił potrzebnych do wywołania odkształceń plastycznych następuje wiele trudności. Nieznana wartość siły, potrzebną do odkształcenia materiału, można oszacować przez podanie jej dolnej i górnej wartości.

Twierdzenia nośności granicznej dotyczą modelu materiału sztywno-idealnie plastycznego, który tylko w przybliżony sposób odzwierciedla własności materiału rzeczywistego. Doświadczenia potwierdzają, że oceny nośności granicznej leżą blisko rzeczywistych nacisków. Stąd wynika duża przydatność takiego podejścia do rozwiązywania zagadnień praktycznych. Oczywiście rozwiązanie dotyczy początkowego płynięcia materiału, zarówno stadia poprzednie jak i następne po uplastycznieniu nie są rozpatrywane.

Do wyznaczenia nośności granicznej potrzebna jest znajomość pola naprężeń i pola prędkości odkształceń oraz znajomość zależności wiążących wymagania statyczne i kinematyczne z własnościami rozpatrywanego materiału. Do tych zależności należy:

- a - związek pomiędzy naprężeniami powodującymi uplastycznienie, a więc warunek stanu granicznego materiału

$$f(\sigma_{ij}) = 0,$$

b - związek między naprężeniami i prędkościami odkształcenia, a więc prawo płynięcia plastycznego  $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$

Twierdzenia teorii nośności granicznej zwane są twierdzeniami ekstremalnymi. Odnoszą się one do ciała idealnie plastycznego i stowarzyszonego prawa płynięcia. Twierdzenia te mają dać odpowiedź na pytanie: czy założone obciążenie spowoduje uplastycznienie materiału.

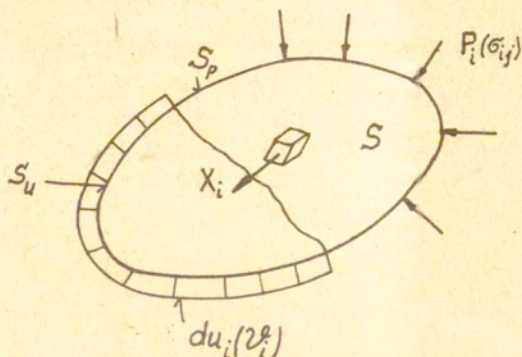
Dowodzone są dwa twierdzenia: o dolnej ocenie wartości nośności granicznej i o górnej ocenie wartości nośności granicznej.

Weźmy ciało o powierzchni  $S$  i objętości  $V$  znajdujące się w stanie granicznym (tj. w chwili powstawania mechanizmu płynięcia plastycznego) i powiedzmy, że na części powierzchni  $S_p$  ciała działają siły  $P_i (P_x, P_y, P_z)$ , które powodują przyrosty przemieszczeń  $du_i (du_x, du_y, du_z)$  punktów materiału na części powierzchni  $S_u$  tego ciała (rys. 8.1). Ten stan obciążenia powoduje, że w dowolnym wewnętrznym punkcie ciała występuje rzeczywisty stan naprężenia  $\sigma_{ij} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ , któremu odpowiada przyrost odkształcenia  $d\epsilon_{ij} (d\epsilon_x, d\epsilon_y, d\epsilon_z, d\epsilon_{xy}, d\epsilon_{yz}, d\epsilon_{zx})$ . Przyrostowa praca odkształcenia plastycznego jest zgodna z zasadą prac przygotowanych i wynosi

$$\int_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV = \int_S P_i du_i dS \quad (8.1)$$

Praca obszarów nieprzemieszczanych (na podporach) jest równa zeru. Równanie (8.1) po rozpisaniu w układzie  $x, y, z$  przyjmuje postać

$$\int_V (\sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \dots + \tau_{zx} d\epsilon_{zx}) dV = \int_S (P_x du_x + P_y du_y + P_z du_z) dS$$



Rys.8.1. Obciążenie, ruch ciała i oznaczenia

Równanie (8.1) przedstawia równość przyrostu pracy sił wewnętrznych z przyrostem pracy sił zewnętrznych.

Przyjmując zamiast przyrostów przemieszczeń  $du_i$  prędkości przemieszczeń  $v_i^e (v_x^e, v_y^e, v_z^e)$ , a zamiast przyrostów odkształceń  $d\epsilon_{ij}$  prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}_{ij} (\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dots)$ , równanie (8.1) można napisać w postaci

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_S P_i v_i^e dS \quad (8.2)$$

Równanie (8.2) po rozpisaniu w układzie  $x, y, z$  ma postać

$$\int_V (\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + \dots + \tau_{zx} \dot{\epsilon}_{zx}) dV = \int_S (P_x v_x^e + P_y v_y^e + P_z v_z^e) dS$$

i oznacza, że moc dysypowana wewnątrz ciała jest równa mocy sił zewnętrznych (powierzchniowych).

W ogólnym przypadku do równania (8.2) dochodzi jeszcze człon sił objętościowych  $\int_V X_i v_i^e dV$  oraz człon dysypacji wewnętrznej na powierzchni nieciągłości prędkości  $\int_{S_n} \sigma_{ij} n_j [v_i^e] dS_n$

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{S_n} \sigma_{ij} n_j [v_i^*] dS_n = \int_S P_i v_i^* dS + \int_V X_i v_i^* dV, \quad (8.3)$$

gdzie  $[v_i^*]$  jest nieciągłością prędkości,  $n_j$  jest jednostkowym wektorem normalnym na powierzchni nieciągłości  $S_n$ ,  $\sigma_{ij} n_j = T_i$  jest siłą wzajemnego oddziaływania obszarów oddzielonych powierzchnią nieciągłości.

Pola  $\sigma_{ij}$ ,  $v_i^*$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}$  są polami rzeczywistymi spełniającymi wszystkie warunki statyczne i kinematyczne.

### 8.2. Dolna ocena wartości nośności

Jeśli weźmiemy dowolny stan naprężenia statycznie dopuszczalny  $\sigma_{ij}^s$ , który będzie spełniał warunki równowagi wewnętrznej ( $\sigma_{ij,j}^s + X_i = 0$ ), warunki brzegowe dla sił powierzchniowych ( $\sigma_{ij}^s n_j = p_i^s$ ) oraz nigdzie nie będzie powodował przekroczenia warunku plastyczności ( $f(\sigma_{ij}^s) < 0$ ), to moc wirtualna tego stanu na rzeczywistym polu prędkości  $v_i^*$  wyrazi się równaniem

$$\int_V \sigma_{ij}^s \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{S_n} \sigma_{ij}^s n_j [v_i^*] dS_n = \int_S P_i^s v_i^* dS + \int_V X_i v_i^* dV. \quad (8.4)$$

Odejmując stronami równanie (8.4) od równania (8.3) czyli odejmując stan statycznie dopuszczalny od stanu rzeczywistego, wynikającego z sił zewnętrznych, otrzymamy dolną ocenę wartości nośności

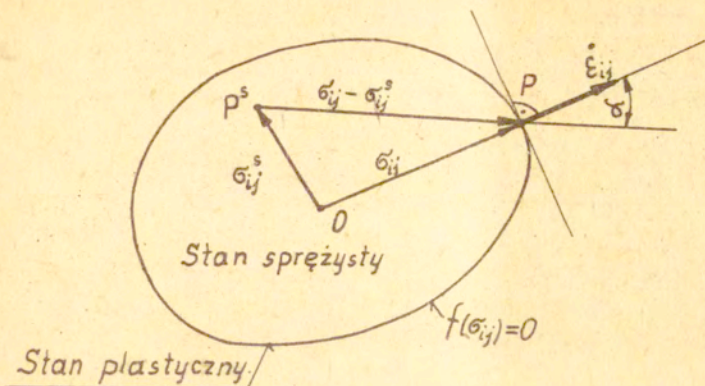
$$\int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{S_n} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) n_j [v_i^*] dS_n = \int_S (P_i - P_i^s) v_i^* dS. \quad (8.5)$$

Wyrażenie pod całką pierwszego członu równania (8.5) możemy przedstawić graficznie jak na rysunku 8.2.

Wektor  $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s$  z wektorem  $\dot{\epsilon}_{ij}$  tworzy kąt ostry czyli ich iloczyn skalarny jest dodatni

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{\epsilon}_{ij} > 0. \quad (8.6)$$





Rys. 8.2. Geometryczna interpretacja dolnej oceny nośności

Warunek (8.6) wynika z postulatu Druckera i powoduje, że prawa strona równości (8.5) jest również dodatnia,  $\int_S (P_i - P_i^s) v_i^s dS > 0$ .

Gdy stan naprężenia rzeczywistego  $\tilde{\sigma}_{ij}$  pokryje się ze stanem naprężenia statycznie dopuszczalnego  $\sigma_{ij}^s$ , to równanie (8.5) jest równe zeru. Równanie (8.5) można zinterpretować następująco: moc sił zewnętrznych rzeczywistych  $\tilde{\sigma}_{ij}$  działających na powierzchnię  $S_p$  ciała o objętości  $V$  jest większa niż moc sił wewnętrznych wynikających z przyjętego statycznie dopuszczalnego stanu naprężenia  $\sigma_{ij}^s$  na tych samych prędkościach. Inaczej mówiąc, stwierdzamy, że moc sił zewnętrznych  $P_i$ , powodujących uplastycznienie, jest większa lub co najwyżej równa mocy sił  $P_i^s$ , powodujących statyczne obciążenie ciała

$$\int_{S_u} P_i v_i^s dS \geq \int_{S_u} P_i^s v_i^s dS.$$

Na części powierzchni  $S_p$  siły rzeczywiste  $P_i$  równe są siłom statycznym  $P_i^s$ .

### 8.3. Górna ocena wartości nośności

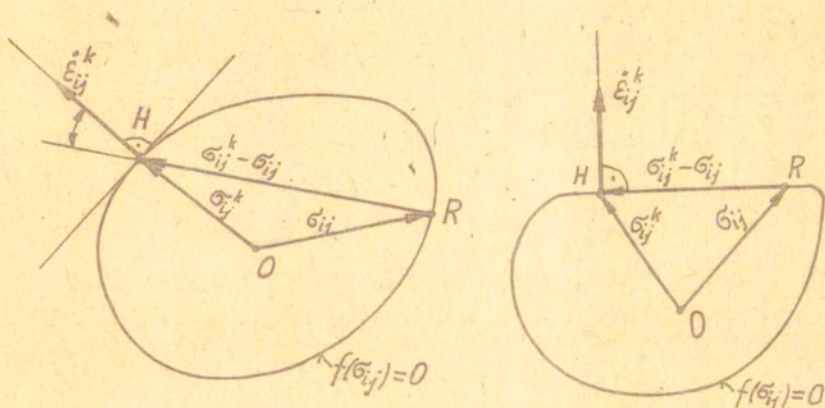
Górną ocenę wartości nośności granicznej otrzymamy, gdy przyjmiemy dowolny kinematycznie dopuszczalny schemat odkształcenia ciała. Schemat ten musi spełniać warunek ciągłości materiału (nie ma dziur, szczelin, pęknięć), warunek nieściśliwości  $\mathcal{V}_{,i}^k = 0$  i kinematyczny warunek brzegowy dla prędkości na powierzchni  $\mathcal{S}_p$ ,  $\mathcal{V}_i^k = \mathcal{V}_0^k$ . Równania równowagi mogą być nie spełnione i nie zachodzi konieczność sprawdzania warunku plastyczności czy nie został przekroczony. Ten hipotetycznie (dowolnie) przyjęty schemat odkształcenia określony jest przez pole prędkości  $\mathcal{V}_i^k$ , któremu w myśl prawa  $\dot{\mathcal{E}}_{ij}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{V}_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathcal{V}_j^k}{\partial x_i} \right)$  odpowiada pole prędkości odkształceń  $\dot{\mathcal{E}}_{ij}^k$ . Pole prędkości przemieszczeń  $\mathcal{V}_i^k$  i odpowiadające mu pole kinematyczne prędkości odkształceń  $\dot{\mathcal{E}}_{ij}^k$  nazywamy kinematycznie dopuszczalnym mechanizmem płynięcia w odróżnieniu od rzeczywistego mechanizmu płynięcia określonego polami  $\mathcal{V}_i^k$  i  $\dot{\mathcal{E}}_{ij}^k$ . Mając pole  $\dot{\mathcal{E}}_{ij}^k$  możemy w każdym punkcie ciała określić funkcję dysypacji  $D(\dot{\mathcal{E}}_{ij}^k)$ , z której następnie wyznaczamy pole naprężeń  $\mathcal{G}_{ij}^k$  w myśl prawa  $\mathcal{G}_{ij}^k = \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathcal{E}}_{ij}^k}$ . Pole naprężeń  $\mathcal{G}_{ij}^k$  jest stowarzyszone z zadanym polem kinematycznym  $\dot{\mathcal{E}}_{ij}^k$ . Pole prędkości odkształceń  $\dot{\mathcal{E}}_{ij}^k$  co do kierunku określone jest polem naprężeń  $\mathcal{G}_{ij}^k$  na podstawie prawa płynięcia plastycznego  $\dot{\mathcal{E}}_{ij}^k = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathcal{G}_{ij}^k}$  przy założonym warunku granicznym  $f(\mathcal{G}_{ij}^k) = 0$ . Wektor  $\dot{\mathcal{E}}_{ij}^k$  jest ortogonalny do powierzchni płynięcia  $f(\mathcal{G}_{ij}^k) = 0$ . Stała rzeczywisty tworzą wielkości  $\mathcal{G}_{ij}^k$ ,  $\mathcal{V}_i^k$ ,  $\dot{\mathcal{E}}_{ij}^k$ .

Rzeczywiste pole naprężeń  $\mathcal{G}_{ij}^k$  i przyłożone do ciała fikcyjne kinematyczne pole naprężeń  $\mathcal{G}_{ij}^k$  (rys. 8.3) określają wektor  $\mathcal{G}_{ij}^k - \mathcal{G}_{ij}^k$  (leży na pow.  $f(\mathcal{G}_{ij}^k) = 0$ ), który z wektorem prędkości od-

kształceń  $\dot{\epsilon}_{ij}^k$  tworzy kąt ostry. Iloczyn skalarny tych wektorów dla powierzchni wypukłych jest zawsze dodatni lub równy zeru

$$(\sigma_{ij}^k - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^k \geq 0. \quad (8.7)$$

Gdy wektor  $\sigma_{ij}^k$  pokrywa się z wektorem  $\sigma_{ij}$  lub też, gdy wektory te dotykają powierzchni prostej (kąt między wektorem  $\sigma_{ij}^k - \sigma_{ij}$  i  $\dot{\epsilon}_{ij}^k$  jest prosty), równanie (8.7) jest równe zeru.



Rys. 8.3. Geometryczna interpretacja równania (8.7)

Równanie (8.7) przedstawia moc odkształcenia plastycznego, jaka jest dysypowana w każdym punkcie ciała o objętości  $dV$ . Całkując równanie (8.7) po objętości  $V$ , otrzymamy moc dysypowaną w tym ciele

$$\int_V \sigma_{ij}^k \dot{\epsilon}_{ij}^k dV \geq \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^k dV. \quad (8.8)$$

Zamieniając całkę objętościową  $\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^k dV$  na całkę powierzchniową  $\int_S \sigma_{ij}^k v_i^k ds$  w myśl twierdzenia Gaussa i uwzględniając podział powierzchni  $S$  na powierzchnię  $S_p$  (działające siły nie-

znane) i na powierzchni  $S_{\nu}$  (występuje rzeczywista prędkość przemieszczenia  $\mathcal{V}_i^k = \mathcal{V}_0^k$  i rzeczywista siła  $P_i = P_0$ ), równanie (8.8) po przekształceniu możemy zapisać następująco:

$$\int_{S_{\nu}} P_0 \mathcal{V}_0^k dS_{\nu} \leq \int_V \sigma_{ij}^k \dot{\epsilon}_{ij}^k dV - \int_{S_p} P_i \mathcal{V}_i^k dS_p. \quad (8.9)$$

Z równania (8.9) możemy wyciągnąć wniosek: moc rzeczywistych sił powierzchniowych, na prędkościach również rzeczywistych, jest zawsze mniejsza od mocy sił wewnętrznych fikcyjnie (dowolnie) przyjętego kinematycznie dopuszczalnego schematu odkształcenia. Zatem równanie (8.9) pozwala oszacować górną ocenę rzeczywistych sił zewnętrznych powodujących uplastycznienie materiału.

W ogólnym przypadku na powierzchni  $S_{\nu}$  znaną prędkość przemieszczania  $\mathcal{V}_i^k$  można rozłożyć na prędkość normalną  $\mathcal{V}_{n_i}^k = \mathcal{V}_0^k$  i na prędkość styczną  $\mathcal{V}_{t_i}^k$

$$\vec{\mathcal{V}}_i^k = \vec{\mathcal{V}}_{n_i}^k + \vec{\mathcal{V}}_{t_i}^k.$$

$\mathcal{V}_{n_i}^k = \mathcal{V}_0^k$  mamy z założenia, a  $\mathcal{V}_{t_i}^k$  otrzymujemy z rozwiązania. Podobnie siłę  $P_i$  działającą na materiał odkształcany rozkłada się na siłę normalną  $P_{n_i} = P_0$  i na siłę styczną  $P_{t_i}$

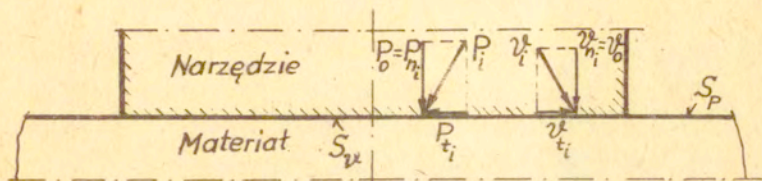
$$\vec{P}_i = \vec{P}_{n_i} + \vec{P}_{t_i}.$$

Siła styczna  $P_{t_i} = \mu P_{n_i}$  (lub  $P_{t_i} = T_1 = k \cdot l$ ) jest siłą tarcia na powierzchni styku materiału z narzędziem. Wówczas równanie (8.9) można zapisać

$$\int_{S_{\nu}} P_0 \mathcal{V}_0^k dS_{\nu} + \int_{S_{\nu}} P_{t_i} \mathcal{V}_{t_i}^k dS_{\nu} \leq \int_V \sigma_{ij}^k \dot{\epsilon}_{ij}^k dV - \int_{S_p} P_i \mathcal{V}_i^k dS_p. \quad (8.9a)$$

Powierzchnia  $S_p$  często jest powierzchnią swobodną czyli nie-  
obciążoną i na niej znane są siły, gdyż są równe zeru,  $P_i = 0$ .  
Gdy założymy brak tarcia na powierzchni styku materiału z na-  
rzędziem, to równanie (8.9a) można zapisać

$$\int_{S_{\nu}} P_n \nu_0^k dS_{\nu} \leq \int_V \sigma_{ij}^k \dot{\epsilon}_{ij}^k dV. \quad (8.9b)$$



Rys.8.3a. Rozkład sił i prędkości płynięcia na powierzchni styku materiału odkształcanego z narzędziem

Przedstawione twierdzenia o wyznaczaniu sił są słuszne dla dowolnego warunku plastyczności pod warunkiem spełnienia postu-  
latu Druckera o pracy plastycznej.

Twierdzenie o górnej ocenie wartości nośności przy uwzględ-  
nieniu powierzchni nieciągłości i sił objętościowych ogólnie  
można napisać w postaci

$$\int_V (\sigma_{ij}^k - \bar{\sigma}_{ij}^k) \dot{\epsilon}_{ij}^k dV + \int_{S_n} (\sigma_{ij}^k - \bar{\sigma}_{ij}^k) n_j [\nu_i^k] dS_n = \int_S (P_i^k - \bar{P}_i) \nu_i^k dS. \quad (8.10)$$

Równanie (8.10) wyprowadzone jest podobnie jak równanie (8.5) dla  
dolnej oceny wartości nośności granicznej. Dla wypukłej po-  
wierzchni granicznej i stowarzyszonego prawa płynięcia lewa  
strona równania (8.10) jest dodatnia, musi również być i prawa  
strona dodatnia,  $\int_S (P_i^k - \bar{P}_i) \nu_i^k dS > 0$ .

W przypadku materiału idealnie plastycznego o niestowarzy-  
szonym prawie płynięcia podane twierdzenia teorii nośności gran-  
icznej nie zachodzą, gdyż nie obowiązuje zasada największej  
mocy dysypacji.

#### 8.4. Rozwiązania ścisłe i przybliżone w teorii nośności granicznej

Problem obróbki plastycznej metali uznamy za rozwiązany teoretycznie, jeśli znajdziemy jego rozwiązanie statyczne i kinematyczne.

Rozwiązanie statyczne polega na znalezieniu pola naprężeń w zadaniu czyli w każdym punkcie ciała [muszą być znane naprężenia. Nośność obliczona z rozwiązania statycznego jest dolną oceną wartości nośności. Rozwiązanie statyczne w teorii plastyczności polega na wyznaczeniu charakterystyk dla naprężeń i całkowaniu równań naprężeń zachodzących wzdłuż tych charakterystyk. Pole to jest statycznie dopuszczalne, jeśli w każdym punkcie zadania spełnione są:

- warunki równowagi wewnętrznej,
- w każdym punkcie obszaru plastycznego warunek plastyczności nie może być przekroczony  $f(\sigma_{ij}) = 0$ , a w obszarach sztywnych —  $f(\sigma_{ij}) < 0$ ,
- warunki brzegowe dla naprężeń na powierzchniach nieobciążonych  $S_p$ ,
- warunki tarcia na kontakcie.

Dolną ocenę wartości nośności można znaleźć ze statycznie dopuszczalnego pola naprężeń utworzonego z:

- pola charakterystyk dla naprężeń,
- założonego analitycznego rozkładu naprężeń,
- rozwiązania równań równowagi,
- założenia dowolnego schematu odkształcenia i określenia stanu naprężeń w poszczególnych polach przy pomocy kół Mohra.

Rozwiązanie kinematyczne polega na znalezieniu pola prędkości w zadaniu czyli w każdym punkcie zadania muszą być znane wszystkie prędkości płynięcia. Nośność obliczona z rozwiązania kinematycznego jest górną oceną wartości nośności. Pole kinematyczne musi być dopuszczalne, czyli musi spełniać następujące warunki:

- zachowywać ciągłość materiału,
- zachowywać nieściśliwość materiału,
- muszą być spełnione warunki brzegowe dla prędkości,
- możliwy jest wypływ materiału,
- moc dysypowana w obszarach plastycznych musi być dodatnia ( $D_w = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} > 0$ ),
- zachodzić prawo plastycznego płynięcia.

Górną ocenę wartości nośności można znaleźć z kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości utworzonego z:

- pola charakterystyk dla prędkości,
- założenia analitycznej funkcji opisującej osiową  $v_z^*$  lub promieniową  $v_r^*$  składową prędkości płynięcia,
- dowolnego, ale dopuszczalnego schematu odkształcenia i określenia prędkości na liniach (powierzchniach) nieciągłości z hodografu (ruch sztywnych bloków).

Z równości mocy dysypacji wewnątrz ciała i mocy sił zewnętrznych określa się górną ocenę wartości nośności.

Rozwiązanie ściśle otrzymujemy wówczas, gdy górna ocena nośności pokrywa się z oceną dolną. Inaczej mówiąc rozwiązanie ściśle jest wówczas, gdy dla pola statycznie dopuszczalnego można zbudować pole kinematycznie dopuszczalne, wynikające ze stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia (stan naprężenia

i odkształcenia leżą w tym samym miejscu na warunku plastyczności/, to nośności obliczone z obu pól są identyczne. Gdy pole statycznie dopuszczalne jest polem niedopuszczalnym kinematycznie, to nośność obliczona z rozwiązania statycznego jest jedynie dolną oceną wartości nośności. Samo pole kinematycznie dopuszczalne daje z kolei ocenę górną. Uzyskanie ścisłych rozwiązań jest możliwe tylko dla prostych zagadnień takich jak wciskanie stempla w półprzestrzeń.

Metody przybliżone oparte na rozwiązywaniu równań równowagi mają tę wadę, że trudno jest określić ich dokładność i stwierdzić, czy otrzymany wynik jest większy czy mniejszy od wartości rzeczywistej. Metody przybliżone oparte na twierdzeniach teorii nośności granicznej pozwalają wyznaczyć ocenę nośności od góry i od dołu, dając pewną dokładność określenia rzeczywistej wartości nośności.

### 8.5. Nieciągłości

W zagadnieniach obróbki plastycznej często występują płaszczyzny i linie nieciągłości naprężeń i prędkości płynięcia. Na tych płaszczyznach /liniach/ zarówno naprężenia jak i prędkości płynięcia doznają skoku. Jeśli występuje nieciągłość naprężenia  $\sigma$  lub prędkości płynięcia  $v$ , to jest to tzw. nieciągłość silna, a jeśli występuje nieciągłość dla ich pochodnych  $(\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x})$  to jest nieciągłość słaba. Powierzchnia /linie/ nieciągłości dzielią obszar plastyczny na dwa podobszary o innych stanach. Nieciągłość ta nie może być jednak dowolna, gdyż nie mogą być naruszone warunki równowagi wewnętrznej i warunki ciągłości materiału.



Nieciągłości w polu naprężeń lub w polu prędkości płynięcia występują z tego powodu, że układ równań hiperbolicznych, stosowany do wyznaczenia tego pola naprężeń lub pola prędkości płynięcia, powstał z różnych równań oraz z przyjęcia modelu ciała sztywno-idealnie plastycznego.

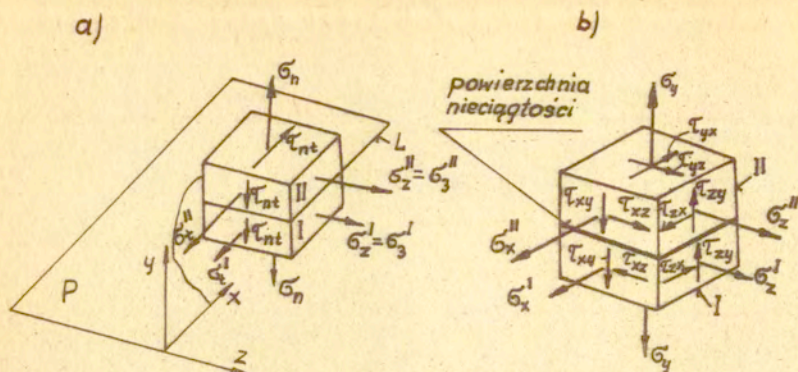
Oczywistym przykładem występowania płaszczyzn nieciągłości naprężeń jest zginanie i skręcanie plastyczne belki. Przy zginaniu plastycznym występuje płaszczyzna obojętna, dzieląca obszar naprężenia rozciągającego od obszaru naprężenia ściskającego. Przy skręcaniu plastycznym rdzeń pozostaje sprężysty a warstwa wierzchnia jest plastyczna i ona jest skręcana. Wzdłuż płaszczyzny oddzielającej te dwa obszary występują naprężenia styczne ścinające.

Przy pomocy linii nieciągłości naprężeń można otrzymać proste rozwiązania oparte na twierdzeniach ekstremalnych.

### 8.5.1. Nieciągłość naprężeń

W teorii nośności granicznej dopuszcza się występowanie powierzchni nieciągłości naprężeń, na których składowe naprężenia doznają nagłego przeskoku.

Weźmy płaszczyznę nieciągłości naprężeń  $P$  zorientowaną względem trójosiowego układu współrzędnych  $x, y, z$  jak na rysunku 8.4. Elementarny prostopadłościan wycięto tak, że powierzchnia nieciągłości przecina go na dwie części I i II. Z elementarnych warunków równowagi (warunku rzutów na oś  $y$  i warunków równowagi momentów względem osi  $y$  i  $x$ ) otrzymujemy ciągłość naprężeń  $\sigma_y, \tau_{yx}$  i  $\tau_{yz}$ . Naprężenia  $\sigma_x, \sigma_z$  i  $\tau_{xz}$  mogą być nieciągłe. Każda elementarna siła, na przykład  $\sigma_x dF$ , dzia-



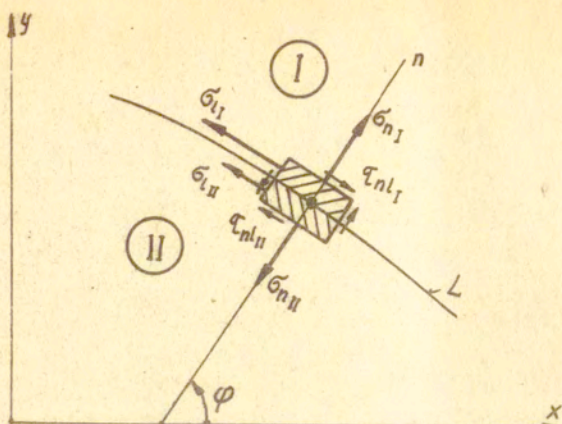
Rys.8.4. Ogólny przypadek powierzchni nieciągłości naprężeń

łająca na powierzchnię  $df$  elementu jest równoważona przez taką samą siłę równą co do wartości, lecz przeciwnie skierowaną i działającą na symetrycznie położony element przeciwległej ściany.

Omówiony przypadek powierzchni nieciągłości jest bardzo ogólny i ma stosunkowo niewielkie znaczenie praktyczne i dlatego nie będziemy się nim zajmować bardziej szczegółowo.

W konkretnych zastosowaniach najczęściej spotykany jest przypadek, gdy  $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ , a więc gdy kierunek z jest główny. Rozważania można wówczas sprowadzić do płaszczyzny x,y, wtedy zamiast płaszczyzny nieciągłości mamy linię nieciągłości L powstałą z przecięcia powierzchni nieciągłości płaszczyzną  $z = \text{const}$ .

Rozpatrzmy nieskończenie mały element leżący na linii nieciągłości L, pokazany na rysunku 8.5. Na ścianki elementu działają naprężenia normalne  $\sigma_n, \sigma_l$  oraz naprężenia styczne  $\tau_{nl}$ . Po jednej stronie linii nieciągłości L, mamy obszar I, a po drugiej - obszar II o innym stanie naprężenia. Z elemen-



Rys. 8.5. Ogólny przypadek linii nieciągłości naprężeń

tarnych warunków równowagi ( $\sum N=0$  ;  $\sum M=0$ ) wynika, że naprężenie normalne  $\sigma_n$  na ścianie równoległej do linii  $L$  nie może doznawać przeskoku. Również naprężenia styczne  $\tau_{nl}$  po obu stronach linii  $L$  muszą mieć tę samą wartość. Warunki te można zapisać następująco:

$$\sigma_n^I = \sigma_n^{II} = \sigma_n, \quad \tau_{nl}^I = \tau_{nl}^{II} = \tau_{nl}. \quad (8.11)$$

Nieciągłość może być tylko w naprężeniach  $\sigma_l$  ( $\sigma_l^I \neq \sigma_l^{II}$ ).

Jeśli po obu stronach linii  $L$  materiał znajduje się w stanie plastycznym, to po rozwiązaniu warunku plastyczności ( $(\sigma_l - \sigma_n)^2 + 4\tau_{nl}^2 = 4k^2$ ) względem naprężenia  $\sigma_l$  otrzymamy równanie na naprężenia  $\sigma_l$  po obu stronach linii nieciągłości

$$\sigma_l = \sigma_n \pm 2\sqrt{k^2 + \tau_{nl}^2}. \quad (8.12)$$

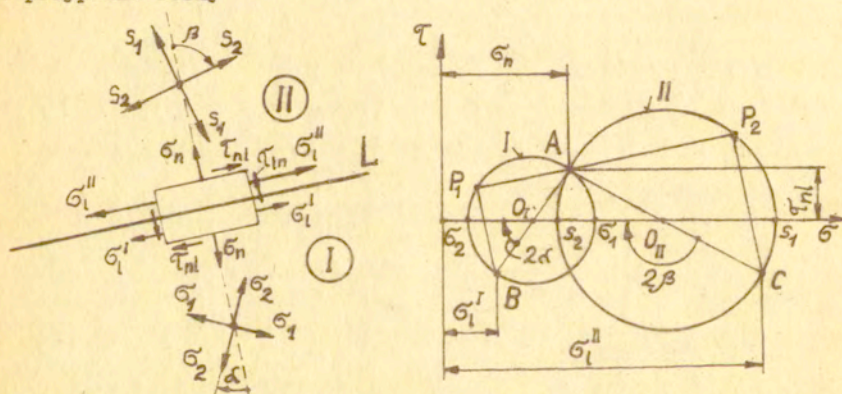
Znak „+” dotyczy obszaru I, a znak „-” dotyczy obszaru II.

Wielkość skoku naprężenia  $\sigma_l$  przy przejściu przez linię nieciągłości wynosi

$$\sigma_l^I - \sigma_l^{II} = [\sigma_l] = 4\sqrt{k^2 + \tau_{nl}^2} \quad (8.13)$$

Linia nieciągłości naprężeń nie może pokrywać się z linią poślizgu. Na linii poślizgu naprężenia styczne mają wartość  $k$ , a ich wielkość skoku wynosi zero i wówczas koła Mohra pokrywają się. Wniosek z tego jest taki, że linia nieciągłości naprężeń nie może być jednocześnie linią nieciągłości prędkości. Linia nieciągłości naprężeń jest dwusieczną kąta między charakterystykami dla naprężeń.

Duże znaczenie praktyczne mają prostoliniowe linie nieciągłości naprężeń dzielące obszar na dwie części, w których panują jednorodne, ale różne stany naprężeń. Do rozważenia tego przypadku weźmy



Rys.8.6. a - linia nieciągłości naprężeń i naprężenia w obszarze I i II, b - odwzorowanie stanu naprężenia na płaszczyźnie kół Mohra.  $P_1$  i  $P_2$  - bieguny naprężenia

ciało podzielone linią nieciągłości  $L$  na obszar I i II (rys. 8.6a). W obszarze I mamy naprężenia  $\sigma_1, \sigma_2$  o założonej wielkości  $\sigma_1 > \sigma_2$  i kierunku  $\sigma_2$  odchylonym o kąt  $\alpha$  do

normalnej <sup>do</sup> linii nieciągłości  $L$ . W obszarze II występują naprężenia  $s_1$  i  $s_2$  o wielkości  $s_1 > s_2$  i kierunku  $s_2$  odchylonym o kąt  $\beta$  od normalnej do linii  $L$  (rys. 8.6a). Stan naprężenia w obu obszarach można odwzorować za pomocą kół Mohra na płaszczyźnie naprężeń (rys. 8.6b). Stan naprężenia w obszarze I odwzorowany jest kołem I, a w obszarze drugim - kołem II. Punkt A przecięcia obu kół Mohra odwzorowuje ciągłe naprężenia  $\sigma_n, \tau_{nl}$  na linii nieciągłości. Naprężenie  $\sigma_l$  w obszarze I określa punkt B( $\sigma_l^I, \tau_{nl}^I$ ), a w obszarze II punkt C( $\sigma_l^{II}, \tau_{nl}^{II}$ ). Punkty  $P_1$  i  $P_2$  są biegunami stanu naprężenia w obszarze I i II. Prosta przechodząca przez te bieguny jest równoległa do linii nieciągłości  $L$  i przechodzi przez punkt A przecięcia koła I i z kołem II. Mając bieguny możemy wyznaczyć kierunki naprężeń głównych po obu stronach linii nieciągłości, prowadząc proste przez te bieguny i punkty przecięcia kół Mohra z osią  $\sigma$ .

Aby nieciągłość na linii  $L$  była statycznie dopuszczalna, to muszą być spełnione związki, które bezpośrednio wynikają z rysunku 8.6b ( $\sigma_n^I = \sigma_n^{II}$  ;  $\tau_{nl}^I = \tau_{nl}^{II}$ )

$$\begin{aligned} (\sigma_1 + \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha &= (s_1 + s_2) + (s_1 - s_2) \cos 2\beta, \\ (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha &= (s_1 - s_2) \sin 2\beta, \end{aligned} \quad (8.14)$$

które można napisać w postaci

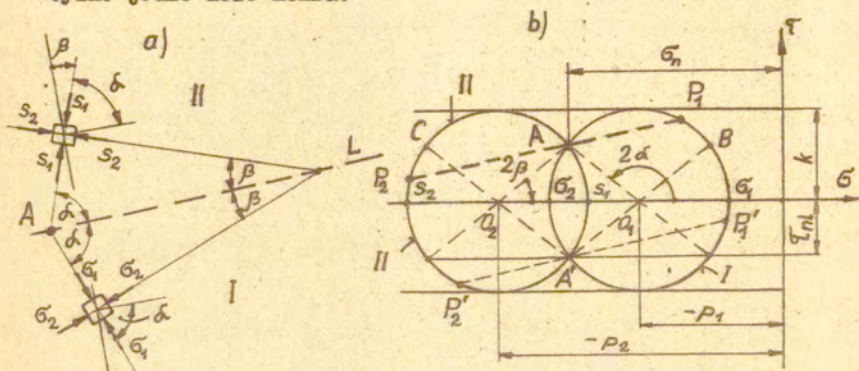
$$\begin{aligned} \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha &= s_1 \cos^2 \beta + s_2 \sin^2 \beta, \\ (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha &= (s_1 - s_2) \sin \beta \cos \beta. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Powyższe rozważania dotyczą przypadku, gdy w obszarze po obu stronach linii nieciągłości  $L$  stan naprężenia osiągnął warunek plastyczności

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k, \quad s_1 - s_2 = 2k. \quad (8.16)$$

Koła Mohra odswierciedlające stan naprężenia dla tych obszarów

mają promienie równe granicy plastyczności na ścianie  $k$  (rys. 8.7b). Załóżmy, że w tych obszarach panuje jednorodny stan naprężenia. Oznacza to, że w każdym punkcie obszaru np. I jest taki sam stan naprężenia i każdemu z tych obszarów odpowiada tylko jedno koło Mohra.



Rys.8.7. Prosty przypadek linii nieciągłości naprężeń

Podstawiając warunki (8.16) do drugiego równania (8.15), otrzymamy zależność między kątami  $\alpha$  i  $\beta$  jakie tworzą odpowiednio naprężenia główne  $\sigma_1$  i  $s_1$  z kierunkiem normalnym do  $L$

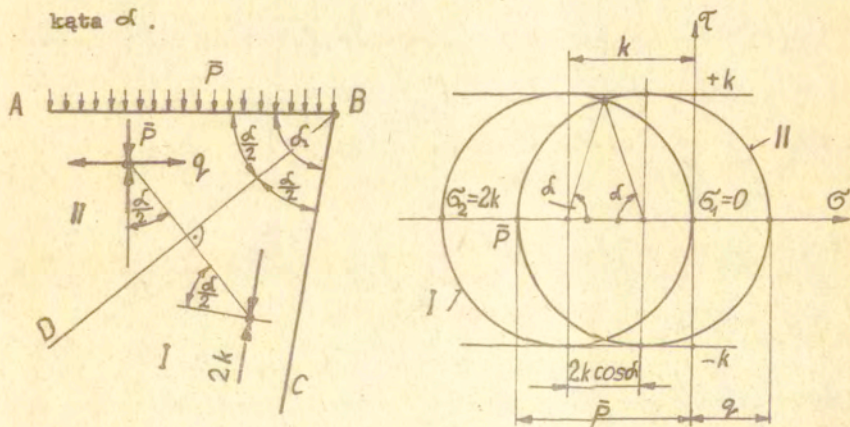
$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha. \quad (8.17)$$

Równanie (8.17) prowadzi do wniosku, że linia nieciągłości  $L$  jest dwusieczną kątów utworzonych przez kierunki naprężeń  $\sigma_1, s_1$  albo  $\sigma_2, s_2$ .

Przedstawione własności linii nieciągłości są ważne dla tych przypadków płaskiego stanu naprężenia i płaskiego stanu odkształcenia, dla których warunków plastyczności Treski wyraża się takim samym równaniem.

Powyższe rozważania są słuszne zarówno dla naprężeń rozciągających jak i ściskających.

