1.11 — równania różnicowe

Krzysztof Gajewski

PORÓWNANIE METOD LAPUNOWA I NIERÓWNOŚCI SUMARYCZNYCH NA PRZYKŁADZIE WYBRANYCH RÓWNAŃ RÓŻNICOWYCH

WARSZAWA 1982

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 czerwca 1982 r.

Zarejestrowana pod nr 28/1982

IPPT PAN

N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 130 egz. Ark.wyd. 0,8. Ark. druk. 1,5
Oddano do drukarni w lipcu 1982 r.
Nr zamówienia 382/o/82 Z-87 .

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Krzysztof Gajewski
Zakład Układów Mechanicznych

PORÓWNANIE METOD LAPUNOWA I NIERÓWNOŚCI SUMARYCZNYCH NA PRZYKŁADZIE WYBRANYCH RÓWNAŃ RÓŻNICOWYCH

1. WSTĘP

Istnieje wiele metod badania stabilności rozwiązań równań różnicowych. Dla równań liniowych o zmiennych współczynnikach bądź nieliniowych różne metody narzucają na parametry równania różne warunki dostateczne stabilności rozwiązań. Nierozstrzygnięta definitywnie jest kwestia porównania skuteczności stosowanych metod ze względu na oszacowanie obszaru stabilności w przestrzeni parametrów.

W pracy do badania stabilności rozwiązań pewnego nieliniowego równania różnicowego zastosowano metodę bezpośrednią Lapunowa i tak zwaną metodę nierówności sumarycznych, która polega na badaniu równoważnego wyjściowemu równania sumarycznego otrzymanego przez zastosowanie metody uzmienniania stałych.

Dla porównania obu metod wybrano równanie postaci:

$$(1) \qquad x_{n+1} = Ax_n + c_n(x_n)Bx_n \ , \quad n \in N \ , \ n \geqslant n_0$$

gdzie $x_n \in R^m$, $n \geqslant n_0$, A, B - stałe macierze rzeczywiste $m \times m$, $(n, x) \mapsto c_n(x)$, $n \geqslant n_0$, $x \in R^m$, $\|x\| < h$, jest funkcją rzeczywistą zapewniającą jednoznaczność rozwiązań równania (1) z warunkiem początkowym $x_{n_0} = \eta$, $\|\eta\| < h$.

Jeśli warunek $c_n(x) \in \Psi \subset R$ dla $n \geqslant n_0$ jest warunkiem koniecznym i dostatecznym stabilności rozwiązania trywialnego równania (1) to zbiór Ψ nazwiemy obszarem stabilności tego równania. Każdy podzbiór Ψ nazwiemy oszacowaniem obszaru stabilności. Dla równania (1) obszar stabilności można wyznaczyć w przypadku $c_n(x) = \mathrm{const}$ lub $c_n(x) = c_n$ przy założeniu, że c_n jest funkcją okresową. W przypadku ogólnym można tylko podać oszacowania obszaru stabilności.

Przy badaniu stabilności wspomnianego równania sumarycznego należy wybrać normę w R^m. Oszacowanie obszaru stabilności uzyskane metodą nierówności sumarycznych zależy zatem od wyboru normy. W metodzie bezpośredniej funkcję Lapunowa przyjęto w tej pracy w postaci takiej samej normy. Celem pracy jest wykazanie, że przy tak niekłopotliwym wyborze funkcji Lapunowa można uzyskać lepsze niż metodą nierówności sumarycznych wyniki. W metodzie bezpośredniej oszacowanie obszaru stabilności też zależy od wyboru funkcji Lapunowa /dla równań różniczkowych por. [7]/. Ponieważ każda norma w R^m jest funkcją Lapunowa, ale nie odwrotnie, (por. [4]), to wybór funkcji Lapunowa w postaci normy w R^m osłabia możliwe do uzyskania metodą bezpośrednią wyniki, ale tym bardziej dowodzi wyższej skuteczności tej metody.

2. METODA BEZPOŚREDNIA

Rozważmy równanie

$$x_{n+1} = f_n(x_n) \tag{2}$$

gdzie $x_n \in R^m$, $f_n(0) = 0$, $n \geqslant n_0$.
Założmy, że $f_n(x)$ zapewnia jednoznaczność rozwiązania równania (2) dla każdego warunku początkowego ξ, $\|\xi\| < h$.

Twierdzenie 1.

Jeżeli istnieje stała $0 < \alpha < 1$ oraz funkcja rzeczywista:

$$(n, x) \mapsto V_n(x), \quad n \geqslant n_0, \quad x \in R^m, \quad \|x\| < h,$$

ciągła ze względu na zmienną x i taka, że istnieje ciągła i rosnąca funkcja $\varphi : R_+ \to R_+$:

$$V_n(x) \geqslant \varphi(\|x\|), \quad n \geqslant n_0, \quad \|x\| \leqslant h, \tag{3}$$

$$V_n(0) = \varphi(0) = 0, \quad n \geqslant n_0,$$

oraz

(4) $$\frac{V_{n+1}(f_n(x))}{V_n(x)} < \alpha\,, \quad n \geqslant n_0\,, \quad \|x\| < h\,,$$

to rozwiązanie trywialne równania (2) jest asymptotycznie stabilne.

