3.31 — pobudzanie i propagacja fal elektromagnetycznych
3.32 — magnetohydrodynamika

Włodzimierz Laprus

ROZWIĄZANIA ASYMPTOTYCZNE RÓWNAŃ QUASI-LINIOWYCH DYSPERSYWNYCH

WARSZAWA 1982

ISSN 0208-5658

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych

Praca nr 195

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 marca 1982r.

Zarejestrowana pod nr 27/1982

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark.wyd. 0,6. Ark. druk. 1 .
Oddano do drukarni w lipcu 1982 r.
Nr zamówienia 393/o/82   Z-108 .

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich

Włodzimierz Laprus
Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

ROZWIĄZANIA ASYMPTOTYCZNE RÓWNAŃ QUASI-LINIOWYCH DYSPERSYWNYCH

1. WPROWADZENIE

Formalne zastosowanie rozwinięcia fali biegnącej do układu równań cząstkowych pierwszego rzędu quasi-liniowych dyspersywnych prowadzi do równań transportu określających współczynniki rozwinięcia /W. Laprus [1] /. Zarówno rozwinięcie fali biegnącej jak i układ równań zawierają duży parametr p . Pokażemy, że rozwinięcie fali biegnącej ma charakter asymptotyczny dla $p \to \infty$. Rozwiązanie ogólne pierwszego równania transportu znajdziemy przy założeniach upraszczających. Kilka przykładów zilustruje trudności zastosowania teorii do znanych równań fizyki matematycznej.

Rozpatrywany układ równań,

$$A^{K}_{ik}(u,x)\frac{\partial u_k}{\partial x_K} + p B_i(u,x) = 0 \tag{1.1}$$

dla $K=0,1,\dots,m$ oraz $i,k = 1,\dots,n$, jest z założenia symetrycznie hiperboliczny, przyczym $A^0_{ik} = I_{ik}$, $x_0 = t$. Współczynniki równań są regularnymi funkcjami zmiennych u_k , a także zmiennych x_K , w obszarze odpowiednio U i D. Zakładamy istnienie dostatecznie regularnego rozwiązania $u^0_i \in U$ układu /1.1/. W szczególności, jeśli u^0_i = const spełnia warunek $B_i(u^0) = 0$, to u^0_i jest rozwiązaniem układu /1.1/. Warunek symetrycznej hiperboliczności nie jest konieczny do tego, by procedura fali biegnącej prowadziła do dobrze zdefiniowanych równań transportu dla współczynników rozwinięcia. Jak zobaczymy dalej, układ /1.1/ może nie być symetryczny, a nawet może nie być w ogóle hiperboliczny. Jednakże asymptotyczny charakter rozwinięcia daje się udowodnić tylko przy założeniu hiperboliczności /niekoniecznie symetrycznej/ układu /1.1/.

W rozwinięciu fali biegnącej

/1.2/ $$u_i(x) = u_i^0(x) + \sum_{\nu=1}^{N} g_i^\nu(x) S_\nu(\varphi) + R_i(x)$$

funkcje $S_\nu(\varphi)$ są równe $(ip)^{-\nu}\exp(ip\varphi)$, gdzie $\varphi(x)$ jest funkcją fazową. Zakłada się, że współczynniki rozwinięcia $g_i^\nu(x)$ i reszta rozwinięcia $R_i(x)$ są dostatecznie regularne w obszarze D. Pozostaje pokazać, że tak jest istotnie, co zrobimy dalej.

Współczynniki układu równań /1.1/, $A_{ik}^K(u,x)$ i $B_i(u,x)$, przedstawione są w postaci rozwinięć typu Taylora w otoczeniu u_k^0 przy ustalonym x_K . Wszystkie wyrazy zawierające resztę $R_i(x)$ są zgrupowane odpowiednio w wyrażeniach $\tilde{R}_{ik}^K(x)$ i $\tilde{R}_i(x)$, które stanowią reszty rozwinięć /szczegóły w pracy [1] /.