W zagadnieniach praktycznych często spotyka się naroże w kształcie kąta prostego lub klina ABC o kącie wierzchołkowym  $\alpha$  obciążone na jednej krawędzi np. AB równomiernie rozłożonym naciskiem  $\bar{p}$  (rys.8.8) . Mamy zadanie wyznaczyć wielkość nacisku  $\bar{p}$ , przy którym naroże osiąga stan plastyczny. W celu rozwiązania zadania możemy posłużyć się statycznie dopuszczalnym polem naprężeń, złożonym z dwóch obszarów I i II, przedzielonych linią nieciągłości naprężeń BD. W obszarze I może występować tylko stan jednoosiowego ściskania w kierunku równoległym do swobodnego brzegu BC, aby był spełniony warunek brzegowy znikania naprężenia normalnego do swobodnej krawędzi BC. Z odwzorowania stanu naprężenia w obszarze I i w obszarze II za pomocą kół Mohra widzimy, że aby oba obszary były w stanie plastycznym, to linia nieciągłości BD musi być dwusieczną kąta  $\alpha$  .



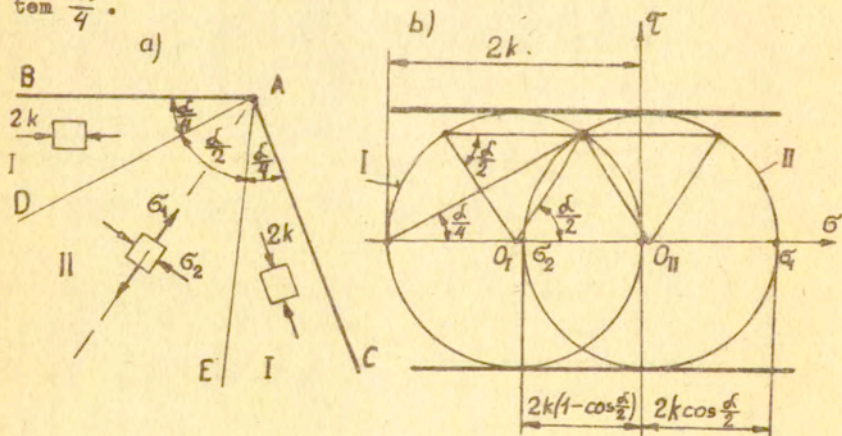
Rys. 8.8. Przykład pola naprężeń z jedną linią nieciągłości

Obliczona nośność  $\bar{p}$  z takiego pola naprężeń jest dolną oceną wartości nośności. Wielkość obciążenia  $\bar{p}$  otrzymujemy bezpośrednio z kół Mohra (rys.8.8b)

$$\bar{p} = 2k(1 - \cos \alpha). \quad (8.18)$$

Jeśli kąt  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , czyli zamiast klina mamy naroże o kącie prostym, to nacisk  $\bar{p} = 2k$ . Gdy  $\alpha = 0$ , to  $\bar{p} = 0$ , ale  $q = 2k$ .

Ważnym przypadkiem dla zastosowań praktycznych jest konfiguracja naroża pokazana na rysunku 8.9a. Proste linie nieciągłości AD i AE schodzą się w narożniku utworzonym przez prostoliniowe nieobciążone krawędzie AB i AC. Linie nieciągłości dzielą obszar na trzy części w ten sposób, że pole naprężeń jest symetryczne względem dwusiecznej kąta  $\alpha$ , jaki tworzą krawędzie. W obszary I możemy wpisać stan jednoosiowego ściskania (rys. 8.9a) lub rozciągania w kierunkach równoległych do nieobciążonych boków AB i AC, bo one tylko taki stan naprężenia mogą przenieść. Zakładamy również, że obszar II jest w stanie granicznym. Z własności linii nieciągłości wynika kąt DAE równy  $\frac{\alpha}{2}$ . Pozostałe kąty BAD i EAC równają się zatem  $\frac{\alpha}{4}$ .

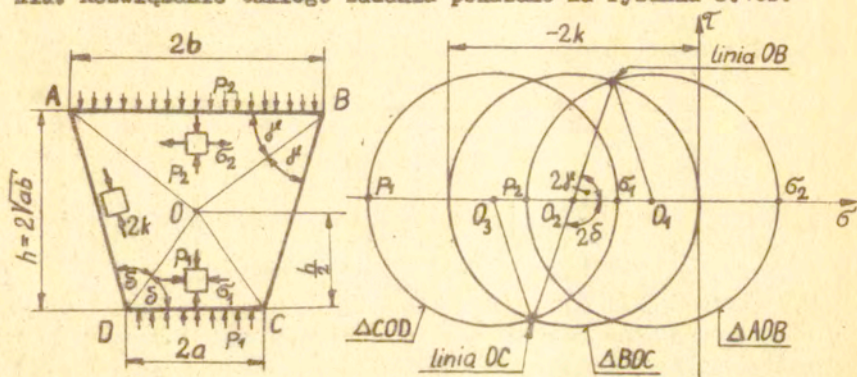


Rys. 8.9. Elementarny przykład pola naprężeń z dwoma liniami nieciągłości wychodzącymi z naroża o kącie  $\alpha$



Sposób wyznaczenia stanu naprężenia w obszarze DAE, oznaczonym jako II, pokazano na rysunku 8.9b.

Spotyka się również przypadek pola z czterema liniami nieciągłości. Jako przykład takiego pola może być obszar trapezowy pokazany na rysunku 8.10a. Obszar ten jest obciążony na boku AB naciskiem równomiernie rozłożonym  $P_2$ , a na boku CD naciskiem  $P_1$ . Naciski te spełniają warunek równowagi  $P_1 a = P_2 b$ . Boki AD i BC są wolne od naprężeń. Linie nieciągłości OA, OB, OC i OD przedzielają obszary o jednorodnych stanach naprężenia. Rozwiązanie takiego zadania pokazano na rysunku 8.10b.



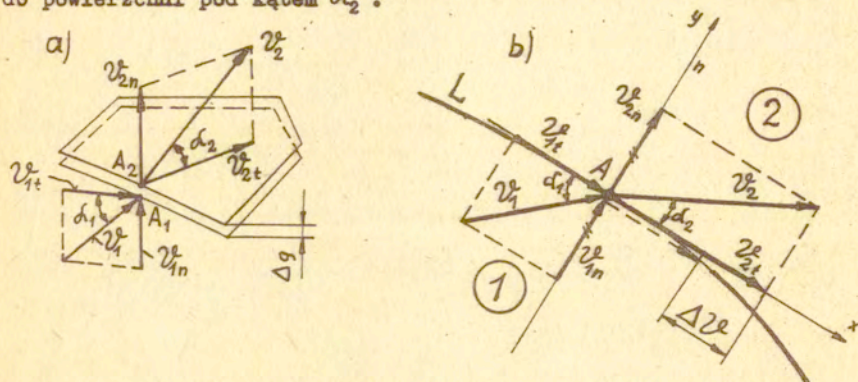
Rys.8.10. Przykład pola naprężeń z czterema liniami nieciągłości:  $P_1 = -2k \frac{2b}{b+a}$ ,  $P_2 = -2k \frac{2a}{b+a}$ ,  $\sigma_1 = -2k \frac{b-a}{b+a}$ ,  $\sigma_2 = 2k \frac{b-a}{b+a}$

### 8.5.2. Nieciągłość prędkości

Przy przechodzeniu prędkości  $v$  przez powierzchnię lub linię nieciągłości wektor prędkości  $v$  zmienia kierunek i wielkość. Dzięki tej zmianie wektora prędkości możliwe jest przesunięcie jednej części materiału względem drugiej.

Rozważmy najbardziej ogólny przypadek nieciągłości prędkości przedstawiony na rysunku 8.11a. Zbadajmy ruch dwóch

blisko siebie leżących punktów  $A_1$  i  $A_2$  położonych na dolnej i górnej powierzchni warstwy o grubości  $\Delta g$ . Prędkość punktu  $A_1$  jest określona wektorem  $v_1^t$ , nachylonym do powierzchni pod kątem  $\alpha_1$ . Prędkość ruchu punktu  $A_2$  określa wektor  $v_2^t$ , nachylony do powierzchni pod kątem  $\alpha_2$ .



Rys. 8.11. Ogólny przypadek nieciągłości prędkości: a - powierzchnia nieciągłości, b - linia nieciągłości

Zakładamy, że wielkości wektorów  $v_1^t$  i  $v_2^t$  są różne i zupełnie dowolnie położone.

Jeśli grubość warstwy  $\Delta g$  zejdzie do zera, to będziemy mieli zamiast warstwy powierzchnię nieciągłości, na której składowe prędkości doznają przeskoaku z wartości  $v_{1n}^t$  do  $v_{2n}^t$  oraz od  $v_{1t}^t$  do  $v_{2t}^t$ . Aby sąsiadujące ze sobą partie materiału nie zachodziły na siebie lub też nie wytwarzała się pustka, to składowe normalne wektora  $v_1^t$  i  $v_2^t$  muszą być równe ( $v_{1n}^t = v_{2n}^t$ ,  $v_1^t \sin \alpha_1 = v_2^t \sin \alpha_2$ ).

Dalszą dyskusję nieciągłości prędkości ograniczymy do najczęściej występującego w zagadnieniach praktycznych przypadku, gdy wektory prędkości po obu stronach powierzchni

nieciągłości leżą na wspólnej płaszczyźnie prostopadłej do tej powierzchni nieciągłości. Przyjmijmy, że płaszczyzną tą jest płaszczyzna rysunku (rys. 8.11b). Następnie przyjmijmy układ współrzędnych  $x, y$  tak, aby oś  $x$  była styczna do linii nieciągłości  $L$ , a oś  $y$  normalna do niej.

Składowa normalna  $v_y^t$  musi być ciągła, czyli po obu stronach linii  $L$  musi być równa ( $v_{y1}^t = v_{y2}^t$ ) bo w przeciwnym razie naruszałyby warunki zwartości (ciągłości) materiału. Gdyby składowa prędkości  $v_y^t$  była nieciągła, to na linii  $L$  występowałaby pustka lub zachodzenie materiału na siebie, co jest fizycznie niemożliwe. Jak widać nieciągłość może być tylko w składowej  $v_x^t$  skierowanej wzdłuż linii  $L$ . Znaczący to, że  $v_x^t$  ma różną wartość po obu stronach linii  $L$ ,  $v_{x1}^t \neq v_{x2}^t$ . Wartość pochodnej  $\frac{\partial v_x^t}{\partial y}$  na linii nieciągłości jest równa nieskończoności, a pochodna  $\frac{\partial v_x^t}{\partial x} \neq 0$ . O zmianie skoku prędkości  $v_x^t$  decyduje składowa po  $y$ . Skokiem prędkości jest  $\Delta v_x^t = v_{x2}^t - v_{x1}^t$ .

Ze związku między prędkościami odkształceń a naprężeniami ( $\frac{\dot{\epsilon}_x}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\dot{\epsilon}_{xy}}{4\tau_{xy}}$ ,  $\frac{\partial v_x^t}{\partial x} = \dot{\epsilon}_x$ ,  $\frac{\partial v_x^t}{\partial y} + \frac{\partial v_y^t}{\partial x} = \dot{\epsilon}_{xy}$ ) wynika, że na linii  $L$  musi być  $\sigma_x - \sigma_y = 0$ , bo tylko wtedy związek ten jest spełniony. Z warunku plastyczności  $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2$  wynika od razu  $\tau_{xy} = k$ . Znaczący to, że linia nieciągłości  $L$  pokrywa się z jedną z linii poślizgu albo z obwiednią linii poślizgu.

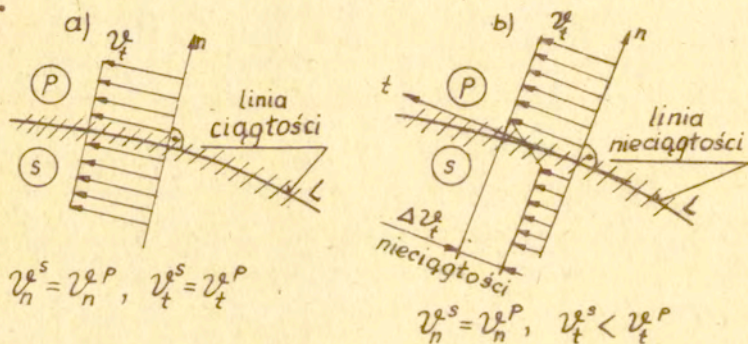
Z zależności prędkości płynięcia na liniach poślizgu  $\alpha$  i  $\beta$   $dv_\alpha^t - v_\beta^t dv^\beta = 0$  i  $dv_\beta^t + v_\alpha^t dv^\alpha = 0$  (równania wyprowadzone przez H. Geiringer) i ciągłości składowej normalnej prędkości po obu stronach linii nieciągłości  $L$  wynika, że jeżeli przy przejściu przez linię nieciągłości  $L$  składowa prędkości skierowana wzdłuż niej doznaje skoku, to wielkość tego skoku jest stała na całej długości linii. Jeśli linią nieciągłości  $L$  jest charakterysty-

ka  $\alpha$ , to po stronie 1 mamy równanie  $dV_{\alpha_1}^l = V_{\beta_1}^l d\varphi^l$ , a po stronie 2 -  $dV_{\alpha_2}^l = V_{\beta_2}^l d\varphi^l$  i po przyjęciu równości prędkości normalnych  $V_{\beta_2}^l = V_{\beta_1}^l$ , otrzymujemy  $dV_{\alpha_2}^l = dV_{\alpha_1}^l$ , a stąd wynika

$$V_{\alpha_2}^l - V_{\alpha_1}^l = \text{constans (lub zero)}. \quad (8.19)$$

Każda cząstka materiału przechodząca przez linię nieciągłości doznaje raptownej zmiany kierunku ruchu i skończonego odkształcenia postaciowego.

W rzeczywistych metalach odkształceniach plastycznie liniami nieciągłości są wąskie pasma, w których występują duże odkształcenia postaciowe. Szerokość pasma zależy od wielkości umocnienia i jest tym szersze, im umocnienie materiału większe.

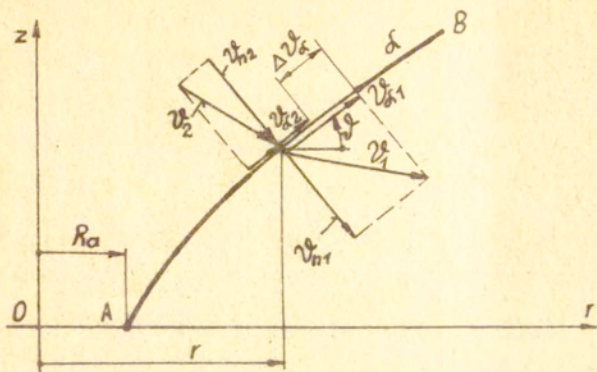


Rys.8.12. Graficzna interpretacja ciągłości i nieciągłości prędkości: s - obszar sztywny, p - obszar plastyczny

### 8.6. Równanie prędkości wzdłuż linii nieciągłości dla zagadnień osiowo-symetrycznych

Przyjmijmy, że linia AB (rys.8.13) jest linią nieciągłości prędkości i nazwijmy ją charakterystyką  $\alpha$ . Nieciągłość

prędkości na tej linii możliwa jest tylko w składowej stycznej  $v_{\alpha}^e$ . Składowa normalna  $v_n^e$  po obu stronach linii musi być taka



Rys. 8.13. Skok prędkości na linii  $\alpha$

sama (czyli ciągła), aby była zachowana ciągłość materiału (nie było pustki lub też, aby materiał nie zachodził na siebie). Wielkość skoku prędkości na linii nieciągłości otrzymujemy wychodząc ze związku prędkości po charakterystyce  $\alpha$   $d v_{\alpha}^e - v_{\beta}^e d\psi = -\frac{v_{\alpha}^e}{2r} dS_{\alpha}$ , zależności na  $v_{\alpha}^e$  ( $v_{\alpha}^e = v_{\alpha}^e \cos \psi - v_{\beta}^e \sin \psi$ ) oraz długości linii elementarnej  $dS_{\alpha} = \frac{dr}{\cos \psi}$ . Odejmując stronami związek wzdłuż charakterystyki  $\alpha$  napisany po obu stronach linii i uporządkowując go otrzymamy równanie różniczkowe

$$\frac{d(v_{\alpha 1}^e - v_{\alpha 2}^e)}{v_{\alpha 1}^e - v_{\alpha 2}^e} = -\frac{dr}{2r},$$

którego rozwiązaniem jest

$$|\Delta v_{\alpha}^e| = v_{\alpha 1}^e - v_{\alpha 2}^e = \frac{C}{\sqrt{r}}.$$

Stałą całkowania C znajdujemy z warunku brzegowego. Jeśli promień  $r = R_a$ , to skok prędkości  $|\Delta v_{\alpha}^e|$  jest równy prędkości w punkcie A  $|v_{\alpha}^e|$  ( $|\Delta v_{\alpha}^e| = |v_{\alpha}^e|$ ) i wówczas równanie na skok prędkości na linii  $\alpha$  przyjmuje następującą postać:

$$|\Delta v_{\alpha}^{\ell}| = \frac{|v_{\alpha}^{\ell}| \sqrt{R_{\alpha}}}{\sqrt{r}} \quad (8.20)$$

Zatem skok prędkości na linii nieciągłości jest odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z promienia  $r$  w danym punkcie na charakterystyce  $\alpha$ . W równaniu (8.20)  $R_{\alpha}$  jest promieniem punktu  $A$  przecięcia rozpatrywanej linii z osią  $r$ ,  $v_{\alpha}^{\ell}$  jest składową styczną (do linii  $\alpha$ ) prędkości w tym punkcie,  $r$  jest współrzędną punktu, w którym wartość skoku składowej prędkości  $|\Delta v_{\alpha}^{\ell}|$  jest obliczana. Analogiczny wzór obowiązuje, gdy linią nieciągłości jest linia  $\beta$ .

### 8.7. Hodograf prędkości

Przy stosowaniu metody kinematycznej w teorii nośności granicznej zakładamy występowanie pewnych mechanizmów odkształcenia. Podstawowym zagadnieniem jest tu określenie kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości. Pole prędkości możemy wyznaczyć w sposób analityczny, numeryczny lub wykreślny. Sposób numeryczny lub analityczny w wielu przypadkach jest dość skomplikowany i wymaga dużego nakładu pracy. Natomiast metoda graficzna jest prosta i wystarczająco dokładna dla zagadnień praktycznych. Polega ona na zbudowaniu planu prędkości, który nazywamy hodografem. Konstrukcja hodografu polega na odwzorowaniu prędkości punktów płaszczyzny fizycznej na płaszczyznę hodografu przez odmierzenie wektorów prędkości płaszczyzny fizycznej od jednego punktu płaszczyzny hodografu zwanego biegunem  $O$ . Metoda graficzna została zaproponowana przez A.P.Greena i następnie rozwinięta przez W.Pragera.

Hodograf można skonstruować dla zagadnień płaskich jak i osiowo-symetrycznych.

### 8.7.1. Konstrukcja hodografu dla zagadnień płaskich

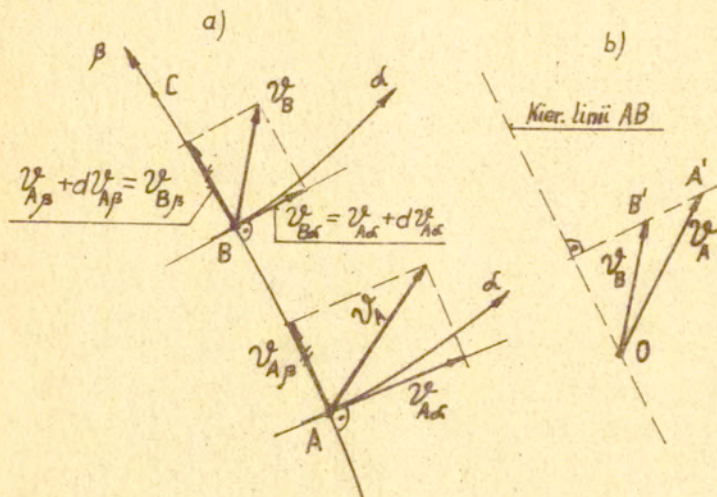
Hodograf czyli plan prędkości płynięcia materiału budujemy graficznie przy pomocy następujących zasad i własności:

- przyjmujemy, że linie poślizgu nie wydłużają się,
- obieramy wspólny punkt początkowy  $O$ , który nazywamy biegunem,
- wszystkie wektory prędkości płaszczyzny fizycznej wyprowadzamy od bieguna  $O$ ,
- każdy odcinek hodografu jest odwzorowany jako odcinek ortogonalny do odpowiedniego odcinka linii poślizgu (wynika to z równań H.Geiringer),
- zmiana kątów siatki hodografu jest identyczna jak zmiana kątów siatki linii poślizgu,
- składowe normalne prędkości do linii nieciągłości po obu jej stronach są sobie równe.

Rozpatrzmy dwa sąsiednie punkty  $A$  i  $B$  na linii poślizgu  $\beta$  (rys.8.14a). W punkcie  $A$  mamy wektor prędkości  $\mathcal{V}_A^l$ , a w punkcie  $B$  - wektor prędkości  $\mathcal{V}_B^l$ . Ponieważ charakterystyki  $\alpha$  i  $\beta$  są nierozciągliwe, to odcinek  $AB$  nie ulega zmianie długości, dlatego rzuty wektorów prędkości  $\mathcal{V}_A^l$  i  $\mathcal{V}_B^l$  na prostą  $AB$  muszą być jednakowe. Odcinek  $AB$  jest bardzo mały, to i prędkości tych punktów różnią się o bardzo małą wartość  $d\mathcal{V}^l$ .

Plan prędkości rozpoczynamy rysować od obrania bieguna  $O$ , od którego odmierzamy o odpowiedniej wielkości i kierunku wektory punktów  $\mathcal{V}_A^l$  i  $\mathcal{V}_B^l$ . Rzuty wektorów prędkości  $\mathcal{V}_A^l$  i  $\mathcal{V}_B^l$  na kierunku linii  $AB$  muszą być jednakowe, a zatem z punktu  $O$  prowadzimy

kierunek linii AB i następnie z końców wektorów  $v_A^z$  i  $v_B^z$  narysowane na hodografie prowadzimy prostopadłą do AB. Odcinek  $A'B'$  na hodografie jest ortogonalny do odcinka AB na płaszczyźnie fizycznej.



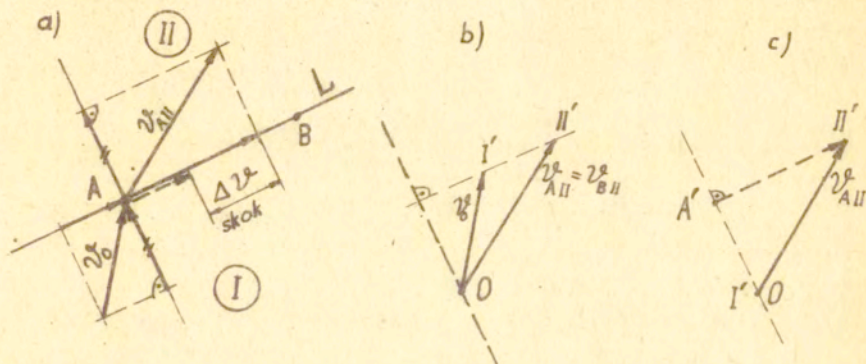
Rys. 8.14. Zasada budowy hodografu: a - płaszczyzna fizyczna, b - płaszczyzna hodografu. Odcinek  $A'B'$  hodografu prostopadły jest do odcinka AB linii poślizgu

Jak widzimy, odcinek AB linii poślizgu na planie prędkości odwzorowany jest przez odcinek  $A'B'$ , odcinki te są do siebie prostopadłe.

W płaskich problemach kinematycznie dopuszczalne mechanizmy odkształcenia wygodnie jest konstruować zakładając, że w materiale powstaje układ sztywnych bloków ślizgających się po sobie wzdłuż ograniczających je powierzchni (linii) nieciągłości oraz po kontakcie materiału z narzędziem. Dopuszczalnymi liniami nieciągłości w takich mechanizmach są linie proste, spirale logarytmiczne i koła.



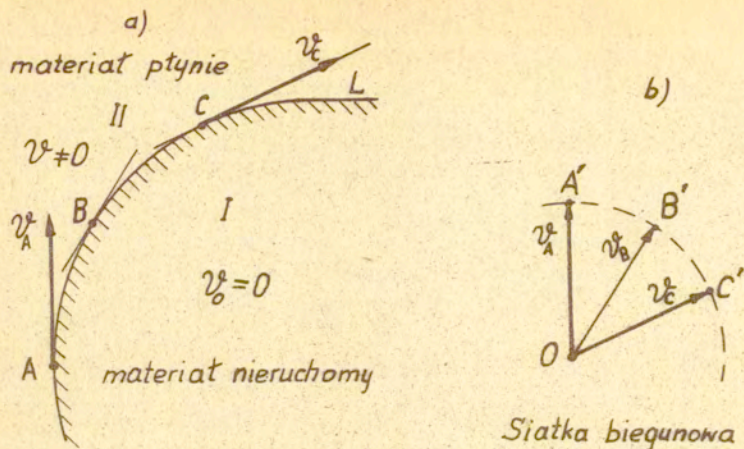
Jeśli materiał po jednej stronie prostej linii nieciągłości  $L$  przemieszcza się jako sztywna całość z jednakową <sup>prędkością</sup>  $v_0^z$  w każdym punkcie, to ta strona na płaszczyźnie hodografu odwzorowana jest przez jeden wektor (rys. 7.15a). Po drugiej stronie linii  $L$  mamy prędkość  $v_{AII}^z$ , która na płaszczyźnie hodografu odwzorowana jest wektorem  $OII'$ . Skok prędkości na linii  $L$  przedstawia odcinek  $I'II' = \Delta v^z$  (rys. 8.15b).



Rys. 8.15. Prędkości na prostej linii nieciągłości: a - płaszczyzna fizyczna, b - hodograf przy istnieniu  $v_0^z$ , c - hodograf gdy  $v_0^z = 0$

Jeśli założymy teraz, że prędkość bloku I jest równa zero ( $v_0^z = 0$ ), to odwzorowanie prędkości bloku I na hodografie pokryje się z biegunem  $O$  (rys. 8.15c), odwzorowanie punktów prędkości bloku II i skoku prędkości punktów bloku II pokazano na rysunku 8.15c. Punkty bloku II mają prędkość  $OII' = v_{AII}^z$ , a skok prędkości —  $A'II'$ .

Jeśli linią nieciągłości  $L$  jest linia krzywa (rys. 8.16a), a w punkcie  $A$  jest znana prędkość  $v_A^z$ , to w pozostałych punktach np.  $B$  i  $C$  prędkości znajdujemy budując siatkę biegunową.

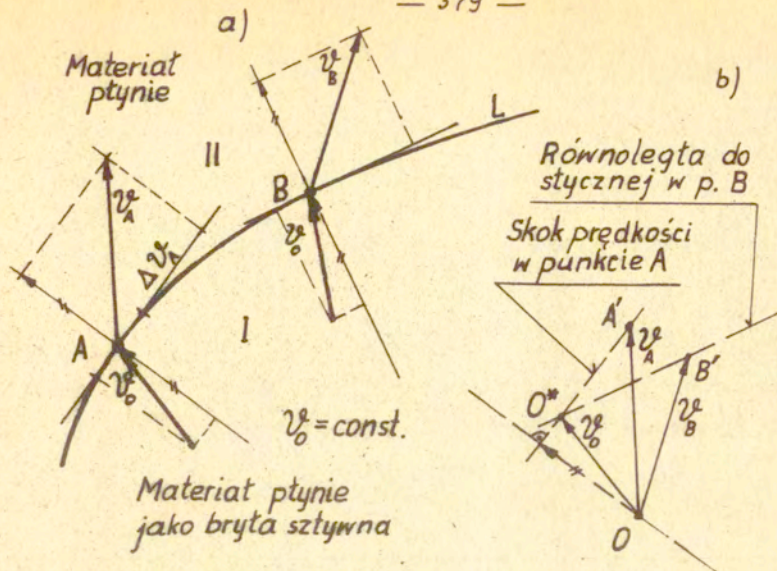


Rys. 8.16. Prędkości na krzywej linii nieciągłości: a - płaszczyzna fizyczna, b - płaszczyzna hodografu

Z bieguna O wyprowadzamy wektor prędkości  $v_A^t$  i promieniem  $OA'$  zataczamy łuk do przecięcia z kierunkiem wektora  $v_B^t$ , który jest równoległy do stycznej do linii L w punkcie B.

W przypadku, gdy mamy krzywą linię nieciągłości, a obszar I płynie jako bryła sztywna z prędkością  $v_0^t = \text{constans}$ , to prędkość obszaru II znajdujemy przy pomocy warunku równości składowej normalnej prędkości po obu stronach linii L (rys.8.17a). Konstrukcję hodografu pokazano na rysunku 8.17b.

Stwierdzić możemy, że jeśli materiał po jednej stronie prostej linii nieciągłości przemieszcza się jak sztywna całość z jednakową w każdym punkcie prędkością, to ta strona odwzorowuje się jako jeden punkt na płaszczyźnie hodografu. Jeśli po drugiej stronie linii nieciągłości materiał przemieszcza się również jako sztywna całość, to ta strona również odwzorowuje się jako punkt.

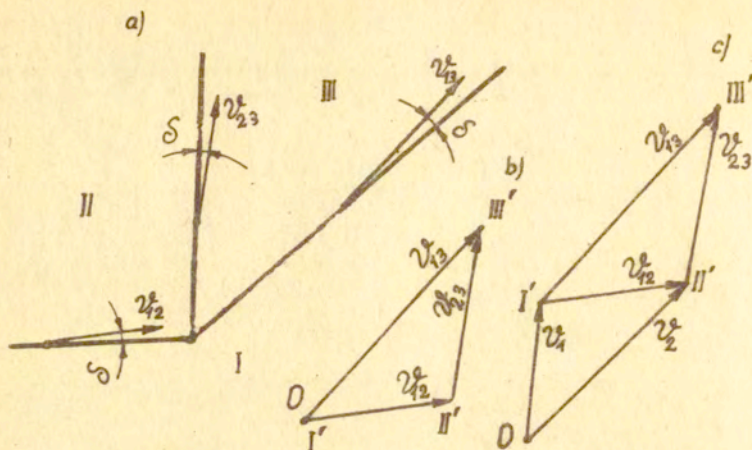


Rys. 8.17. Konstrukcja pola prędkości: a - płaszczyzna fizyczna, b - hodograf - siatka biegunowa

Weźmy układ trzech sztywnych bloków materiału przedzielonych liniami nieciągłości prędkości (rys.8.18), o wektorach nieciągłości prędkości  $v_{12}^e, v_{23}^e, v_{13}^e$  między tymi blokami, odchylonych od linii nieciągłości o kąt  $\delta$ . Budowa hodografu przedstawiona jest na rysunku 8.18b,c, jest prosta i nie wymaga wyjaśnień.

Poniżej zostanie przedstawiona konstrukcja hodografu dla zagadnienia ściskania (prasowania) pasma. Pasma o wysokości  $2h$  ściskane jest płytami o szerokości  $2L$ . Na rysunku 8.19 przedstawiono czwartą część zadania prasowania pasma. Schemat linii nieciągłości AE, EB, BD, DC budujemy tak, aby był możliwy ruch sztywnych bloków od I do V. Schemat ten będzie kinematycznie dopuszczalny, gdy jeszcze będą spełnione warunki ciąg-

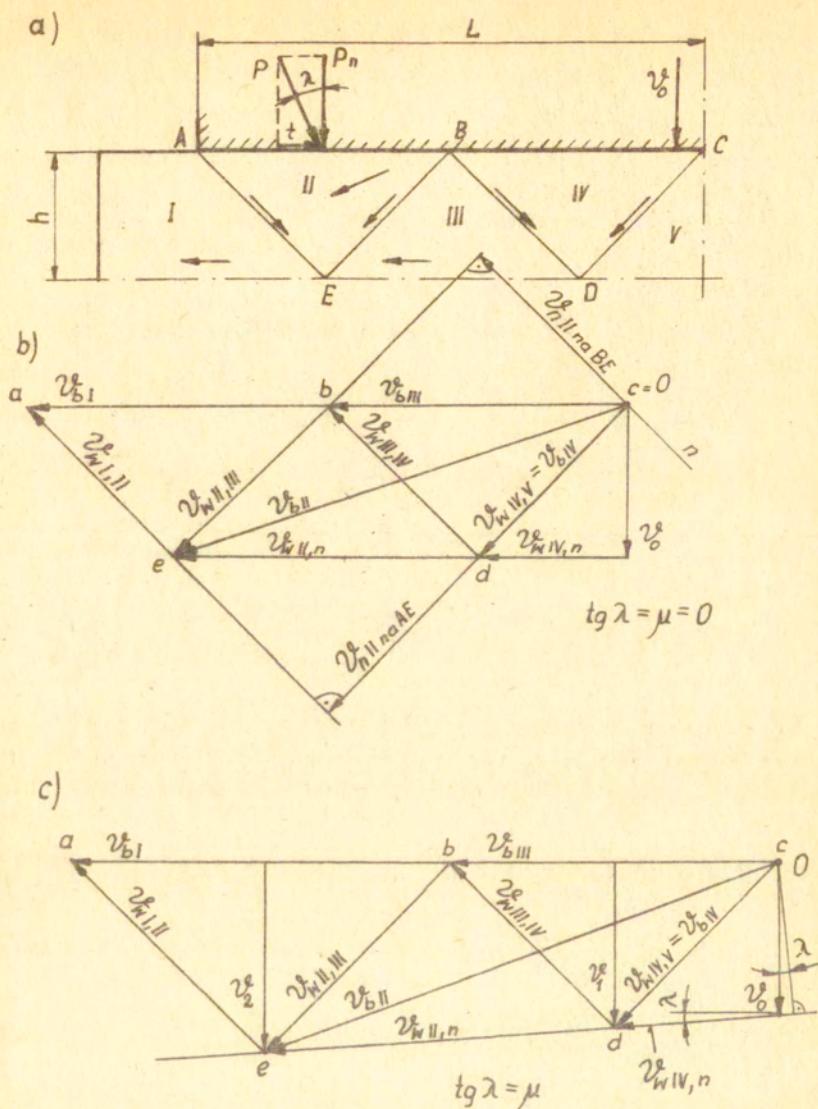
łości materiału i warunki brzegowe dla prędkości.



Rys.8.18. a - układ trzech sztywnych bloków przedzielonych liniami nieciągliwości, b,c - hodograf prędkości

Zagadnienie prasowania pasma możemy rozważać w przypadku braku tarcia na kontakcie ABC (rys. 8.19a) lub w przypadku uwzględnienia tarcia na kontakcie przez wprowadzenie kąta tarcia  $\lambda$  do hodografu (rys.7.19c).

Hodograf zaczynamy budować od obrania bieguna O i wyprowadzenia z niego znanej prędkości  $v_0^e$  ruchu narzędzia, kierunku względnej i bezwzględnej prędkości bloku IV (rys.8.19b). Blok IV przesuwa się po bloku V z prędkością względną  $v_{wIV,V}^e$ , a po narzędziu - z prędkością  $v_{wIV,n}^e$ . Ponieważ prędkość normalna do linii nieciągliwości CD jest równa zero (linia n jest prostopadła do linii CD i rzut prędkości  $v_{wIV,V}^e$  na nią jest równy zero), to prędkość względna  $v_{wIV,V}^e$  jest również prędkością bezwzględną bloku IV -  $v_{bIV}^e$ . Blok III porusza się z prędkością względną  $v_{wIII,IV}^e$  i prędkością bezwzględną



Rys.8.19. Prasowanie (ściskanie) pasma: a - podział zadania na bloki, b - hodograf dla przypadku braku tarcia na kontakcie ABC, c - hodograf z uwzględnieniem tarcia na kontakcie ABC

(rzeczywistą)  $v_{bIII}^e$ . Prędkość bloku II  $v_{nII}^e$  prostopadła do linii nieciągłości BE i prędkość  $v_{nII}^e$  prostopadła do linii nieciągłości AE dają prędkość bezwzględną bloku II  $v_{bII}^e$ . Prędkość  $v_{wII,n}^e$  jest prędkością względnego przesuwania bloku II po narzędziu. Blok I przemieszcza się poziomo z prędkością bezwzględną  $v_{bI}^e$ . Prędkości rzeczywiste bloków odmierzone są od bieguna O.

Hodograf przedstawiony na rysunku 8.19c budowany jest w podobny sposób jak omówiony i przedstawiony hodograf na rysunku 8.19b z tym, że linia ed odchylona jest od poziomu o kąt tarcia  $\lambda$ .

### 8.7.2. Wykres prędkości (hodograf) dla zagadnień osiowo-symetrycznych

W warunkach osiowej symetrii wzdłuż charakterystyk zachodzą związki

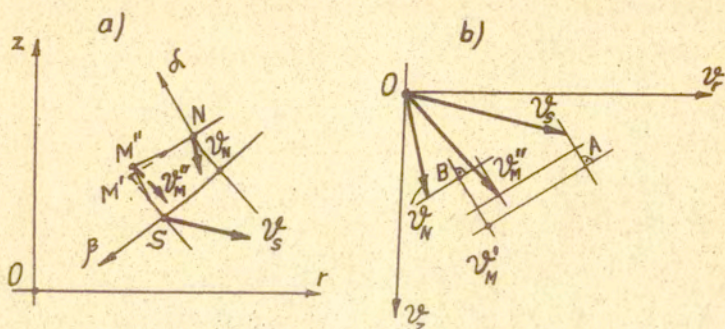
$$\begin{aligned} dv_{\alpha}^e - v_{\beta}^e dv^e &= -\frac{v_{\alpha}^e}{2r} dS_{\alpha} \text{ wzdłuż linii } \alpha, \\ dv_{\beta}^e + v_{\alpha}^e dv^e &= -\frac{v_{\beta}^e}{2r} dS_{\beta} \text{ wzdłuż linii } \beta, \end{aligned} \quad (8.21)$$

których prawe strony powodują skracanie charakterystyk w przypadku, gdy  $v_r^e > 0$  <sup>lub</sup> wydłużanie, gdy  $v_r^e < 0$ . Konstrukcja hodografu będzie następująca. Założmy, że mamy określone prędkości punktów S i N (rys. 8.20a), które odkładamy od bieguna O na płaszczyźnie prędkości (rys. 8.20b). Następnie z końca wektora  $v_S^e$  odkładamy odcinek

$$\overline{v_S^e A} = \frac{1}{2} \frac{(v_r^e)_S}{r_S} dS_{\alpha} \quad (8.22)$$

równoległe do cięciwy łączącej punkt S i M". I analogicznie z końca wektora  $v_N^e$  odkładamy odcinek

$$\overline{v}_N^e B = \frac{1}{2} \frac{(v_r^e)_N}{r_s} dS_\beta \quad (8.23)$$



Rys. 8.20. Wykreślna konstrukcja pola prędkości dla zagadnień osiowo-symetrycznych

równoległe do cięciwy  $NM''$ . Gdy w punktach S i N prędkości  $v_r^e > 0$  to charakterystyki ulegają skróceniu i wartości  $\overline{v}_S^e A$  i  $\overline{v}_N^e B$  odkładamy jak na rysunku 8.20b, gdy natomiast prędkości  $v_r^e < 0$ , charakterystyki ulegają wydłużeniu i wówczas wartości  $\overline{v}_S^e A$  i  $\overline{v}_N^e B$  odkładamy w kierunku przeciwnym. Następnie z punktów A i B prowadzimy proste prostopadłe do odpowiednich odcinków linii siatki charakterystyk. I tak z punktu A prowadzimy linię prostopadłą do cięciwy  $S M''$ , a z punktu B rysujemy linię prostopadłą do cięciwy  $N M''$ . W przecięciu tych linii otrzymujemy punkt  $v_M^e$  określający wektor prędkości w punkcie  $M''$  na płaszczyźnie fizycznej. Mając prędkość  $v_M^e$  w punkcie  $M''$  możemy wyznaczyć jej składową promieniową  $v_r^e$ . Wstawiając do wzoru (8.22) średnią prędkość promieniową między punktem S i  $M''$   $\{ (v_r^e)'_S = \frac{1}{2} [(v_r^e)_S + (v_r^e)_{M''}] \}$  i analogicznie do wzoru (8.23) średnią prędkość promieniową między punktami N i  $M''$  znajdziemy drugie przybliżenie położenia punktu  $v_M^e$  na płaszczyźnie hodografu.

Stosując opisaną procedurę możemy znaleźć pole prędkości w całym obszarze plastycznego płynięcia.