Dowód.

Niech $0<\varepsilon<h$, wtedy

(5) $$\exists\, \delta<\varepsilon \quad \forall\, \|x\|<\delta \qquad 0 \leqslant V_{n_0}(x) < \varphi(\varepsilon)$$

Niech $x_n(n_0;\xi)$ nietrywialne rozwiązanie równania (2) z warunkiem początkowym:

$$x_{n_0}(n_0;\xi) = \xi$$

takim, że $\|\xi\| < \delta$.

Pokażemy, że $\|x_n(n_0;\xi)\| < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. Przypuśćmy że istnieje $n_1 > n_0$, dla którego zachodzi nierówność przeciwna

$$\| x_{n_1}(n_0;\xi)\| \geqslant \varepsilon$$

$$\|x_n(n_0;\xi)\| < \varepsilon\,, \qquad n_0 \leqslant n < n_1$$

Z założenia (4) funkcja $n \mapsto V_n(x_n(n_0;\xi))$ jest nierosnąca. Zatem

$$V_{n_0}(\xi) \geqslant V_{n_1}(x_{n_1}(n_0;\xi))$$

wobec nierówności (2) i (5) prowadzi do sprzeczności:

$$\varphi(\varepsilon) > V_{n_0}(\xi) \geqslant V_{n_1}(x_{n_1}(n_0;\xi)) \geqslant \varphi(\varepsilon)$$

Pokażemy jeszcze, że:

(6) $$\lim_{n\to\infty} x_n(n_0;\xi) = 0$$

Z założenia (4) :

$$V_n(x_n(n_0;\xi)) \leq \alpha^{n-n_0} V_{n_0}(\xi)$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty} V_n(x_n(n_0;\xi)) = 0$$

Ponieważ

$$V_n(x_n(n_0;\xi)) \geqslant \varphi(\|x_n(n_0;\xi)\|) \geqslant 0,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(\|x_n(n_0;\xi)\|) = 0$$

co przy założonych własnościach funkcji φ pociąga (6) .

Uwaga 1

Jeśli w Twierdzeniu 1 $\alpha = 1$ to warunek (4) jest warunkiem dostatecznym stabilności rozwiązania trywialnego równania różnicowego (2) .

Twierdzenie 1 można udowodnić zamieniając nierówność (4) nierównościami:

$$V_{n+1}(f_n(x)) - V_n(x) \leq -\Psi(\|x\|)$$

$$V_n(x) \leq \varkappa(\|x\|)$$

gdzie $\Psi: R_+ \to R_+$, $\varkappa: R_+ \to R_+$ są ciągłe i rosnące. Otrzymujemy wtedy, że rozwiązanie trywialne równania (2) jest jednostajnie asymptotycznie stabilne (por. [6] , s. 80, [3] , s. 27).

Wniosek 1

Jeżeli istnieje stała $0 < \alpha < 1$ oraz nieosobliwa macierz L , $m \times m$, o współczynnikach rzeczywistych taka, że

(7) $$\|L A_n(x) L^{-1}\| < \alpha , \quad n \geqslant n_0 , \quad \|x\| < h$$

gdzie $A_n(x)$ jest $\forall n \geqslant n_0 , \forall \|x\| < h$ macierzą $m \times m$ o współczynnikach rzeczywistych i taką, że zapewnia dla równania różnicowego:

$$(8) \qquad x_{n+1} = A_n(x_n)\,x_n\,, \quad n \geqslant n_0\,,$$

jednoznaczność rozwiązań to rozwiązanie trywialne jest asymptotycznie stabilne.

Dowód.

Dla równania (8) funkcję Lapunowa weźmiemy w postaci:

$$V_n(x) := \|Lx\|\,, \quad n \geqslant n_0\,.$$

Ponieważ zachodzi oszacowanie:

$$\frac{\|LA_n(x)x\|}{\|Lx\|} = \frac{\|LA_n(x)L^{-1}Lx\|}{\|Lx\|} \leqslant$$

$$\leqslant \|LA_n(x)L^{-1}\| < \alpha$$

to spełniony jest warunek (4) z Twierdzenia 1.

Uwaga 2

Norma $A \mapsto \|A\|_L := \|LAL^{-1}\|$ jest normą macierzy LAL^{-1} jako odwzorowania liniowego przestrzeni R^m z normą $x \mapsto \|x\|$ w siebie.

Uwaga 3 Por. [2] , s.48.