Po wstawieniu rozwinięcia /1.2/ i rozwinięć współczynników równań do układu /1.1/ otrzymujemy

/1.3/ $$\sum_{\nu=0}^{N} E_i^\nu S_\nu + N_i[R] = 0.$$

Dla spełnienia tego równania wystarczy zażądać, by E_i^ν =0 dla ν = 0,1,...,N-1 oraz $E_i^N S_N + N_i[R] = 0$. Stąd mamy rekurencyjny ciąg równań

/1.4/ $$\mathcal{A}_{ik} g_k^1 = 0,$$

/1.5/ $$\mathcal{A}_{ik} g_k^{\nu+1} + D_{ik} g_k^\nu + H_{ik}^{(\nu)} g_k^\nu + G_i^{(\nu)} = 0 \quad \text{dla } \nu = 1,\dots,N-1,$$

/1.6/ $$N_i[R] + E_i^N S_N = 0,$$

gdzie $D_{ik} = A_{ik}^K(u^0,x)\partial/\partial x_K$ jest operatorem różniczkowym, $\mathcal{A}_{ik} = A_{ik} - iB_i^k$ jest macierzą dyspersyjną. Przez $A_{ik} = D_{ik}\varphi$ oznaczono macierz charakterystyczną układu równań /1.1/, a przez B_i^k pochodną $\partial B_i/\partial u_k$ dla $u_k = u_k^0$. Funkcje $H_{ik}^{(\nu)}$, $G_i^{(\nu)}$

są zależne także od współczynników $g_k^1, \ldots, g_k^{\nu-1}$. Ponadto $H_{ik}^{(\nu)}$ zależne jest liniowo od $\exp(ip\varphi)$.

Wprowadzimy oznaczenie $\partial\varphi/\partial x_K = k_K$, przy czym $k_0 = -\omega$. Wtedy $A_{ik} = k_K A_{ik}^K$ i $\mathcal{A}_{ik} = k_K A_{ik}^K - iB_i^k$, albo

/1.7/
$$\mathcal{A}_{ik} = -\omega I_{ik} + \bar{\mathcal{A}}_{ik} ,$$

gdzie $\bar{\mathcal{A}}_{ik} = k_\varkappa A_{ik}^\varkappa - iB_i^k$, $\varkappa = 1, \ldots, m$. Warunkiem koniecznym istnienia niezerowego rozwiązania g_k^1 równania /1.4/ jest znikanie wyznacznika $Q = \det(\mathcal{A}_{ik})$. W ten sposób dostajemy równanie dyspersyjne

/1.8/
$$Q(-\omega, k) = 0$$

/ k oznacza zmienne $k_\varkappa$ /. Dla rzeczywistych $k_\varkappa$ macierz $\bar{\mathcal{A}}_{ik}$ jest hermitowska przy założeniu, że macierz B_i^k jest antysymetryczna. Wtedy równanie dyspersyjne /1.8/ ma n rzeczywistych pierwiastków dla każdego rzeczywistego $k_\varkappa$. Jeśli macierze $A_{ik}^\varkappa$ nie są symetryczne i macierz B_i^k nie jest antysymetryczna, to wystarczy zażądać, by istniało n rzeczywistych pierwiastków dla każdego rzeczywistego $k_\varkappa$. Spełnienie tego warunku zapewnia poprawność dalszej procedury.

Pierwiastki równania /1.8/ zapiszemy w postaci

/1.9/
$$\omega^{(i)} = \mathcal{H}^{(i)}(t, x, k)$$

dla $i = 1, \ldots, n$ / x oznacza zmienne $x_\varkappa$ /. Zakładamy, że $\mathcal{H}^{(i)}$ są dostatecznie regularnymi funkcjami. Równanie dyspersyjne /1.8/ jest równaniem różniczkowym cząstkowym pierwszego rzędu wyznaczającym funkcję fazową $\varphi(t,x)$. Gałęzie tej funkcji określają równania /1.9/. Wybieramy jedną z gałęzi i będziemy dalej opuszczać wskaźnik "(i)".