Literatura do rozdziału VIII

1. W.Szczepiński. Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej. PWN, Warszawa 1967.
2. Praca zbiorowa pod red. W.Olszaka, P.Perzyny i A.Sawczuka. Teoria plastyczności. PWN, Warszawa, 1965.
3. W.Szczepiński. Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej. PWN, Warszawa 1968.
4. R.J.Izbicki, Z.Mróz. Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał. PWN, Warszawa 1976.
5. W.Dietrich, J.Miastkowski, W.Szczepiński. Nośność graniczna elementów konstrukcji. PWN, Warszawa 1970.
6. M.Grzymkowski. Podstawowe równania plastycznego płynięcia w stanie osiowej symetrii. Archiwum Hutnictwa, z.1, 1976.



## R o z d z i a ł IX

ZWIĄZKI FIZYCZNE DEFORMACJI PLASTYCZNEJ  
METALI

## 9.1. Wstęp

Związki fizyczne uwzględniające zależność naprężenia  $\sigma$  od odkształcenia  $\epsilon$ , prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$ , temperatury  $T$  i czasu  $t$  nazywane są równaniami konstytutywnymi. Najczęściej ustalane są związki między naprężeniem  $\sigma$ , odkształceniem rzeczywistym (logarytmicznym  $\varphi = \ln \frac{l}{l_0}$ ), prędkością odkształcenia rzeczywistego  $\dot{\varphi}$  ( $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{v}}{l_0}$ ) i temperaturą  $T$ . Niektórzy badacze zamiast odkształcenia względnego  $\epsilon$  lub logarytmicznego  $\varphi$  stosują zgniot  $Z = \frac{F_0 - F}{F_0}$ . Często zamiast naprężenia  $\sigma$  używane jest oznaczenie  $\sigma_p$  jako naprężenia uplastyczniającego. Obrazem geometrycznym równania fizycznego jest krzywa, nazywana krzywą umocnienia. Krzywe umocnienia można przedstawić dla warunków statycznych, tzn. dla prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon} \leq 10^{-4} s^{-1}$  i dla warunków dynamicznych ( $\dot{\epsilon} \geq 10^2 s^{-1}$ ). Za miarę umocnienia materiału przyjmuje się pochylenie krzywej w układzie naprężenie-odkształcenie w każdym jej punkcie. Umocnienie to można odnieść do naprężenia uplastyczniającego, uzyskując ważne pojęcie dla mechaniki materiału - umocnienie względne

$$\frac{d\sigma_p}{d\varphi} = \frac{n}{\varphi} \quad (9.1)$$

Umocnienie względne można otrzymać ze wzoru  $\sigma_p = C\varphi^n$  przez różniczkowanie —  $\frac{d\sigma_p}{d\varphi} = C n \varphi^{n-1} = n \frac{\sigma_p}{\varphi}$ . Pochodną  $\frac{d\sigma_p}{d\varphi}$  nazywamy modułem umocnienia  $D$ ,  $D = \frac{d\sigma_p}{d\varphi}$ .

Dla przeprowadzenia analizy procesu odkształcenia i ustalenia przebiegu zmian występujących naprężeń i odkształceń konieczne jest ujęcie krzywej umocnienia w postaci funkcji matematycznej. Ogólnie równanie takie można zapisać w postaci:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T, t) \quad (9.2a)$$

lub

$$\sigma = \sigma(z_i, \dot{z}_i, T). \quad (9.2b)$$

Spśród licznych wzorów opisujących krzywe umocnienia, podanych w literaturze, najszersze zastosowanie znalazły wzory o charakterze potęgowym.

Krzywe umocnienia wyznaczane są doświadczalnie przy różnych sposobach odkształcania. Najczęściej wyznacza się je z próby jednoosiowego rozciągania. Można je również wyznaczać z próby ściskania lub skręcania. Krzywe te dotyczą jednoosiowego stanu naprężenia. Badania przeprowadzone na <sup>próbkiach</sup> rurkowych pozwalają wyznaczać krzywe umocnienia dla złożonego stanu naprężenia, sporządzone we współrzędnych intensywności naprężenia  $\sigma_1$ , intensywność odkształcenia  $\varepsilon_i$ .

Uwzględnienie własności plastycznych (odkształceń trwałych) i reologicznych (czasowych) metali potrzebne jest przy określaniu wytrzymałości materiału poddanego obciążeniom dynamicznym. Tymi zagadnieniami zajmuje się teoria lepkoplastyczności, która ustala równania konstytutywne wiążące własności plastyczne materiału z prędkością obciążenia. W konstrukcjach mechanicznych obciążonych dynamicznie występują małe odkształcenia. W procesach technologicznych prowadzonych z dużymi prędkościami deformacji (tłoczenie wybuchowe, elektromagnetyczne i wyciskanie hydrodynamiczne) występują duże odkształ-

cenia,  $\dot{\epsilon} = 0,6$  i więcej.

Równania (9.2) przedstawiają hiperpowierzchnię, którą można przedstawić w szerokim przedziale odkształcenia, prędkości odkształcenia i temperatury.

Temperatura może się zmieniać od 0 K do temperatury topnienia  $T_{top}$  ( $0 K < T < T_{top}$ ). Zakres temperatury można podzielić na:

1. obszar wysokotemperaturowy

$$\frac{T_{top}}{2} \leq T \leq T_{top}, \quad (9.3a)$$

2. obszar niskotemperaturowy

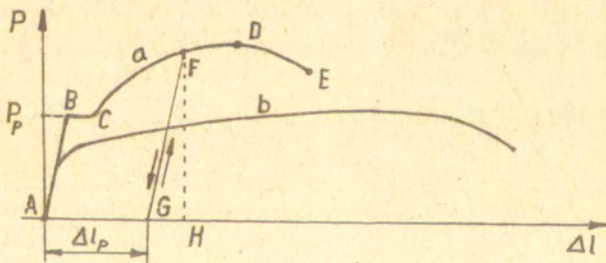
$$0 K \leq T \leq \frac{T_{top}}{2}. \quad (9.3b)$$

Wpływ temperatury można przedstawiać za pomocą stosunku

$$\Theta = \frac{T}{T_{top}}$$

nazywanego temperaturą homologiczną.

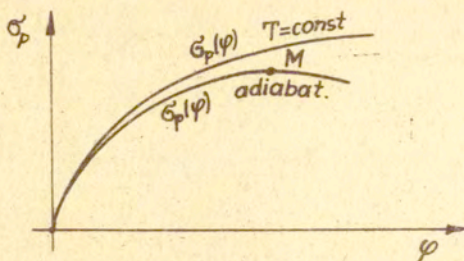
Krzywe rozciągania otrzymane w temperaturze pokojowej i w temperaturze podwyższonej mają inny charakter (rys. 9.1).



Rys. 9.1. Wykresy rozciągania miękkiej stali:  
a) krzywa rozciągania w temperaturze normalnej;  
b) krzywa rozciągania w wysokiej temperaturze,  
powyżej  $500^{\circ}C$

Proces deformacji może odbywać się w stałej temperaturze  $T = \text{const}$  ( $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}(\epsilon, \dot{\epsilon}, T)$ ) i wówczas nazywa się on izotermicznym albo przy stałym ciepłe  $Q = \text{const}$  — wówczas nazywa się on

adiabatycznym. Krzywe umocnienia dla procesu izotermicznego i procesu adiabatycznego mają inny przebieg (rys. 9.2).



Rys. 9.2. Krzywe umocnienia przy odkształcaniu adiabatycznym i izotermicznym

Wykres zależności między naprężeniem rzeczywistym i odkształceniem nazywamy krzywą umocnienia materiału. Krzywa umocnienia opisana jest równaniem ustalonym na podstawie wyników doświadczalnych, a zatem krzywa umocnienia jest obrazem geometrycznym związku fizycznego  $\sigma = \sigma(\varphi, \dot{\varphi})_T$ . Znajomość krzywej umocnienia potrzebna jest do określania sił i pracy odkształcenia plastycznego, wielkości odkształcenia granicznego i własności wytrzymałościowych po odkształceniu.

Krzywe umocnienia materiału również przedstawione są we współrzędnych naprężenia uplastyczniającego  $\sigma$  lub  $\sigma_p$  i odkształcenia  $\varepsilon$  lub prędkości odkształcenia  $\dot{\varepsilon}$ . Dla procesów technologicznych konieczna jest znajomość oporu plastycznego oznaczonego przez  $k_f$ . Opór plastyczny  $k_f$  jest to naprężenie potrzebne do odkształcenia plastycznego materiału w danym procesie technologicznym. Na naprężenie  $k_f$  składa się naprężenie uplastyczniające  $\sigma_p$  (zależne od rodzaju materiału, odkształcenia  $\varepsilon$ , prędkości odkształcenia  $\dot{\varepsilon}$  i temperatury  $T$ ), naprężenie  $\sigma_w$  idące na dodatkowe wewnętrzne przemieszczenie

materiału (skłonność materiału do starzenia, rekrytalizacji) oraz naprężenie  $\sigma_t$  idące na pokonanie oporów tarcia materiału o narzędzie z uwzględnieniem kształtu i wymiarów materiału odkształcanego i narzędzia

$$k_f = \sigma_p + \sigma_w + \sigma_t \quad (9.4a)$$

Dla potrzeb praktyki przemysłowej opór plastyczny dla różnych stali można wyznaczyć ze wzoru

$$k_{fs} = \frac{L_p}{V \varphi} \quad (9.4b)$$

gdzie -  $L_p$  jest pracą odkształcenia plastycznego,

$V$  jest objętością materiału odkształcanego,

$\varphi$  jest logarytmicznym odkształceniem plastycznym.

Wpływ odkształcenia  $\varphi$ , prędkości odkształcenia  $\dot{\varphi}$  i temperatury  $T$  na sposób odkształcania można <sup>wyjaśnić</sup> teorią dyslokacji. Odkształcenie plastyczne jest wynikiem ruchu dyslokacji, która na swej drodze napotyka różne przeszkody. Zarówno dyslokacja jak i inne atomy sieci krystalicznej drgają, dostarczając w ten sposób energii na pokonanie przeszkód i dalszy ruch dyslokacji. Drgania te są intensywniejsze w wyższych temperaturach, a słabsze w temperaturach obniżonych.

## 9.2. Wpływ różnych czynników na naprężenie uplastyczniające

Na wartość naprężeń uplastyczniających materiał ma wpływ wiele czynników. Wybranie czynników dominujących nie jest rzeczą łatwą. Dotychczasowe badania pozwalają stwierdzić, że największy wpływ na wartość naprężenia uplastyczniającego materiał ma wpływ odkształcenie  $\epsilon$ , prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  i temperatura  $T$ . Należy również zaznaczyć, że nie mały wpływ

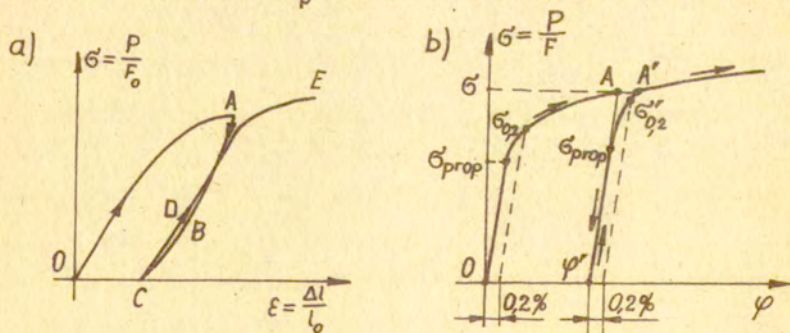
ma długość i kształt próbki oraz wiele innych czynników również ważnych, ale trudnych do uwzględnienia zarówno w rozwiązaniach teoretycznych jak i doświadczeniach.

Poniżej zostanie rozważony wpływ odkształcenia  $\varepsilon$ , prędkości odkształcenia  $\dot{\varepsilon}$  i temperatury  $T$  na naprężenie uplastyczniające  $\sigma_p$  i na kształt krzywej umocnienia materiału. Zostanie również przeprowadzona analiza równań konstytutywnych uwzględniających te poszczególne czynniki jak i wszystkie jednocześnie.

### 9.2.1. Wpływ odkształceń na naprężenia uplastyczniające

Zagadnienie wpływu odkształcenia plastycznego na naprężenia uplastyczniające jest jednym z ważniejszych problemów plastyczności metali. Badania doświadczalne przeprowadzane są zarówno dla stanu jednowymiarowego, płaskiego jak i przestrzennego.

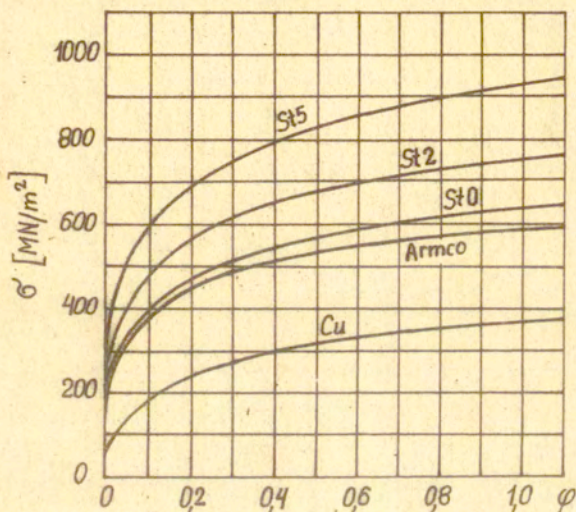
Najczęściej stosowanym sposobem badania zdolności materiałów do odkształceń plastycznych jest próba rozciągania próbki okrągłej lub płaskiej. Wpływ wstępnego odkształcenia  $\varphi'$  na granicę plastyczności  $\sigma_p$  pokazano na rysunku 9.3b. Na rysun-



Rys. 9.3. Wpływ wstępnego odkształcenia próbki  $\varphi'$  na naprężenia uplastyczniające

ku 9.4 pokazano krzywe umocnienia dla różnych materiałów.

Krzywe te można również przedstawić we współrzędnych  $\sigma_p - \xi$ .



Rys. 9.4. Krzywe umocnienia różnych materiałów

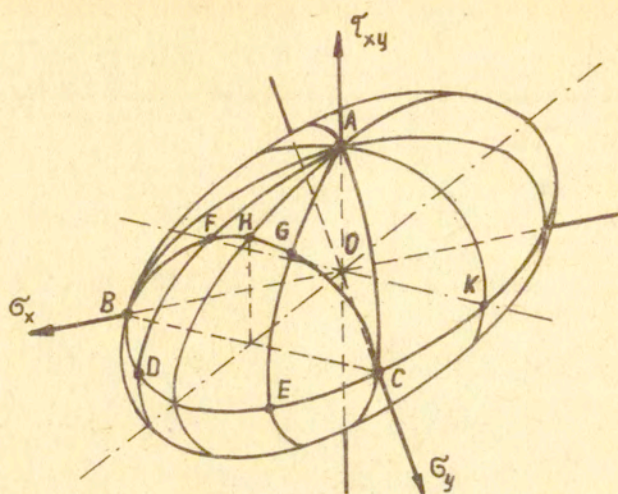
Jeśli próbki rurkowe będą obciążane kombinacją momentu skręcającego, siły osiowej i ciśnienia, to naprężenia uplastyczniające utworzą powierzchnię plastyczności - elipsoidę Hubera-Misesa pokazaną na rysunku 9.5.

Naprężenia uplastyczniające materiał z dość dużą dokładnością można zapisać równaniem

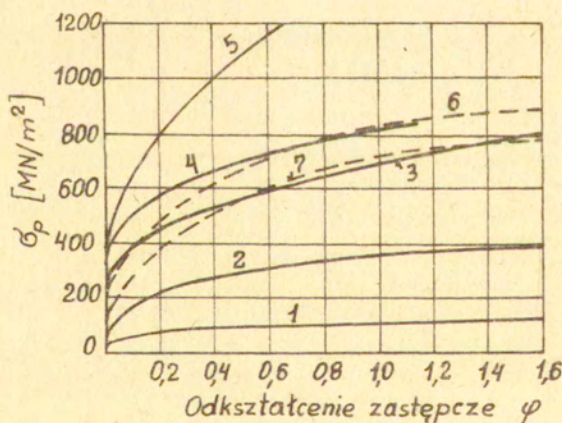
$$\sigma_p = c(\varphi_0 + \varphi)^n, \quad (9.5)$$

gdzie  $c$ ,  $\varphi_0$ ,  $n$  są stałymi zależnymi od materiału.

Dla krzywych umocnienia przedstawionych na rysunku 9.6 równania opisujące podano w tabelicy 1.



Rys. 9.5. Powierzchnia plastyczności - elipsoida Hubera-Misesa,  $\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = 3k^2$



Rys. 9.6. Krzywe umocnienia dla różnych materiałów: 1-Al, 2-Cu, 3- stal 0,08% C, 4- stal 0,25% C, 5- stal nierdzewna, 6- mosiądz 57% Cu, 7- mosiądz 63% Cu



Tablica 1

Równania opisujące materiał [22]

| Materiał                 |   |
|--------------------------|---|
| Miedź wyżarzona          | $\sigma_p = 420 (0,016 + \varphi)^{0,3}$  |
| Mosiądz 63% Cu wyżarzony | $\sigma_p = 710 \varphi^{0,48}$           |
| Mosiądz 63% Cu półtwardy | $\sigma_p = 710 (0,125 + \varphi)^{0,48}$ |
| Stal 0,1% C wyżarzona    | $\sigma_p = 680 \varphi^{0,22}$           |
| Stal nierdzewna          | $\sigma_p = 1490 (0,016 + \varphi)^{0,5}$ |
| Aluminium                | $\sigma_p = 140 \varphi^{0,25}$           |

A. Krupkowski podał zależność między naprężeniami i zgniotem  $Z = \frac{F_0 - F}{F_0}$  w postaci [21]

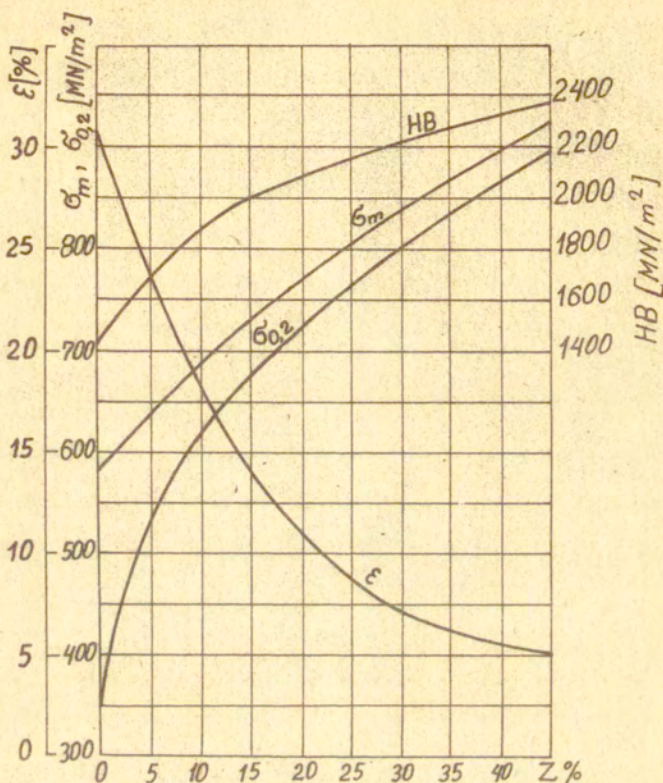
$$\sigma = c Z_1^n, \quad (9.6)$$

gdzie  $Z_1 = Z_1 + (1 - Z_1) Z$  jest zgniotem teoretycznym,  $Z_1$  jest zgniotem wstępnym,  $c$  i  $n$  są stałymi materiałowymi. Wartości stałych dla różnych metali podano w tablicy 2.

Wartości współczynników określających proces  
umocnienia przy rozciąganiu [21]

| Materiał                          | C    | n     | $Z_1$  | Postać wzoru                      |
|-----------------------------------|------|-------|--------|-----------------------------------|
| Stal 0,3% C.....                  | 1038 | 0,255 | - 0,50 | $\sigma = 1038 \cdot Z_1^{0,255}$ |
| Stal 0,42% C.....                 | 1157 | 0,220 | - 0,82 | $\sigma = 1157 \cdot Z_1^{0,220}$ |
| Stal 0,55% C.....                 | 1675 | 0,325 | 0,0    | $\sigma = 1675 \cdot Z_1^{0,235}$ |
| Miedź spiekana 99,5%<br>Cu.....   | 2721 | 1,180 | 0,04   | $\sigma = 2721 \cdot Z_1^{1,180}$ |
| Miedź techniczna<br>99,6% Cu..... | 789  | 0,600 | 0,0075 | $\sigma = 789 \cdot Z_1^{0,600}$  |
| Miedź elektroliczna.              | 666  | 0,550 | 0,0154 | $\sigma = 666 \cdot Z_1^{0,550}$  |

Na rysunku 9,7 przykładowo podano zależność własności mechanicznych od zgniotu.  $Z$  dla stali 45.



Rys. 9.7. Właściwości mechaniczne stali 45 w zależności od zgniotu Z na zimno [12]:

$$\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}, \quad Z = \frac{F_0 - F}{F_0}$$

### 9.2.2. Wpływ prędkości odkształcenia na naprężenie uplastyczniające

Prędkość odkształcenia w procesie plastycznego płynięcia określana jest tensorem prędkości odkształcenia o składowych, które można wyznaczyć ze wzoru

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (9.7)$$

gdzie  $v_i$  jest prędkością płynięcia ośrodka plastycznego o składowych  $v_x, v_y, v_z$ ; kropka nad symbolem  $\dot{\epsilon}_{ij}$  oznacza prędkość odkształcenia, a nie różniczkowanie tensora odkształcenia względem czasu. Tensor prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}_{ij}$  jest symetryczny,  $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ji}$ . Doświadczalnie stwierdza się, że przy plastycznym płynięciu objętość ciał zmienia się w bardzo niewielkim stopniu. Dla rozwiązywania konkretnych problemów zakłada się, że objętość ta nie ulega zmianie. Wyraża się to zależnością:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = 0. \quad (9.8)$$

Dla jednoosiowego stanu (rozciągania lub ściskania) prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  jest przyrostem odkształcenia  $d\epsilon$  w jednostce czasu  $dt$

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{v}{l_0} \quad [s^{-1}], \quad (9.9)$$

gdzie  $v = \frac{\Delta l}{dt}$  [mm/s] jest prędkością obciążenia (prędkością ruchu narzędzia przy rozciąganiu lub przy ściskaniu),  $l_0$  (lub  $h_0$  przy ściskaniu) jest początkową długością próbki. Prędkość obciążenia  $v$ , a zatem i prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  wpływają na umocnienie materiału odkształcanego.

Zmiana prędkości odkształcenia powoduje odpowiednią

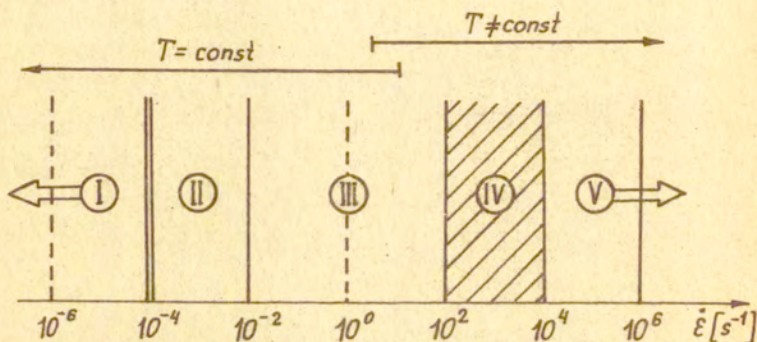
zmianę krzywej umocnienia. Wzrost prędkości odkształcenia powoduje wzrost naprężenia uplastyczniającego i tym samym wzrost oporu plastycznego. Stosowanie większych prędkości ruchu narzędzia powoduje skrócenie czasu wykonania operacji naturalnie przy większym obciążeniu i zużyciu narzędzia. Stąd też badania wpływu prędkości odkształcenia na opór plastyczny mają wielkie znaczenie praktyczne.

Prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  zawiera się w wielu rzędach dziesiętnych i może być zilustrowana przy pomocy pasma. Za poziom odniesienia przyjmuje się statyczną prędkość odkształcenia równą  $\dot{\epsilon}_{stat} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  (rys. 9.8). W paśmie tym można rozróżnić szereg zakresów wynikających ze stosowanej techniki eksperymentu [18]. I tak:

- I —  $\dot{\epsilon} \leq 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  jest to zakres pełzania metali. Doświadczenia przeprowadza się dla szeregu poziomów  $\sigma = \text{const}$ , wyznaczając krzywą pełzania w postaci  $\epsilon = \epsilon(t)$ .
- II —  $1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} \leq \dot{\epsilon} \leq 1 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  jest to zakres prób statycznych na standardowych maszynach i standardowych próbkach. Prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon} = \text{const}$  uzyskuje się na maszynach typu kinematycznego, które wyznaczają od razu krzywą umocnienia  $\sigma' = \sigma'(\epsilon)_T, \dot{\epsilon}$ .
- III —  $1 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \leq \dot{\epsilon} \leq 1 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$  jest to zakres prędkości odkształceń dla prób quasistatycznych przeprowadzanych na młotach spódowych typu Charpy, młotach rotacyjnych i innych. Stosowane są tu próbki standardowe lub nieco krótsze.
- IV —  $1 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1} \leq \dot{\epsilon} \leq 1 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$  jest to zakres dużych prędkości odkształcenia realizowanych jedynie w próbach

ściskania krótkich próbek. Dla zarejestrowania zjawisk towarzyszących tym próbom konieczne są specjalne techniki pomiarowe oparte na elektronicznych urządzeniach wzmacniania i rejestracji sygnału.

- V —  $\dot{\epsilon} \geq 1 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$  jest to zakres super wysokich prędkości odkształcenia uzyskiwany jedynie poprzez generację płaskich fal uderzeniowych i impulsowym obciążeniu.



Rys. 9.8. Pasmo prędkości odkształcenia, poszczególne podzakresy omówiono w tekście

Jak widać z rysunku 9.8. dla niskich prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  zachodzi izotermiczny proces deformacji, natomiast dla wysokich prędkości odkształceń zachodzi adiabatyczny proces deformacji, gdzie cała praca odkształcenia plastycznego zamienia się na ciepło, powodując wzrost temperatury próbki.

Większość materiałów konstrukcyjnych jest czuła na prędkość odkształcenia. Szczególnie metale posiadające wyraźną granicę plastyczności są wrażliwe na prędkość odkształcenia. Do tych metali w pierwszej kolejności należy czyste żelazo

i miękka stal. Prędkość odkształcenia wyraźnie wpływa na wzrost granicy plastyczności i do poprawnego opisu materiału musi być uwzględniona.

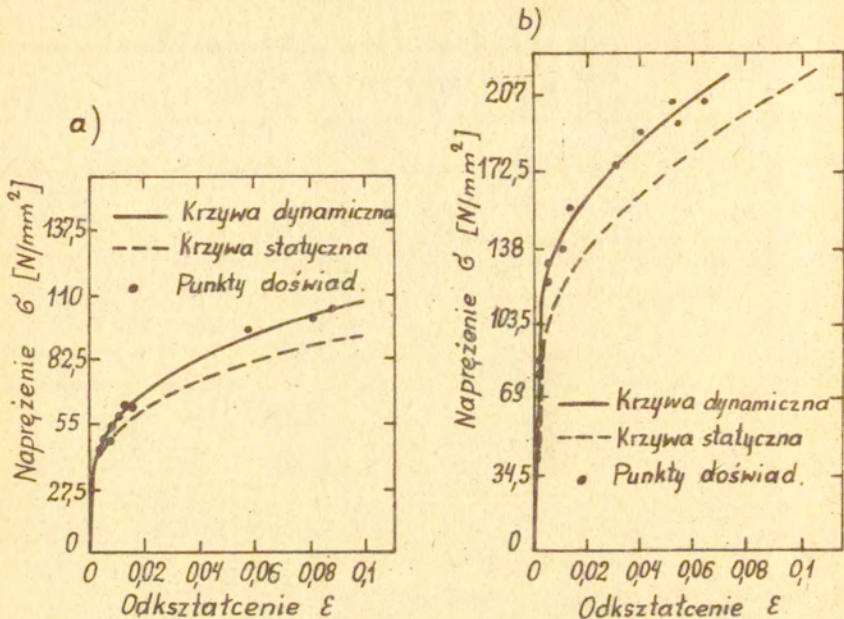
Dla niektórych materiałów konstrukcyjnych wzrost prędkości odkształcenia może być nieregularny. Może się okazać, że w pewnych zakresach prędkości odkształcenia materiał jest nieczuły na prędkość odkształcenia plastycznego. A może być i tak, że wzrost prędkości odkształcenia powoduje zmniejszenie naprężenia. Te nieregularności związane są ze sposobem odkształcania, miejscem tworzenia płaszczyzn poślizgu (np. w ziarnach lub na granicach ziaren) oraz zmianami strukturalnymi wywołanymi odkształceniami plastycznymi. Stopy aluminium o wysokiej wytrzymałości nie są wrażliwe na prędkość odkształcenia.

Odształcenia plastyczne związane są z ruchem dyslokacji, które są blokowane przez powłoki (chmury) obcych atomów. W stalach dyslokacje blokowane są powłokami atomów węgla. Do wyrwania dyslokacji z powłok obcych atomów potrzebne jest większe naprężenie. Większa prędkość odkształcenia nie sprzyja tworzeniu się nowych dyslokacji i powoduje hamowanie dyslokacji istniejących.

Badania uwzględniające duże prędkości odkształcenia noszą nazwę badań dynamicznych. Zachowanie się metalu w badaniach dynamicznych różni się znacznie od zachowania metalu w badaniach statycznych (rys. 9.9).

Krzywe z badań dynamicznych nosi nazwę dynamicznej krzywej umocnienia  $\sigma-\dot{\epsilon}$  i jest ona wykonana dla określonej prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  i określonej temperatury  $T$ . Prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  zmienia się w czasie odkształcania i wzdłuż

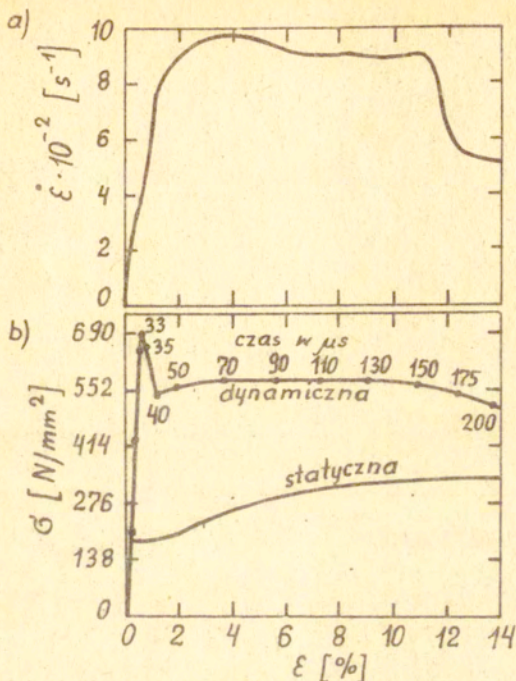
próbki. Zależy ona również od wartości  $\epsilon$  (rys. 9.10).



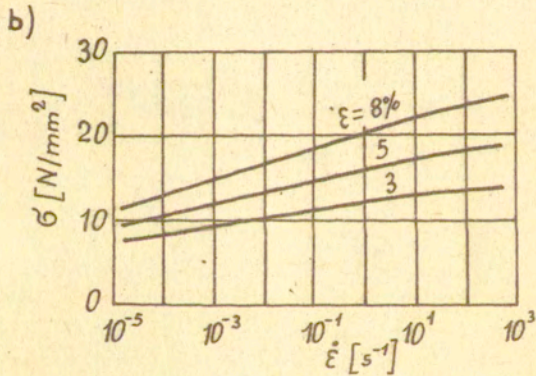
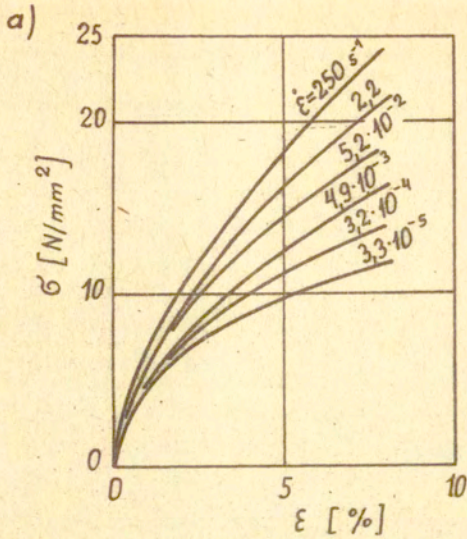
Rys. 9.9. Krzywe napężenie-odkształcenie:  
a) dla aluminium, b) dla miedzi. [23]

Badaniem wpływu prędkości odkształcenia na naprężenia uplastyczniające materiał zajmowało się wielu badaczy. Doświadczenia ich obejmowały różne metale i szeroki zakres prędkości odkształceń. Wyniki prac doświadczalnych dla niektórych metali przedstawiono na rysunkach od 9.11 do 9.20.

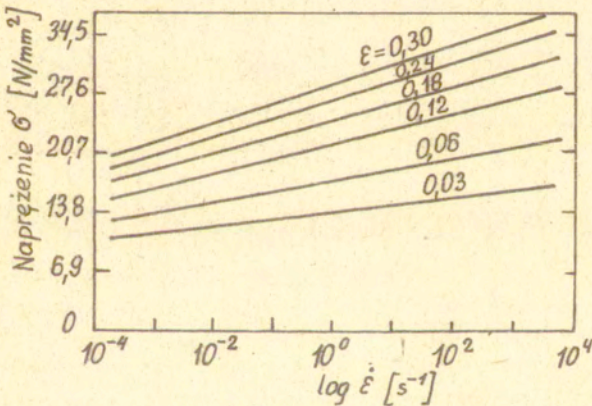
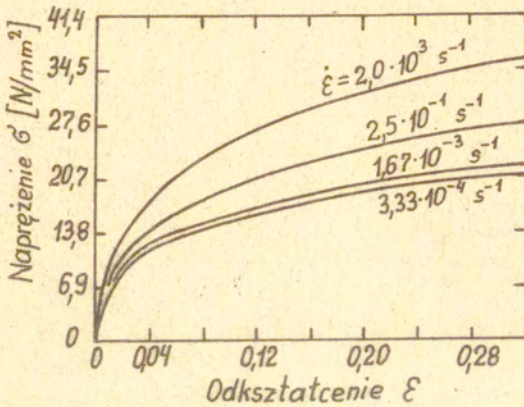




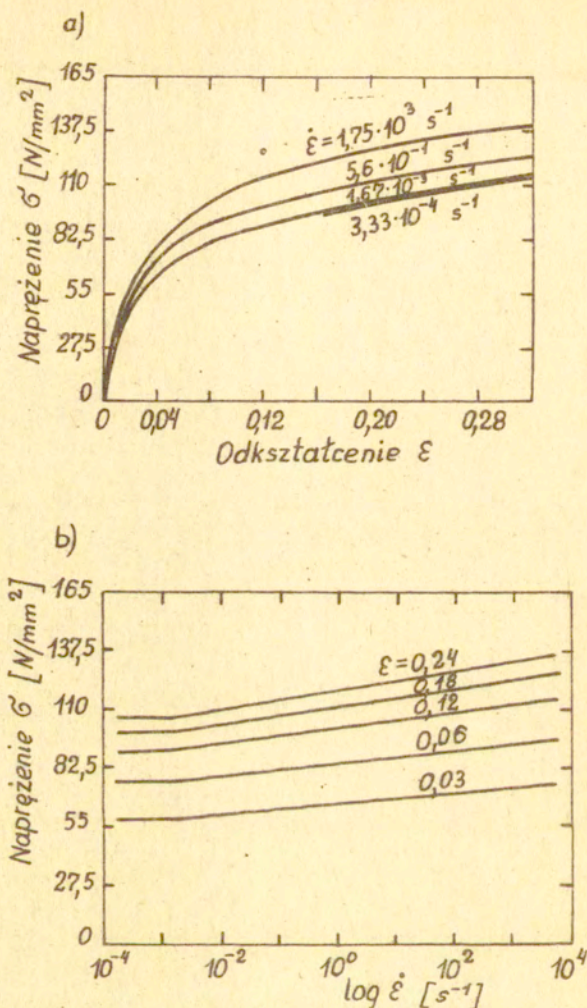
Rys. 9.10. Krzywe dla miękkiej stali: a) prędkość odkształcenia w funkcji odkształcenia w badaniu dynamicznym, b) naprężenie w funkcji odkształcenia (wg Hardinga, Woode i Campbella [23] )



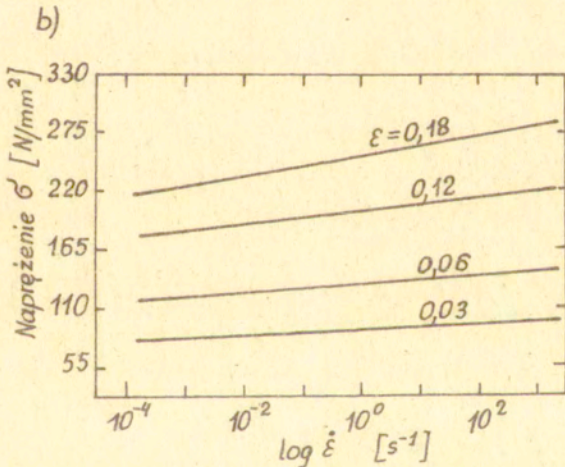
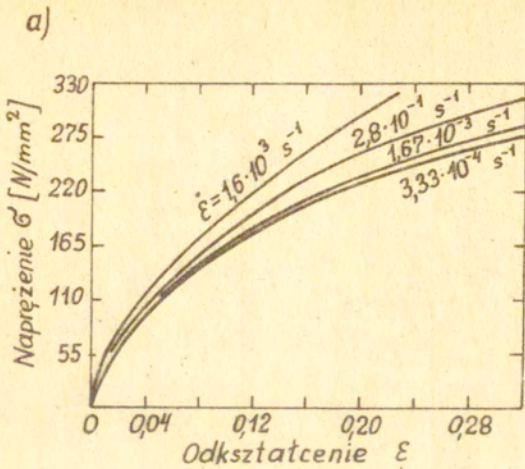
Rys. 9.11. Wpływ prędkości  $\dot{\epsilon}$  i odkształcenia  $\epsilon$  na naprężenia ściskające próbki z ołowiu [19]



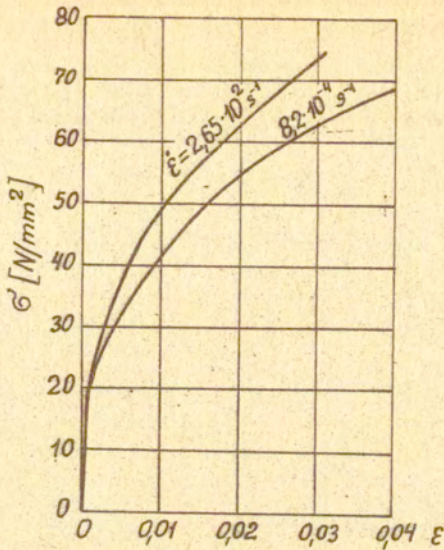
Rys. 9.12. a) Krzywe naprężenie-odkształcenie dla ołowiu, b) Wykresy naprężenie-logarytm prędkości odkształcenia dla ołowiu (wg U.S.Lindholma [23] )



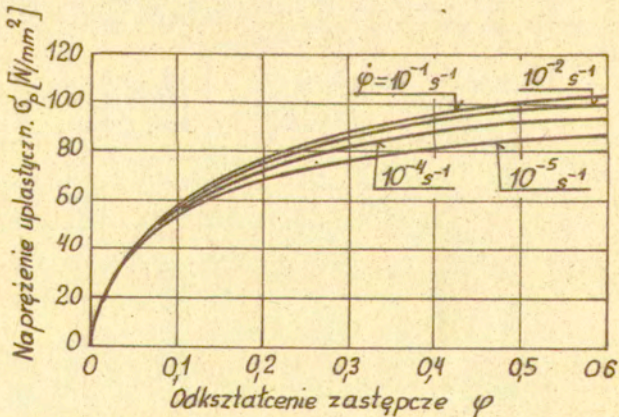
Rys. 9.13. a) Krzywe naprężenie-odkształcenie dla aluminium, b) Wykresy naprężenie-logarytm prędkości odkształcenia dla aluminium (wg U.S.Lindholma [23])