Przy wyborze funkcji Lapunowa w postaci normy $x \mapsto \|Lx\|$ otrzymuje się taki sam warunek stabilności asymptotycznej rozwiązania trywialnego równania różnicowego jak przy porównaniu norm obu stron równania i żądaniu aby $\forall n \geqslant n_0 \forall \|y\| < h$ macierz $A_n(y)$ jako odwzorowanie liniowe przestrzeni R^m z normą $x \mapsto \|Lx\|$ w siebie było odwzorowaniem zwężającym tzn. by:

$$\exists\, 0 < \alpha < 1 \quad \forall x \in R^m \quad \|LA_n(y)x\| < \alpha\|Lx\|$$

czego warunkiem dostatecznym jest nierówność:

$$\|LA_n(y)L^{-1}\| \leqslant \alpha < 1\,, \quad n \geqslant n_0\,, \quad \|y\| < h$$

Zastosowanie warunku (7) z Wniosku 1 prowadzi dla równania (1) do następującego oszacowania obszaru stabilności dla parametru $c_n(x_n)$:

(9) $$\Phi^{S}_{L} := \{ c \in R : \ \| A + cB \|_{L} < 1 \}$$

Wniosek 2

Jeżeli istnieje stała $0 < \alpha < 1$ oraz dodatnio określona, symetryczna macierz S takie, że

(10) $$\lambda_{max} (A_n^T(y) \, S A_n(y) S^{-1}) < \alpha , \quad n \geqslant n_0 , \ \|y\| < h$$

gdzie $\lambda_{max}(B)$ oznacza największą wartość własną macierzy B, to rozwiązanie trywialne równania różnicowego

(11) $$x_{n+1} = A_n(x_n) \, x_n , \quad n \geqslant n_0 ,$$

jest asymptotycznie stabilne.

Dowód.
Macierz S jest symetryczna i dodatnio określona wtedy i tylko wtedy gdy istnieje taka nieosobliwa macierz trójkątna górna T, że $S = T^T T$. Por. [5], s. 120. Dla równania (11) funkcję Lapunowa weźmiemy w postaci:

$$V_n(x) := \| Tx \|$$

gdzie $x \mapsto \|x\|$ norma euklidesowa w R^m:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{m} x_i y_i , \quad x, y \in R^m ,$$

Zauważmy, że $\forall n \geqslant n_0$

$$\frac{\| T A_n(y) \, y \|}{\| Ty \|} \leqslant \sup_{0 \neq \|y\| < h} \frac{\| T A_n(y) \, y \|}{\| Ty \|} \leqslant \sup_{\substack{0 \neq \|x\| < h \\ \|y\| < h}} \frac{\| T A_n(y) \, x \|}{\| Tx \|} =$$

$$= \sup_{\substack{0 \neq \|x\| < h \\ \|y\| < h}} \sqrt{\left\langle TA_n(y)T^{-1}\frac{Tx}{\|Tx\|} \, , \, TA_n(y)T^{-1}\frac{Tx}{\|Tx\|} \right\rangle} =$$

$$= \sup_{\|y\| < h} \sqrt{\sup_{\|z\| = 1} \left\langle (TA_n(y)T^{-1})^T TA_n(y)T^{-1}z, z \right\rangle} =$$

$$= \sup_{\|y\| < h} \sqrt{\lambda_{max}((T^T)^{-1}A_n^T(y)T^T TA_n(y)T^{-1})} =$$

$$= \sup_{\|y\| < h} \sqrt{\lambda_{max}(A_n^T(y)SA_n(y)S^{-1})} < \sqrt{\alpha} < 1$$

a więc spełnione są założenia Wniosku 1.

Uwaga 4.

Ponieważ każdą macierz nieosobliwą L można rozłożyć na iloczyn macierzy

$$L = UT,$$

gdzie U jest macierzą unitarną $(U^T U = E)$, a T nieosobliwą macierzą trójkątną górną (por. [1], s.239) oraz dla normy macierzy jako odwzorowania liniowego przestrzeni R^m z normą euklidesową w siebie mamy:

$$\|LAL^{-1}\| = \lambda_{max}((LAL^{-1})^T LAL^{-1}) =$$

$$= \lambda_{max}(A^T L^T LAL^T L^{-1}) =$$

$$= \lambda_{max}(A^T T^T U^T U TA(T^T U^T U T)^{-1}) =$$

$$= \lambda_{max}(A^T T^T TAT^T T^{-1}) =$$

$$= \|TAT^{-1}\| =: \|A\|_{\langle T,T\rangle}$$

to w badaniu oszacowań obszaru stabilności równania (11) można ograniczyć się do funkcji Lapunowa postaci:

$$V_n(x) = \sqrt{\langle Sx, x\rangle} = \sqrt{\langle Tx, Tx\rangle}$$

Dodatkowo, ponieważ dla nieosobliwej macierzy trójkątnej górnej T : $t_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq m$ oraz

$$\|TAT^{-1}\| = \|\hat{T}A\hat{T}^{-1}\|$$

gdzie $\hat{T} = \frac{1}{t_{mm}} T$, to w badaniu oszacowań obszaru stabilności równania (11) można ograniczyć się do funkcji Lapunowa postaci:

$$V_n(x) = \sqrt{\langle \hat{S}x, x\rangle} = \sqrt{\langle \hat{T}x, \hat{T}x\rangle}$$

gdzie $\hat{t}_{mm} = \hat{s}_{mm} = 1$ odpowiednio w macierzach $\hat{T}, \hat{S}$.