Wstęgi charakterystyczne równania /1.9/ spełniają układ równań kanonicznych hamiltona

/1.10/ $$\dot{x}_\varkappa = \partial\mathcal{H}/\partial k_\varkappa ,$$

/1.11/ $$\dot{k}_\varkappa = -\partial\mathcal{H}/\partial x_\varkappa ,$$

gdzie kropką oznaczono pochodną zwyczajną względem t . Krzywe $x_\varkappa = x_\varkappa(t)$ są promieniami układu równań /1.1/, $\gamma_\varkappa = \dot{x}_\varkappa$ jest prędkością promieniową.

Funkcja fazowa określona jest równaniem

/1.12/ $$\dot{\varphi} = -\omega + k_\varkappa \gamma_\varkappa = \mathcal{L} .$$

Lagrangian $\mathcal{L}(t,x,k)$ i hamiltonian $\mathcal{H}(t,x,k)$ są związane zależnością

/1.13/ $$\mathcal{L} = -\mathcal{H} + k_\varkappa \partial\mathcal{H}/\partial k_\varkappa$$

wynikającą z /1.12/.

Zakładamy, że ω jest q-krotnym pierwiastkiem równania dyspersyjnego. Zatem macierz dyspersyjna $\mathcal{A}_{ik}(t,x,\omega,k)$ ma q wektorów zerowych lewych i prawych l_i^θ i r_i^θ dla θ = 1,...,q.

Z równań /1.4/ i /1.5/ wynika, że

/1.14/ $$\overset{1}{g}_k = \sigma_\theta r_k^\theta ,$$

/1.15/ $$\overset{\nu}{g}_k = \overset{\nu}{\sigma}_\theta r_k^\theta + \overset{\nu}{h}_k \qquad dla \ \nu = 2,\dots,N .$$

Współczynnik σ_θ wyznaczony jest na promieniach przez równanie transportu

/1.16/ $$\dot{\sigma}_\theta + a_{\theta'} e^{ip\varphi} \sigma_{\theta'} \sigma_\theta + b_{\theta\theta'} \sigma_{\theta'} = 0 ,$$

gdzie

/1.17/ $$a_\theta = r_k^\theta \, \partial\mathcal{H}/\partial u_k \quad dla \ u_k = \overset{0}{u}_k ,$$

/1.18/ $$b_{\theta\theta'} = m_{\theta\theta''}^{-1} (l_i^{\theta''} D_{ik} r_k^\theta + l_i^{\theta''} A_{il}^{\varkappa k} r_k^\theta \partial \overset{0}{u}_i / \partial x_\varkappa)$$

Przez $m_{\theta\theta''}^{-1}$ oznaczono macierz odwrotną względem $m_{\theta\theta''} = l_i^\theta r_i^{\theta''}$,

$A^{\varkappa k}_{il} = \partial A^{\varkappa}_{il}/\partial u_k$ dla $u_k = u^o_k$. Funkcja h^ν_k w równości /1.15/ jest rozwiązaniem równania algebraicznego

/1.19/ $$-A_{ik} h^\nu_k = D_{ik} g^{\nu-1}_k + H^{(\nu-1)}_{ik} g^{\nu-1}_k + G^{(\nu-1)}_i ,$$

a współczynnik σ^ν_θ jest określony na promieniach przez równanie transportu

/1.20/ $$\dot{\sigma}^\nu_\theta + b^{(\nu)}_{\theta\theta'} \sigma^\nu_{\theta'} + c^{(\nu)}_\theta = 0 ,$$

gdzie

/1.21/ $$b^{(\nu)}_{\theta\theta'} = m^{-1}_{\theta\theta''} (l^{\theta''}_i D_{ik} r^{\theta'}_k + l^{\theta''}_i H^{(\nu)}_{ik} r^{\theta'}_k) ,$$

/1.22/ $$c^{(\nu)}_\theta = m^{-1}_{\theta\theta''} (l^{\theta''}_i D_{ik} h^\nu_k + l^{\theta''}_i H^{(\nu)}_{ik} h^\nu_k + l^{\theta''}_i G^{(\nu)}_i)$$

dla θ , θ' , θ'' = 1,...,q .