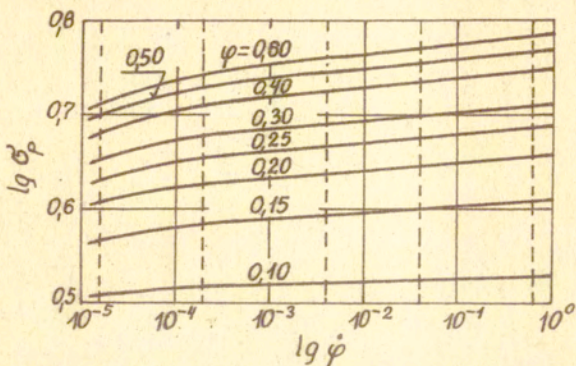
Rys. 9.14. a) Krzywe naprężenie-odkształtowanie dla miedzi, b) Wykresy naprężenie-logarytm prędkości odkształtowania dla miedzi (wg U.S. Lindholme [23] )



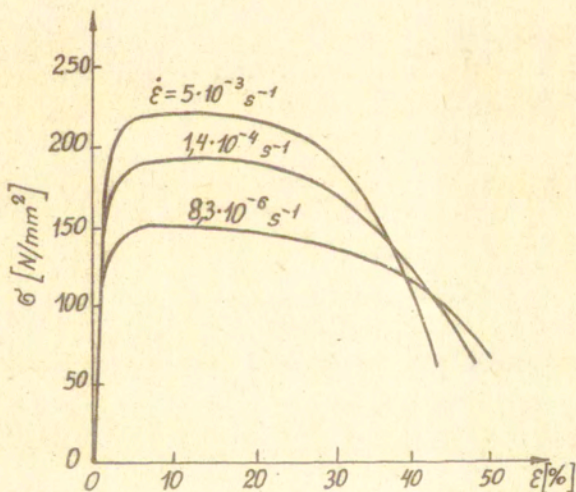
Rys. 9.15. Zależność naprężenia od odkształcenia i prędkości odkształcenia dla aluminium (wg J.Klepaczki)



Rys. 9.16. Krzywe umocnienia aluminium uzyskane przy różnych prędkościach odkształcenia (wg J.Klepaczki [22])

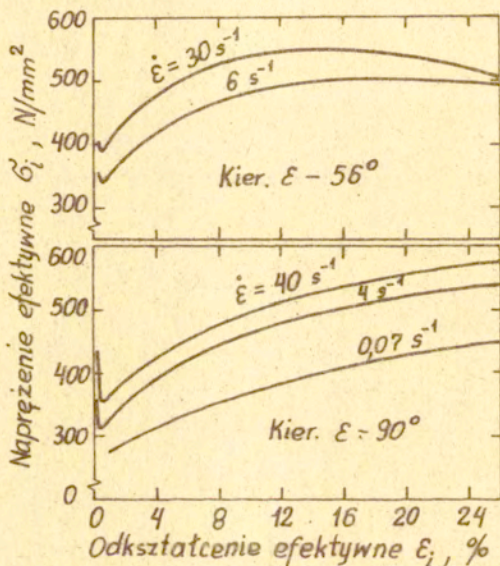


Rys. 9.17. Wpływ prędkości odkształcenia na naprężenie uplastyczniające dla aluminium (wg J. Klepaczki [22])



Rys. 9.18. Wpływ prędkości odkształcenia na wykres rozciągania stali niklowej w temperaturze  $500^{\circ}\text{C}$

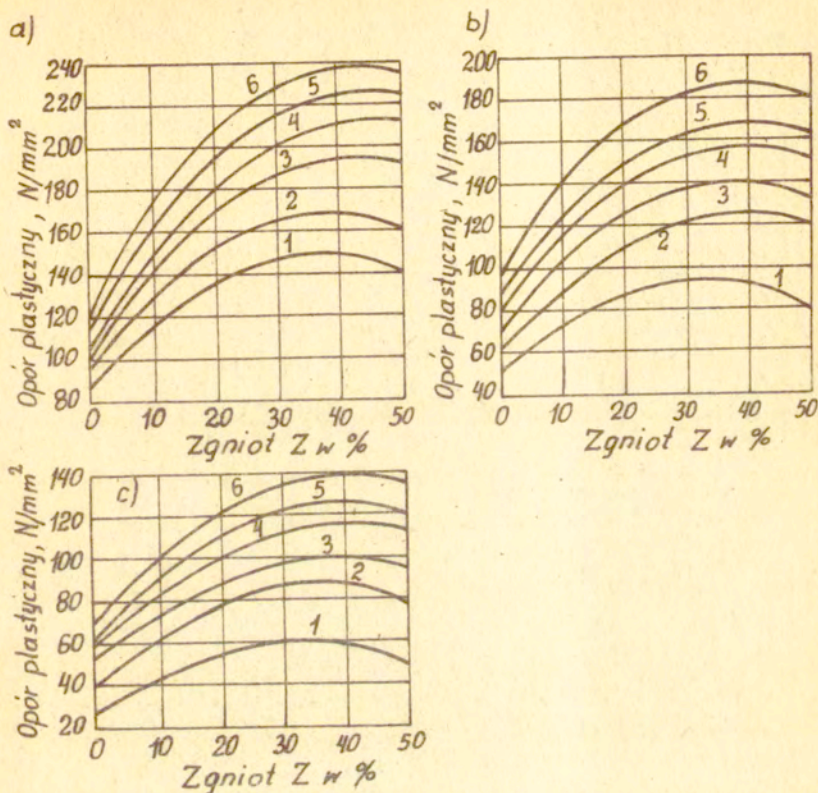
Wpływ prędkości odkształcenia na naprężenia można badać również i dla stanów złożonych. Na rysunku 9.19 pokazano wpływ intensywności odkształcenia  $\dot{\epsilon}_1$  i prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  na intensywność naprężenia  $\sigma_1$  dla określonego kierunku odkształcenia. Badania przeprowadzono na próbkach rurkowych wykonanych z miękkiej stali.



Rys. 9.19. Krzywe naprężenie efektywne-odkształcenie efektywne dla miękkiej stali. Badania przeprowadzono na próbkach rurkowych (wg Randalla i Campbella [23])

Na rysunku 9.20 pokazano wpływ zgniotu  $Z$ , prędkości odkształcenia i temperatury na opór plastyczny jaki występuje w procesie technologicznym.





Rys. 9.20. Zależność oporu plastycznego od wielkości zgniotu, temperatury i prędkości odkształcenia:  
 a) w temperaturze 1273 K, b) w temperaturze 1373 K,  
 c) w temperaturze 1473 K. Krzywa 1 jest dla  $\dot{\epsilon} = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  
 2 -  $\dot{\epsilon} = 5 \text{ s}^{-1}$ , 3 -  $\dot{\epsilon} = 10 \text{ s}^{-1}$ , 4 -  $\dot{\epsilon} = 25 \text{ s}^{-1}$ , 5 -  $\dot{\epsilon} = 50 \text{ s}^{-1}$ ,  
 6 -  $\dot{\epsilon} = 100 \text{ s}^{-1}$  [21]

Określone prędkości odkształcenia można uzyskać na maszynach używanych w praktyce do realizacji odpowiednich procesów technologicznych (tablica 3). W tym przypadku prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  otrzymuje się ze znanej prędkości ruchu narzędzia  $v$  i wysokości metalu odkształcanego  $h$  —  $\dot{\epsilon} = \frac{v}{h}$ .

Prędkości odkształcenia w różnych procesach technologicznych [21]

| Rodzaj urządzenia lub sposób obróbki plastycznej | Prędkość odkształcenia $\dot{\epsilon}$ [s <sup>-1</sup> ] |
|--|--|
| Prasy hydrauliczne.....                          | 0,03 - 0,06  |
| Prasy korbowe.....                               | 1,0 - 5,0  |
| Prasy frykcyjne.....                             | 2,0 - 10,0   |
| Młoty parowo-powietrzne.....                     | 10,0 - 250,0   |
| Młoty szybkie.....                               | 400,0 - 1400,0   |
| Blumingi.....                                    | 0,8 - 3,0  |
| Walcowanie bruzdowe duże.....                    | 1,0 - 5,0  |
| Walcowanie bruzdowe średnie.....                 | 1,0 - 25,0   |
| Walcowanie walcówki.....                         | 75,0 - 300,0   |
| Walcowanie blach grubych i średnich...           | 8,0 - 15,0   |
| Walcowanie ciągłe blach taśmowych....            | 70,0 - 100,0   |
| Pełzanie.....                                    | 10 <sup>-10</sup> - 10 <sup>-5</sup>                       |
| Płynięcie nadplastyczne.....                     | 10 <sup>-4</sup> - 10 <sup>-1</sup>                        |
| Obróbka plastyczna na gorąco.....                | 10 <sup>-1</sup> - 10 <sup>+1</sup>                        |
| Formowanie z dużymi prędkościami.....            | 10 <sup>1</sup> - 10 <sup>2</sup>                          |
| Obróbka skrawaniem.....                          | 10 <sup>3</sup> - 10 <sup>4</sup>                          |
| Formowanie wybuchowe.....                        | 10 <sup>5</sup>  |

Prędkość ruchu narzędzia  $v$  nieznacznie wpływa na wzrost wielkości odkształcenia. I tak, przy ciągnięciu wylóczki z prędkością  $v = 0,06$  m/min. graniczny współczynnik odkształcenia  $\beta = \frac{D}{d} = 2,0$ , a przy  $v = 17$  m/min —  $\beta = 2,08$ . Przy wylączeniu z prędkością  $v = 0,051$  m/s, współczynnik ciągnięcia  $m = \frac{d}{D} = 0,434$ , a gdy  $v = 0,456$  m/s, to  $m = 0,425$ .

Natomiast J.Gronostajski dla blachy mosiężnej M63 o grubości 1 mm podaje, że wzrost prędkości odkształcenia ponad  $13 \cdot 10^2 \text{s}^{-1}$  powoduje zmniejszenie granicznego współczynnika wyciągania .

### 9.2.3. Wpływ temperatury na naprężenie [uplastyczniające

W wielu konstrukcjach materiał musi pracować w podwyższonych temperaturach lub też w obniżonych temperaturach. Wraz ze wzrostem temperatury własności mechaniczne materiału spadają, a rosną własności plastyczne. Podwyższenie temperatury powoduje obniżenie naprężenia uplastyczniającego materiał, natomiast obniżenie temperatury powoduje wzrost własności wytrzymałościowych. Szczególnie istotny <sup>jest</sup> wpływ temperatury na własności materiału odkształcanego plastycznie.

Wpływ temperatury na własności materiału ujawnia się w następujący sposób:

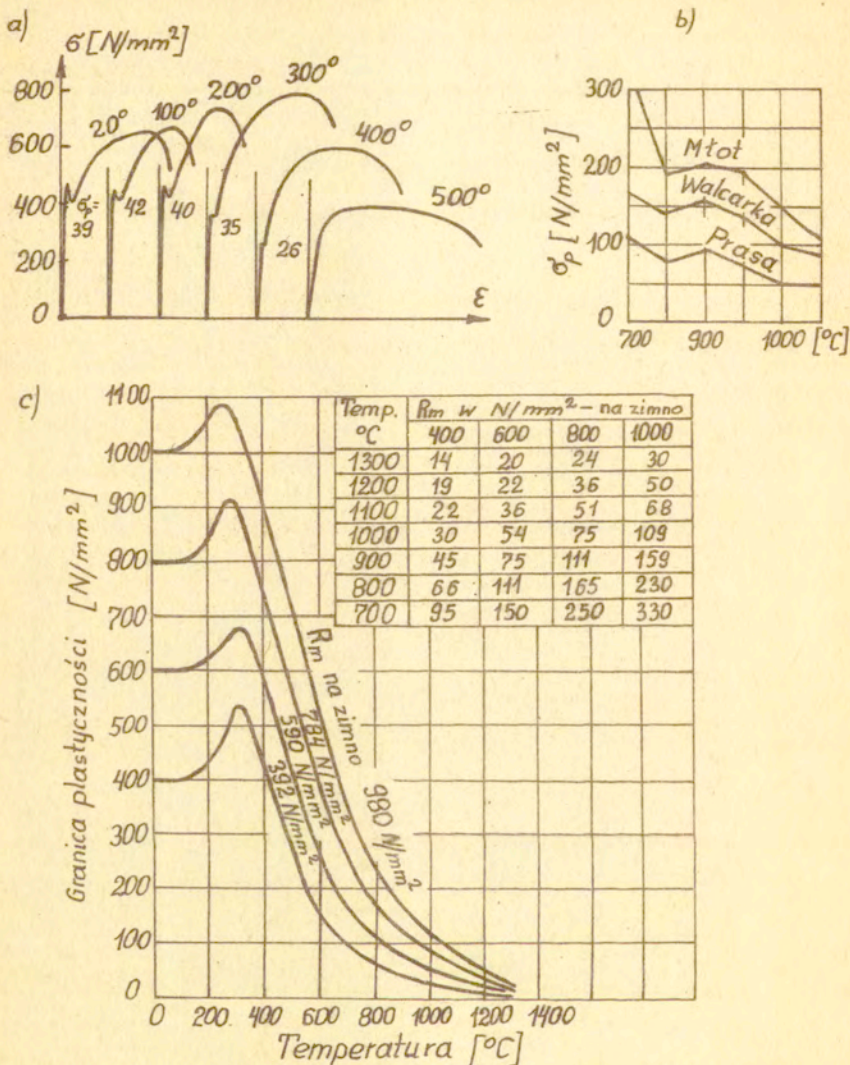
1. temperatura wpływa na zwiększenie drgań termicznych atomów sieci metalu, które wpływają na rozluźnienie spójności materiału i następnie na zmniejszenie naprężeń odkształcających,
2. temperatura i czas wpływają na zanikanie (anihilację) dyslokacji różnoimiennych wskutek zwiększonego ruchu atomów w sieci krystalograficznej. Ilość dyslokacji w kryształach wpływa na umocnienie metalu,
3. temperatura powoduje zmianę odkształceń sprężystych na odkształcenia trwałe. Zjawisko to nosi nazwę relaksacji,
4. temperatura powoduje obniżenie granicy plastyczności,
5. wzrost temperatury wpływa na obniżenie własności sprężystych ( $E$ ,  $G$ ,  $K$ ) i własności mechanicznych ( $R_m$ ,  $R_{o,2}$ ) materiału.

Własności plastyczne materiału (A, Z) rosną,

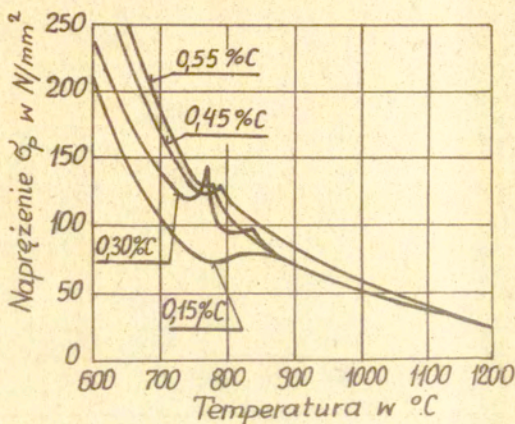
6. w podwyższonych temperaturach bardziej intensywnie zachodzi pełzanie i relaksacja,
7. wzrost temperatury wpływa na zwiększenie wymiarów przedmiotu ( $\Delta l_T = \alpha \cdot l \cdot \Delta T$  —  $\alpha$  jest współczynnikiem rozszerzalności liniowej na  $1^\circ\text{C}$ ,  $\Delta T$  jest przyrostem temperatury,  $l$  jest długością przedmiotu),
8. w pewnym zakresie temperatur występuje wydzielenie domieszek (pewnej fazy lub atomów obcych) na płaszczyznach poślizgu. Domieszki te blokują poślizg powodując zmniejszenie zdolności materiału do odkształceń plastycznych. Zjawisko to nosi nazwę starzenia, które zależy od wielkości odkształcenia i temperatury,
9. w temperaturach bliskich linii solidus zachodzą pęknięcia po granicach ziaren, gdyż na granicach ziaren wydzielają się skłaniki o niższej temperaturze topnienia (np. siarczki). Poza tym na granicach ziaren skupiają się dyslokacje, które ułatwiają powstanie złomu kruchego,
10. w obniżonych temperaturach wszystkie metale tracą swoją plastyczność. Obniżenie temperatury powoduje zmniejszenie drgań atomów, większe blokowanie dyslokacji i w konsekwencji wzrost własności mechanicznych.

Wpływ temperatury na naprężenia dla stali węglowych pokazano na rysunku 9.21 i 9.22. Wiele stali węglowych w pewnym zakresie podwyższonych temperatur wykazuje wzrost granicy plastyczności. W zakresie temperatur od  $200\text{--}350^\circ\text{C}$  występuje wzrost granicy plastyczności wywołany blokowaniem dyslokacji przez

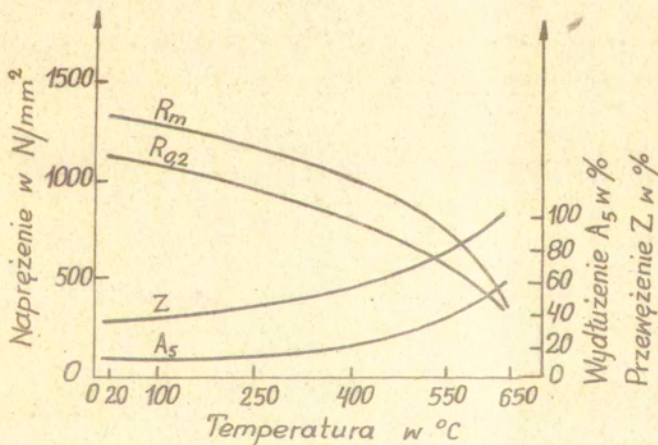
obce atomy. W temperaturach 400-500°C występuje starzenie dynamiczne powodujące kruchość na niebiesko (azot blokuje dyslokacje). W zakresie temperatur 750-850°C daje się zauważyć drugi wzrost granicy plastyczności. Natomiast w temperaturach 800-1000°C występują pęknięcia po granicach ziarn. Przyczyną pęknięć są kruche siarczki FeS i tlenki FeO ułożone wzdłuż granic ziarn. Siarczki i tlenki z żelazem tworzą niskotopliwą eutektykę. W zakresie temperatur 1000-1200°C występuje kruchość na gorąco, która związana jest z rozpuszczaniem FeS w austenicie i następnie jego topnieniem w temperaturze powyżej 1200°C.



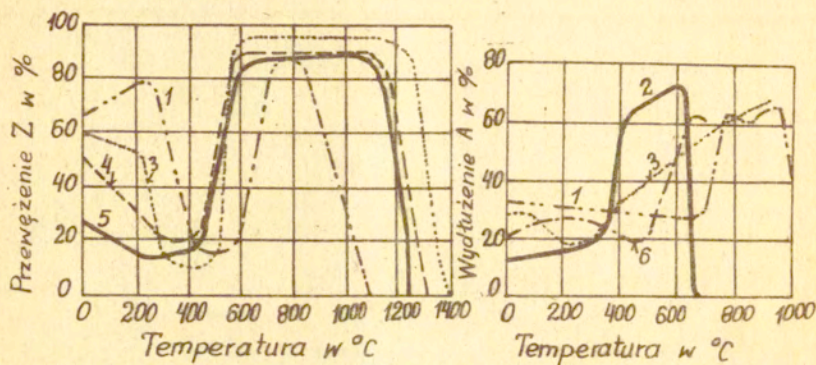
Rys. 9.21. Wpływ temperatury na naprężenia: a - wpływ temperatury na wykres rozciągania stali niskowęglowej, b - wpływ temperatury i urządzenia technicznego na granicę plastyczności, c - zależność granicy plastyczności miękkich stali węglowych od temperatury (wg A. Geleji)



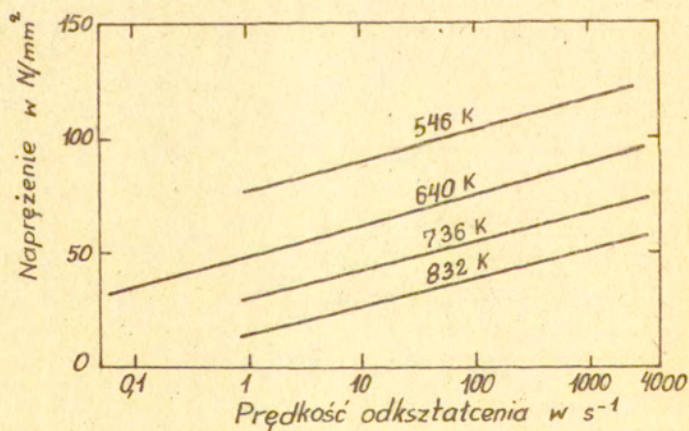
Rys. 9.22. Zależność naprężeń uplastyczniających od temperatury dla stali węglowych [23]



Rys. 9.23. Wpływ temperatury na własności mechaniczne stopu tytanu  $\alpha + \beta$  (był on starzony w temp.  $450^{\circ}$  przez 5 godzin)



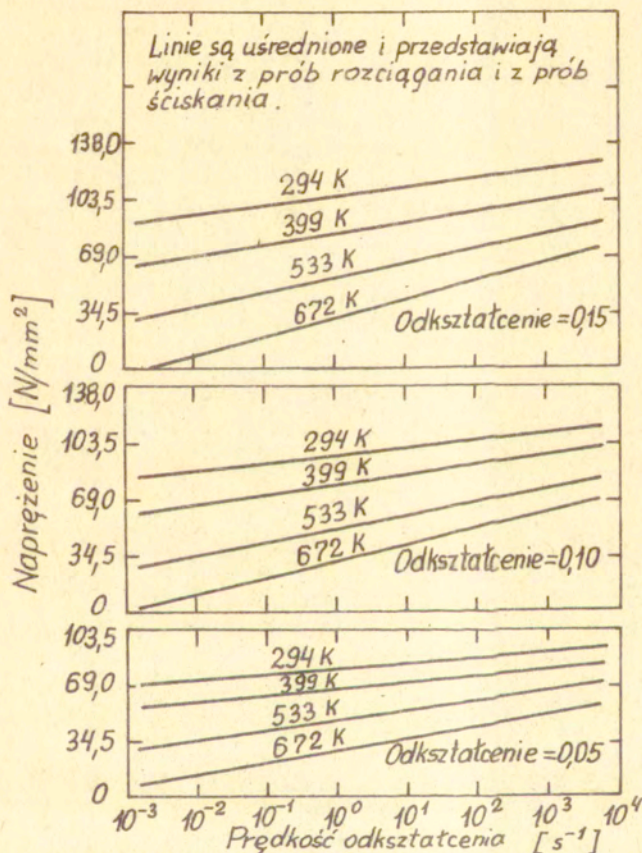
Rys. 9.24. Wpływ temperatury na przewężenie i wydłużenie dla niektórych metali: 1-Cu, 2-Al, 3-miękka stal, 4-średniotwarda stal, 5-twarda stal, 6-mosiądz



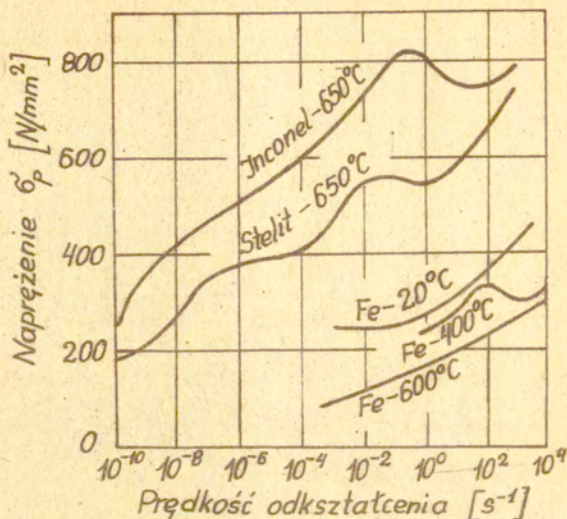
Rys. 9.25. Zależność napężenia od prędkości odkształcenia przy stałej temperaturze i stałym odkształceniu ( $\epsilon = 0,51$ ) dla aluminium (wg S.K.Samanty [23])



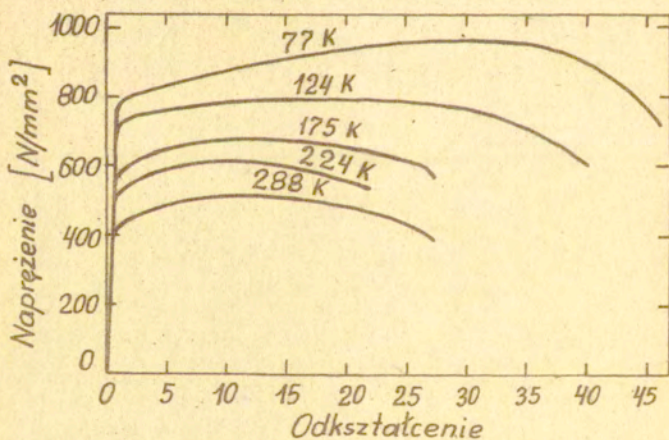
Wpływ podwyższonej temperatury i prędkości odkształcenia przy stałym odkształceniu dla aluminium pokazano na rysunku 9.25 i 9.26, a dla żelaza i twardych stopów - na rysunku 9.27. Natomiast wpływ obniżonych temperatur na krzywą  $\sigma$ - $\dot{\epsilon}$  przy stałej prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  dla  $\text{Ti}$  - tytanu pokazano na rysunkach od 9.28 ÷ 9.30.



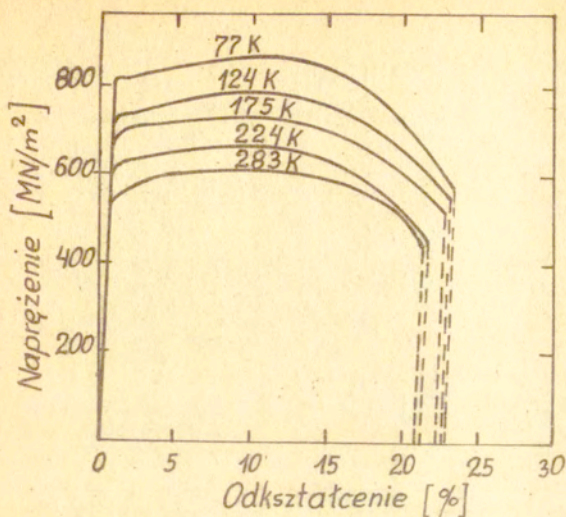
Rys. 9.26. Zależność naprężenia od prędkości odkształcenia przy stałej temperaturze i stałym odkształceniu dla aluminium (wg U.S.Lindholma [23])



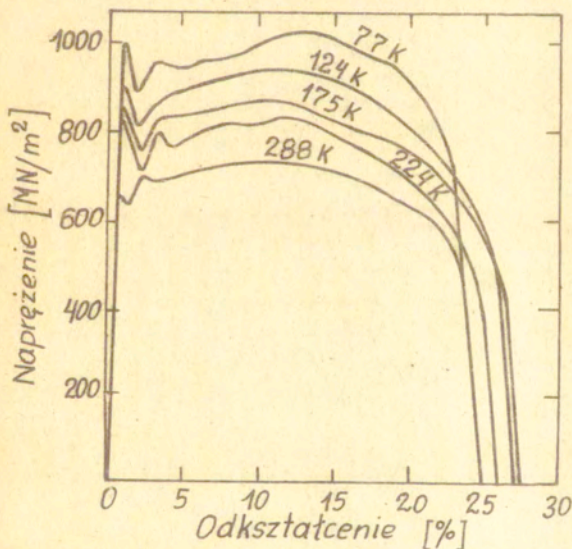
Rys. 9.27. Wpływ prędkości odkształcenia na naprężenia uplastyczniające dla różnych materiałów



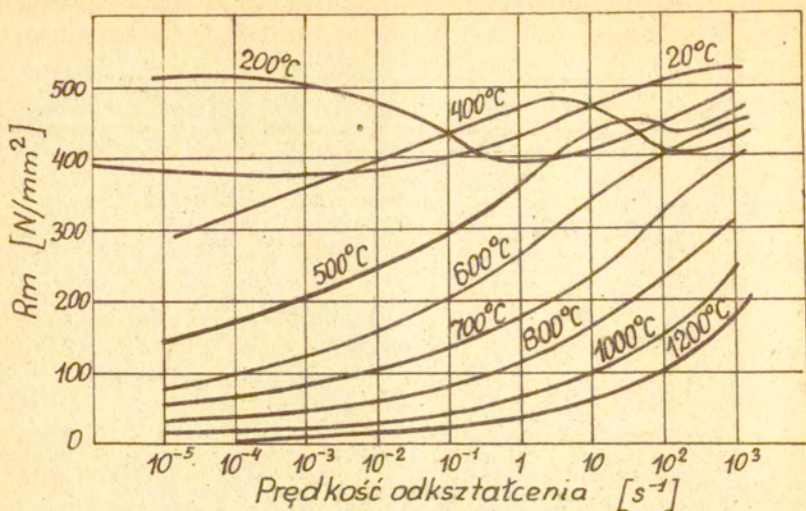
Rys. 9.28. Wpływ temperatury na krzywą naprężenie-odkształcenie dla  $\alpha_2$ - tytanu, przy średniej prędkości odkształcenia 10<sup>-3</sup> s<sup>-1</sup> (wg J.Hardinga [23])



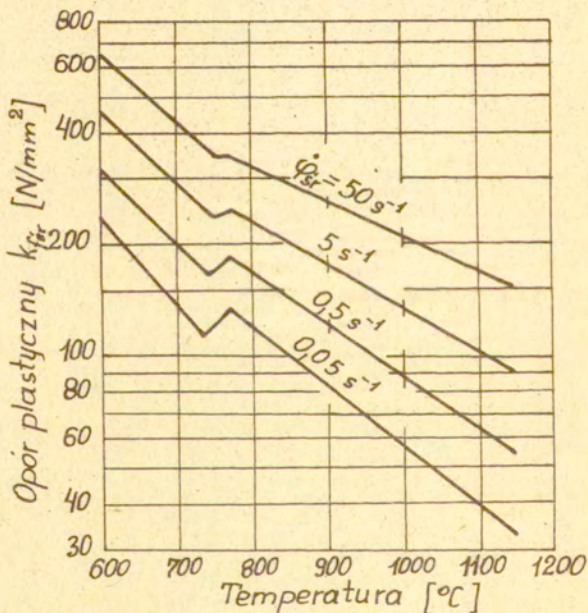
Rys. 9.29. Wpływ temperatury na krzywą napężenie-odkształcenie dla L-tytanu ( $\dot{\epsilon}_s = 44 \text{ s}^{-1}$ , wg J.Hardinga [23])



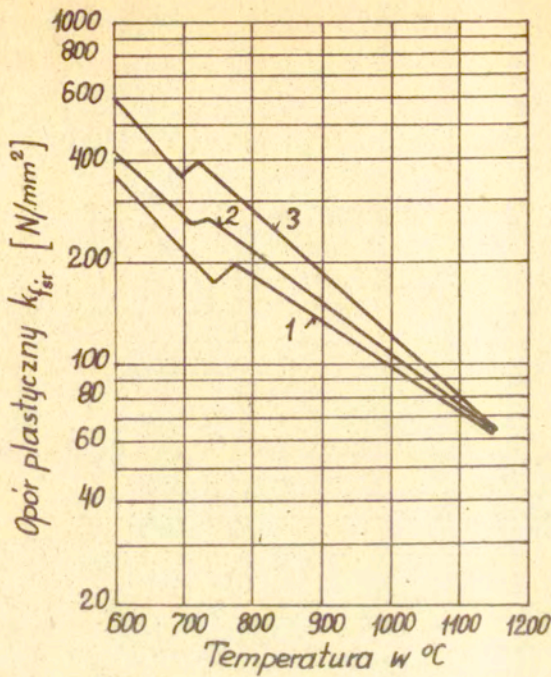
Rys. 9.30. Wpływ temperatury na krzywą napężenie-odkształcenie dla L-tytanu ( $\dot{\epsilon}_s = 2475 \text{ s}^{-1}$ , wg J.Hardinga [23])



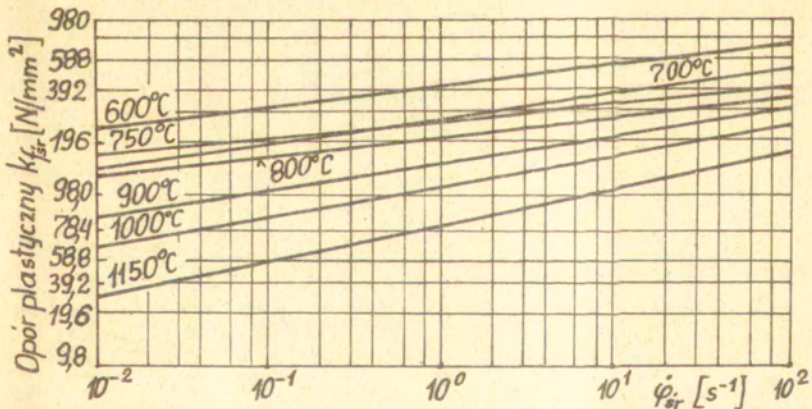
Rys. 9.31. Wpływ względnej prędkości odkształcenia na wytrzymałość stali wg Nadaia i Manjojne [24]



Rys. 9.32. Zależność oporu plastycznego od temp. dla stali 35 [20]



Rys. 9.33. Zależność oporu plastycznego od temperatury przy prędkości odkształcenia  $\dot{\varphi} = 1,0 \text{ s}^{-1}$  dla stali: 1-35, 2-30HN2, 3-34N4MF [24]



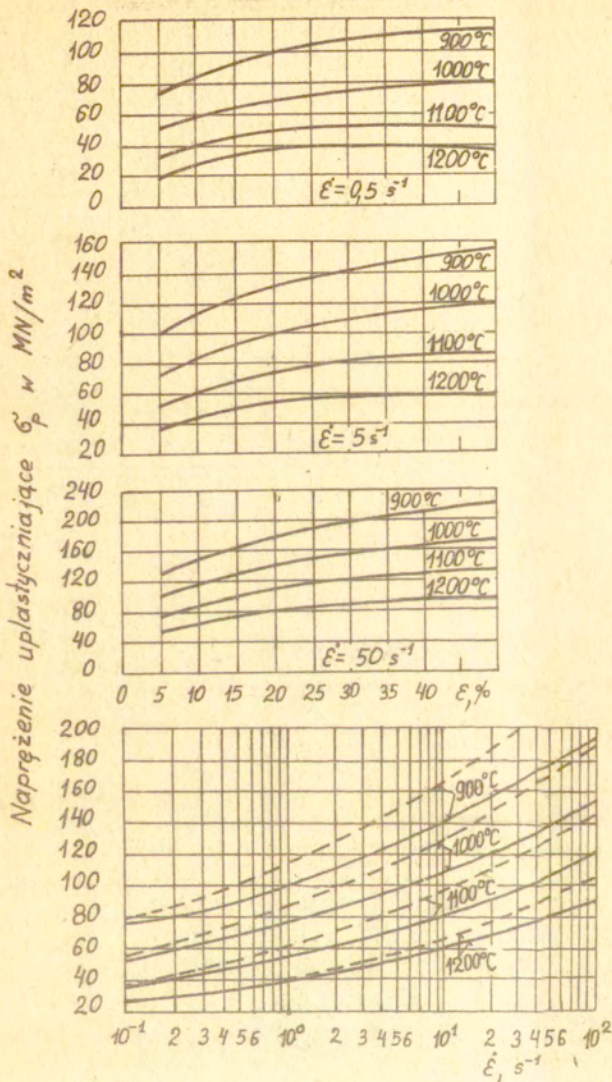
Rys. 9.34. Zależność oporu plastycznego od prędkości odkształcenia i temperatury dla stali 30HN2,  $\varphi = 0,35$  (próbki walcowe  $d_0/h_0 = 75/150 = 0,5$ ) [20]

Na rysunkach od 9.32 do 9.34 pokazano wpływ temperatury i prędkości odkształcenia na opór plastyczny. Nieciągłość linii na rysunku 9.32 i 9.33 spowodowana jest przemianą żelaza  $\alpha$  w żelazo  $\beta$ , która występuje w zakresie temperatur 730÷780°C. Struktury żelaza  $\alpha$  i żelaza  $\beta$  mają różną zdolność do umacniania i do rekrytalizacji, które w dodatku zależą od prędkości odkształcenia. Nieciągłość tych linii jest większa dla mniejszych prędkości odkształcenia, a mniejsza dla większych prędkości odkształcenia. Dla większych prędkości odkształcenia rekrytalizacja nie nadąża za zjawiskiem umocnienia, dla małych prędkości odkształcenia rekrytalizacja całkowicie zachodzi.

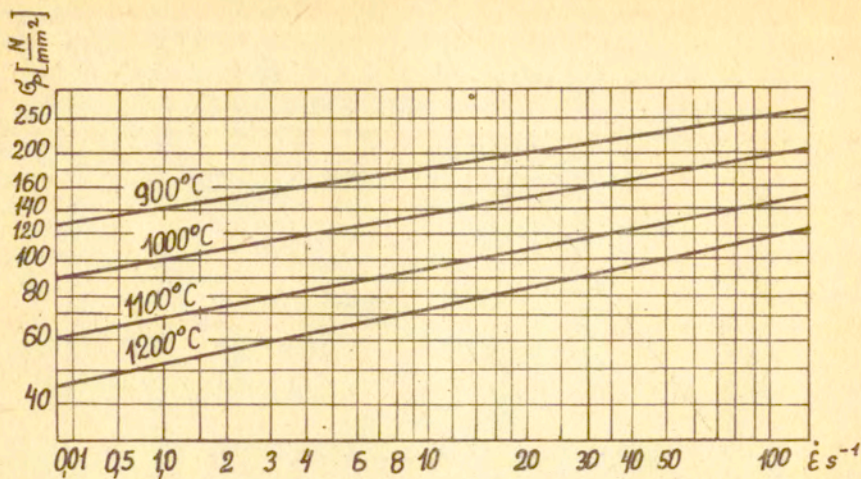
Zależności pokazane na rysunku 9.34 można opisać równaniem

$$k_{f\acute{e}r} = C_1 \dot{\varphi}^m, \quad (9.10)$$

gdzie  $C_1 = 3250 \cdot 0,9965^T$  jest stałą zależną od rodzaju materiału i od temperatury  $T$ ,  $m = 0,000285 \cdot T - 0,112$  jest współczynnikiem potęgowym zależnym od materiału i od temperatury  $T$ . Współczynnik  $m$  ( $m \approx 0,1 \div 0,2$ ) wyraża zjawiska umocnienia i rekrytalizacji zachodzące w stali,  $T$  jest temperaturą w zakresie 600÷1150°C.