Przykład 1

Jeżeli istnieje macierz $S = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in R$, $d := \alpha - \beta^2 > 0$, takie, że:

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{u_n(x,y)}{d} < \dfrac{b_n^2(x,y)+1}{2} \\ |b_n(x,y)| < 1 \end{cases}, \quad n \geqslant 1,\ x, y \in R,$$

gdzie

$$u_n(x,y) = \frac{a_n^2(x,y)}{2}\alpha - a_n(x,y)\,b_n(x,y)\beta + \frac{b_n^2(x,y)}{2} + \frac{\alpha^2}{2} - a_n(x,y)\alpha\beta + b_n(x,y)\beta^2,$$

to rozwiązanie trywialne równania

$$(13) \quad z_{n+2} + a_n(z_n, z_{n+1})z_{n+1} + b_n(z_n, z_{n+1})z_n = 0, \quad n \geqslant 1,$$

jest stabilne.

Dowód

Równanie (13) jest równoważne układowi

(14) $$x_{n+1} = A_n(x_n)\,x_n \, , \quad n \geqslant 1,$$

gdzie

$$x_n = \begin{bmatrix} z_n \\ z_{n+1} \end{bmatrix}, \quad A_n(x_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_n(x_n) & -a_n(x_n) \end{bmatrix}, \quad n \geqslant 1.$$

Równanie charakterystyczne macierzy $\frac{1}{d} G_n(x) := A_n^T(x) S A_n(x) S^{-1}$ jest postaci:

$$\det \frac{1}{d}\left(G_n(x) - E\lambda d\right) = 0$$

$$\det\left(G_m(x) - E\eta\right) = 0 \, , \quad \lambda = \frac{\eta}{d}$$

$$\eta^2 - \operatorname{tr} G_m(x)\,\eta + \det G_m(x) = 0$$

$$\det G_m(x) = d^2 b_m^2(x)$$

$$\operatorname{tr} G_m(x) = 2u_m(x) \geqslant 0$$

Ostatnia nierówność wynika z faktu, że forma kwadratowa $u_m(x)$ jest nieujemna.

Oba pierwiastki równania charakterystycznego są rzeczywiste i nieujemne /co wynika z własności ekstremalnych wartościwłasnych macierzy symetrycznej i nieujemnie określonej/.

Zatem

$$\lambda_{max}\left(A_n^T(x) S A_n x S^{-1}\right) = \frac{u_m(x)}{d} + \sqrt{\frac{u_m^2(x)}{d^2} - b_m^2(x)}$$

oraz

$$\frac{u_n(x)}{d} \geqslant |b_n(x)| \tag{15}$$

Warunek dostateczny stabilności układu (14) jest zgodne z wnioskiem 2 postaci:

$$\frac{u_n(x)}{d} + \sqrt{\frac{u_n^2(x)}{d^2} - b_n^2(x)} < 1 \tag{16}$$

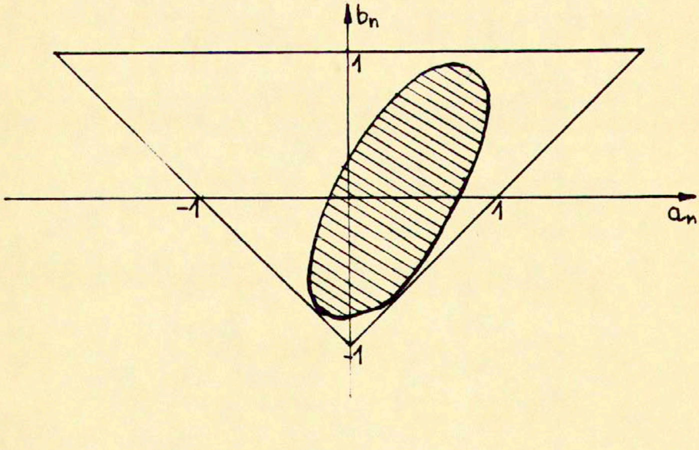
Powyższa nierówność jest równoważna układowi nierówności:

$$\frac{u_n(x)}{d} < 1 \quad i \quad \frac{u_n(x)}{d} < \frac{b_n^2(x)+1}{2}$$

i dalej

$$\text{(17)} \quad \begin{cases} |b_n(x)| < 1 \\ \dfrac{u_n(x)}{d} < \dfrac{b_n^2(x)+1}{2} \end{cases} \qquad \text{lub (18)} \quad \begin{cases} |b_n(x)| \geqslant 1 \\ \dfrac{u_n(x)}{d} < 1 \end{cases}$$

Układ nierówności (18) jest sprzeczny z nierównością (15) zaś układ (17) jest spełniony z założeń wniosku czyli równoważnie zachodzi (16) . Oszacowanie obszaru stabilności rozwiązania trywialnego równania (13) pokazano na rys. 1



Przykład 2

Jeżeli $\forall n \geq 1$, $\forall x \in R$

$$a-1 < b_n(x) < 1 - a\frac{a-2}{a-4}, \quad 0 \leq a < 2$$

(19)

$$-a-1 < b_n(x) < 1 + a\frac{a+2}{a+4}, \quad -2 < a < 0$$

to rozwiązanie trywialne równania różnicowego:

$$z_{n+2} + a z_{n+1} + b_n(z_n) z_n = 0, \quad n \geq 1,$$

jest stabilne.