2. ASYMPTOTYCZNY CHARAKTER ROZWINIĘCIA

Funkcje $x_\varkappa(t)$ i $k_\varkappa(t)$, będące rozwiązaniem równań kanonicznych Hamiltona /1.10/-/1.11/, są regularne w otoczeniu $t = t^o$ ze względu na regularność funkcji $\mathcal{H}(t,x,k)$. Zatem także funkcja fazowa, określona na promieniu całką

/2.1/ $$\varphi(t,x) = \int_{t^o}^{t} \mathcal{L}(s,x,k)\,ds + \varphi(t^o,x^o) ,$$

jest regularna w otoczeniu $t = t^o$ dla $t > t^o$. W powyższej równości $x_\varkappa = x_\varkappa(t)$, $k_\varkappa = k_\varkappa(t)$, $x^o_\varkappa = x_\varkappa(t^o)$. Rozwiązanie $\varphi(t,x)$ równania dyspersyjnego /1.9/ przy wartości początkowej $\varphi(t^o,x) = \varphi^o(x)$ otrzymuje się przez uzmiennienie w artości początkowej $x^o_\varkappa$ dla funkcji $x_\varkappa(t)$. Ostatecznie stwierdzamy, że funkcja $\varphi(t,x)$ jest regularna w pewnym otoczeniu powierzchni początkowej $t = t^o$ dla $t > t^o$, jeśli tylko funkcja początkowa φ^o jest regularna.

Współczynniki równań transportu /1.16/ i /1.20/ są regularnymi funkcjami zmiennej t . Stąd wynika, że istnieją jednoznaczne rozwiązania tych równań, regularne w pewnym otoczeniu $t = t^o$. Funkcje σ_ϱ, σ_ϱ^ν zależą od parametru p, gdyż współczynniki równań transportu zależą /liniowo/ od funkcji $\exp(ip\varphi)$. Można jednak pokazać, że moduły $|\sigma_\varrho(t) - \sigma_\varrho(t^o)|$, $|\sigma_\varrho^\nu(t) - \sigma_\varrho^\nu(t^o)|$ są ograniczone dla $p \to \infty$ /przez $\sigma_\varrho(t)$, $\sigma_\varrho^\nu(t)$ należy rozumieć funkcje $\sigma_\varrho(t,x)$, $\sigma_\varrho^\nu(t,x)$, gdzie $x_\varkappa = x_\varkappa(t)$ jest rozwiązaniem równań kanonicznych/. Zapiszmy równania /1.16/ w postaci

/2.2/ $$\dot{\sigma}_\varrho = f_\varrho(t, \sigma_1, \ldots, \sigma_q).$$

Niech dziedzina funkcji f_ϱ będzie określona nierównościami $|t-t^o| \leqslant T$ i $|\sigma_\varrho - \sigma_\varrho^o| \leqslant S$, gdzie T i S są dodatnimi stałymi. Funkcje f_ϱ są ciągłe. Ponadto spełniają warunek Lipschitza względem zmiennych σ_ϱ i $|f_\varrho| < M$, $M > 0$. Zarówno stała Lipschitza K jak i stała M są niezależne od parametru p. stąd wniosek, że istnieje otoczenie punktu t^o, określone nierównością

$$|t-t^o| \leqslant \delta = \min\left(\frac{1}{K}, \frac{S}{M}, T\right),$$

w którym układ równań /2.2/ ma jednoznaczne rozwiązanie z wartością początkową $\sigma_\varrho(t^o) = \sigma_\varrho^o$ dla każdego p, i że $|\sigma_\varrho(t) - \sigma_\varrho^o| \leqslant S$ dla każdego p. Podobny wniosek jest prawdziwy w odniesieniu do układu równań transportu /1.20/.

Uzmienniając wartość początkową $x_\varkappa^o$ dostajemy funkcje $\sigma_\varrho(t,x)$, $\sigma_\varrho^\nu(t,x)$ regularne w pewnym otoczeniu powierzchni początkowej $t = t^o$ dla $t > t^o$, jeśli tylko dane początkowe są regularne. Po uwzględnieniu równania /1.19/ stwierdzamy ostatecznie, że współczynniki rozwinięcia $g_i^1(t,x)$ i $g_i^\nu(t,x)$ postaci /1.14/ i /1.15/ są regularne w pewnym otoczeniu powierzchni początkowej przy regularnych danych początkowych.