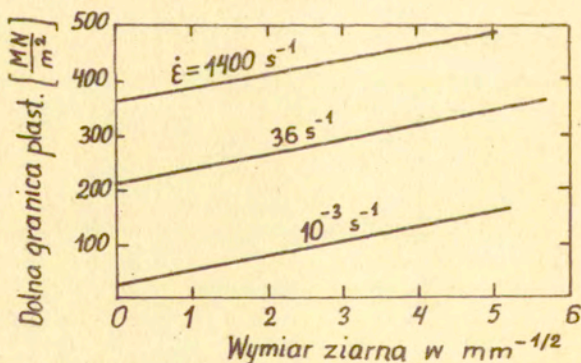


Rys. 9.35. Zależność granicy plastyczności  $\sigma_p$  od odkształcenia  $\epsilon$ , prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  i temperatury  $T$  dla stali St3:  
 —  $\epsilon = 20\%$ , - - -  $\epsilon = 40\%$



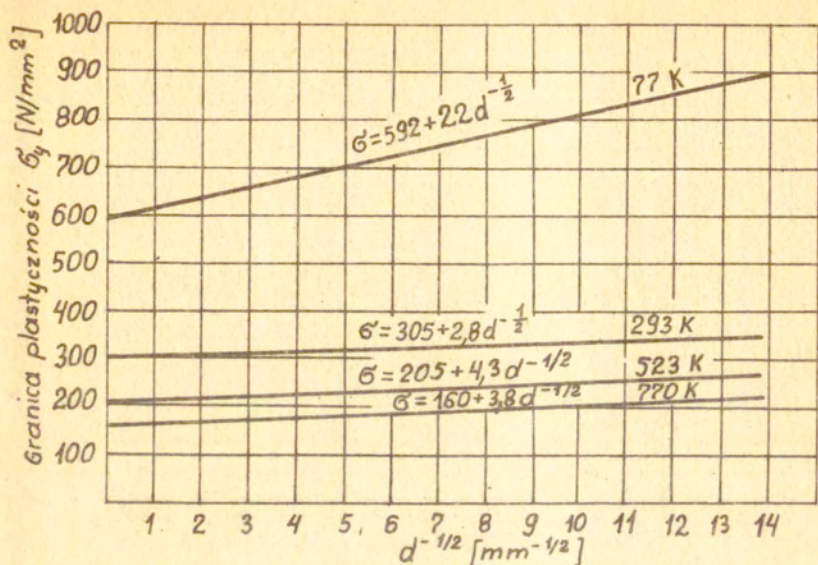
Rys. 9.35a. Zależność naprężenia uplastyczniającego  $G_p$  od prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  i od temperatury  $T^{\circ}C$ .  $\epsilon = 0,1$ . Stal o składzie chemicznym: 1%C, 0,17%Mn, 0,19%Si, 0,1%Cr, 0,09%Ni [24]

Na rysunkach od 9.36 do 9.38 przedstawiono wpływ wielkości ziarna, prędkości odkształcenia i temperatury na granicę plastyczności.

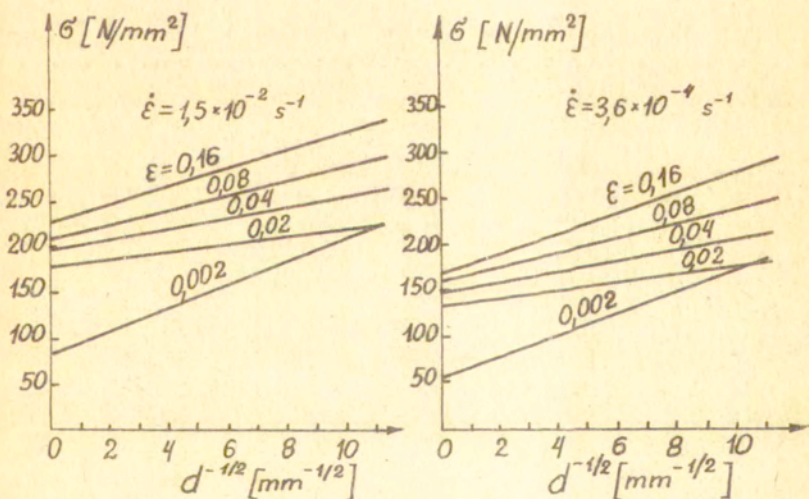


Rys. 9.36. Wpływ wielkości ziarna i prędkości odkształcenia na dolną granicę plastyczności dla czystego żelaza (wg J.Hardinga [23])





Rys. 9.37. Wpływ wielkości ziarna na granicę plastyczności stali OH17T przy różnych temperaturach



Rys. 9.38. Zależność Halla-Petche dla temperatury 200°C Stal nierdzewna OH17T

Doświadczalne wartości granicy plastyczności  $\sigma_p$  w N/mm<sup>2</sup> Tablica 4a  
Stal 45

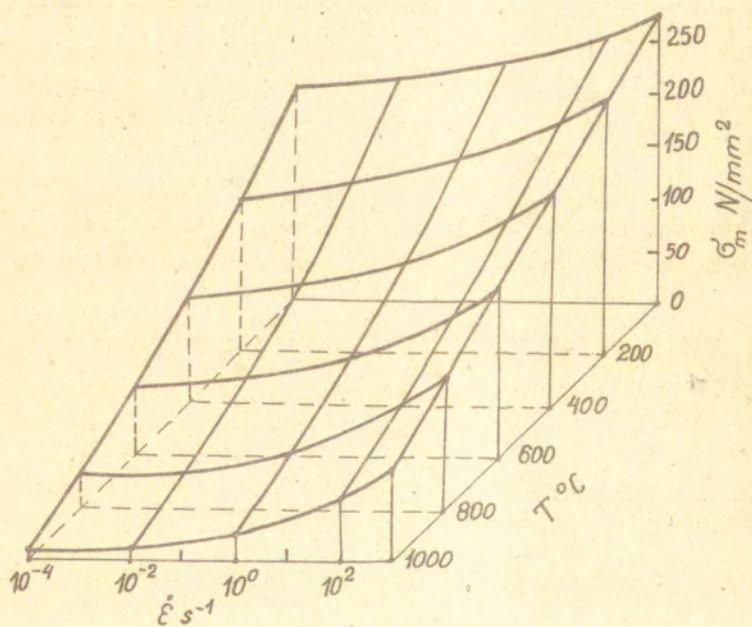
| Prędkość odkształ.<br>$\dot{\epsilon}$ [s <sup>-1</sup> ] | Wielkość odkształ.<br>$\epsilon$ [%] | Temperatura T w °C |      |      |      |
|---|--------------------------------------|--------------------|------|------|------|
|   |                                      | 900                | 1000 | 1100 | 1200 |
| 0,5   | 5                                    | 57                 | 45   | 36   | 27   |
|   | 10                                   | 65                 | 54   | 41   | 32   |
|   | 20                                   | 79                 | 63   | 51   | 39   |
|   | 30                                   | 85                 | 69   | 52   | 41   |
|   | 40                                   | 87                 | 70   | 54   | 42   |
| 5   | 5                                    | 80                 | 64   | 49   | 38   |
|   | 10                                   | 95                 | 75   | 57   | 44   |
|   | 20                                   | 118                | 92   | 73   | 54   |
|   | 30                                   | 123                | 97   | 76   | 57   |
|   | 40                                   | 126                | 102  | 77   | 58   |
| 50  | 5                                    | 112                | 87   | 68   | 51   |
|   | 10                                   | 133                | 103  | 78   | 60   |
|   | 20                                   | 166                | 131  | 100  | 73   |
|   | 30                                   | 172                | 137  | 104  | 77   |
|   | 40                                   | 177                | 141  | 107  | 80   |

Stal 1H18N9T

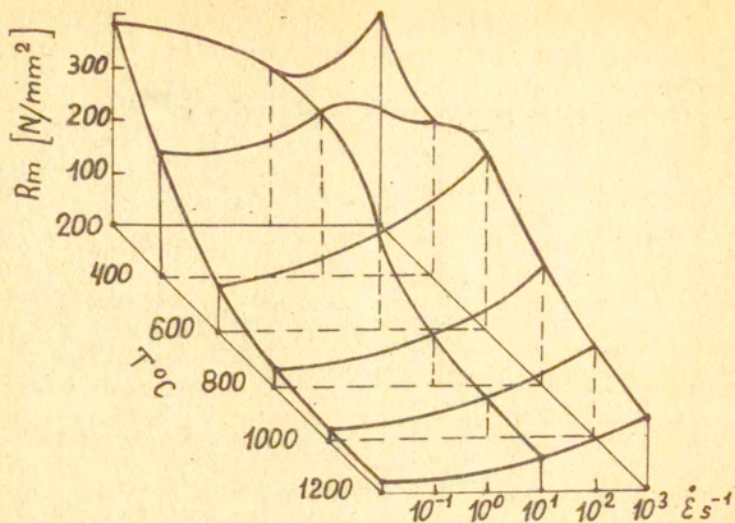
|     |    |     |     |     |     |
|-----|----|-----|-----|-----|-----|
| 0,5 | 5  | 105 | 81  | 63  | 50  |
|     | 10 | 124 | 98  | 78  | 61  |
|     | 20 | 158 | 120 | 95  | 72  |
|     | 30 | 170 | 130 | 101 | 77  |
|     | 40 | 175 | 134 | 103 | 79  |
| 5   | 5  | 124 | 93  | 72  | 57  |
|     | 10 | 151 | 114 | 90  | 69  |
|     | 20 | 196 | 145 | 110 | 83  |
|     | 30 | 204 | 152 | 120 | 92  |
|     | 40 | 208 | 155 | 122 | 94  |
| 50  | 5  | 155 | 116 | 90  | 70  |
|     | 10 | 190 | 142 | 106 | 81  |
|     | 20 | 242 | 183 | 137 | 103 |
|     | 30 | 253 | 189 | 145 | 113 |
|     | 40 | 260 | 193 | 149 | 115 |

## Wyniki doświadczeń dla stali 45

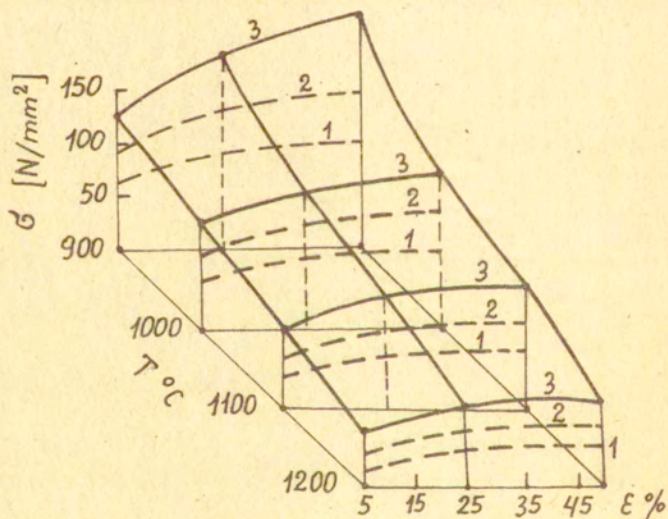
| $\dot{\epsilon}$ s <sup>-1</sup> | $\xi$ w % | $\sigma_m$ w N/mm <sup>2</sup> |        |        |        |
|----------------------------------|-----------|--------------------------------|--------|--------|--------|
|                                  |           | 900°C                          | 1000°C | 1100°C | 1200°C |
| 0,5                              | 10 - 12   | 100                            | 65     | 47     | 30     |
|                                  | 18 - 20   | 124                            | 87     | 60     | 35     |
| 5                                | 10 - 12   | 113                            | 80     | 60     | 40     |
|                                  | 18 - 20   | 147                            | 106    | 70     | 45     |
| 50                               | 10 - 12   | 220                            | 137    | 95     | 70     |
|                                  | 18 - 20   | 246                            | 183    | 143    | 95     |



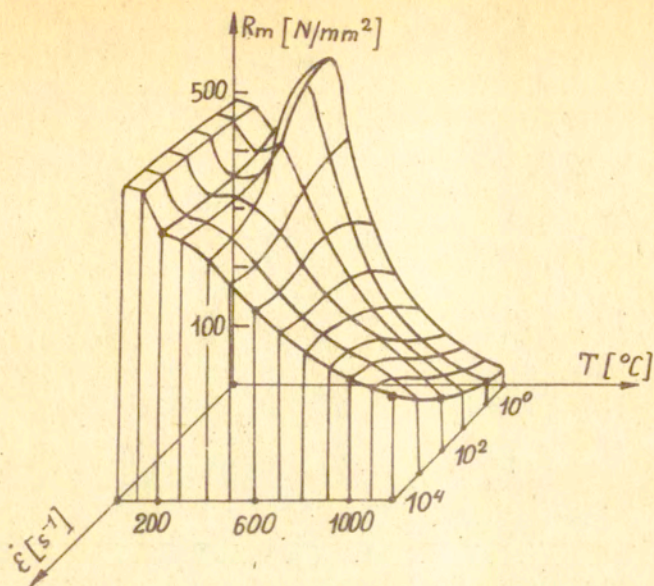
Rys. 9.39. Wpływ temperatury  $T$  i prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  na wytrzymałość  $\sigma_m = R_m$  miedzi M1.  $\xi = 18-20\%$



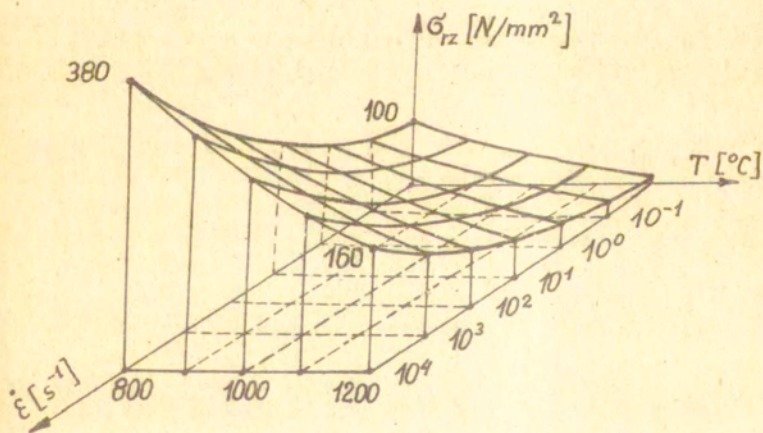
Rys. 9.40. Wpływ temperatury i prędkości odkształcenia na wytrzymałość dla technicznie czystego żelaza  $\epsilon = 18-20\%$



Rys. 9.41. Wpływ temperatury i odkształcenia na naprężenia dla stali 20.  $\dot{\epsilon}$  dla krzywej 1- $0,5 s^{-1}$ ; 2- $5 s^{-1}$ ; 3- $50 s^{-1}$



Rys. 9.42. Wpływ temperatury i prędkości odkształcenia na wytrzymałość na rozciąganie dla stali St3.  $\epsilon = 0,3$



Rys. 9.43. Wpływ temperatury i prędkości odkształcenia na naprężenia rzeczywiste dla stali St3.  $\epsilon = 0,3$  (wg N.A.Maslennikowa)

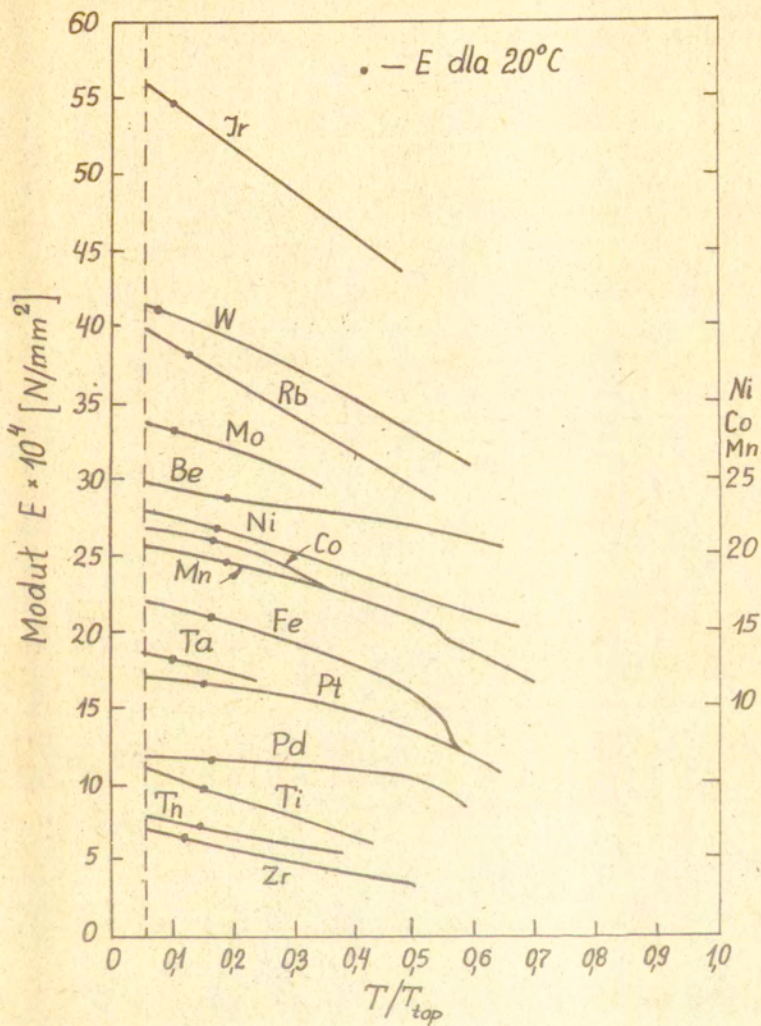
W Instytucie Techniki Budowlanej badano stal 18G2 w obniżonych i podwyższonych temperaturach. Wyniki tych badań przedstawione są w tablicy 5.

Tablica 5

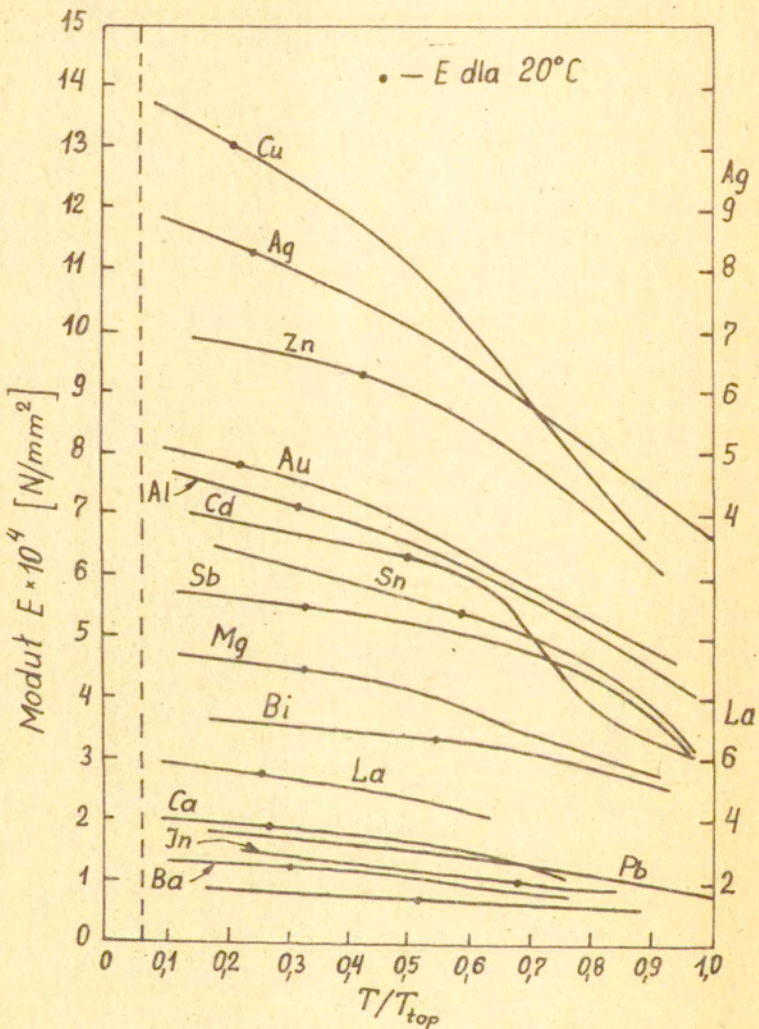
Wyniki badań stali 18G2

|   | Temperatura badania w °C |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---|--------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|   | -60                      | -40  | -20  | 20   | 200  | 300  | 350  | 400  | 600  |
| $\frac{R_m^T}{R_m^{20}}$  | 1,18                     | 1,12 | 1,09 | 1,00 | 1,13 | 1,18 | 1,09 | 0,99 | 0,40 |
| $\frac{R_e^T}{R_e^{20}}$  | 1,13                     | 1,04 | 1,03 | 1,00 | 0,90 | 0,77 | 0,67 | 0,64 | 0,38 |
| $\frac{E^T}{E^{20}}$  | 0,99                     | 1,02 | 0,98 | 1,00 | 1,02 | 0,90 | 0,87 | 0,85 | 0,62 |
| $\frac{A_5^T}{A_5^{20}}$  | 0,85                     | 0,85 | 0,87 | 1,00 | 0,61 | 0,72 | 0,84 | 0,87 | 1,14 |
| $\frac{Z^T}{Z^{20}}$  | 0,94                     | 0,96 | 0,97 | 1,00 | 0,77 | 0,76 | 0,92 | 0,96 | 1,20 |
| $R_m = \frac{P_m}{F_0}$ , $R_e = \frac{P_e}{F_0}$ , $A_5 = \frac{l-l_0}{l_0} 100\%$ , $Z = \frac{F_0-F}{F_0} 100\%$ |                          |      |      |      |      |      |      |      |      |

Na rysunkach 9.44 ÷ 9.47 pokazano wpływ temperatury na stałe sprężystości dla różnych metali. Natomiast na rysunku 9.48 pokazano wpływ temperatury na twardość dla powszechnie używanych materiałów narzędziowych, a na rysunku 9.49 pokazano wpływ temperatury i czasu jej trwania na odkształcenia trwałe dla niektórych węglików i tlenków spiekanych przy stałym obciążeniu 150 MN/m<sup>2</sup>.

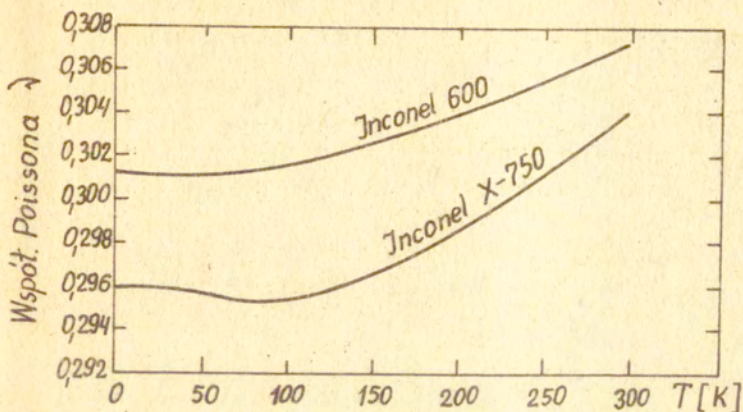


Rys. 9.44. Wpływ temperatury w skali bezwzględnej na wartość modułu sprężystości podłużnej  $E$ :  $T$  jest temperatura badania metalu w kelwinach,  $T_{top}$  jest temperaturą topnienia w kelwinach [16]

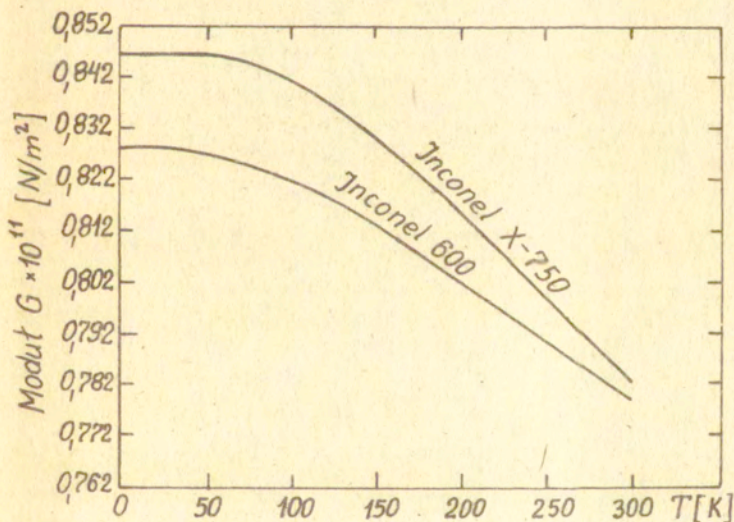


Rys. 4.45. Wpływ temperatury w skali bezwzględnej na wartość modułu sprężystości  $E$ :  $T$  jest temperaturą badania metalu w kelwinach,  $T_{top}$  jest temperaturą topnienia metalu w kelwinach [16]

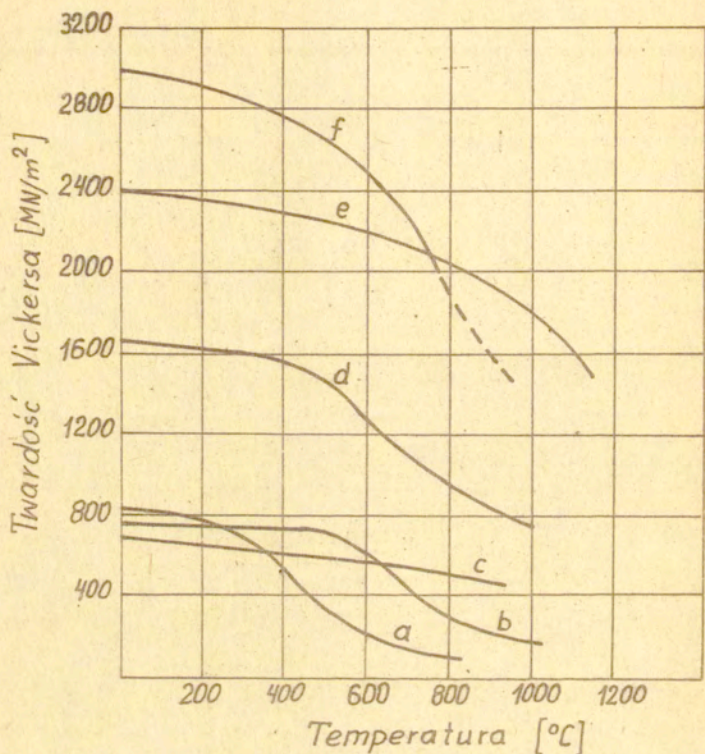




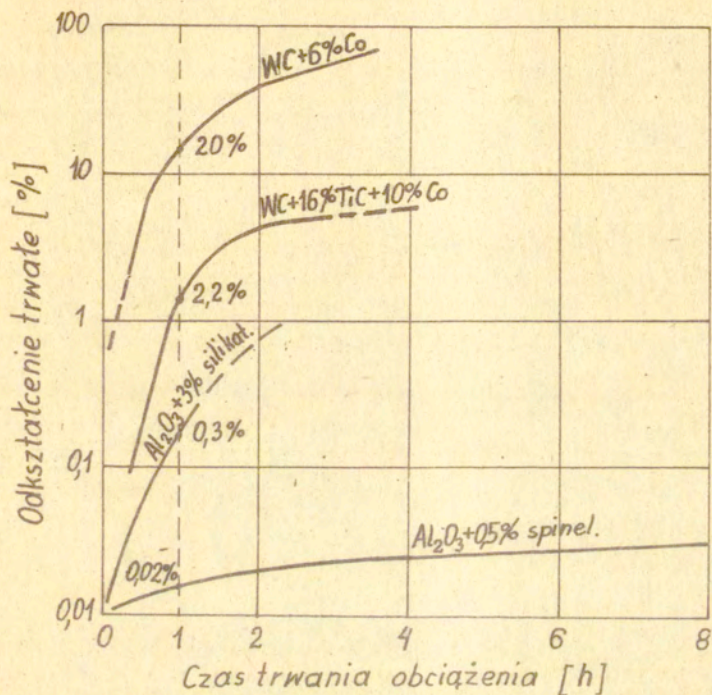
Rys. 9.46. Wpływ temperatury na współczynnik Poissona  $\nu$  [16]:  
 inconel 600—75%  $N_i$ , 15,8%  $Cr$ , 7,2%  $Fe$ ;  
 inconel X-750—73,5%  $N_i$ , 15,2%  $Cr$ , 6,6%  $Fe$



Rys. 9.47. Wpływ temperatury na moduł  $G$  dla stopów  
 inconel 600 i inconel X-750 [16]



Rys. 9.48. Wpływ temperatury na twardość dla niektórych materiałów narzędziowych: a) stal narzędziowa węglowa, b) stal szybko tnąca, c) stelitów, d) węglików spiekanych, e) tlenków spiekanych -  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , f) tlenków spiekanych -  $\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{TiC}$



Rys. 9.49. Krzywe pełzania węglików spiekanych i tlenków spiekanych. Temperatura 1150°C, obciążenie 150 MN/m<sup>2</sup> (wg Feldmühle)

#### 9.2.4. Wpływ czasu na naprężenie uplastyczniające

Czas w analizie procesów odkształcenia plastycznego uwzględniamy przez wprowadzenie do równań fizycznych prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  lub  $\dot{\varphi}$ . Dla jednoosiowego stanu naprężenia (rozciąganie lub ściskanie) prędkość odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  jest obliczona ze wzoru

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{v}{l_0} \quad (9.11)$$

Od czasu zależą takie zjawiska jak starzenie, zdrowienie i rekrytalizacja. Zjawiska te nie występują zarówno w wysokich temperaturach jak i przy małych prędkościach odkształceń.

W procesie odkształcenia plastycznego czas uwzględnimy, jeśli do analizy przyjmujemy związek fizyczny w postaci

$$\dot{\sigma} = a \ddot{\epsilon} + b \dot{\epsilon} + c \quad (9.12)$$

gdzie  $a, b, c$  są stałymi materiałowymi.

Z. Marciniak zaproponował związek fizyczny w postaci

$$d\dot{\sigma}_p = V d\dot{\epsilon} + U d\epsilon - W d\dot{\epsilon} + S dt - R dt \quad (9.13)$$

gdzie  $V$  jest parametrem zależnym od prędkości,

$U$  jest stałą zależną od umocnienia materiału,

$W$  jest stałą uwzględniającą zjawiska przeciwne umocnieniu,

$S$  jest stałą uwzględniającą starzenie materiału,

$R$  jest stałą spadku energii sprężystej (równiej 2-10%  $L_p^c$ ) z powodu zdrowienia.

Różniczkując równanie (9.13) względem czasu

$$\frac{d\dot{\sigma}_p}{dt} = V \frac{d\dot{\epsilon}}{dt} + U \frac{d\epsilon}{dt} - W \frac{d\dot{\epsilon}}{dt} + S \frac{dt}{dt} - R \frac{dt}{dt} ;$$

otrzymamy zależność

$$\dot{\zeta}_p = v \ddot{\epsilon} + U \dot{\epsilon} - W \dot{\epsilon} + S - R ,$$

która po redukcji przyjmuje postać

$$\dot{\zeta}_p = v \ddot{\epsilon} + (U - W) \dot{\epsilon} + (S - R) . \quad (9.14)$$

Całkując równanie (9.14) względem czasu

$$\zeta_p = \int v d\dot{\epsilon} dt + \int (U \dot{\epsilon} - R) dt + \int (S - W \dot{\epsilon}) dt$$

i wprowadzając oznaczenia (parametry wewnętrzne)

$$\zeta_v \stackrel{df}{=} \int v d\dot{\epsilon} \text{ — uwzględnia umocnienie odkształceniowe,}$$

$$\zeta_c \stackrel{df}{=} \int (U \dot{\epsilon} - R) dt \text{ — uwzględnia umocnienie dyslokacyjne i zdrowienie,}$$

$$\zeta_s \stackrel{df}{=} \int (S - W \dot{\epsilon}) dt \text{ — uwzględnia starzenie,}$$

otrzymamy ostateczne równanie na napężenie uplastyczniające

$$\zeta_p = \zeta_v + \zeta_c + \zeta_s . \quad (9.15)$$

Jeśli za  $v, U, W, S, R$  przyjmiemy wcześniej ustalone funkcje doświadczalne, to w analizie procesu odkształcenia plastycznego uwzględnimy efekt czasu.

Zjawiska pełzania i relaksacji uwzględniają czas trwania procesu, ale wyraźnie one występują w analizie konstrukcji obciążonych. W procesach obróbki plastycznej czas trwania procesu jest krótki i te zjawiska, chociaż występują, jednak nie mają większego znaczenia.

### 9.3. Przegląd równań konstytutywnych

Podczas odkształcania metali zachodzą w nich procesy wynikające z mechanizmu odkształcenia plastycznego. Procesy te prowadzą do umacniania, relaksacji i osłabiania metalu. Proces odkształcania plastycznego komplikowany jest zmiennością temperatury wynikającej z zamiany pracy plastycznej na ciepło oraz oddawania ciepła przez promieniowanie, konwekcję i przewodnictwo.

Według Naddaia, naprężenie uplastyczniające materiał  $\sigma_p$  w ogólnym przypadku wyraża się równaniem

$$d\sigma_p = \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varphi}} d\dot{\varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} dT + \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt, \quad (9.16)$$

gdzie pierwszy składnik uwzględnia umacnianie w wyniku odkształcenia, drugi składnik równania uwzględnia umacnianie dynamiczne, trzeci składnik wyraża zależność od temperatury, czwarty składnik podaje wpływ relaksacji na naprężenia uplastyczniające. Rozwiązaniem równania (9.16) jest funkcja o ogólnej postaci, której postać szczegółową znajduje się doświad-

$$\sigma_p = f(\varphi, \dot{\varphi}, T, t), \quad (9.17)$$

czalnie w oparciu o teoretyczne przesłanki. Jeżeli proces odkształcania przebiega w sposób ciągły, to czas  $t$  można wykluczyć z funkcji (9.17), gdyż jest on jednoznacznie określony zmiennymi  $\varphi$  i  $\dot{\varphi}$ . W tym przypadku równanie (9.17) przybiera postać

$$\sigma_p = f(\varphi, \dot{\varphi}, T). \quad (9.18)$$

Dla procesów nieciągłych (odkształcanie przerywane) obowiązuje równanie (9.17).

W ciągu ostatnich dziesiątków lat różni badacze przyjmo-

wali różne równania opisujące własności mechaniczne materiału. Krzywe umocnienia i równania ich opisujące są przedmiotem badań wielu uczonych. Najbardziej znane i stosowane równania opisujące krzywe umocnienia zostaną wymienione i krótko opisane niżej.

Dla naprężeń i odkształceń sprężystych znana jest zależność Hooke'a dla stanów prostych [1,6]

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (9.19)$$

oraz dla stanów złożonych [2] (uogólnione prawo Hooke'a)

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (9.20)$$

gdzie  $D_{ijkl}$  jest tensorem modułów materiałowych. Po uwzględnieniu tensora  $D_{ijkl}$  otrzymamy postać prawa Hooke'a

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad (9.21)$$

gdzie  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ .

Związek odwrotny do (9.21) ma postać

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[ (1+\nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]. \quad (9.22)$$

Związek fizyczny (9.20) może być wyrażony za pomocą przyrostów

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = B_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (9.23a)$$

lub odwrotnie

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = A_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}. \quad (9.23b)$$

W przypadku uwzględnienia w związkach liniowej sprężystości małych odkształceń plastycznych mamy związek fizyczny

Iliuszyna [3]

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} s_{ij} + \lambda s_{ij} = \left( \frac{1}{2G} + \frac{L_p}{2k^2} \right) s_{ij}, \quad (9.24)$$

gdzie  $e_{ij}$  jest dewiatorem odkształcenia,  $s_{ij}$  jest dewiatorem naprężenia,  $L_p$  jest pracą plastyczną,  $k$  jest granicą plastyczności na ścinanie.

Dla materiałów sprężysto-idealnie plastycznych ważny jest związek fizyczny Prandtla-Reussa [3]

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda s_{ij} + \frac{ds_{ij}}{2G}, \quad (9.25a)$$

gdzie  $d\varepsilon_{ij}$  jest przyrostem tensora odkształcenia,  $ds_{ij} = \dot{s}_{ij} dt$  jest przyrostem dewiatora naprężenia,  $d\lambda$  jest współczynnikiem.

Równanie (9.25a) można wyrazić w prędkościach

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij} = \lambda s_{ij} + \frac{\dot{s}_{ij}}{2G}. \quad (9.25b)$$

Materiały sztywno-idealnie plastyczne ( $d\varepsilon_{ij}^e = d\varepsilon_{ij}^p$ ,  $d\varepsilon_{ij}^e = 0$ ) podlegają stowarzyszonemu prawu plastycznego płynięcia [5]

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (9.26)$$

które dla warunku plastyczności Hubera-Misesa ma postać

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda s_{ij}. \quad (9.27)$$

W równaniu (9.26)  $f(\sigma_{ij})$  jest warunkiem plastyczności.

Dla złożonych stanów naprężenia i odkształcenia dla ciała idealnie plastycznego z liniową lepkością (ciało Bingham) mamy równanie konstytutywne

$$s_{ij} = 2 \left( \eta + \frac{k}{\dot{\varepsilon}_i} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (9.28)$$

gdzie  $\eta$  jest lepkością materiału,  $k$  jest granicą plastyczności na ścinanie,  $\dot{\varepsilon}_i$  jest intensywnością prędkości odkształcenia.



Dla cieczy idealnej (doskonałej - nie zachodzi w niej rozpraszanie energii) prawo konstytutywne ma postać

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}, \quad (9.29)$$

gdzie  $p$  jest ciśnieniem. W danym czasie istnieje tylko kulisty stan naprężenia.

Uogólnione prawo Hooke'a z uwzględnieniem wpływu temperatury ma postać

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - 3\alpha_T K \Delta T \delta_{ij}, \quad (9.30a)$$

gdzie  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ ,  $\alpha_T$  jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności,  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  jest stałą Lamego,  $K = \lambda + \frac{2}{3}G$  jest modułem odkształcenia objętościowego,  $T$  jest temperaturą. Przyjmując zależność  $\lambda = K - \frac{2}{3}G$ , równanie (9.30a) można napisać w postaci

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) + K(\varepsilon_{kk} \delta_{ij} - 3\alpha \Delta T \delta_{ij}). \quad (9.30b)$$

Związek odwrotny ma postać

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[ \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] + \alpha_T \Delta T \delta_{ij}. \quad (9.30c)$$

Składowa odkształcenia w kierunku osi  $x$  wyrazi się następująco:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] + \alpha \cdot \Delta T. \quad (9.30d)$$

9.3.1. Równania podające zależność między naprężeniem rzeczywistym  $\sigma$  a odkształceniem logarytmicznym  $\varphi$

1. Dla większości metali w stanie wyzarzonym stosowane jest równanie krzywej umocnienia

$$\sigma = C \varphi^n, \quad (9.31)$$

gdzie  $\sigma$  jest granicą plastyczności,  $C$  jest stałą materiałową mającą wymiar naprężenia,  $\varphi$  jest bezwymiarowym odkształceniem logarytmicznym,  $n$  jest potęgowym bezwymiarowym współczynnikiem umocnienia. Wykładnik krzywej umocnienia  $n$  jest obliczany z wzorów

$$n = \varphi_r = \ln \frac{l_r}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon_r), \quad \varepsilon_r = \frac{\Delta l_r}{l_0},$$

$$n = \frac{d\sigma}{d\varphi} \frac{\varphi}{\sigma},$$

$$n = \frac{\partial \log \sigma_p}{\partial \log \varphi} \Big|_{\dot{\varphi}} = \text{const}$$

W. Johnson i P. B. Mellor podali, że dla miękkiej stali węglowej  $n = 0,2$ , dla aluminium  $n = 0,25$ , a dla miedzi  $n = 0,3$ . Równanie (9.31) używał P. Ludwik, a zalecali go używać A. Nadai, R. Houwnik, J. H. Holloman, a ostatnio F. Tychowski i T. Pełczyński. Dla miedzi M1 Tychowski podaje równanie  $\sigma_p = 42\varphi^{0,44}$ , Pełczyński —  $\sigma_p = 42\varphi^{0,38}$ , a Miśiołek i Kastner —  $\sigma_p = 41,7\varphi^{0,31}$ , natomiast dla mosiądzu M63 (CuZn37) Marciniak podaje równanie  $\sigma_p = 71\varphi^{0,48}$ , a Miśiołek i Kastner —  $\sigma_p = 63,8\varphi^{0,44}$ . Równanie (9.31) z dużą dokładnością opisuje krzywe umocnienia stali węglowych, miedzi i aluminium.