Dowód.

Wskażemy macierz $S = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1 \end{bmatrix}$ taką, która przy założonych warunkach (19) gwarantuje spełnienie założeń Przykładu 1:

$$(20) \qquad \frac{u_n(x)}{d} < \frac{b_n^2(x)+1}{2}.$$

Dowód przeprowadzimy dla $a \geq 0$

Dla każdego ustalonego $x \in R$ nierówność (20) jest nierównością kwadratową ze względu na $\xi = b_n(x)$. Jeśli zażądamy by mniejszym z pierwiastków równania

$$(21) \qquad \frac{\tilde{u}_n(\xi)}{d} - \frac{\xi^2+1}{2} = 0$$

był pierwiastek

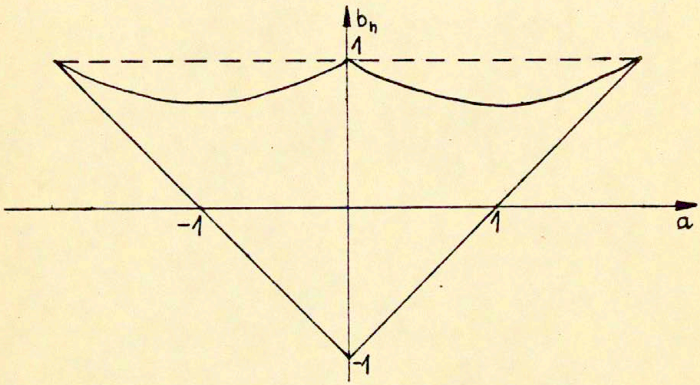
$$\xi^\circ = a-1;$$

to nierówność (20) będzie dla $d \leq 1$ równoważna nierówności

$$(22) \qquad a-1 < b_n(x) < \frac{2\beta(\beta-a)}{\alpha-\beta^2-1} - a + 1$$

przy czym $\alpha = a(\beta-1) + 1,$

co jest warunkiem by $\zeta^0 = a-1$ był pierwiastkiem (21).
Dla $\beta = \frac{a}{2}$ prawa strona nierówności (22) osiąga maximum równe $1-a\frac{a-2}{a-4}$ i dla tak dobranych α, β mamy $d \leq 1$ i nierówność (22) jest wobec (19) nierównością bezwarunkową.
Oszacowanie obszaru stabilności rozwiązania trywialnego rozważanego w tym przykładzie równania pokazano na rys. 2.



Każdy podzbiór domknięty oszacowań obszaru stabilności (12) i (19) jest oszacowaniem obszaru stabilności asymptotycznej (por. Uwaga 5).

Przykład 3 (por. [2], s. 55)

Dla równania o stałych współczynnikach

$$z_{n+2} + a z_{n+1} + b z_n = 0, \quad n \geq 1 \tag{23}$$

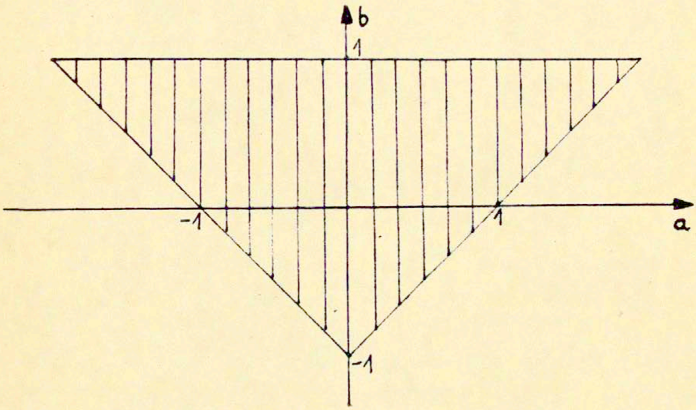
warunkiem koniecznym i dostatecznym stabilności asymptotycznej jest żądanie by pierwiastki równania charakterystycznego

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

były co do modułu mniejsze od 1.
Wynika to z postaci rozwiązań równania (23) i prowadzi do następującego obszaru stabilności asymptotycznej w przestrzeni parametrów a, b :

$$(24) \qquad -1 + |a| < b < 1$$

Obszar (24) pokazano na rys. 3



Obszar (24) można też uzyskać z warunków (12) przyjmując:

$$\alpha = b, \ \beta = \frac{a}{2} \qquad 1 > b > \frac{a^2}{4}$$

$$\alpha = \frac{a^2}{2} - b, \ \beta = \frac{a}{2} \qquad |a| - 1 < b < \frac{a^2}{4}$$

<u>Wniosek 3</u>

Jeżeli istnieje stała c_0 oraz nieosobliwa trójkątna górna macierz T z $t_{mm} = 1$, takie że $\forall\, n \geqslant n_0, \forall\, \|x\| < h$

$$(25) \qquad |c_n(x)| \leqslant c_0 < \frac{\sqrt{\lambda^2_{max}\left(\frac{1}{2} G_T\right) + \|B\|^2_{\langle T,T\rangle}\left(\|A\|^2_{\langle T,T\rangle} - 1\right)} - \lambda_{max}\left(\frac{1}{2} G_T\right)}{\|B\|^2_{\langle T,T\rangle}}$$

oraz $\|A\|_{\langle T,T\rangle} < 1$, gdzie $\lambda_{max}(F)$ oznacza największą wartość własną macierzy F, $G_T := (TAT^{-1})^T TBT^{-1} + (TBT^{-1})^T TAT^{-1}$ to rozwiązanie trywialne równania różnicowego (1) :

$$x_{n+1} = Ax_n + c_n(x_n) Bx_n, \quad n \geqslant n_0,$$

jest asymptotycznie stabilne.