Jak wynika z teorii równań cząstkowych /patrz np. R. Courant, D. Hilbert [2] /, istnieje jednoznaczne rozwiązanie problemu początkowego dla układu równań /1.1/, regularne w pewnym otoczeniu powierzchni początkowej. Będziemy zakładać, że dane począTkowe mają rozwinięcie asymptotyczne postaci /1.2/, tj. że

$$u_i(t^0,x) = u_i^0(t^0,x) + \sum_{\nu=1}^{N} g_i^\nu(t^0,x)\, S_\nu(\varphi^0) + R_i(t^0,x) \qquad /2.3/$$

gdzie $g_i^\nu(t^0,x)$ są dostatecznie regularne i $R_i(t^0,x) = o(S_N)$ przy $p \to \infty$ w obszarze D_0 powierzchni początkowej. D_0 oznacza przecięcie obszaru D i powierzchni początkowej. W takim razie reszta rozwinęcia /1.2/ jest regularna w pewnym otoczeniu powierzchni początkowej dla $t > t^0$, gdyż współczynniki rozwinięcia, funkcje u_i^0 i funkcje u_i są regularne. Ponadto $R_i(t,x) = o(S_N)$ przy $p \to \infty$ w tym samym otoczeniu, gdyż $u_i \to u_i^0$.

Powyższe rozważania pokazują, że prawdziwe jest następujące

TWIERDZENIE. Rozwiązanie układu równań /1.1/ ma w pewnym otoczeniu powierzchni początkowej rozwinięcie asymptotyczne postaci /1.2/ dla $p \to \infty$, pod warunkiem że funkcja początkowa ma rozwinięcie asymptotyczne takiej postaci.

Innymi słowy, w pewnym otoczeniu powierzchni początkowej rozwinięcie fali biegnącej /1.2/ ma tę własność, że kolejne wyrazy rozwinięcia mają rząd wzrastający i że reszta rozwinięcia ma rząd największy względem potęg $1/p$ dla $p \to \infty$.

3. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ TRANSPORTU

Znalezienie rozwiązania równań transportu /1.16/ i /1.20/ jest w ogólności uciążliwe. Szczególnie kłopotliwe jest rozwiązywanie równań rekurencyjnych /1.20/, których współczynniki są zależne od uprzednio znalezionych funkcji g_i^ν. Niemniej w pewnych prostych przypadkach jest to możliwe.

Dalej będziemy zakładać, że ω jest jednokrotnym pierwiastkiem równania dyspersyjnego /1.9/. Wtedy /1.16/ i /1.20/ są pojedynczymi równaniami, a nie układami równań. Opuszczając wszędzie wskaźniki θ, θ', θ'' mamy

$$\dot{\sigma} + a e^{ip\varphi} \sigma^2 + b\sigma = 0 \qquad /3.1/$$

zamiast /1 .16/ i

/3.2/ $$\dot{\sigma}^{\nu} + b^{(\nu)}\sigma^{\nu} + c^{(\nu)} = 0$$

zamiast /1.20/. Współczynniki tych równań są także odpowiednio prostsze. Równanie transportu /3.1/ ma postać równania Bernouliego /albo Riccatiego/. Jego rozwiązanie znajduje się przez zastosowanie przekształcenia $\sigma = 1/\varrho$. W ten sposób równanie nieliniowe /3.1/ przechodzi w równanie liniowe niejednorodne

/3.3/ $$\dot{\varrho} - b\varrho - ae^{ip\varphi} = 0,$$

którego rozwiązanie można łatwo otrzymać metodą uzmienniania stałej z rozwiązania równania jednorodnego. Ta ostatnia uwaga dotyczy także równania transportu /3.2/. W przypadku gdy promień jest wyjątkowy, tj. gdy $a \equiv 0$, równanie /3.3/ staje się jednorodne.