2. E. Hodgkinson, A. Nadai i C. Bach używali równanie

$$\sigma = C \xi^n, \quad (9.32)$$

gdzie  $\xi = \frac{l_1 - l_0}{l_0}$ ,  $C$ ,  $n$  są stałymi materiałowymi. Równanie to dobrze opisuje stale nierdzewne i stopy miedzi, które wykazują dużą zdolność do umacniania się. Równanie (9.32) również stosował St. Erbel. A. Muster dla stali 15 podał równanie

$$\sigma = 663,3 \cdot \varepsilon^{0,214} \quad [\text{MN/m}^2]. \quad (9.32a)$$

3. H.W.Swift, R.Houwnik, W.Johnson i P.B.Mellor oraz T.Pełczyński i Marciniak stosowali równanie typu

$$\sigma = c (\varphi_0 + \varphi)^n, \quad (9.33)$$

gdzie  $\varphi_0$  jest odkształceniem początkowym, które dla materiału wyzarzonego jest równe zeru,  $\varphi_0 = 0$ . Według T.Pełczyńskiego  $\varphi_0 = 0,001 \div 0,005$ . Marciniak podaje dla miedzi równanie  $\sigma_p = 42 (\varphi + 0,016)^{0,3}$ . Natomiast Z.Misiołek i Z.Rafalski [27] podają równania krzywej umocnienia dla miedzi M1E i mosiądzu M63(CuZn37) dla przypadku rozciągania i ściskania próbek umocnionych. Są one następujące:

a) dla rozciągania

$$\begin{aligned} - \text{M1E} & \quad \sigma_p = \sigma_{0,2} = 38,5 (\varphi - 0,002)^{0,22}, \\ - \text{M63} & \quad \sigma_p = \sigma_{0,2} = 67,4 (\varphi + 0,011)^{0,46}; \end{aligned} \quad (9.33a)$$

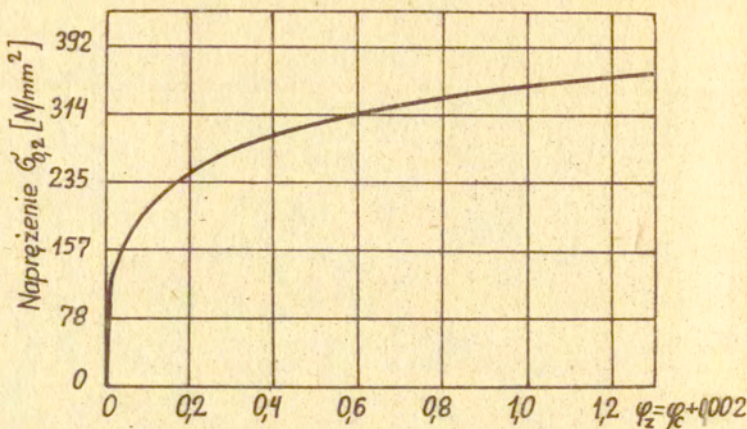
b) dla ściskania ( $h_0/d_0 = 1,5$ )

$$\begin{aligned} - \text{M1E} & \quad \sigma_p = \sigma_{0,2} = 39,8 (\varphi - 0,000)^{0,26} \exp(-0,106\varphi), \\ - \text{M63} & \quad \sigma_p = \sigma_{0,2} = 38,3 (\varphi - 0,000)^{0,21} \exp(0,172\varphi). \end{aligned} \quad (9.33b)$$

Na rysunku 9.50. pokazano krzywą umocnienia dla miedzi M1E w stanie wyzarzonym, otrzymaną ze ściskania próbek Rastiegajewa o stosunku  $h_0/d_0 = 1,5$ .

St. Erbel stosował równanie

$$\sigma = c (\varepsilon_0 + \varepsilon)^n. \quad (9.34)$$



Rys. 9.50. Krzywa umocnienia dla miedzi M1E (w stanie umocnionym) otrzymana ze ściskania próbek o stosunku wymiarów  $h_0/d_0 = 1,5$  [27]

4. H.W.Swift zaproponował również równanie typu

$$\tau = C (a + \mu)^n, \quad (9.35)$$

gdzie  $\tau$  jest zastępczym napężeniem stycznym,  $\mu$  jest zastępczym odkształceniem postaciowym,  $C$ ,  $a$ ,  $n$  są stałymi materiałowymi.

5. Kochendoerfer stosował zależność

$$\sigma = \sigma_0 + c \sqrt{\epsilon}, \quad (9.36)$$

a P.Ludwik posługiwał się wzorem empirycznym o postaci

$$\sigma = \sigma_0 + c \varphi^n, \quad (9.37)$$

gdzie  $\sigma_0$  jest granicą plastyczności materiału wyzarzonego.

J.Gronostajski dla miedzi MOOB (próbki rozciągane płaskie o bazie pomiarowej 25 mm,  $v = 1,66 \cdot 10^{-5}$  m/s) podaje równania

$$R_m = 208,0 + 142,0 \varphi_g^{0,498} \quad [\text{MN/m}^2],$$

$$R_{0,1} = 43,2 + 304,75 \varphi_g^{0,2067} \quad [\text{MN/m}^2], \quad (9.37a)$$

$$E = 92,0 + 14,66 \varphi_g \quad [ \times 10^3 \cdot \text{MN/m}^2 ],$$

$$\mu_{HV} = 72,0 + 44,40 \varphi_g^{0,639} \quad [\text{MN/m}^2].$$

Równania (9.37a) są spełnione dla równomiernych odkształceń

$$\varphi_r = 0 \div 4,0$$

$$\left( Z_r = 0,98\%, \quad Z_r = \frac{F_0 - F_r}{F_0} = \frac{l_r - l_0}{l_r}, \quad \xi_r = \frac{Z_r}{1 - Z_r}, \quad \varphi_r = \ln(1 + \xi_r) \right).$$

6. Stosowana była również zależność typu

$$\sigma = \sigma_0 \varepsilon^n. \quad (9.38)$$

Wykładnik umocnienia  $n$  wynosi dla: Cu —  $0,3 \pm 0,4$ ,  $N_1$  —  $0,2 \pm 0,3$ ,  
Fe —  $0,2 \pm 0,25$ , Al —  $0,15 \pm 0,3$ , Pb —  $0,25 \pm 0,3$ .

7. W przypadku, gdy odkształcenia trwałe pojawiają się dopiero przy wyższych naprężeniach, to krzywą umocnienia można opisać równaniem

$$\sigma = \sigma_0 \lambda^s, \quad (9.39a)$$

gdzie  $\lambda = \frac{l_1}{l_0}$  (lub  $\lambda = \frac{h_1}{h_0}$ ) jest współczynnikiem wydłużenia lub skrócenia próbki,  $s$  jest wykładnikiem potęgowym, a  $\sigma_0$  jest naprężeniem wywołującym pierwsze ślady odkształcenia trwałego. Równanie (9.39a) można napisać jako funkcję wydłużenia logarytmicznego

$$\sigma = \sigma_0 e^{s\varphi} \quad (9.39b)$$

lub jako funkcję naprężenia

$$\varphi = \frac{1}{s} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}. \quad (9.39c)$$

Parametry  $s$  i  $\sigma_0$  wyznaczone są doświadczalnie z zależności

$$s = \frac{\ln \sigma_1 - \ln \sigma_2}{\ln \lambda_1 - \ln \lambda_2} = \frac{\ln \sigma_1 - \ln \sigma_2}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1}{\lambda_1^s} \equiv \frac{\sigma_2}{\lambda_2^s}.$$

8. A. Krupowski zaproponował równanie potęgowe typu

$$\sigma = c [Z_1 + (1-Z_1) Z]^n \quad (9.40a)$$

lub zapisane krócej

$$\sigma = c Z_1^n, \quad (9.40b)$$

gdzie  $\sigma$  jest naprężeniem rzeczywistym,  $Z_1$  jest zgniotem teoretycznym wyrażającym się wzorem

$$Z_1 = Z_1 + (1-Z_1) Z,$$

przy czym  $Z = \frac{F-F_0}{F_0}$ ,  $Z_1$  jest zgniotem początkowym dającym przesunięcie wykresu,  $n$  jest wykładnikiem potęgowym charakteryzującym dany materiał,  $F_0$  jest początkowym przekrojem próbki,  $F$  jest końcowym przekrojem próbki,  $c$  jest modułem plastyczności. Prawo umocnienia (9.40) wykazuje dużą przydatność i uniwersalność w opisie statycznych krzywych umocnienia wielu metali. Kochendorfer stosował równanie typu

$$\sigma = c Z^n. \quad (9.41)$$

9. Naprężenie uplastyczniające jest związane ze strukturą empirycznym równaniem Halla-Petcha

$$\sigma_p = \sigma_0 + k_y d^{-\frac{1}{2}}, \quad (9.42)$$

gdzie  $k_y = \alpha E b (3N)^{\frac{1}{2}}$ ,  $d$  jest wielkością ziarna,  $\alpha$  jest stałą,  $E$  jest modułem sprężystości,  $b$  jest wektorem Burgersa,

$N$  jest współczynnikiem zdolności granicy ziarna do emisji dyslokacji,  $\sigma_0$  jest naprężeniem tarcia dyslokacji i zależy od  $T$ ,  $\dot{\epsilon}$  i od składu chemicznego badanej stali.

Równania (9.31 ÷ 9.42) mogą być stosowane jedynie dla warunków statycznych.

Często spotyka się fizyczne równanie umocnienia materiału dla złożonego stanu naprężenia i odkształcenia

$$\sigma_1 = C \xi_1^n, \quad (9.43)$$

gdzie  $C$ ,  $n$  są stałymi materiałowymi,  $\sigma_1$  jest intensywnością naprężenia,  $\xi_1$  jest intensywnością odkształcenia

$$\xi_1 = \int_0^t \dot{\xi}_1 dt, \quad \dot{\xi}_1 = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}.$$

9.3.2. Równania podające zależność między naprężeniem rzeczywistym  $\sigma$  a prędkością odkształcenia  $\dot{\varphi}$  lub  $\dot{\epsilon}$

1. Często stosowane jest równanie nadplastyczności

$$\sigma = C \dot{\varphi}^m, \quad (9.44)$$

gdzie  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\epsilon}{n} [s^{-1}]$  jest prędkością odkształcenia logarytmicznego,  $m = \left. \frac{d \ln \sigma}{d \ln \dot{\varphi}} \right|_{\varphi = \text{const}}$  jest współczynnikiem czułości materiału na prędkość odkształcenia (dla prędkości odkształcenia  $\dot{\varphi} = 10^{-4} \div 10^{-2} s^{-1}$  —  $m = 0,4 \div 0,8$ , a dla materiału idealnie plastycznego  $m = 0$ , dla materiału idealnie lepkiego  $m = 1$ ,  $C$  jest stałą materiałową.

2. E. Siebel i A. Pomp stosowali równanie typu

$$\sigma = \sigma_0 + C \dot{\epsilon}^m, \quad (9.45)$$

gdzie  $\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt} s^{-1}$ ,  $\sigma_0$  jest statyczną granicą plastyczności

materiału wyzarzanego, C i m są stałymi materiałowymi. Ludwik natomiast proponował równanie typu

$$\sigma_p = \sigma_0 + \beta \ln \dot{\varphi}, \quad (9.46)$$

gdzie  $\sigma_0$  i  $\beta$  są stałymi materiałowymi.

J.Gronostajski dla miedzi M1G (rafinowanej ogniowo) wyzarzanej rekrytalizująco w temperaturze 873<sup>o</sup>K w czasie 0,5 h ustalił zależności

$$\begin{aligned} R_m &= 246,70 + 0,42 \log \dot{\varepsilon} \quad [\text{MN/m}^2], \\ R_0 &= 223,51 + 0,60 \log \dot{\varepsilon} \quad [\text{MN/m}^2], \end{aligned} \quad (9.46a)$$

dla rozciąganych płaskich próbek o stosunku powierzchni F do objętości V równym 5,02 ( $\frac{F}{V} = 5,02$ ) i bazie pomiarowej 15 mm ( $\dot{\varepsilon} = 10^{-2} \div 10^3 \text{ s}^{-1}$ ). Dla innych wartości  $\frac{F}{V}$  i długości pomiarowej wartości stałych w równaniach są inne (efekt skali - wymiarów i kształtu próbek).

3. Z.Marciniak stosował równania

$$\sigma = C \varphi^n \dot{\varphi}^m, \quad (9.47)$$

$$\sigma = C (\varphi_0 + \varphi)^n \dot{\varphi}^m, \quad (9.48)$$

$$\sigma = C \varphi^n (1 + a\dot{\varphi})^m. \quad (9.49)$$

Dla blach tłocznych przyjmował on:  $n = 0,25$ ,  $m = 0,01 \div 0,015$ . Bednarski natomiast przyjmował równania typu

$$\sigma = C \varepsilon^n \dot{\varepsilon}^m, \quad (9.50)$$

$$\sigma = C \varepsilon^n (1 + a\dot{\varepsilon})^m. \quad (9.51)$$

4. J.Kłepaczko i Z.Marciniak do opisu aluminium stosowali równanie

$$\sigma = C (\varphi_0 + \varphi)^n (1 + a\dot{\varphi})^m. \quad (9.52)$$

5. Niektórzy badacze używali równania typu



$$\sigma = c_1 (c_2 + \dot{\varphi})^n (c_3 + \dot{\varphi}) \dot{\varphi}^m . \quad (9.53)$$

6. Do opisu wielu metali stosowane są równania

$$\sigma = c \varphi^n \left( \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0} \right)^m , \quad (9.54)$$

$$\sigma = \sigma_0 \left( \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0} \right)^m , \quad (9.55)$$

dla których współczynnik czułości materiału na prędkość odkształcenia  $m$  wynosi: dla Cu  $m = 0,7$ , dla Fe  $m = 0,12$ , dla Pb  $m = 0,12$ , dla Al  $m = 0,5$ . Z. Marciniak stosował zależność

$$\sigma = C \varepsilon^n \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^m , \quad (9.56a)$$

gdzie  $\dot{\varepsilon}_0 = \frac{v}{l_0}$  ( $v$  — prędkość uchwytu,  $v = \text{const}$ ),  $\dot{\varepsilon} = \frac{v}{l}$ ,  $l = l_0 e^{\varepsilon}$ , to  $\dot{\varepsilon} = \frac{v}{l_0} e^{-\varepsilon}$ ,  $\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} = e^{-\varepsilon}$ . Zależność (9.56a) można napisać w postaci

$$\sigma = C \varepsilon^n e^{-m\varepsilon} . \quad (9.56b)$$

7. Nadai i Prandtl stosowali równanie

$$\sigma = \sigma_0 + C \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) , \quad (9.57)$$

natomiast Witman i Stiepanow podali zależność

$$\ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = n \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} , \quad (9.58)$$

gdzie  $\sigma$  i  $\sigma_0$  są granicami płynięcia plastycznego przy prędkości odkształcenia odpowiednio  $\dot{\varepsilon}$  i  $\dot{\varepsilon}_0$ ,  $n$  jest współczynnikiem materiałowym,  $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$ .

8. Dla miedzi stosowano zależność

$$\sigma = \sigma_0 [1 + 0,012 \ln(10^4 \cdot \dot{\varepsilon})] , \quad (9.59)$$

gdzie  $\sigma_0$  jest granicą plastyczności otrzymaną przy prędkości

odkształcenia  $\dot{\epsilon}_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ .

9. Często stosowane jest równanie

$$\sigma = C_1 \varphi^n + C_2 \left( \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0} \right)^m \quad (9.60)$$

10. Do opisywania krzywych umocnienia w zakresie prędkości odkształceń  $\dot{\varphi} = 10^{-5} \div 10^0 \text{ J. Klepaczko i Z. Marciniak}$  stosowali równanie

$$\sigma = \sigma_0 \left( \frac{1+a \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0}}{1+a \dot{\varphi}_0} \right)^m, \quad (9.61)$$

gdzie  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ ,  $\sigma_0$  jest naprężeniem odpowiadającym prędkości odkształcenia  $\dot{\varphi}_0$ , a  $i$  i  $m$  są stałymi materiałowymi wyznaczanymi doświadczalnie.

11. J. Wantuchowski [13] zaproponował równanie

$$\sigma = C Z_1^n \dot{Z}^m, \quad (9.62)$$

gdzie  $Z = 1 - \frac{F}{F_0}$ ,  $\dot{Z} = \frac{dZ}{dt}$ ,  $Z_1 = Z_1 + (1-Z_1) Z$ ,  $Z_1$  jest początkowym zgniotem.

12. A. I. Celikow i W. A. Persijancewa [12] stosowali równanie uwzględniające umocnienie i relaksację zachodzącą w metalu podczas plastycznego odkształcenia

$$\sigma = \sigma_0 + D \frac{\dot{\epsilon}}{A} \left( 1 - e^{-A \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0}} \right), \quad (9.63)$$

gdzie  $D$  jest modułem umocnienia,  $A$  jest współczynnikiem uwzględniającym szybkość relaksacji  $[\text{s}^{-1}]$ ,  $\dot{\epsilon}$  jest średnią prędkością odkształcenia,  $\sigma_0$  jest granicą plastyczności przy statycznym odkształceniu.

Równania (9.44 ÷ 9.63) opisują dynamiczne krzywe umocnienia metali.

9.3.3. Równania podające zależność między naprężeniem rzeczywistym  $\sigma$ , odkształceniem  $\varphi$  (lub  $\epsilon$ ), prędkością odkształcenia  $\dot{\varphi}$  i temperaturą  $T$

Równania konstytutywne wyrażające zależność między naprężeniem  $\sigma$ , odkształceniem  $\varphi$ , prędkością odkształcenia  $\dot{\varphi}$  i temperaturą  $T$  ogólnie można zapisać w postaci:

$$\sigma = \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T). \quad (9.64)$$

1. W literaturze spotyka się równania uwzględniające tylko temperaturę

$$\sigma = \sigma_0 (1 - \beta \Delta T), \quad (9.65)$$

gdzie  $\beta$  jest współczynnikiem określonym doświadczalnie (dla Cu  $\beta = 5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{1^\circ\text{C}}$ , dla Ni  $\beta = 3 \cdot 10^{-4}$ , dla Al  $\beta = 10^{-3}$ ),  $\Delta T = T - T_0$ . Równanie 9.65 opisuje naprężenia występujące w konstrukcjach usztywnionych.

W.F. Rabziwocznik podaje równania

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\beta T}, \quad (9.66a)$$

$$\sigma = \sigma_{\text{top}} \exp\left[\beta T_{\text{top}} \left(1 - \frac{T}{T_{\text{top}}}\right)\right], \quad (9.66b)$$

gdzie  $\sigma_{\text{top}}$  jest wytrzymałością metalu w temperaturze topnienia  $T_{\text{top}}$ ,  $\beta$  jest współczynnikiem zależnym od temperatury  $T, K$ ,  $\sigma_0$  jest wytrzymałością metalu w temperaturze  $T = 0$ . Dla stali węglowych (rys. 9.22) stosowane jest równanie typu

$$\sigma_p = \sigma_0 \exp \frac{\sigma}{\tau} \left[ \text{N/mm}^2 \right], \quad (9.66c)$$

gdzie  $\sigma_0$  i  $\tau$  są stałymi dla danego materiału przy określonej wartości  $\varphi$  i  $\dot{\varphi}$ ,  $T$  jest temperaturą w  $^\circ\text{C}$ .

S.I. Gubkin<sup>[12]</sup> zaleca wzór na wytrzymałość stali ważny w za-

kresie temperatur  $(0,7 \div 1,0) T_{top}$ .

$$\sigma = \sigma_b^T \left[ 1 + b(0,95 T_{top} - T) \right] + \frac{b^2(0,95 T_{top} - T)}{2} \left[ \text{kg/mm}^2 \right], \quad (9.67)$$

gdzie  $\sigma_b^T$  jest wytrzymałością w temperaturze  $0,95 T_{top}$  przy  $v_{roz}^{\xi} = 40 \div 50 \text{ mm/min}$  ( $\sigma_b^T = 0,4 \div 0,6 \left[ \text{kg/mm}^2 \right]$ ),  $T_{top}$  jest temperaturą topnienia w  $^{\circ}\text{C}$ ,  $b$  jest współczynnikiem równym  $0,008$  dla czystych metali,  $0,0085$  dla stopów,  $0,008 \div 0,012$  dla twardych roztworów.

2. Tretiakow i Zjuzin podają wzór doświadczalny [12]

$$\sigma = \sigma_0^* k_{\xi} k_{\dot{\xi}} k_T, \quad (9.68)$$

gdzie  $k_{\xi}$ ,  $k_{\dot{\xi}}$ ,  $k_T$  są współczynnikami wyznaczonymi z wykresów,  $\sigma_0^*$  jest naprężeniem wyznaczonym przy  $T = 1000^{\circ}\text{C}$ ,  $\xi = 0,1$ ,  $\dot{\xi} = 10 \text{ s}^{-1}$  (dla stali 45— $\sigma_0^* = 88 \text{ N/mm}^2$ , a dla stali 08— $\sigma_0^* = 84 \text{ N/mm}^2$ ).

3. Naprężenie uplastyczniające stal zależne od dowolnej wielkości odkształcenia  $\xi$ , prędkości odkształcenia  $\dot{\xi}$  i temperatury  $T$  można obliczyć ze wzoru [24]

$$\sigma = \sigma_{\xi} \left\{ 1 + \left[ 0,95 - 0,0005 T - (\xi - 0,1) \frac{1}{\xi} \frac{T - 700}{1000} \right] \left[ 1 - e^{-10(\xi - 0,1)} \right] \right\}, \quad (9.69)$$

gdzie

$$\sigma_{\xi} = \sigma_p (1 + \dot{\xi})^{0,219} \cdot 10^{-(12,5 - 0,01 \cdot T) 0,048 \cdot C^{-0,44}},$$

$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{v_h}{h}$ ,  $C$  jest procentową zawartością węgla w stali,

$\sigma_p$  jest statycznym naprężeniem uplastyczniającym.

4. J. Klepaczko podaje wzór dla odkształceń większych od 1% [8]

$$\sigma = B_T \varphi^{n_T} \dot{\varphi}^{m_T}, \quad (9.70)$$

gdzie  $B_T = C \exp(-\frac{Q}{3T_{top} - T})$  jest modułem plastyczności,  $n_T = n_0(1 - \frac{T}{T_{top}})$  jest wykładnikiem umocnienia,  $m_T = a T$  lub  $m_T = a \frac{T}{1 + T_{top}}$  jest współczynnikiem czułości materiału na prędkość odkształcenia zależnym również od temperatury,  $C, q, n_0, a$  są stałymi materiałowymi. Metodą pracy dysypacyjnej wyznaczył on wartości  $B, n, m$  dla miedzi i aluminium dla temperatury  $T = 290$  K. Wynoszą one:

- dla Cu:  $B = 758 \text{ N/mm}^2, \quad n = 0,621, \quad m = 0,0137;$
- dla Al:  $B = 176 \text{ N/mm}^2, \quad n = 0,393, \quad m = 0,017.$

5. Uogólniony przez J. Klepaczkę wzór A. Krupkowskiego [13]

$$\sigma = B \left(\frac{1}{2T_{top}}\right)^{n_T} Z_1^{n_T} \left[ \dot{Z} \exp \frac{38T_{top} - H_T}{kT} \right]^{m_T}, \quad (9.71)$$

gdzie  $Z_1 = Z_1(T) + [1 - Z_1(T)] Z, \quad Z = 1 - \frac{F}{F_0}, \quad Z_1$  jest zgniotem początkowym,  $k$  jest stałą Boltzmanna,

$\Delta H_T = 38T_{top} - H_T = 38T_{top} \left(1 - 2\frac{T}{T_{top}}\right)$  jest energią aktywacji dostarczoną przez naprężenia  $\sigma$ ,  $H_T$  jest energią dostarczoną przez drgania cieplne,  $38T_{top}$  jest energią aktywacji samodyfuzji (samodyfuzja zachodzi w temperaturze  $\frac{1}{2}T_{top}$ ),  $T_{top}$  jest temperaturę topnienia w skali absolutnej,  $B \left(\frac{1}{2T_{top}}\right)^{n_T}$  jest modułem plastyczności w temperaturze  $\frac{1}{2}T_{top}$ . Zależność  $\dot{Z} \exp \frac{\Delta H_T}{kT}$  jest ustalona na podstawie teorii termicznie aktywowanych procesów dyslokacyjnych, jest to tzw. parametr Zenera Hollomona.

9.3.4. Równania podające zależność między naprężeniem stycznym a odkształceniem  $\varphi$ , prędkością odkształcenia  $\dot{\varphi}$  i temperaturą  $T$

Równanie konstytutywne można zapisać w postaci ogólnej

$$f(\varphi, \dot{\varphi}, T, \dot{T}) = 0. \quad (9.72)$$

1. Kamiński stosował wzór<sup>[14]</sup>

$$\dot{T} = C(1-aT)(\varphi_0 + \varphi)^n \dot{\varphi}^m, \quad (9.73)$$

gdzie  $n, m$  są współczynnikami potęgowymi. Przyjmował on wartości:  $n = 0,22$ ,  $m = 0,1$ ,  $\varphi_0 = 0,866$ ,

$$a = 1,4 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{1}{^\circ\text{C}} \right], \quad C = 1304 \left[ \text{N/mm}^2 \right].$$

2. J.Litoński stosował równanie fizyczne dla materiału lepko-plastycznego wrażliwego na prędkość odkształcenia i temperaturę<sup>[15]</sup>

$$\dot{T} = C(1-aT)(\varphi_0 + \varphi)^n (1+b\dot{\varphi})^m. \quad (9.74)$$

Równanie (9.74) trafnie opisuje własności miękkiej stali w zakresie temperatur od 400 do 650°C dla następujących stałych:

$$C = 510 \left[ \text{N/mm}^2 \right], \quad a = 1,4 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{1}{^\circ\text{C}} \right], \quad b = 10^5 \left[ \text{s} \right], \quad m = 0,1,$$

$$n = 0,2, \quad \varphi_0 = 0,01 \quad (\varphi = \ln(1 + \varepsilon)), \quad \dot{\varphi} = \frac{\dot{\varepsilon}}{1 + \varepsilon}, \quad \tau = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}.$$

Jeśli przyjmiemy prędkość odkształcenia  $\dot{\varphi} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ , to

związek fizyczny dla ciała plastycznego wrażliwego na temperaturę będzie miał postać

$$\dot{T} = C_1(1-aT)(0,01 + \varphi)^{0,2}, \quad (9.75)$$

$$\text{gdzie } C_1 = 510(1 + 10^5 \left[ \text{s} \right] \cdot 10^{-4} \left[ \text{s}^{-1} \right])^{0,1} = 510 \cdot 11^{0,1} \cong 648 \text{ N/mm}^2.$$

### 9.3.5. Wpływ temperatury na stałe sprężystości

W miarę wzrostu temperatury występuje osłabienie wiązań sieci krystalicznej, a co za tym idzie i obniżenie wartości stałych sprężystości podłużnej  $E$  i ścisłościwości  $K$ <sup>[16]</sup>.

Moduł Younga można wyrazić zależnościami

$$E_T = E_0(1-aT-bT^2) \quad (9.76a)$$

lub

$$E_T = E_0(1-\theta^2), \quad (9.76b)$$

gdzie  $a, b$  są stałymi materiałowymi,  $\theta = \frac{T}{T_{top}}$  jest temperaturą w skali homologicznej,  $E_0$  jest atermicznym modułem dla temperatury 0 K.

Dobłą zgodność z doświadczeniem wykazują zależności dla modułu Younga

$$E_T = E_0 - b_E T \exp\left(-\frac{T_s}{T}\right), \quad (9.77)$$

dla modułu ściśliwości

$$K_T = K_0 - b_K T \exp\left(-\frac{T_s}{T}\right), \quad (9.78)$$

gdzie  $T_s$  jest stałą materiałową mającą wymiar temperatury,  $b_E, b_K$  są stałymi materiałowymi. Stałe te są wielkościami termodynamicznymi.

Zależność między izotermicznym  $K_T$  i adiabatycznym (stałe ciepło)  $K_A$  modułem ściśliwości  $K$  jest [11]

$$K_T = K_A \left(1 + K_A \frac{9\alpha^2 T_0}{V c_p}\right)^{-1}, \quad (9.79)$$

a między adiabatycznym  $E_A$  i izotermicznym  $E_T$  modułem Younga jest

$$E_A = E_T \left(1 + E_A \frac{\alpha^2 T_0}{V c_p}\right)^{-1}, \quad (9.80)$$

gdzie  $\alpha$  jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności cieplnej,  $V$  jest objętością,  $c_p$  jest ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu,  $T_0$  jest stałą mającą wymiar temperatury. Moduł adiabatyczny  $K_A$  jest większy od modułu izotermicznego  $K_T$ , czyli w procesie adiabatycznym materiał jest bardziej sztywny niż w procesie izotermicznym.

Warunek plastyczności Hubera-Misesa dla ciała o liniowym kinematycznym wzmocnieniu z uwzględnieniem temperatury ma postać

$$f = \frac{1}{2} (S_{ij} - c e_{ij}^p) (S_{ij} - c e_{ij}^p) - k_T^2, \quad (9.81)$$

gdzie  $k_T$  jest granicą plastyczności materiału w temperaturze  $T$  dla przypadku czystego ścinania,  $e_{ij}$  jest dwiema-tem odcształcenia plastycznego,  $c$  jest modułem wzmocnienia kinematycznego,  $S_{ij}$  jest dwiema-tem naprężenia.

### 9.3.6. Wzory podające zależność na prędkość odcształcenia

1. Prędkość odcształcenia można obliczyć ze wzoru

$$\dot{\epsilon} = b \xi v, \quad (9.82)$$

gdzie  $b$  jest wektorem Burgersa,  $\xi$  jest gęstością dyslokacji,  $v$  jest prędkością ruchu dyslokacji. Według Cottrella prędkość krytyczną ruchu dyslokacji wyraża się wzorem

$$v_k = \frac{4k T D}{A},$$

gdzie  $k$  jest stałą Boltzmanna,  $T$  jest temperaturą w skali bezwzględnej,  $D$  jest współczynnikiem dyfuzji,  $A$  jest stałą. Przy dużej prędkości  $v$  ruchu dyslokacji, dyslokacje w materiale odcształcanym nie są blokowane przez atmosfery domieszek. Gdy  $v > v_k$ , to atmosfera domieszek jest niestabilna i nie blokuje dyslokacji.

2. McLean dla metali o sieci przestrzennie centrowanej podaje zależność na prędkość odcształcenia

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right), \quad (9.83)$$

gdzie  $\dot{\epsilon}_0$  jest prędkością odcształcenia otrzymaną w czasie



$t = 0$ ,  $k$  jest stałą Boltzmana,  $U$  jest energią aktywacji określonej empirycznie,  $T$  jest temperaturą w kelwinach.

3. J. Klepaczko i Z. Malinowski stosowali wzór Cottrella na krytyczną prędkość odkształcenia

$$\dot{\xi}_k = \xi_0^n A d^{-\beta} \exp\left(-\frac{U}{kT}\right), \quad (9.84)$$

gdzie  $A, \beta, n$  są stałymi materiałowymi,  $d$  jest średnicą ziarna,  $T$  jest temperaturą w K,  $U$  jest energią aktywacji w eV (np. dla Al  $U = 0,56 \pm 0,02$  eV).

4. Równanie opisujące prędkość odkształcenia dla metali o sieci płasko centrycznej ma postać

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_0 \exp\left(-\frac{\tau - \sigma}{kT}\right) ab, \quad (9.85)$$

gdzie  $\tau = \frac{G}{l} b$  jest naprężeniem stycznym,  $b$  jest wektorem Burgersa,  $a$  jest przestrzenią aktywacji,  $l$  jest odległością między przeszkodami,  $k$  jest stałą Boltzmana,  $T$  jest temperaturą w K,  $\dot{\xi}_0$  jest prędkością odkształcenia przy  $\sigma = \tau$ .

#### 9.4. Podstawy stosowanej termoplastyczności

Deformacja ciała <sup>nie</sup>rozdzielnie związana jest z ilością ciepła, a zatem i z rozkładem temperatury w ciele. Zmienne w czasie odkształcenie powoduje zmianę pola temperatury i na odwrót. Zatem energia wewnętrzna ciała zależna jest od deformacji i od temperatury.

W metalach występuje sprzężenie termo-mechaniczne. Z jednej strony pole temperatur wywołuje w metalu naprężenia i odkształcenia nawet bez przyłożenia obciążenia mechanicznego zewnętrznego. Z drugiej strony obciążenia mechaniczne zewnętrzne

rzne w materiale wywołują pola naprężeń i odkształceń, które z kolei powodują pojawienie się w ciele przyrostu temperatury. Zjawiska te związane są z dysypacją pracy mechanicznej i ruchem defektów. Deformacja plastyczna niezależnie od znaku i rodzaju naprężenia zawsze wywołuje dodatnie przyrosty temperatury. Pierwszy sposób sprężenia nazywa się termosprężystością, a drugi - termoplastycznością. Odkształcenia plastyczne generują ciepło i dalej to ciepło wpływa na dalszy proces odkształcania.

Sprężenie termo-mechaniczne może wynikać:

1. ze zmiany ciśnienia (np. ściskającego) lub objętości. Przyłożone z zewnątrz pole naprężeń wywołuje w ciele lokalne pojawienie się składowej tensora kulistego, która wywołuje przyrost temperatury ( $\pm \Delta p \rightarrow \pm \Delta T$  lub  $\pm \Delta V \rightarrow \mp \Delta T$ );
2. z zewnętrznego ogrzania ciała. Powstałe pole temperatury powoduje powstanie pola naprężeń ( $\pm \Delta T \rightarrow \mp \Delta \sigma$ );
3. z cyklicznego obciążenia i odciążenia. Powstała histereza dowodzi istnienia dysypacji energii, która prowadzi do wzrostu temperatury ( $+ \Delta L \rightarrow + \Delta T$ );
4. z ruchu defektów strukturalnych wywołanych obciążeniem zewnętrznym. Obciążenie zewnętrzne powoduje ruch dyslokacji istniejących i powstanie nowych dyslokacji. Zachodząca deformacja plastyczna powoduje dodatni przyrost temperatury ( $+ L_p \rightarrow + \Delta T$ ).

Jeśli na ciało działają obciążenia zewnętrzne (siły masowe  $\int_V X_i \rho_i dV$  i siły powierzchniowe  $\int_S p_i \rho_i$  i występują w nim wewnętrzne źródła energii, a jego powierzchnia jest ogrzana (lub oziębiona), to ciało ulega deformacji. Wytworzone

pole przemieszczeń  $u_i$  wywoła pole odkształceń

$\xi_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ , któremu towarzyszy pole naprężeń  $\sigma_{ij}$ . Dysypowana praca plastyczna  $\sigma_{ij}\xi_{ij}$  zamienia się na ciepło powodujące wzrost temperatury ciała. Zależne od siebie wielkości są jeszcze poza tym funkcjami położenia i czasu.

Zagadnienie wymiany ciepła rozwiązujemy metodą różnic skończonych. Polega ona na zastąpieniu różniczek w równaniach wymiany ciepła różnicami skończonymi.

#### 9.4.1. Analiza ciepła i równanie przewodnictwa cieplnego

Ciepło przekazywane jest za pomocą drgań cieplnych atomów sieci krystalicznej ciała. Drgania cieplne atomów charakteryzowane są amplitudą  $A$  i częstotliwością  $\nu$  drgań. Dla metali częstotliwość drgań obliczana jest ze wzoru

$$\nu = \frac{C}{2\pi b} \left[ \frac{\text{drgań}}{s} \right],$$

gdzie  $C_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ,  $E$  jest modułem Younga,  $\rho$  jest gęstością,  $b$  jest parametrem sieci równym ok.  $2,5 \cdot 10^{-8}$  cm.

Dla stali  $\nu = 3 \cdot 10^{12}$  s<sup>-1</sup>,  $A = 0,1b$ . Zjawisko przekazywania ciepła nosi nazwę przewodnictwa cieplnego.

Przyrost ciepła w jednostce objętości obliczamy ze wzoru

$$dQ = \rho c_w dT \quad [J/m^3], \quad (9.86)$$

gdzie  $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$  [kg/m<sup>3</sup>] jest gęstością ciała,  $c_w = \frac{dU}{dT}$

jest ciepłem właściwym będącym pochodną energii wewnętrznej ciała  $U (U = \int_V u \rho dV \cong 3NkT = 3RT)$  względem temperatury  $T$

$(c_w(T) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T \cdot m} = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} [kg \cdot deg])$ ,  $\Delta T = T_2 - T_1$  jest przyrostem temperatury w K,  $N$  jest liczbą Avogadra,  $k$  jest stałą

Boltzmana,  $1\text{I} = 1\text{N} \cdot 1\text{m} = 1\text{kg} \cdot 1\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ . Ciepło przypadające na jednostkę objętości oblicza się z równania

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} dQ = \rho c_w \int_{T_1}^{T_2} dT = \rho c_w \Delta T \left[ \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]. \quad (9.87)$$

Całkowita ilość ciepła będąca w ciele o objętości  $V$  jest równa ( $m = \rho V$ )

$$Q_c = V \rho c_w (T_2 - T_1) = m c_w \Delta T \quad [\text{J}]. \quad (9.88)$$

— Rozkład temperatury w każdym ośrodku matematycznie opisać można równaniem ogólnym

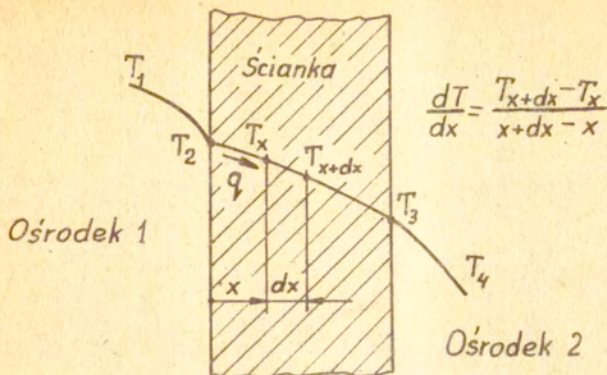
$$T = f(x, y, z, t).$$

Znaczy to, że temperatura zależy od współrzędnych  $x, y, z$  i od czasu  $t$ . Jeśli temperatura zależy od czasu  $t$ , to pole temperatury jest nieustalone ( $\frac{\partial T}{\partial t} \neq 0$ ), a jeśli temperatura w każdym punkcie ośrodka (ciała) jest stała w czasie (nie zależy od czasu), to pole temperatury nosi nazwę ustalonego ( $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ).

Pole temperatury można przyporządkować wektor będący gradientem temperatury, grad  $T$ . Kierunek gradientu temperatury jest zgodny z kierunkiem normalnej do powierzchni izotermicznej (o stałej temperaturze). Miarą gradientu temperatury jest stosunek przyrostu temperatury wzdłuż normalnej do izotermii do odcinka tej normalnej

$$\text{grad } T = \frac{dT}{dx} \quad [\text{K/m}]. \quad (9.89)$$

Jeśli znane jest pole temperatury, to znana jest wielkość gradientu temperatury w każdym punkcie, a więc określone jest pole gradientu temperatury. Gradient temperatury związany jest



Rys. 9.51. Ilustracja zmiany temperatury i gradientu temperatury,  $\text{grad } T = \frac{dT}{dx}$

z ilością ciepła przeniesionego przez przewodzenie zgodnie z prawem Fouriera o postaci matematycznej

$$q = -\lambda \text{ grad } T, \quad (9.90)$$

gdzie  $\lambda [J/(m \cdot s \cdot \text{deg})]$  jest współczynnikiem przewodzenia ciepła.  
Wielkość  $q [W/m^2]$  nazywa się strumieniem ciepła

i jest on wektorem o kierunku odwrotnym do wektora gradientu temperatury. Inaczej mówiąc strumień ciepła  $q$  jest proporcjonalny do gradientu temperatury mierzzonego wzdłuż kierunku przepływu ciepła. Zatem strumień ciepła  $q$  jest stosunkiem ilości ciepła  $\Delta Q$  przypadającego na elementarną powierzchnię  $\Delta S$  w odniesieniu do jednostki czasu, gdy powierzchnia  $\Delta S$  dąży do zera, a zatem

$$q = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS} \quad [J/m^2 \cdot s] \quad \text{lub} \quad W/m^2.$$

W ogólnym przypadku, w układzie współrzędnych  $x, y, z$  wektor  $\vec{q}$  ma trzy składowe

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$$

o ogólnym zapisie

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (9.91)$$

$$i = x, y, z.$$

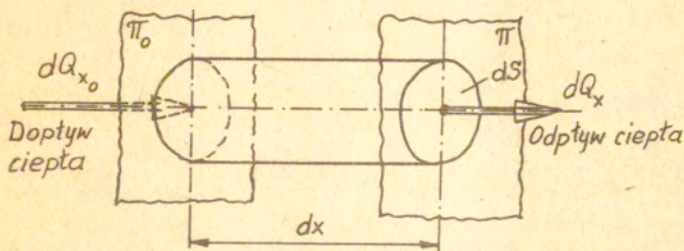
Dla ustalonego przewodzenia ciepła przez ściankę wartość gradientu temperatury  $\frac{\partial T}{\partial x_i}$  jest stała w każdym punkcie i nie zależy od czasu, wówczas mamy

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\frac{\lambda}{x} (T_x - T_0). \quad (9.92)$$

Natomiast dla nieustalonego przewodzenia ciepła wartość gradientu temperatury jest zmienna w czasie  $t$  i zależy od współrzędnych  $x, y, z$ . Wówczas w dowolnym punkcie ośrodka występuje następująca zależność między czasowymi i przestrzennymi zmianami temperatury [30]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (9.93)$$

Rozkład temperatury w ciele w przestrzeni  $x, y, z$  i w czasie  $dt$  znajdziemy, jeśli rozważymy dopływ i odpływ ciepła do elementarnej powierzchni  $dS$  ścianki o grubości  $dx$  (rys. 9.51a)



Rys.9.51a. Schemat przepływu ciepła przez wyodrębniony element ścianki (płyty).