Dowód

Ponieważ

$$\lambda_{max}\left[(A+c_n(x)B)^T T^T T(A+c_n(x)B)(T^T T)^{-1}\right] \leq$$

$$(26)\quad \leq c_0 \lambda_{max}\left[(TAT^{-1})^T TBT^{-1} + (TBT^{-1})^T TAT^{-1}\right] +$$

$$+ \|A\|^2_{\langle T,T\rangle} + c_0^2 \|B\|^2_{\langle T,T\rangle} < 1$$

to spełnione są założenia Wniosku 2.

Wniosek 4

Jeżeli istnieje $c_0 > 0$ oraz nieosobliwa macierz L taka, że

$$(27)\quad |c_n(x)| \leq c_0 < \frac{1-\|A\|_L}{\|B\|_L}, \quad n \geqslant n_0, \ \|x\| < h,$$

to rozwiązanie trywialne równania różnicowego (1)

$$x_{n+1} = Ax_n + c_n(x_n)Bx_n, \quad n \geqslant n_0,$$

jest asymptotycznie stabilne.

Dowód.

Wniosek wynika z nierówności:

$$\|L(A+c_n(x)B)L^{-1}\| \leq$$

$$\leq \|LAL^{-1}\| + c_0\|LBL^{-1}\| < 1$$

Zgodnie z Uwagą 1 , jeśli (25) i (27) byłyby nierównościami słabymi to warunki te byłyby warunkami dostatecznymi stabilności rozwiązania trywialnego równania różnicowego 1 .

Ponieważ $G_T = (TAT^{-1})^T TBT^{-1} + (TBT^{-1})^T TAT^{-1}$ jest macierzą symetryczną to $\lambda_{max}(G_T) = \|G_T\|_{\langle E,E\rangle}$

Ze względu na ciąg nierówności:

$$\lambda_{max}\left[(A+c_n(x_n)B)^T T^T T (A+c_n(x_n)B)(T^T T)^{-1}\right] \leq$$

$$\leq |c_n(x_n)| \, \| (TAT^{-1})^T TBT^{-1} + (TBT^{-1})^T TAT^{-1} \|_{\langle E,E\rangle} +$$

(28) $$+ \|A\|^2_{\langle T,T\rangle} + c_n^2(x_n) \|B\|^2_{\langle T,T\rangle} \leq$$

$$\leq \|A\|^2_{\langle T,T\rangle} + 2|c_n(x_n)| \|A\|_{\langle T,T\rangle} \|B\|_{\langle T,T\rangle} + c_n^2(x_n) \|B\|^2_{\langle T,T\rangle}$$

zachodzą inkluzje:

$$\Phi^{27}_{\langle T,T\rangle} \subset \Phi^{25}_{\langle T,T\rangle} \subset \Phi^{9}_{\langle T,T\rangle}$$

gdzie $\Phi^{i}_{\langle T,T\rangle}$ są oszacowaniami obszaru stabilności równania (1) uzyskanymi z warunków (i), z zastosowaniem funkcji Lapunowa w postaci uogólnionej normy euklidesowej,

$$V_n(x) = \sqrt{\langle Tx, Tx\rangle}$$

a T jest nieosobliwą macierzą trójkątną górną z $t_{mm} = 1$.

Uwaga 5

Każdy domknięty podzbiór oszacowań obszarów stabilności Φ^{i}_{L}, $i = 9, 27$, $\Phi^{j}_{\langle T,T\rangle}$, $j = 9, 25, 27$ jest oszacowaniem obszaru stabilności asymptotycznej rozwiązania trywialnego równania (1).

3. METODA NIERÓWNOŚCI SUMARYCZNYCH I PORÓWNANIE METOD

Twierdzenie 2. Por. [3], s. 39, [8] s. 111.

Jeżeli istnieją stałe M, N, λ dodatnie i nieosobliwa macierz L takie, że:

$$\|A^n\|_L \leq M \lambda^n \quad , \quad n \geq 0,$$

(29) $$\|A^n B\|_L \leq N \lambda^n \quad , \quad n \geq 0,$$

$$|c_n(x)| \leq c_0 < \frac{1-\lambda}{N} \quad , \quad n \geq n_0, \quad \|x\| < h,$$

i macierz A jest nieosobliwa to rozwiązanie trywialne równania różnicowego (1) :

$$x_{n+1} = Ax_n + c_n(x_n)Bx_n \ , \ n \geqslant n_0 ,$$

jest asymptotycznie stabilne.

Dowód.

Równanie $y_{n+1} = Ay_n$, $n \geqslant n_0$, ma rozwiązanie ogólne

$$y_n = A^{n-n_0}u \ , \ u \in R^m \ , \ n \geqslant n_0 .$$

Rozwiązania równania (1) poszukujemy w postaci

$$x_n = A^{n-n_0}u_n \ , \ n \geqslant n_0$$

gdzie u_n wyznaczymy z równania (1) .

$$A^{n-n_0+1}u_{n+1} = A^{n-n_0+1}u_n + c_n(x_n)Bx_n \ , \ n \geqslant n_0$$

$$u_{n+1} = u_n + c_n(x_n)A^{-n+n_0-1}Bx_n \ , \ n \geqslant n_0$$

Stąd $$u_n = u_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} c_k(x_k)A^{-k+n_0-1}Bx_k \ , \ n \geqslant n_0+1$$

$$u_{n_0} = x_{n_0}$$

$$x_n = A^{n-n_0}x_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} c_k(x_k)A^{n-k-1}Bx_k \ , \ n \geqslant n_0$$

Z założeń twierdzenia wynika poniższa nierówność:

$$\|Lx_n\| \leqslant M\lambda^{n-n_0}\|Tx_{n_0}\| + c_0 N \sum_{k=n_0}^{n-1} \lambda^{n-k-1}\|Tx_k\| \ , \ n > n_0 .$$

Jeśli $r_n := \dfrac{\|Tx_n\|}{\lambda^{n-n_0}}$, $n \geqslant n_0$, to r_n dla $n > n_0$ spełnia nierówność:

$$r_n \leqslant Mr_{n_0} + \frac{c_0 N}{\lambda}\sum_{k=n_0}^{n-1} r_k$$

Jeśli

$$R_n := Mr_{n_0} + \frac{c_0 N}{\lambda}\sum_{k=n_0}^{n-1} r_k \ , \ n \geqslant n_0 ,$$

to $r_n \leq R_n$, $n \geq n_0$;

$$R_{n+1} = M r_{n_0} + \frac{c_0 N}{\lambda} \sum_{k=n_0}^{n-1} r_k + \frac{c_0 N}{\lambda} r_n \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{c_0 N}{\lambda}\right) R_n \, , \quad n > n_0$$

Stąd

$$R_n \leq \left(1 + \frac{c_0 N}{\lambda}\right)^{n-n_0-1} R_{n_0+1} \, , \quad n > n_0$$

i dalej

$$r_n \leq R_n \leq \left(1 + \frac{c_0 N}{\lambda}\right)^{n-n_0-1} \left(M + \frac{c_0 N}{\lambda}\right) r_{n_0} \, , \quad n > n_0 .$$

Czyli

$$\| T x_n \| \leq (\lambda + c_0 N)^{n-n_0-1} (M\lambda + c_0 N) \| T x_{n_0} \| \, , \quad n > n_0 ,$$

co przy założeniu (29) daje tezę twierdzenia.

Wniosek 5

Jeżeli istnieje nieosobliwa macierz L taka, że

(30) $$|c_n(x)| \leq c_0 < \frac{1 - \|A\|_L}{\|B\|_L} \, , \quad n \geq n_0, \ \|x\| < h,$$

to rozwiązanie trywialne równania różnicowego (1) :

$$x_{n+1} = A x_n + c_n(x_n) B x_n \, , \quad n \geq n_0$$

jest asymptotycznie stabilne.

Dowód.

Z nierówności:

$$\| L A^n L^{-1} \| \leq \| L A L^{-1} \|^n = \| A \|_L^n$$

$$\| L A^n B L^{-1} \| \leq \| L A L^{-1} \|^n \| L B L^{-1} \| = \| A \|_L^n \| B \|_L$$

i z tego, że $M=1$, $N=\|B\|_L$, $\lambda=\|A\|_L$ oraz (29) wynika (30).

Uwaga 6

Warunkiem koniecznym (30) jest $\|A\|_L<1$ co jest warunkiem stabilności równania niezaburzonego:

$$x_{n+1}=Ax_n \quad , \quad n\geqslant n_0$$

Metoda Lapunowa zaś w przypadku zastosowania Wniosku 1 pozwala stwierdzić stabilność rozwiązania trywialnego równania (1), dla którego równanie niezaburzone może być niestabilne.
Z Wniosku 5 wynika, że uzyskane zastosowaną tu metodą nierówności sumarycznych oszacowanie obszaru stabilności:

$$\Psi_L^{30} := \{ c\in R : \|A\|_L + |c|\,\|B\|_L < 1\}$$

można uzyskać metodą bezpośrednią i to przy niekłopotliwym wyborze funkcji Lapunowa w postaci normy w R^m, której użyto do badania stabilności metodą nierówności. /Wniosek 4, oszacowanie Φ_L^{27} /. Za pomocą metody Lapunowa z użyciem tej samej co poprzednio funkcji Lapunowa wynik można poprawić /Wniosek 1, oszacowanie Φ_L^{9} /. Zatem dla funkcji Lapunowa w postaci uogólnionej normy euklidesowej metoda bezpośrednia też poprawia wyniki /Wnioski 2 i 3, oszacowania $\Phi^9_{\langle T,T\rangle}\supset\Phi^{25}_{\langle T,T\rangle}\supset\Phi^{27}_{\langle T,T\rangle}=\Psi^{30}_{\langle T,T\rangle}$/ przy czym obie metody prowadzą do tych samych oszacowań $\Phi^9_{\langle T,T\rangle}=\Phi^{25}_{\langle T,T\rangle}=\Phi^{27}_{\langle T,T\rangle}$ jeśli istnieje nieosobliwa trójkątna górna macierz T z $t_{mm}=1$ taka, że macierze TAT^{-1}, TBT^{-1} są symetryczne oraz ich iloczyn jest przemienny. Wtedy bowiem w nierównościach (28) zachodzą równości. Por. [9], s. 637.

Przykład 4

Rozważmy równanie różnicowe drugiego rzędu

$$z_{n+2}+a\,z_{n+1}+(b+c_n(z_n))\,z_n=0 \quad , \quad n\geqslant 1 ,$$

które można sprowadzić do postaci (1) :

$$x_{n+1}=Ax_n+c_n(x_n)\,Bx_n$$

gdzie

$$x_n = \begin{bmatrix} z_n \\ z_{n+1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$\|A\|_{\langle T,T\rangle} = \sqrt{\frac{u(a,b,\alpha,\beta)}{\alpha-\beta^2} + \sqrt{\frac{u^2(a,b,\alpha,\beta)}{(\alpha-\beta^2)^2} - b^2}}$$

$$\|B\|_{\langle T,T\rangle} = \frac{1}{\sqrt{\alpha-\beta^2}}, \quad u(a,b,\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\,tr(\alpha-\beta^2)A^T S A S^{-1},$$

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1 \end{bmatrix}, \quad S = T^T T.$$

Metodą nierówności sumarycznych /Wniosek 5/ można uzyskać następujący obszar stabilności dla parametru $c_n(x_n)$, $\Psi(\alpha,\beta)$:

$$|c| < \sqrt{\alpha-\beta^2} - \sqrt{u(a,b,\alpha,\beta) - \sqrt{u^2(a,b,\alpha,\beta) - b^2(\alpha-\beta^2)^2}}$$

Metodą Lapunowa /Przykład 2/ można zaś uzyskać obszar Φ :

$$a-1-b < c < 1 - a\,\frac{a-2}{a-4} - b, \quad 0 \le a < 2,$$

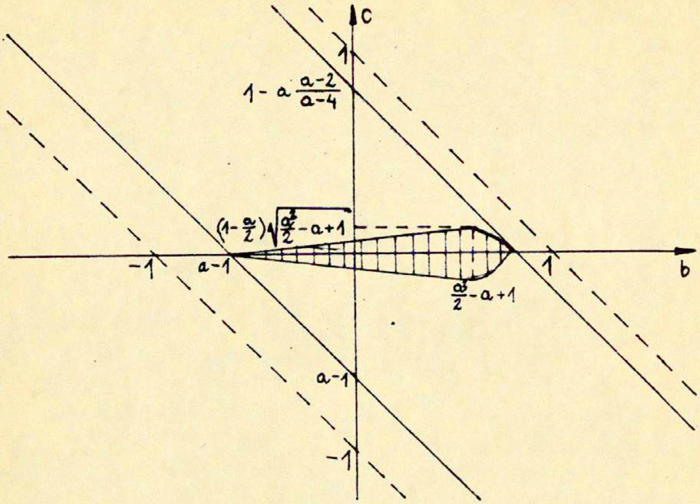
$$-a-1-b < c < 1 + a\,\frac{a+2}{a+4} - b, \quad -2 < a < 0,$$

przy wyborze funkcji Lapunowa w postaci

$$V_n(x) = \sqrt{\langle Sx, x\rangle}$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{2} - a + 1 & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Oczywiście $\Psi(\frac{a^2}{2} - a + 1, \frac{a}{2}) \subset \Phi$ co dla ustalonego $a > 0$ pokazano na rys. 4



LITERATURA

[1] ГАНТМАХЕР Ф.Р., Теория матриц, Москва 1967

[2] GILLE J.C., PALUSIŃSKI O., VIDAL P., WĘGRZYN S., Wprowadzenie do analizy stabilności w przestrzeniach metrycznych, Warszawa 1970

[3] HALANAY A., WEXLER D., Качественная теория импульсных систем, Москва 1971

[4] JURY E.I., LEE R.W., On the Stability Condition of Nonlinear Sampled Data Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, 4, 1965, s. 217-218

[5] МАРКУС М., МИНК Х., Обзор по теории матриц и матричных неравеньств, Москва 1972

[6] МАРТЫНЮК Д.И., Лекции по качественной теории разностных схем, Киев 1972

[7] RADZISZEWSKI B., Badanie stateczności ruchu na podstawie "najlepszej" funkcji Lapunowa, w: Stateczność i wrażliwość w układach mechanicznych, Wrocław 1978

[8] RUMAK T., Równania różnicowe, Rzeszów 1972

[9] САМАРСКИЙ А.А., Теория разностных уравнений, Москва 1977