Jeśli z elementarnej powierzchni  $dS$  w jednostce czasu  $dt$  w kierunku osi  $x$  odpływie strumień ciepła

$$\frac{dQ_x}{dt} = -\lambda dS \frac{\partial T}{\partial x} \left[ \frac{J}{s} = W \right],$$

a do przeciwległej strony płyty dopływnie ciepło

$$dQ_{x_0} = dQ_x + \frac{\partial dQ_x}{\partial x} dx = -\left[ \lambda dS \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda dS \frac{\partial T}{\partial x}) dx \right],$$

to w elementarnej bryle pozostanie porcja energii cieplnej w ilości

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_{x_0} - dQ_x}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} (\lambda dS \frac{\partial T}{\partial x}) dx. \quad (9.93a)$$

Energia ta w jednostce czasu  $dt$  wywołuje zmianę temperatury  $\frac{\partial T}{\partial t}$ . Dla wywołania zmiany temperatury  $\frac{\partial T}{\partial t}$  w jednostce czasu w ciele o ciepłe właściwym  $c$  i gęstości  $\rho$  potrzebna jest energia cieplna

$$\frac{dQ}{dt} = c \varrho dV \frac{\partial T}{\partial t} = c dm \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (9.93b)$$

gdzie  $dm = \varrho dV$  jest elementarną masą,  $dV$  jest objętością bryły elementarnej,  $\frac{dQ}{dt}$  jest prędkością przepływu ciepła przez elementarną powierzchnię  $dS$ . Znak minus w powyższych wzorach oznacza, że ciepło sływa w kierunku spadku temperatury

Porównując ze sobą energię cieplną wyrażoną wzorami (9.93a), (9.93b) otrzymamy zmianę temperatury w rozważanej elementarnej bryle (rys. 9.51a)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dx}{c \varrho dV} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda dS \frac{\partial T}{\partial x}). \quad (9.93c)$$

Gdy współczynnik przewodnictwa cieplnego  $\lambda$  nie zależy od temperatury i nie zależy od współrzędnych  $x, y, z$ , czyli jest stały, to można go wyciągnąć przed znak pochodnej cząstkowej, gdyż nie podlega różniczkowaniu. Wówczas równanie (9.93c) przyjmie postać

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{dx}{dV} \frac{\partial}{\partial x} (dS \frac{\partial T}{\partial x}), \quad (9.93d)$$

gdzie  $a = \frac{\lambda}{c \varrho} \left[ \frac{m^2}{s} \right]$  jest wskaźnikiem przewodzenia temperatury (dla miękkiej stali  $a = 0,12 \cdot 10^4$ , dla aluminium  $a = 0,86 \cdot 10^4$ , a dla miedzi  $a = 1,14 \cdot 10^4 \left[ \frac{m^2}{s} \right]$ ). W ogólnym przypadku przeciwległe podstawy bryły elementarnej  $dS$  nie są sobie równe.

Jeśli przyjmiemy, że przepływ ciepła również występuje w kierunku osi  $y$  i osi  $z$  ( $dS = dydz$ ,  $dV = dx dy dz$ ), to całkowita ilość energii cieplnej idąca na ogrzanie elementarnej kostki  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  w jednostce czasu wyrazi się zależnością

$$\frac{dQ}{dt} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \frac{\partial T}{\partial z}) \right] dx dy dz,$$



a przy stałym  $\lambda$

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dx dy dz,$$

która z drugiej strony jest równa

$$\frac{dQ}{dt} = c \rho \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz.$$

Natomiast równanie (9.93d) przejdzie w zależność (9.93)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

lub krócej

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \operatorname{div} \operatorname{grad} T. \quad (9.93e)$$

Całkowaną ilość ciepła jaka przepłynie przez powierzchnię  $S$  [m<sup>2</sup>] w ciągu czasu  $t$  [h] oblicza się ze wzoru

$$Q = \int_S q t dS = q t S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S t. \quad (9.94)$$

Zatem ilość przewodzonego ciepła jest proporcjonalna do spadku temperatury  $T$ , czasu trwania  $t$  i pola przekroju  $S$  normalnego do kierunku przepływu ciepła.

Wymiana ciepła między ścianką a płynem lub odwrotnie odbywa się na drodze konwekcji i opisuje ją równanie Newtona

$$q = \alpha (T_s - T_p) = \alpha \Delta T, \quad (9.95)$$

gdzie  $\alpha$  jest współczynnikiem przejmowania ciepła o wymiarze [J/(m<sup>2</sup>·s·K)]. Ilość ciepła  $Q$  wymienioną w ciągu czasu  $t$  przez powierzchnię  $S$  drogą konwekcji oblicza się ze wzoru

$$Q_h = \alpha S t \Delta T. \quad (9.96)$$

Dla wymiany ciepła między ciałem stałym a otaczającym go powietrzem (gazem) współczynnik przejmowania ciepła jest obliczony ze wzoru

$$\alpha = \frac{q}{\Delta T} = \frac{q}{T_1 - T_2} \quad [W/m^2 \cdot K], \quad (9.97)$$

gdzie  $q$  jest strumieniem natężenia ciepła,  $\Delta T = T_1 - T_2$  jest różnicą temperatury ścianki i otoczenia względnie odwrotnie w zależności od kierunku przepływu ciepła. Równanie (9.97) otrzymujemy z przyrównania strumienia natężenia ciepła  $q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$  do strumienia  $q = \alpha (T_1 - T_2) = \alpha \Delta T$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \Delta T,$$

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\Delta T} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{q}{\Delta T},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\lambda} \Delta T = -\frac{\alpha}{\lambda} (T_1 - T_2).$$

Współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda$  możemy obliczyć ze wzoru

$$\lambda = \frac{Q \cdot x}{S \cdot t \cdot \Delta T} \quad [J/m \cdot s \cdot K]. \quad (9.98)$$

W zakresie temperatur od 273K do 573K  $\lambda$  wynosi:

- dla Cu  $\lambda \approx 366 [J/m \cdot s \cdot K],$
- dla Al  $\lambda \approx 203 [J/m \cdot s \cdot K],$
- dla Fe  $\lambda \approx 46 [J/m \cdot s \cdot K],$
- dla Zn  $\lambda \approx 99 [J/m \cdot s \cdot K],$
- dla powietrza w zakresie od 273÷1273K  $\lambda = 0,026 \pm 0,076 [J/m \cdot s \cdot K],$
- dla gliceryny w zakresie od 273÷413K  $\lambda = 0,28 \pm 0,29 [J/m \cdot s \cdot K],$
- dla szbestu w zakresie od 273÷523K  $\lambda = 0,157 \pm 0,175 [J/m \cdot s \cdot K].$

Gęstość  $\rho = \frac{m}{V} \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$  dla:

- stali miękkiej — 7850
- miedzi — 8930
- mosiądzu — 8440
- aluminium — 2690
- ołowiu — 11340
- wody w  $+10^\circ\text{C}$  — 999,73
- wody w  $-10^\circ\text{C}$  — 998,15

Ciepota właściwa  $c_w = \frac{dQ}{m \Delta T} \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg deg}} \right]$  dla:

- żelaza — 460,4
- stali miękkiej — 490
- stali konstrukcyjnej — 712
- miedzi — 385
- mosiądzu — 377
- aluminium — 896
- ołowiu — 126
- wody — 4180
- alkoholu — 2236

Współczynnik rozszerzalności liniowej  $\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta T} \left[ \text{K}^{-1} = \frac{1}{\text{deg}} \right]$  dla:

- czystego żelaza —  $1,1 \cdot 10^{-5}$
- stali —  $1,2 \cdot 10^{-5}$
- miedzi —  $1,7 \cdot 10^{-5}$
- mosiądzu —  $1,78 \cdot 10^{-5}$
- aluminium —  $2,22 \cdot 10^{-5}$
- ołowiu —  $2,829 \cdot 10^{-5}$
- betonu —  $1,2 \cdot 10^{-5}$
- porcelany —  $0,5 \cdot 10^{-5}$

W celu wyprowadzenia równania przewodzenia ciepła należy rozpatrzyć bilans energetyczny dopływu i odpływu ciepła do elementarnego prostopadłościanu  $(dx, dy, dz)$  w układzie współrzędnych  $x, y, z$ . Gdy w ciele wystąpią jeszcze wewnętrzne źródła energii (ciepła), to dla naszego elementu o objętości  $dV$  w odniesieniu do czasu  $dt$  można napisać bilans cieplny

$$dQ_d - dQ_o + dQ_w = dQ_z \quad (9.99)$$

gdzie  $dQ_d$  jest ciepłem doprowadzonym,  $dQ_o$  jest ciepłem odprowadzonym,  $dQ_w$  jest ciepłem wytworzonym przez wewnętrzne źródła,  $dQ_z$  jest ciepłem, które idzie na pracę zewnętrzną i na przyrost energii wewnętrznej ciała.

Dopływ  $dQ_d$  i odpływ  $dQ_o$  ciepła z elementu o objętości  $dV = dx dy dz$  wyrazi się zależnościami

$$dQ_d - dQ_o = - \frac{\partial q_1}{\partial x_1} dV dt = - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dV dt .$$

Ponieważ  $q = - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}$  a  $\frac{\partial q_x}{\partial x} = - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ , to

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) = - \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) .$$

Wprowadzając symbol Laplasjanu

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} ,$$

otrzymamy ostateczną zależność

$$dQ_d - dQ_o = \lambda \nabla^2 T dV dt . \quad (9.100)$$

Ciepło wytworzone przez wewnętrzne źródła energii w elemencie  $dV$  w czasie  $dt$  wyrazi się zależnością  $(dV = dx dy dz)$

$$dQ_w = q_w dV dt, \quad (9.101)$$

gdzie  $q_w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV} [J]$  jest generowanym ciepłem w jednostce objętości i czasu.

Ciepło idące na pracę zewnętrzną i na przyrost energii wewnętrznej jest równe przyrostowi entalpii elementu  $dV$  w czasie  $dt$ , gdyż jego temperatura ulega zmianie o  $\frac{\partial T}{\partial t} dt$ . Wyrazi się ono następująco:

$$dQ_z = c_w \rho \, dV \frac{\partial T}{\partial t} dt. \quad (9.102)$$

Przy stałym ciśnieniu  $p$  dla jednostkowej masy  $dm$  i jednostki czasu  $dt$  przyrost entalpii jest funkcją temperatury

$$dI = \left( \frac{\partial I}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial I}{\partial p} \right)_p dp = c_p dT,$$

gdzie  $dT$  jest przyrostem temperatury w czasie  $dt$  ( $\frac{dT}{dt} = \dot{T}$ ,  $I = \int_{T_0}^T c_p dT$ ). W elemencie  $dV$  ( $dm = \rho \, dV$ ) i w przestrzennym

układzie przyrost entalpii wyrazi się zależnością

$$dI = c_p \rho \, dV \frac{\partial T}{\partial t} dt.$$

Dokonując podstawienia zależności (9.100, 9.101, 9.102) do równania bilansu energii (9.99) i dzieląc przez  $dV \, dt$ , otrzymamy ogólne różniczkowe równanie przewodnictwa ciepła w izotropowym ciele z uwzględnieniem wewnętrznych źródeł ciepła

$$\frac{\lambda}{c\varphi} \nabla^2 T + \frac{q_w}{c\varphi} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (9.103)$$

gdzie  $\lambda$  jest przewodnością cieplną [ $J/(m \cdot s \cdot K)$ ],  $c$  jest ciepłem właściwym [ $J/(kg \cdot K)$ ],  $\varphi$  jest gęstością [ $kg/m^3$ ].

Jeśli przyjmiemy  $q_w = 0$  i współczynnik przewodzenia temperatury  $\alpha = \frac{\lambda}{c\varphi}$  [ $m^2/s$ ], to otrzymamy równanie różniczkowe cząstkowe typu parabolicznego drugiego rzędu

$$\alpha \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (9.104)$$

Dla ustalonego przepływu ciepła ( $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ) równanie (9.104) sprowadza się do równania Laplace'a

$$\nabla^2 T = 0, \quad (9.105)$$

a równanie (9.103) do równania Poissona

$$\nabla^2 T + \frac{q_w}{\lambda} = 0. \quad (9.106)$$

Dla jednowymiarowego i ustalonego przewodzenia ciepła równanie (9.105) sprowadza się do postaci

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{dT}{dx} = \text{const}, \quad (9.107)$$

a równanie (9.104) przyjmuje postać

$$\alpha \frac{\Delta^2 T}{\Delta x^2} = \frac{\Delta T}{\Delta t}. \quad (9.108)$$

Laplasjan  $\nabla^2 T$  we współrzędnych walcowych ma postać

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

a we współrzędnych kulistych

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}.$$

Jeśli współczynnik przewodnictwa cieplnego  $\lambda$  zależy od współrzędnych  $x, y, z$  ( $\lambda = \lambda(x, y, z)$  —  $dQ = q_i \, dV \, dt$ ), to wystąpi zmiana strumienia ciepła ( $\text{div } q_i = q_{i,i}$ ) względem współrzędnych  $x, y, z$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}) = \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}$$

i wówczas do równania (9.103) dochodzi jeszcze człon

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} = \lambda_{,i} T_{,i},$$

gdzie  $i = x, y, z$ .

Wymiana ciepła związana jest z jego transportem, a transport

- ze zmianą temperatury w elementach objętości  $\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}$   
 (wyrażenie  $\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}$  i zmiana temperatury w elemencie objętości  
 w czasie  $\frac{\partial T}{\partial t}$  stanowią pochodną materialną temperatury

$T(x_i, t) \text{ — } \frac{DT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}$ . Transport ciepła w ośrodku  
 uwzględnimy, jeśli do równania (9.103) dołączymy człon

$$- \rho c \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = - \rho c T_{,i} \cdot v_{x_i}^{\ell}$$

gdzie  $v_{x_i}^{\ell}$  jest lokalną prędkością strumienia ciepła,  
 $i = x, y, z$ . Zatem ogólne różniczkowe równanie energii elementarnego  
 prostopadłościanu będzie miało postać

$$\lambda \nabla^2 T + \lambda_{,i} T_{,i} + G_{ij} d\varepsilon_{ij} - \rho c T_{,i} v_{x_i}^{\ell} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (9.109)$$

gdzie  $G_{ij} d\varepsilon_{ij} = q_w = \rho c \Delta T$ .

Równanie różniczkowe energii (9.109) bezpośrednio wynika  
 z zależności

$$c \rho \frac{DT}{dt} = q_w - \frac{\partial}{\partial x_i} (-\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}), \quad (9.110)$$

gdzie  $\frac{DT}{dt}$  jest substancjalną zmianą temperatury w elemencie  
 prostopadłościennym poruszającym się,  $q_w$  jest źródłem energii,  
 $\frac{\partial}{\partial x_i} (-\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i})$  jest dywergencją strumienia ciepła

$$(\text{div } q_i = q_{i,i} = T \frac{ds}{dt} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}, \quad q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}).$$

Zmiana energii rozważanego elementarnego prostopadłościanu

$(c \rho \frac{DT}{dt})$  wynika z istnienia w nim wewnętrznych źródeł energii  
 $q_w$  i jego przewodnictwa cieplnego  $\frac{\partial}{\partial x_i} (-\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i})$  czyli dywergencji  
 strumienia ciepła. Rozpisując równanie (9.110) otrzyma-

my zależność

$$c \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = q_w + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2},$$

a po uporządkowaniu, otrzymujemy równanie (9.109)

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} + q_w - c \xi \frac{\partial T}{\partial x_1} v_1^2 = c \xi \frac{\partial T}{\partial t} .$$

#### 9.4.2. Sprzężenie pracy plastycznej z ciepłem

Przyjmuje się, że w procesie odkształcenia plastycznego ok. 90-95% pracy plastycznej  $L_p$  jest zamieniana na ciepło, reszta pracy plastycznej idzie na zmiany strukturalne metalu odkształcanego (energia defektów sieci). Można to zapisać (na jednostkę objętości)

$$(1 - \xi) L_p = Q, \quad (9.111)$$

gdzie  $\xi \cong 0,05-0,1$  jest współczynnikiem pochłaniania energii przez defekty sieci.

Jeżeli ciepło z układu nie jest ani odprowadzane ani nie jest doprowadzane (występują warunki adiabatyczne), to przyjmujemy, że cała praca plastyczna jest zmieniana na ciepło i odwrotnie, całe ciepło można zamienić na pracę plastyczną. Zależności te można zapisać na jednostkę objętości

$$L = Q, \quad i \quad Q = L, \quad (9.112a)$$

ponieważ praca i ciepło są wyrażone w dżulach J

$$(L = V \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T) d\varphi, \quad Q = m c \Delta T, \quad m = \xi V).$$

Zależność (9.112a) można wyrazić w przyrostach

$$dL = dQ. \quad (9.112b)$$

Przyjmując przyrost pracy plastycznej  $dL = \sigma_p d\varphi$  (dla skręcania  $dL = \tau d\varphi$ ,  $d\varphi = dtg\theta$ ), a przyrost ciepła  $dQ = \xi C dT$  możemy wyznaczyć przyrost temperatury  $dT$



$$\begin{aligned} \sigma_p d\varphi &= \xi c dT, \\ dT &= \frac{\sigma_p}{\xi c} \frac{d\varphi}{\sqrt{3}} \quad [K]. \end{aligned} \quad (9.113a)$$

Dla przypadku skręcania przyrost temperatury będzie równy

$$dT = \frac{\sqrt{3}}{\xi c} \tau \frac{d\varphi}{\sqrt{3}} \quad [K], \quad (9.113b)$$

gdzie  $\tau = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$ ,  $d\varphi = dtg\mu$ ,  $\varphi = tg\mu$ .

Dla jednoosiowego rozciągania przyrost pracy plastycznej wyraża się

$$dL_p = \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T) d\varphi, \quad (9.114a)$$

a całkowita praca plastyczna

$$L_p = \int_{V_0}^{\varphi} \int \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T) d\varphi dV, \quad (9.114b)$$

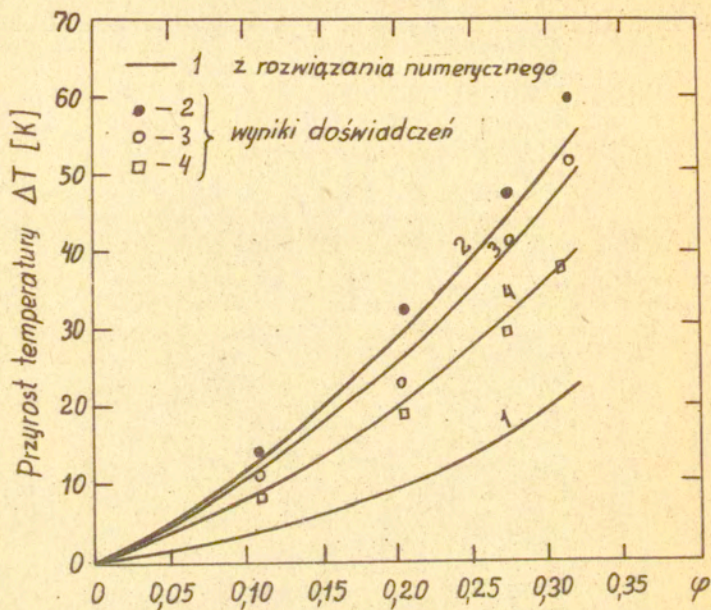
natomiast przyrost temperatury można wyrazić zależnością

$$dT = \frac{1-\xi}{\xi \cdot c} \int_0^{\varphi} \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T_0) d\varphi, \quad (9.114c)$$

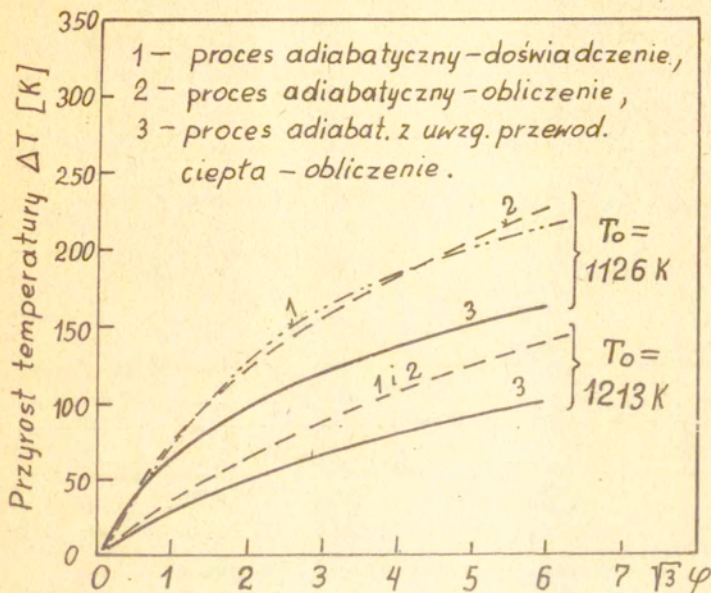
gdzie  $T_0$  jest temperaturą początkową,  $\xi = \text{const}$ ,  $c = \text{const}$ .

Na rysunku 9.52 pokazano zależność przyrostu temperatury  $\Delta T$  od odkształcenia  $\varphi$  dla ściskania stalowych próbek cylindrycznych o  $d_0 = 20$  mm,  $l_0 = 30$  mm z prędkością odkształcenia  $\dot{\varphi} \approx 1$  s<sup>-1</sup>. W obliczeniach  $\Delta T$  uwzględniono przewodzenie ciepła z próbki do płyt ścisających.

Na rysunku 9.53 pokazano zależność przyrostu temperatury  $\Delta T$  na powierzchni próbki od odkształcenia  $\sqrt{3}\varphi$  dla skręcania próbki walcowej wykonanej ze stopu tytanu (6%Al, 4%V i reszta Ti). Skręcanie przeprowadzano w temperaturze początkowej  $T_0 = 1126$ K i  $T_0 = 1213$ K. Wewnętrzne części próbki skręcanej są chłodniejsze, gdyż występuje tam mniejsze odkształcenie.



Rys. 9.52. Zależność przyrostu temperatury  $\Delta T$  od odkształcenia  $\varphi$  dla ściskanej cylindrycznej próbki stalowej:  $T_0 = 293\text{K}$ . Przyrost temperatury  $\Delta T$  odnosi się do środka próbki,  $r = 0$ , dla: 1 — styku próbki z płytami ściskającymi, 2 — w środku próbki, 3 i 4 — w punktach pośrednich między środkiem a płytą [16]



Rys. 9.53. Zależność przyrostu temperatury  $\Delta T$  od odkształcenia  $\sqrt{3}\varphi$  dla skręcania próbki walcowej wykonanej ze stopu tytanu. Prędkość odkształcania  $\sqrt{3}\dot{\varphi} = 10,5 \text{ s}^{-1}$  [16]

### 9.4.3. Konstrukcja związku fizycznego uwzględniającego temperaturę

#### 9.4.3.1. Związek fizyczny dla materiału sprężystego

Z zasady zachowania energii, która głosi, że przyrost w czasie energii wewnętrznej ( $\frac{dU}{dt} = \int_V \dot{U} dv$ ) i energii kinetycznej ( $\frac{dK}{dt} = \int_V \rho \mathcal{V}_i \dot{\mathcal{V}}_i dv$ ,  $K = \frac{\rho}{2} \int_V \mathcal{V}_i \mathcal{V}_i dv$ ) jest równy mocy sił zewnętrznych ( $D = \int_V x_i \mathcal{V}_i dv + \int_A p_i \mathcal{V}_i dA$ ,  $\mathcal{V}_i = \frac{du_i}{dt}$  jest wektorem prędkości przemieszczenia,  $p_i = \sigma_{ij} n_j$  jest wektorem

sił powierzchniowych na powierzchni A, X jest wektorem sił masowych) oraz absorbowanemu przez ciało ciepłu

$$\left(\frac{dQ}{dt} = - \int_V q_{1,1} dv\right)$$

$$\frac{d}{dt} (U+K) = D + \frac{dQ}{dt} \quad (9.115)$$

i następnie po wykorzystaniu równania ruchu  $\sigma_{ij,j} + x_i = \rho \dot{v}_i^l$

i zamiany całki powierzchniowej na całkę objętościową

$$\int_A p_i v_i^l dA = \int_A \sigma_{ij} n_j v_i^l dA = \int_V (\sigma_{ij} v_i^l)_{,j} dv = \int_V (\sigma_{ij} v_{i,j}^l + \sigma_{ij,j} v_i^l) dv,$$

otrzymujemy równanie na energię słuszną dla każdej objętości

$$(v_{1,j}^l = \frac{1}{2}(\dot{u}_{1,j} + \dot{u}_{j,1}) + \frac{1}{2}(\dot{u}_{1,j} - \dot{u}_{j,1}) = \dot{\epsilon}_{1j} + \dot{\omega}_{1j},$$

$$\sigma_{ij} \dot{\omega}_{1j} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{1j} = \frac{\partial \epsilon_{1j}}{\partial t}, \quad \dot{\omega}_{1j} = \frac{\partial \omega_{1j}}{\partial t})$$

$$\dot{U} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{1j} - q_{1,1} \quad (9.116)$$

Zasada zachowania energii dla materiałów rzeczywistych jest ograniczona przez drugie prawo termodynamiki. W prawie tym funkcją stanu ciała jest entropia S i temperatura T w [K].

W tym przypadku bilans entropii ma postać

$$T \frac{dS}{dt} = - \text{div } q_1 \quad \text{lub} \quad T \dot{S} = - q_{1,1} \quad (9.117)$$

Uwzględniając zależność (9.117) równanie energii (9.116) możemy napisać w prędkościach

$$\dot{U} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{1j} + T \dot{S} \quad (9.118a)$$

lub w przyrostach

$$dU = \sigma_{ij} d\epsilon_{1j} + T dS \quad (9.118b)$$

Wprowadzając w miejsce energii wewnętrznej  $U(\epsilon_{ij}, S)$  energię swobodną Helmholtza  $L = U - S T$ , zależną od zmiennych  $\epsilon_{ij}$  i  $T$  ( $dL = dU - SdT - TdS$ ,  $dL + SdT + TdS =$

$= \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + TdS$ ), otrzymamy związek

$$\dot{L} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - s \dot{T}. \quad (9.119)$$

Ponieważ różniczka zupełna energii swobodnej  $L$  jest równa

$$dL = \left(\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_T d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_\varepsilon dT,$$

lub

$$\dot{L} = \left(\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_T \dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_\varepsilon \dot{T}, \quad (9.120)$$

to z porównania równań (9.119 i 9.120) wynikają bardzo ważne zależności

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad s = - \frac{\partial L}{\partial T}. \quad (9.121)$$

Energia swobodna w stanie równowagi termodynamicznej osiąga minimum i o ile jest spełnione prawo Hooke'a, to energia swobodna w procesie izotermicznym jest określona równaniem

$$L = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (9.122)$$

Uogólnione prawo Hooke'a ma postać

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

i po podstawieniu jego do równania (9.122) i wykorzystaniu zależności  $\lambda = K - \frac{2}{3} G$  ( $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  jest modułem ścisłości,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  jest modułem odkształcenia postaciowego,  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  jest stałą Lamego), otrzymujemy równanie na energię swobodną w postaci

$$L = G \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right)^2 + \frac{1}{2} K \varepsilon_{kk}^2. \quad (9.123)$$

Interesuje nas sprzężenie temperaturowe, które w tym przypadku wywołane jest zmianą ciśnienia.

Zewnętrzne pole naprężeń wywołuje pojawienie się w materiale tensora kulistego naprężenia  $\sigma_{kk}$ , który z tensorem kulistym

odkształcenia  $\epsilon_{kk}$  dają pracę zamienioną na ciepło

$$- \sigma_{kk} \epsilon_{kk} = - 3K \alpha \Delta T \epsilon_{kk},$$

gdzie  $\sigma_{kk} = 3K \epsilon_{kk}$  jest prawem sprężystej zmiany objętości materiału,  $\epsilon_{kk} = \alpha \Delta T$  jest zmianą odkształcenia sprężystego wywołanego temperaturą.

Energia swobodna (9.123) po uwzględnieniu temperatury przyjmie postać

$$L = G(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij})^2 + \frac{1}{2} K \epsilon_{kk}^2 - 3K \alpha \Delta T \epsilon_{kk}, \quad (9.124)$$

gdzie  $\Delta T = T - T_0$ ,  $\alpha$  jest współczynnikiem rozszerzalności liniowej. Korzystając z zależności

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial L}{\partial \epsilon_{ij}},$$

otrzymamy prawo Hooke'a, uwzględniające temperaturę

$$\sigma_{ij} = 2G(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij}) + K(\epsilon_{kk} \delta_{ij} - 3\alpha \Delta T). \quad (9.125)$$

Związek odwrotny do równania (9.125) ma postać

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij}) + \alpha \Delta T \delta_{ij}. \quad (9.126)$$

Rozwijając równanie (9.126) względem  $x, y, z$ , otrzymamy następujące składowe odkształceń:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha \Delta T, \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha \Delta T, \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha \Delta T. \end{aligned} \quad (9.127)$$

Związki fizyczne (9,127) mogą być zapisane w przyrostach ( $d\varepsilon$ ,  $d\varepsilon^e$ ,  $dT$ ).

#### 9.4.3.2. Związek fizyczny dla materiału sprężysto-plastycznego

Dla materiału sprężysto-plastycznego przyrost odkształcenia  $d\varepsilon_{ij}$  jest równy sumie przyrostu sprężystego  $d\varepsilon_{ij}^e$ , przyrostu wywołanego temperaturą  $d\varepsilon_{ij}^T$  i przyrostu plastycznego  $d\varepsilon_{ij}^P$

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^T + d\varepsilon_{ij}^P . \quad (9.128)$$

Przyrost odkształcenia sprężystego  $d\varepsilon_{ij}^e$  wyraża się zależnością

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \left( d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} d\sigma_{kk} \delta_{ij} \right) , \quad (9.129)$$

a krócej można go zapisać w postaci

$$d\varepsilon_{ij}^e = H_{ijkl} d\sigma_{kl} , \quad (9.130)$$

gdzie  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  jest modułem ścinania,  $\nu$  jest liczbą Poissona,  $\delta_{ij}$  jest deltą Kroneckiera,

$$H_{ijkl} = \frac{1+\nu}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} \text{ jest tensorem.}$$

Przyrost odkształcenia wywołany temperaturą  $d\varepsilon_{ij}^T$  zależy od współczynnika rozszerzalności cieplnej  $\alpha$  i przyrostu temperatury  $dT$  i ogólnie może być zapisany następująco:

$$d\varepsilon_{ij}^T = \delta_{ij} \alpha dT . \quad (9.131)$$

Plastyczny przyrost odkształcenia  $d\varepsilon_{ij}^P$  wyznaczamy z funkcji płynięcia  $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, T) = 0$  wyrażonej w postaci różniczkowej

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial T} dT = 0 \quad (9.132)$$

i stowarzyszonego prawa plastycznego pływnięcia

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (9.133)$$

Po wprowadzeniu równania (9.133) do funkcji (9.132) wyznaczamy współczynnik proporcjonalności

$$d\lambda = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} d\sigma_{pq} + \frac{\partial f}{\partial T} dT}{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{mn}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}} \quad (9.134)$$

który wstawiony do prawa (9.133) pozwala wyznaczyć plastyczny przyrost odkształcenia

$$d\varepsilon_{ij}^p = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} d\sigma_{pq} + \frac{\partial f}{\partial T} dT}{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{mn}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (9.135)$$

Całkowity przyrost odkształcenia (9.128) wyrazi się zależnością

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} d\sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \delta_{ij} \alpha dT + h \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} d\sigma_{pq} + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (9.136)$$

gdzie 
$$h = - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{mn}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}} .$$

Związek fizyczny (9.136) trafnie opisuje własności materiałów sprężysto-plastycznych. Przy rozwiązywaniu zagadnień praktycznych często zachodzi potrzeba korzystania z odwrot-



nych związków fizycznych wyrażających składowe przyrostu tensora naprężenia przez składowe przyrostu tensora odkształcenia.

Związek fizyczny (9.136) można napisać w postaci

$$d\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \alpha dT - h \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} d\sigma_{pq} + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = H_{ijkl} d\sigma_{kl},$$

a przyrost naprężenia - następująco:

$$d\sigma_{pq} = \frac{d\varepsilon_{ij}^p - h \frac{\partial f}{\partial T} dT \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}.$$

Zależności te tworzą poszukiwany związek fizyczny

$$d\sigma_{kl} = d\varepsilon_{ij} H_{ijkl}^{-1} - \delta_{ij} \alpha dT H_{ijkl}^{-1} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (d\varepsilon_{mn}^p - h \frac{\partial f}{\partial T} dT \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}})}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}} H_{ijkl}^{-1} +$$

$$- h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial T} dT H_{ijkl}^{-1}, \quad (9.137)$$

który po rozpisaniu tensora  $H_{ijkl}^{-1}$  i obliczeniu będzie miał ostateczną postać

$$d\sigma_{kl} = 2G \left( d\varepsilon_{kl} + \frac{\nu}{1-2\nu} d\varepsilon_{ii} \delta_{kl} \right) - 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \delta_{kl} \alpha dT +$$

$$- 2G \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ii}} \delta_{kl} \right) \left[ \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} d\varepsilon_{mn}^p - h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial T} dT}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}} + \right.$$

$$\left. + h \frac{\partial f}{\partial T} dT \right]. \quad (9.138)$$

## 9.5. Hipotezy wzmocnienia metali

Umocnieniem lub wzmocnieniem metalu nazywamy wzrost granicy plastyczności, wytrzymałości na rozciąganie i twardości, wywołany wzrostem odkształcenia plastycznego ( $\sigma_p = \sigma_p(\epsilon_p)$ ). Dla jednoosiowego rozciągania, obciążenie próbki do pewnej wartości  $\epsilon_p$  i odciążenie jej do zera lub innej wartości naprężenia i następnie ponowne obciążenie próbki powoduje wzrost granicy plastyczności. Dla złożonych stanów naprężenia mamy do czynienia ze zmianą powierzchni płynięcia w trakcie procesu odkształcania. Początkowa powierzchnia płynięcia może rozszerzać się lub zmieniać położenie.

Warunek plastyczności Treski i Hubera-Misesa może być stosowany tylko dla materiału idealnie plastycznego, dla którego przyrost naprężenia  $d\sigma_{1j}$  jest niemożliwy. Materiał idealnie plastyczny płynie przy stałym naprężeniu, wzrost obciążenia powoduje jedynie zmianę składowych naprężenia stale pozostających na powierzchni. Obciążenia takie nazywamy neutralnymi. Rzeczywiste metale wykazują jednak wzmocnienie. Uwzględnienie efektu wzmocnienia w obliczeniach jest podstawowym problemem współczesnej teorii plastyczności metali. Ujęcie, w formie matematycznej, rzeczywistego stanu naprężenia dla materiału ulegającego wzmocnieniu jest niemożliwe ze względu na złożony przebieg procesu. Zagadnienia te opisać można za pomocą uproszczonych zależności zwanych hipotezami wzmocnienia. Hipotez wzmocnienia jest kilka, ale największe znaczenie praktyczne dla analizy procesów obróbki plastycznej mają trzy hipotezy:

1. hipoteza wzmocnienia izotropowego,
2. hipoteza wzmocnienia kinematycznego.

### 3. hipoteza wzmocnienia mieszanego (izotropowo-kinematyczna).

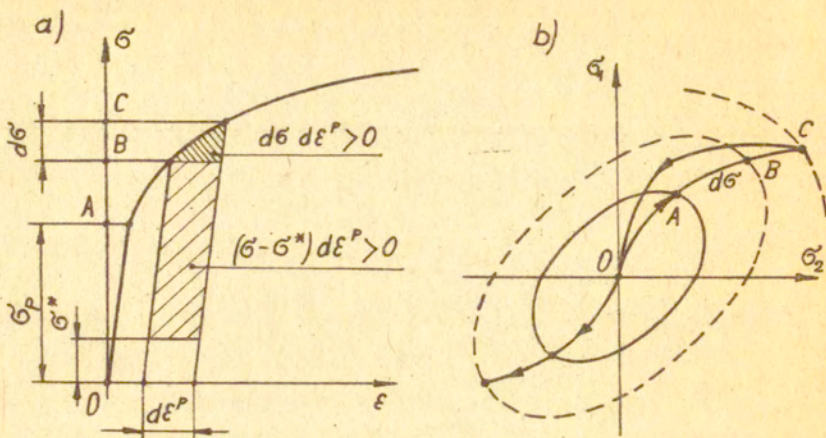
Wiele prac doświadczalnych poświęcono hipotezie poślizgów. Jedni autorzy stwierdzają, a inni nie stwierdzają istnienia naroży na powierzchni płynięcia po wstępnym obciążeniu wynikających z teorii poślizgów.

#### 9.5.1. Wzmocnienie izotropowe

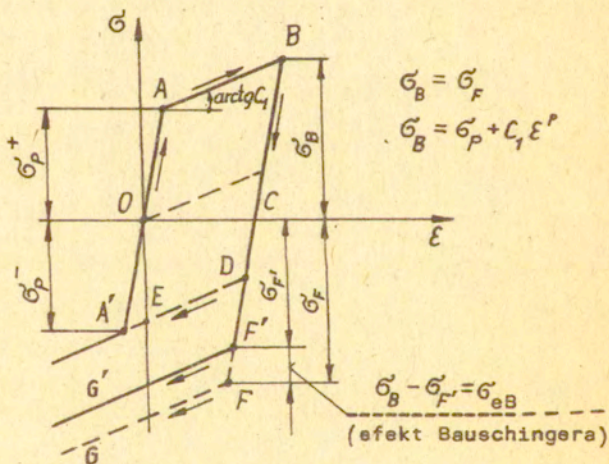
Najbardziej rozpowszechnionym podejściem do uwzględnienia wzmocnienia metali jest założenie o izotropowym rozszerzaniu początkowej powierzchni plastycznego płynięcia. A zatem, wzmocnienie izotropowe metalu polega na tym, że początkowa powierzchnia plastycznego płynięcia  $f(\sigma_{ij}) = 0$ , dla złożonego stanu naprężenia w trakcie procesu obciążania (odkształdzenia) ulega proporcjonalnemu rozszerzeniu, zachowując swój kształt i środek układu współrzędnych. Początkowa elipsa plastyczności Hubera-Misesa (rys. 9.5.4) rozszerza się tylko nie zmieniając swego położenia na płaszczyźnie naprężeń  $\sigma_1, \sigma_2$ . W punkcie A występuje pierwsze uplastycznienie materiału, dalsze obciążanie poza granicę plastyczności, odciążanie i ponowne obciążanie powoduje wzrost granicy plastyczności do punktu B i następnie do punktu C.

Hipotezę wzmocnienia izotropowego zaproponował L. Prandtl (1928 r.), a rozwinął ją G.J. Taylor i H. Quinney (1931 r.) i następnie F.K.G. Odquist (1933 r.).

Teoria wzmocnienia izotropowego materiału pomija efekt Bauschingera, którego istotę pokazano na rysunku 9.5.5. Krzywa  $\sigma-\epsilon$  dla jednoosiowego rozciągania i następnie ściskania powinna przebiegać zgodnie z linią OABCDGFG jednak



Rys. 9.5 4. Idea wzmocnienia izotropowego: a - jednoosiowe rozciąganie, b - złożony stan naprężenia



Rys. 9.5 5. Ilustracja efektu Bauschingera

rzeczywisty wykres biegnie wzdłuż linii OABCF<sup>o</sup>G<sup>o</sup>. Efektem Bauschingera nazywamy obniżenie granicy plastyczności przy zmianie znaku obciążenia powodującego uplastycznienie metalu  $\sigma_{eB} = \sigma_B - \sigma_F$ .

Pomimo zaniedbania efektu Bauschingera teoria wzmocnienia izotropowego dla zastosowań praktycznych daje lepsze przybliżenie wyników niż inne teorie wzmocnienia. Badanie wzmocnienia izotropowego przeprowadzane jest na próbkach rurokowych i na próbkach płaskich o różnym wstępnym odkształceniu.

Dla złożonego stanu naprężenia, dla materiału wykazującego wzmocnienie izotropowe ogólnie warunek plastyczności można zapisać w postaci

$$f(\sigma_{ij}, \alpha) = 0 \quad (9.139a)$$

lub w formie różniczkowej

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0, \quad (9.139b)$$

gdzie  $\alpha$  jest skalarnym parametrem wzmocnienia izotropowego powodującym stopniowe rozszerzanie się powierzchni płynięcia. Natomiast warunek plastyczności Hubera-Misesa wyrazi się następująco:

$$\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - k^2(\alpha) = 0, \quad (9.140)$$

a warunek plastyczności Treski

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_j| \} = 2k(\alpha). \quad (9.141)$$

Równania (9.140 i 9.141) są jednoparametrowymi prawami wzmocnienia.

Parametr  $\alpha$  w zależności od przyjętej hipotezy może być pracą odkształcenia plastycznego, zużytą na odkształcenie jednostki objętości materiału od początku procesu

$$\partial l = L^P = \int_0^{\xi_{1j}^P} \sigma_{1j} d\xi_{1j}^P, \quad (9.142)$$

albo intensywnością plastycznych odkształceń postaciowych

$$\partial l = \xi_1^P = \int_0^{\xi_{1j}^P} d\xi_1^P, \quad (9.143)$$

gdzie  $d\xi_1^P = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{d\xi_{1j}^P d\xi_{1j}^P}$  jest przyrostem intensywności odkształceń postaciowych. Obie hipotezy spełniają warunek; jeśli  $\xi_{1j}^P = 0$ , to  $\partial l = 0$ . Przyrost parametru wzmocnienia izotropowego  $d\partial l$  można zapisać przy pomocy rachunku macierzowego

$$d\partial l = \{\sigma\}^T \{d\xi^P\} = \sigma_1 d\xi_1^P + \sigma_2 d\xi_2^P + \dots, \quad (9.144a)$$

a przy zastosowaniu prawa plastycznego płynięcia

$$\{d\xi^P\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\},$$

wyrazi się on następującą zależnością:

$$d\partial l = d\lambda \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}. \quad (9.144b)$$

Jeśli przyjmiemy prawo wzmocnienia  zależne od odkształcenia plastycznego  $\xi_{1j}^P$

$$f(\sigma_{1j}, \xi_{1j}^P) = 0 \quad (9.145a)$$

zróżniczkowane względem czasu

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{1j}} \dot{\sigma}_{1j} + \frac{\partial f}{\partial \xi_{1j}^P} \dot{\xi}_{1j}^P = 0 \quad (9.145b)$$

i uwzględnimy w nim prawo potencjału plastycznego

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (9.146)$$

to wyznaczmy z niego funkcję skalarną  $\lambda$  zależną od naprężenia i od historii obciążenia

$$\lambda = \left| - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{kl}^P}} \right|. \quad (9.147)$$

Dla materiału ulegającego wzmocnieniu  $f(\sigma_{ij}, \mathcal{H}) = 0$  i procesu obciążenia  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}^P > 0$  parametr  $\lambda > 0$ , gdyż wynika to z postulatu D.C. Druckera

$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \geq 0$ . Wprowadzając oznaczenie

$$h = \left| - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{kl}^P}} \right|,$$

prawo plastycznego płynięcia (9.146) uwzględniające wzmocnienie izotropowe będzie miało postać

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}. \quad (9.148)$$

Dla materiału sprężysto— idealnie plastycznego związek fizyczny opisujący wzmocnienie izotropowe będzie miał postać

$$\dot{\epsilon}_{ij} = H_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}, \quad (9.149)$$

gdzie  $H_{ijkl} = \frac{1+\nu}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl}$ .

Związek (9.149) można zapisać krócej





$$\{d\sigma\} = [D^e] \left( \{d\varepsilon\} - d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \right) \quad (9.152)$$

i podstawimy go do równania (9.139b) zapisanego macierzowo

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} d\lambda = 0 \quad (9.153)$$

i uwzględnimy w nim zależność (9.144b), to otrzymamy równanie

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e] \left( \{d\varepsilon\} - d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \right) + d\lambda \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0,$$

z którego wyznaczymy

$$d\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e] \{d\varepsilon\}}{A + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}}, \quad (9.154)$$

gdzie  $A = - \frac{\partial f}{\partial \lambda} \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}.$

Następnie wprowadzając zależność (9.154) do równania (9.152) otrzymamy macierz sprężysto-plastyczną uwzględniającą wzmocnienie i stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia

$$[D^{ep}] = [D^e] - \frac{[D^e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e]}{A + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}}. \quad (9.155)$$

Parapetr  $A$  wyznacza się z warunku plastyczności, a parametr wzmocnienia  $\lambda$  z próby jednoosiowego rozciągania.

Dla powierzchni plastyczności z punktami osobliwymi ulegającej wzmocnieniu izotropowemu o równania  $f(\sigma_{ij}, \lambda) = 0$  i ważnym prawie  $\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}}$  ( $\alpha=1,2,\dots$ ) związek uwzględniający wzmocnienie (rys. 9.5 7) będzie miał postać

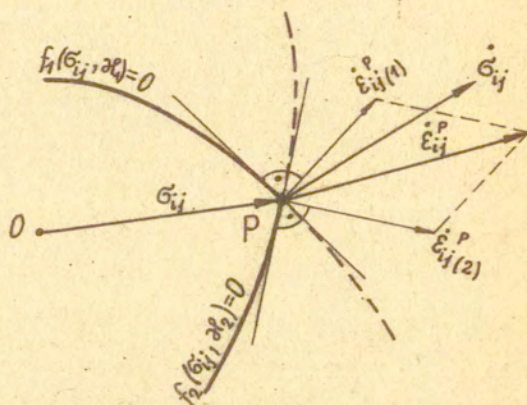
$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \sum_{\alpha} c_{\alpha} h_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}, \quad (9.156)$$

gdzie  $c_\alpha = 0$  dla procesu sprężystego i procesu odciążenia,

$c_\alpha = 1$  dla procesu obciążenia ( $f_\alpha = 0, \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \geq 0$ ),

$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \dot{\epsilon}_{ij(1)}^P + \dot{\epsilon}_{ij(2)}^P$ ,  $h_\alpha$  są funkcjami dodatnimi zależnymi

od stanu naprężenia i historii obciążenia.



Rys. 9.5.7. Interpretacja graficzna związku fizycznego (9.156)

W zależności od drogi wstępnego odkształcenia plastycznego (materiału przeznaczanego na próbkę do wyznaczania powierzchni płynięcia) np. drogi OAO na rysunku 9.58 lub drogi OBO na rysunku 9.59 wyznaczone powierzchnie płynięcia rozszerzają się, przesuwają i obracają się. Przesunięcie lub obrót występuje w kierunku wstępnego obciążenia materiału.

Powierzchnie płynięcia wyznaczone są dla odpowiednich wartości intensywności trwałych odkształceń postaciowych

$$\Delta \epsilon_i^P = \sqrt{\frac{1}{6} \left[ (\Delta \epsilon_t - \Delta \epsilon_z)^2 + (\Delta \epsilon_z - \Delta \epsilon_h)^2 + (\Delta \epsilon_h - \Delta \epsilon_t)^2 \right]}$$

$$\epsilon_i^P = \sum \Delta \epsilon_i^P$$

i intensywności naprężeń

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{6} \left[ (\sigma_t - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_h)^2 + (\sigma_h - \sigma_t)^2 \right]},$$

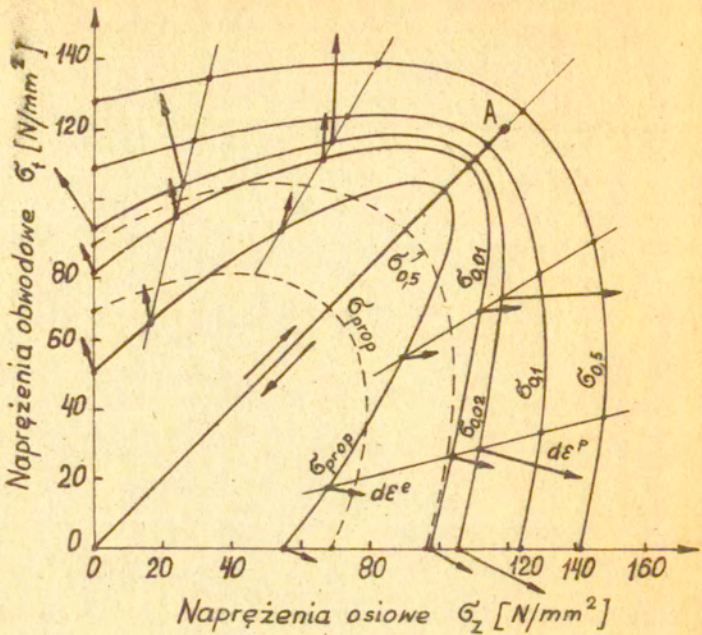
gdzie indeks  $h$  oznacza wielkość w kierunku grubości ścianki,  $z$  — w kierunku długości próbki,  $t$  — w kierunku obwodu. Przyrost odkształcenia na grubości ścianki próbki  $\Delta \varepsilon_h$  był obliczany przy przyjęciu warunku nieściśliwości materiału

$$\Delta \varepsilon_z + \Delta \varepsilon_t + \Delta \varepsilon_h = 0.$$

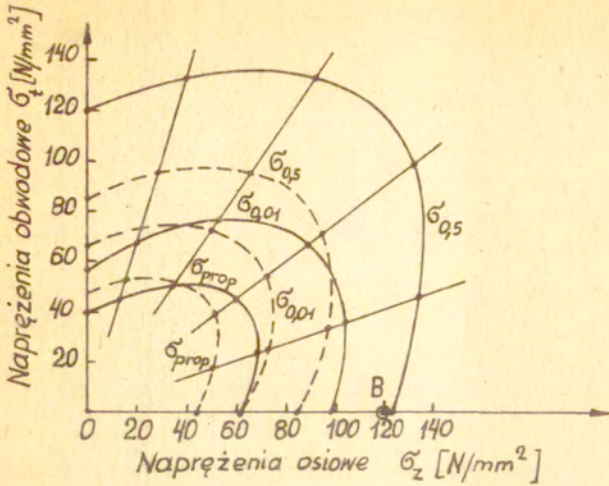
Naprężenie  $\sigma_h$  po grubości ścianki próbki rurkowej, wywołane ciśnieniem oleju  $p$ , przyjmowano jako średnie  $\sigma_h = -\frac{p}{2}$  (na powierzchni zewnętrznej  $\sigma_h = 0$ , a na powierzchni wewnętrznej  $\sigma_h = -p$ ). Powierzchnia oznaczona symbolem np.  $\sigma_{0,02}$  odpowiada naprężeniom wywołującym intensywność odkształceń  $\varepsilon_1^p = 0,02\%$ . Tak otrzymane wartości naprężeń nanoszone są na płaszczyznę  $\sigma_t \sigma_z$  w postaci szeregu punktów położonych na wspólnej prostej przedstawiającej drogę obciążenia danej próbki.

Przy zastosowaniu złożonej drogi wstępnego odkształcenia (rys. 9.60) otrzymujemy powierzchnię płynięcia taką, jaką otrzymuje się przy zastosowaniu tylko ostatniej drogi obciążenia, o ile jest ona dostatecznie duża. Ten ostatni odcinek drogi obciążenia OEO (rys. 9.60) lub odcinek drogi OCO (rys. 9.61) likwiduje skutki wywołane w materiale przez poprzednie obciążenie. Znaczący to, że materiał zapomina o swej historii obciążenia i zachowuje się tak, jak byłby obciążony tylko tym ostatnim wstępnym obciążeniem.

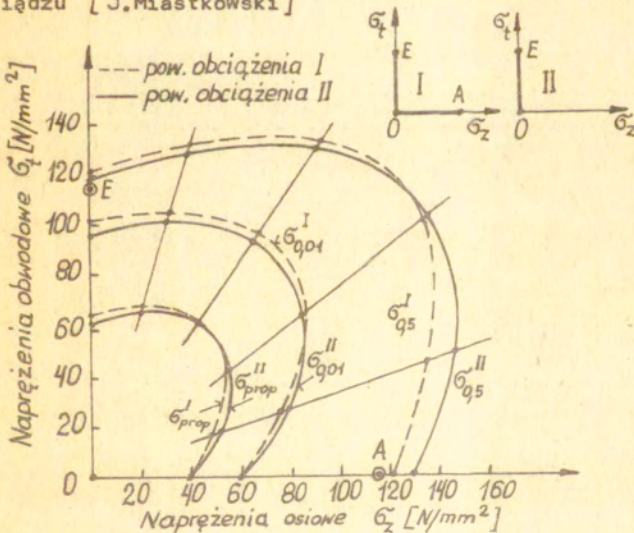
Efektmem pamięci materiału nazywamy zdolność do zapamiętania przez materiał w czasie jego deformacji całej poprzedniej historii odkształceń, jakich doznał materiał. Badania zagadnienia efektu pamięci materiału zapoczątkował J. Maślowski



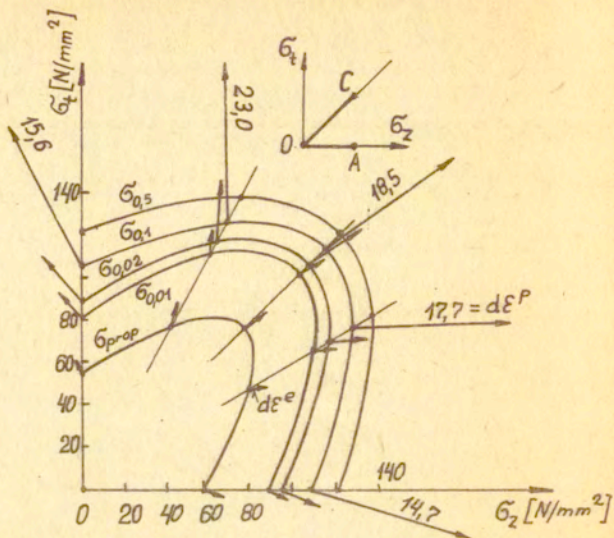
Rys. 9.58. Wpływ wstępnego odkształcenia plastycznego zrealizowanego na drodze OAO na kształt powierzchni plastyczności mosiądzu M63. Liniami cienkimi przerywanymi zaznaczono powierzchnie plastyczności dla mosiądzu nie odkształconego wstępnie [J. Miastkowski]



Rys. 9.59. Wpływ odkształcenia plastycznego zrealizowanego na drodze OBO (oś z) na kształt i przesunięcie powierzchni plastyczności mosiądzu M63' (CuZn37) (próbki rurkowe o  $\varnothing$  30mm i grubości ścianki 1 mm). Liniami cienkimi przerywanymi oznaczono powierzchnię plastyczności nieodkształconego wstępnie tego mosiądzu [J.Miastkowski]



Rys. 9.60. Powierzchnie plastyczności po wstępnym odkształceniu: linia przerywana - odkształcenie wstępne próbki na drodze OAGEO; linia ciągła - odkształcenie wstępne próbki na drodze OEO. Materiał: Mosiądz M63 [J.Miastkowski]



Rys. 9.61. Powierzchnie plastyczności po wstępnym odkształceniu na drodze OAOCO. Mosiądz M63. [ J.Miastkowski ]

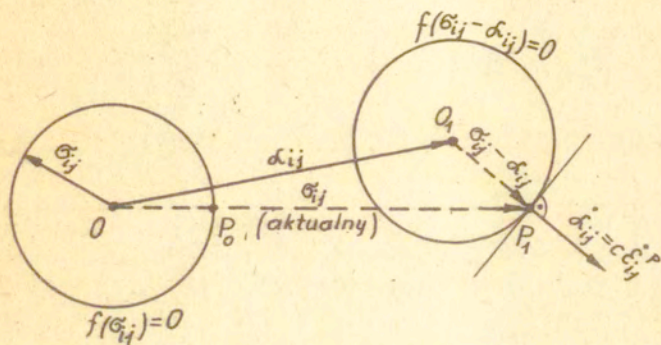
w 1966r. Badania

Doświadczalne przeprowadzono na cienkościennych próbkach rurkowych wykonanych z mosiądzu M-63 (CuZn 37) lub próbkach płaskich. Teoretyczny opis efektu pamięci materiału przeprowadza się w oparciu o hipotezę kinematycznego wzmocnienia.

9.5.2. Wzmocnienie kinematyczne

Jednoczesne uwzględnienie zjawiska umocnienia i efektu Bauschingera do opisywania odkształcania metali zaproponował E.Melan w 1938 r. i niezależnie A.Izliński w 1954 r. i W.Prager w 1955 r. Teoria ta została zmodyfikowana przez R.T. Shiela i H.Zieglera (1958 r.) oraz przez Ju.I.Kadaszewicza i W.W.Nowożyłowa (1958 r.). Podejścia te zostały nazwane wzmocnieniem kinematycznym. Teoria wzmocnienia kinematycznego zakłada, że powierzchnia plastyczności w przestrzeni

naprężeń ulega pod wpływem odkształceń plastycznych przesunięciu jak ciało sztywne, nie zmieniając ani kształtu ani rozmiarów. Hipoteza ta pomija znane zjawisko zmiany wymiarów początkowej powierzchni płynięcia wraz ze wzrostem odkształceń plastycznych. Na rysunku 9.62 pokazano zasadę wzmocnienia kinematycznego.



Rys. 9.62. Idea wzmocnienia kinematycznego

Wzmocnienie kinematyczne nazywane jest również wzmocnieniem anizotropowym, ponieważ zachodzi ono w kierunku odkształcenia. Własności materiału zależą od kierunku odkształcenia, a więc materiał izotropowy staje się anizotropowym w czasie procesu odkształcenia.

Dla złożonego stanu naprężenia ogólny warunek plastyczności uwzględniający wzmocnienie kinematyczne ma postać

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = 0, \quad (9.157)$$

gdzie  $\alpha_{ij}$  jest tensorem translacji współrzędnych środka początkowej powierzchni płynięcia  $f(\sigma_{ij}) = 0$ . Tensor  $\alpha_{ij}$  posiada cechy tensora  $\sigma_{ij}$ . Składowe tensora translacji  $\alpha_{ij}$

muszą być tak określone, aby były równe zeru, gdy nie ma odkształceń plastycznych. Dla wzmocnienia liniowego przyjmujemy, że składowe przyrostu przemieszczenia  $d\alpha_x, d\alpha_y, \dots$   $d\alpha_{zx}$  są proporcjonalne do składowych przyrostu odkształcenia  $c d\varepsilon_x, c d\varepsilon_y, \dots c d\varepsilon_{zx}$ , co ogólnie można zapisać

$$d\alpha_{ij} = c d\varepsilon_{ij}^P. \quad (9.158a)$$

Zrózniczkowany przyrost tensora translacji  $d\alpha_{ij}$  względem czasu  $dt$  daje prędkość tensora translacji

$$\dot{\alpha}_{ij} = c \dot{\varepsilon}_{ij}^P, \quad (9.158b)$$

który jest wektorem prostopadłym do powierzchni plastycznego płynięcia. Scałkowanie zależności (9.158b) daje równanie

$$\alpha_{ij} = c \varepsilon_{ij}^P. \quad (9.158c)$$

Warunek plastyczności (9.157) zapisany w formie różniczkowej ma postać

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\alpha}_{ij}) = 0, \quad (9.159a)$$

a w zapisie macierzowym ma postać

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{ d\sigma - d\alpha \} = 0. \quad (9.159b)$$

Jeśli w równaniu (9.158b) uwzględnimy stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia i wprowadzimy go do równania (9.159a), to wyznaczmy parametr

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} c \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} &= 0, \\ \lambda &= \frac{1}{c} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}. \end{aligned} \quad (9.160)$$

Zatem związek fizyczny (prawo potencjału plastycznego), uwzględniający wzmocnienie kinematyczne, wyrazi się zależnością



$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \frac{1}{c} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \dot{\sigma}_{rs}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (9.161)$$

Jeśli wprowadzimy oznaczenie

$$A_{ijrs} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}}} \quad (9.162a)$$

i obliczymy go dla warunku Hubera-Misesa  $f = s_{ij} s_{ij} - 2k^2$   
 $(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 2 s_{ij})$

$$A_{ijrs} = \frac{2s_{rs} 2s_{ij}}{2s_{rs} 2s_{rs}} = \frac{s_{ij} s_{rs}}{2k^2}, \quad (9.162b)$$

to prawo (9.161) w dwiatorach wyrazi się zależnością

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \frac{1}{c} \frac{s_{ij} s_{rs}}{2k^2} \dot{s}_{rs} \quad (9.163)$$

A. Iszliński zaproponował warunek plastyczności Hubera-Misesa dla opisu wzmocnienia kinematycznego w postaci

$$(s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) = 2k^2, \quad (9.164)$$

gdzie  $\alpha_{ij} = c \varepsilon_{ij}$ ,  $k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$ ,  $c$  jest stałą materiałową.

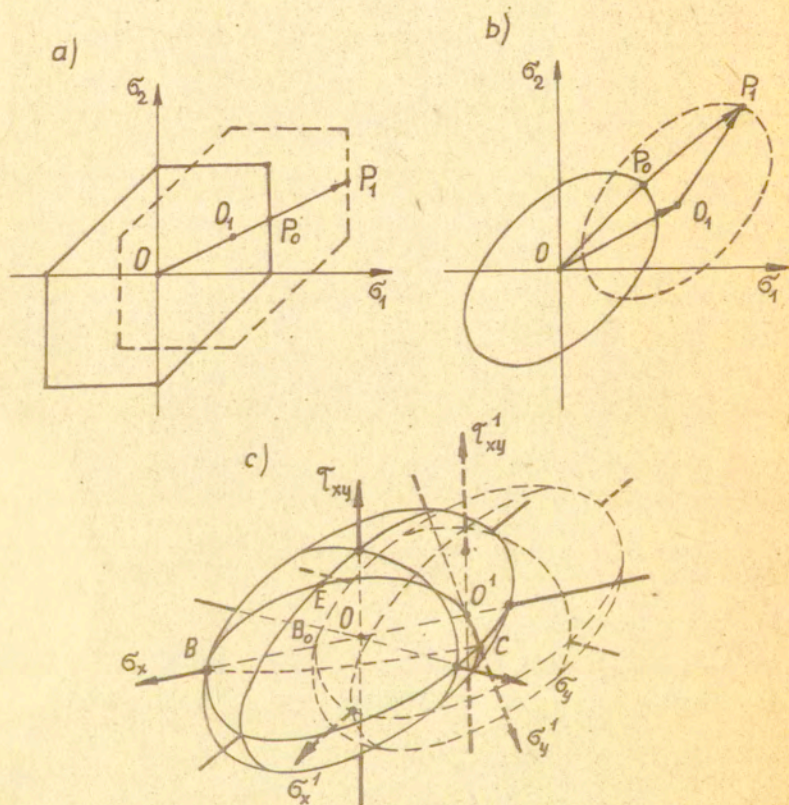
Podobny związek również zaproponowali R. Shield i H. Ziegler (1958 r.) wychodząc z koncepcji W. Pragera (9.157). Natomiast warunek plastyczności Treski można zapisać następująco:

$$\max \left\{ |(\sigma_1 - \alpha_1) - (\sigma_j - \alpha_j)| \right\} = 2k. \quad (9.165)$$

Warunek plastyczności (9.164) w rozwinięciu ma postać

$$\begin{aligned} & [(\sigma_{11} - c\varepsilon_{11}) - (\sigma_{22} - c\varepsilon_{22})]^2 + [(\sigma_{22} - c\varepsilon_{22}) - (\sigma_{33} - c\varepsilon_{33})]^2 + \\ & + [(\sigma_{33} - c\varepsilon_{33}) - (\sigma_{11} - c\varepsilon_{11})]^2 + 6[(\sigma'_{12} - c\varepsilon'_{12})^2 + (\sigma'_{23} - c\varepsilon'_{23})^2 + \\ & + (\sigma'_{31} - c\varepsilon'_{31})^2] = 6k^2. \end{aligned}$$

Dla jednoosiowego rozciągania —  $\sigma_{11} = \sigma$ ,  $\varepsilon_{11} = \varepsilon^p$ ,  $k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$ ,  
 $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{1}{2} \varepsilon^p$  — naprężenie rozciągające będzie równe  
 $\sigma = \sigma_p^0 + \frac{3}{2} c \varepsilon$ .



Rys. 9.63. Przykłady wzmocnienia kinematycznego:

- a - przesunięcie sześcioboku Treski na płaszczyźnie  $\sigma_1\sigma_2$ ,
- b - przesunięcie elipsy Hubera-Misesa na płaszczyźnie  $\sigma_1\sigma_2$ ,
- c - przesunięcie elipsoidy Hubera-Misesa w kierunku osi  $\sigma_x$  (materiał odkształcony tylko naprężeniami  $\sigma_x$ )

Dla płaskiego stanu naprężenia  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ,  
 $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0$ ,  $\varepsilon_z = -(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ ,  $\varepsilon_x = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_y = -0,5 \varepsilon$   
 po wstępnym odkształceniu naprężeniami jednoosiowymi  $\sigma_x$ ,  
 otrzymamy równanie

$$\left(\sigma_x - \frac{3}{2}c\varepsilon\right)^2 - \left(\sigma_x - \frac{3}{2}c\varepsilon\right)\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = 3k^2.$$

Równanie to odpowiada przesunięciu elipsoidy (rys. 9.63c)  
 w kierunku osi  $\sigma_x$  o odcinek  $\frac{3}{2}c\varepsilon = \sigma - \sigma_p$ .

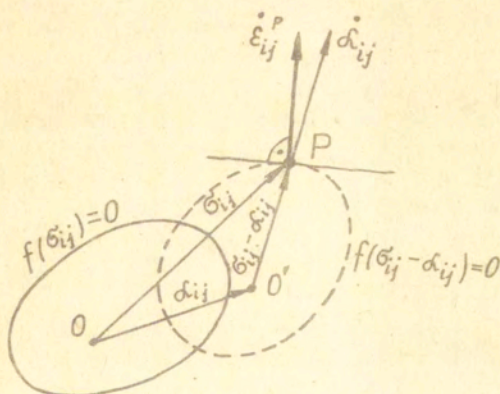
H. Ziegler (1959 r.) zmodyfikował tensor translacji  $\alpha_{ij}$   
 do postaci

$$\dot{\alpha}_{ij} = \dot{\mu}(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \quad (9.166a)$$

lub w przyrostach

$$d\alpha_{ij} = d\mu(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}), \quad (9.166b)$$

który powoduje translację powierzchni płynięcia w kierunku  
 wektora  $\sigma_{ij} - \alpha_{ij}$  (wektora  $O^*P$  łączącego środek powierzchni  
 płynięcia z punktem reprezentującym aktualny stan naprężenia).



Rys. 9.64. Translacja powierzchni płynięcia w kierunku wektora  $O^*P$

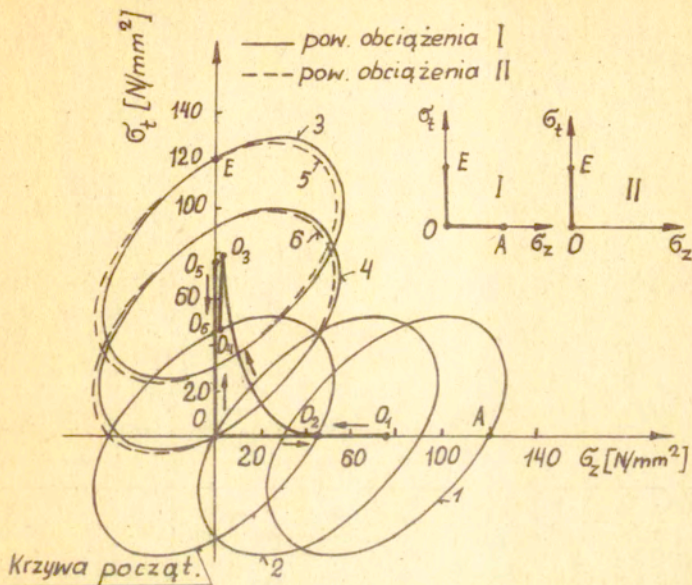
Tensor translacji  $\dot{\alpha}_{ij}$  nie jest związany z tensorem prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ . Funkcję skalarną  $\dot{\mu}$  wyznaczamy z równania (9.159a) i równania (9.166a)

$$\dot{\mu}^o = \frac{\frac{\partial f}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij}}{(\sigma_{kl} - \alpha_{kl}) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (9.167)$$

Rozważmy ruch elipsy Hubera-Misesa wynikający z teorii R.T.Schielda i H.Zieglera dla obciążenia I i II. Elipsy przesuwają się w kierunku wektora łączącego punkt obciążenia (A lub E) ze środkiem elipsy (rys. 9.65).

Badanie dotyczy ruchu elipsy wyjściowej, odpowiadającej granicy proporcjonalności  $\sigma_{prop}$  dla mosiądzu M53 (próbki rurkowe  $\varnothing 30/\varnothing 28$ ) na podstawie hipotezy kinematycznego wzmocnienia.

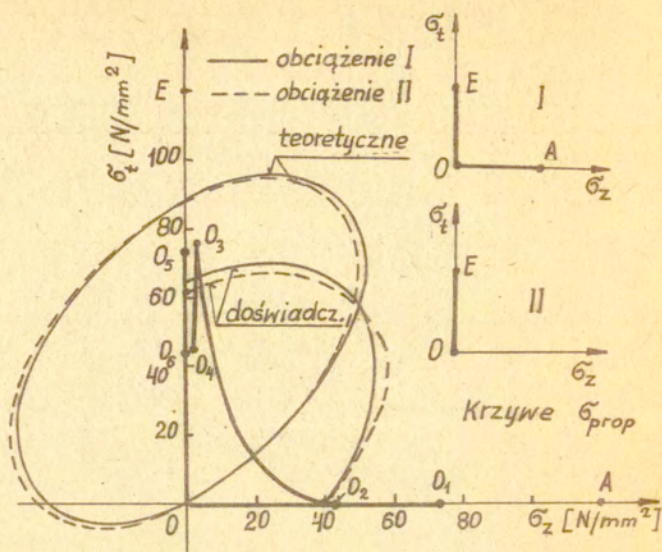
Podczas obciążenia I na drodze OA wyjściowa elipsa wędruje do położenia 1 (środek  $O_1$ ), a przy odciążeniu (droga AO) elipsa cofa się do położenia 2 (środek  $O_2$ ). Przy ponownym obciążeniu I na drodze OE elipsa wędruje do położenia 3 (środek  $O_3$ ), a po odciążeniu (droga EO) elipsa cofa się do położenia 4 (środek  $O_4$ ). Środki elips obciążenia I tworzą linię  $O_1 O_2 O_3 O_4$ . Przy zastosowaniu obciążenia II na drodze OE elipsa przesuwa się do położenia 5 (środek  $O_5$ ), a po odciążeniu (droga EO) elipsa cofa się do położenia 6 (środek  $O_6$ ). Środki elips wędrują po linii  $O_5 O_6$ . Jak widać na rysunku 9.65, elipsa pochodząca z obciążenia I prawie pokrywa się z elipsą pochodzącą z obciążenia II. Znaczy to, że materiał zapomniał historię odkształcenia pochodzącą z obciążenia I na drodze OAO i zachowuje się tak, jak gdyby był obciążony tylko na drodze ostatniej, a więc OEO.



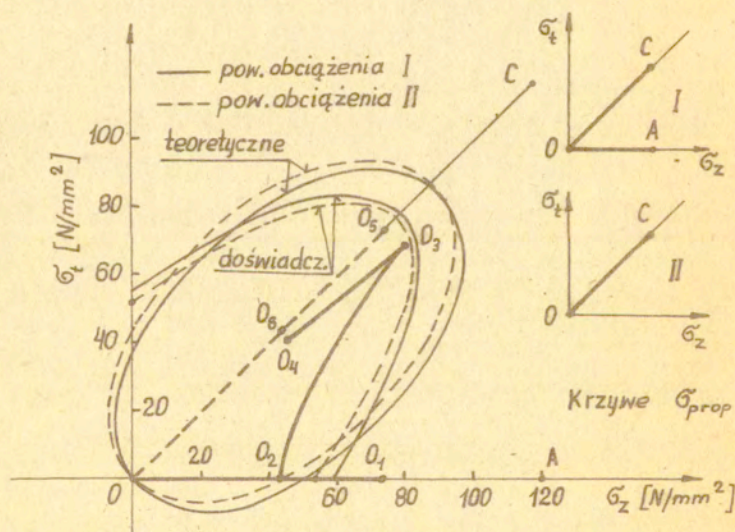
Rys. 9.65. Teoretyczna analiza wzmocnienia kinematycznego dla I i II sposobu obciążenia [J. Miastkowski]

Na rysunkach 9.66 i 9.67 pokazano położenie elips teoretycznych przy obciążeniach I i II i położenie elips doświadczalnych dla tych samych sposobów obciążenia. Zarówno elipsy teoretyczne jak i elipsy doświadczalne są przesunięte względem elips początkowych. Wyniki te potwierdzają hipotezę wzmocnienia kinematycznego.

Sposobów obciążania materiału jest wiele. W pracy przedstawiono tylko wybrane sposoby obciążania.



Rys. 9.66. Porównanie elips teoretycznych z elipsami doświadczalnymi. Elipsa wyjściowa jak na rys.9.65. [J.Miastkowski]



Rys. 9.67. Porównanie elips teoretycznych wzmocnienia kinematycznego z elipsami doświadczalnymi. Elipsa wyjściowa jak na rys. 9.65 [J.Miastkowski]

### 9.5.3. Wzmocnienie mieszane czyli izotropowo-kinematyczne

Połączenie wzmocnienia izotropowego ze wzmocnieniem kinematycznym dokładniej opisuje wzmocnienie materiałów rzeczywistych. Warunek plastyczności uwzględniający wzmocnienie mieszane można zapisać w ogólnej postaci

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}, \beta) = 0. \quad (9.168)$$

Jest to dwuparametrowy warunek plastyczności, uwzględniający translację powierzchni płynięcia  $\alpha_{ij}$  i jej rozszerzenie  $\beta$ .

Warunek plastyczności Hubera-Misesa wyrazi się zależnością

$$(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = 2k^2(\beta). \quad (9.169)$$

a warunek plastyczności Treski

$$\max \left\{ |(\sigma_i - \alpha_i) - (\sigma_j - \alpha_j)| \right\} = 2k(\beta). \quad (9.170)$$

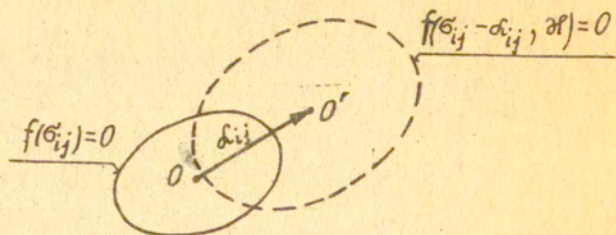
Ju. I. Kadaszewicz i W. W. Nowożyłow (1958 r.) zaproponowali dwuparametrowe prawo wzmocnienia w postaci

$$(\sigma_{ij} - 2g \xi_{ij}^P)(\sigma_{ij} - 2g \xi_{ij}^P) = c(\lambda), \quad (9.171)$$

gdzie  $\alpha_{ij} = 2g \xi_{ij}^P$  jest tensorem mikronaprężenia, który powoduje translację powierzchni płynięcia jako ciała sztywnego,  $g$  jest funkcją niezmienników tensora  $\alpha_{ij}$ ,  $c$  jest funkcją niezmiennika

$$\lambda = \int (\sigma_{ij} - 2g \xi_{ij}^P) d\xi_{ij}^P.$$

Powierzchnia plastyczności opisana równaniem (9.168) w czasie procesu odkształcania ulega przesunięciu bez obrotu i jednocześnie równomiernemu rozszerzeniu z zachowaniem podobieństwa geometrycznego.



Rys. 9.68. Istota wzmocnienia mieszanego

Liczne badania doświadczalne wskazują, że pod wpływem odkształceń plastycznych powierzchnia płynięcia rozszerza się, przesuwa i doznaje niewielkiego obrotu.



Literatura

1. S.Timoshenko, I.N.Goodier. Teoria sprężystości. Wydawnictwo "Arkady", Warszawa 1962.
2. Y.C.Fung. Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN, Warszawa 1969.
3. S.Stanisławski. Podstawy teorii plastyczności. Skrypt PP, Poznań 1977.
4. Prace IPPT. Badania podstawowych praw wzmocnienia metali. 45/1971.
5. Praca zbiorowa. Teoria plastyczności. PWN, Warszawa 1965.
6. J.Walczak. Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności. Tom II. PWN, Warszawa 1977.
7. M.L.Bernsztejn, W.A.Zajmowski. Struktura i własności mechaniczne metali. WNT, Warszawa 1973.
8. J.Klepaczko. Oszacowanie energii dysypowanej w procesie deformacji plastycznej niektórych metali. Rozprawy Inżynierskie 2, 15/1967.
9. F.Grosman i inni. Umacnianie odkształceniowe metali. Hutnik, 12, 1977.
10. T.Pełczyński. O krzywych umocnienia. Obróbka plastyczna tom XIV, z.1/1975.
11. J.Klepaczko. Fizyczne koncepcje równań konstytutywnych i termicznie aktywowane procesy dyslokacyjne w metalach. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 3, 7/1969.
12. A.B.Третьяков, В.И.Зюзин. Механические свойства металлов и сплавов при обработке давлением. Металлургия, Москва, 1973.
13. J.Klepaczko. Uogólnione prawo A.Krupkowskiego umocnienia metali. Archiwum Hutnictwa, t. XV, z.2/1970.
14. M.Kamiński. Sprężenie pola odkształceń z polem temperatur w zagadnieniu skręcania cienkościennej rurki. Rozprawy Inżynierskie, 24, 1/1976.
15. J.Litoński. Badanie niestateczności przy plastycznym skręcaniu wykorzystujące sprężenie termomechaniczne. Niestateczność lokalna. Rozprawy Inżynierskie, 24, 4/1976.
16. J.Klepaczko. Sprężenia termo-mechaniczne w metalach. Prace IPPT, nr 11/1978.

17. F.Tychowski. Studia nad niektórymi równaniami krzywych wzmocnienia i ich przydatności do prób ściskania. Fizyka odkształceń plastycznych. Warszawa 1966.
18. J.Klepaczko. Wpływ prędkości odkształcenia na umacnianie się metali. Praca IPPT, nr 45/1971.
19. K.Tonaka i inni. Propagation of plastic wave in lead bar. Bulletin of the ISME, vol. 16, nr 91, Jan. 1973.
20. V.Valorinta. Wpływ temperatury i prędkości odkształcenia na opór plastyczny stali przy kuciu. Obróbka plastyczna, tom II, z. 1/1960.
21. M.Morawiecki, L.Sadok, E.Wosiek. Teoretyczne podstawy technologicznych procesów przeróbki plastycznej. Wydawnictwo "Śląsk", Katowice 1977.
22. Z.Marciniak. Odkształcenia graniczne przy tłoczeniu blach. WNT, Warszawa 1977.
23. P.Perzyna. Termodynamika materiałów nieprężystych. PWN, Warszawa 1978.
24. St.Koncowicz. Wzory określające wytrzymałość plastyczną kilku metali. Obróbka plastyczna, tom II, z.1.
25. Praca zbiorowa pod red.A.Sobocińskiego. Laboratorium teorii procesów obróbki plastycznej. Skrypt Politechniki Śląskiej, Gliwice 1978.
26. W.Nowacki. Mechanika budowli, tom III. PWN, Warszawa 1966.
27. Z.Misiołek, Z.Rafalski. Archiwum Hutnictwa, t. 24, z. 3, 1979.
28. A.Mendelson. Plasticity theory and application.
29. W.Pogorzelski. Analiza matematyczna, t. IV. Warszawa 1951. Czytelnik.
30. B.Staniszewski. Wymiana ciepła. Podstawy teoretyczne. PWN, Warszawa 1963.