Równanie /3.3/ upraszcza się znacznie wtedy, gdy macierze $A^{\varkappa}_{ik}$ są niezależne od t , $x_{\varkappa}$ i gdy u°_{i} = const. W takim przypadku bowiem, jak wynika z /1.11/, $k_{\varkappa}$ jest stałe na promieniach i równe swojej wartości początkowej $k^{\circ}_{\varkappa}$. Tym samym $\gamma_{\varkappa}$ i ω są stałe na promieniach, co wynika z równań /1.10/ i /1.9/. Przy założeniu że $t^{\circ} = 0$ mamy

/3.4/ $$x_{\varkappa} = \gamma^{\circ}_{\varkappa} t + x^{\circ}_{\varkappa} ,$$

gdzie $\gamma^{\circ}_{\varkappa} = \partial\mathcal{H}/\partial k_{\varkappa}$ dla $k_{\varkappa} = k^{\circ}_{\varkappa}$. Funkcja fazowa ma na promieniach postać

/3.5/ $$\varphi(t,x) = \mathcal{L}^{\circ} t + \varphi^{\circ}(x^{\circ})$$

przy $\mathcal{L}^{\circ} = \mathcal{L}(k^{\circ})$, a rozwiązaniem równania dyspersyjnego jest funkcja /3.5/ po podstawieniu zależności $x^{\circ}_{\varkappa} = x_{\varkappa} - \gamma^{\circ}_{\varkappa} t$

Współczynniki a , b równania transportu /3.3/ są w tym przypadku stałe.

Najprostszy przypadek to ten, kiedy powierzchnia fazowa $\varphi(t,x) = 0$ jest w chwili początkowej płaszczyzną. Wtedy $\varphi^0(x^0) = k^0_\varkappa x_\varkappa$ i funkcja fazowa dana jest jako

/3.6/ $$\varphi(t,x) = -\omega^0 t + k^0_\varkappa x_\varkappa ,$$

gdzie $\omega^0 = \mathcal{H}(k^0)$. Teraz $b = 0$ w równaniu /3.3/.

Przejdźmy do dyskusji rozwiązania równania transportu /3.1/. Najpierw znajdujemy rozwiązanie równania /3.3/. Po przekształceniu $\varrho = 1/\sigma$ otrzymujemy na promieniu

/3.7/ $$\sigma(t) = [P(e^{ip\mathcal{L}^0 t} - e^{bt}) + \frac{1}{\sigma^0} e^{bt}]^{-1}$$

$P = ae^{ip\varphi^0}/(ip\mathcal{L}^0 - b)$. Współczynnik b jest związany z geometrią powierzchni fazowych $\varphi(t,x) = 0$, w szczególności $b = 0$ dla płaskich powierzchni fazowych. Nieliniowość układu równań /1.1/ objawia się różnym od zera współczynnikiem a . Lagrangian $\mathcal{L}^0$ jest różny od zera, gdy występuje dyspersja, przy braku dyspersji $\mathcal{L}^0 = 0$. Dla dużych wartości parametru p wyraz mnożony przez P w wyrażeniu /3.7/ jest do pominięcia, gdyż $|P| \to$ $\to 0$ dla $p \to \infty$. Zatem w przybliżeniu

/3.8/ $$\sigma(t) = \sigma^0 e^{-bt},$$

i dla $b = 0$ mamy po prostu $\sigma(t) = \sigma^0$. W ogólności należy uznać, że wyrażenie /3.7/ daje przyczynki do wyrazów wyższego rzędu w rozwinięciu fali biegnącej /1.2/.

4. RÓWNANIA DYSPERSYWNE FIZYKI MATEMATYCZNEJ

Układy równań cząstkowych pierwszego rzędu, dyspersywne, stanowią niewielką część wszystkich znanych równań dyspersywnych fizyki matematycznej. W dodatku prawie żaden z tych układów nie jest konserwatywny, a więc w zasadzie procedura fali biegnącej nie może być zastosowana. Do tej klasy należy układ równań magnetogazodynamiki ze skończoną przewodnością. Większą część znanych równań dyspersywnych stanowią pojedyncze równania cząstkowe wyższego rzędu, takie jak równanie Kortewega-de Vriesa, czy równanie Schrödingera, które często nie są hiperboliczne.

Najbardziej znanym przykładem układu równań dyspersywnych jest układ równań teorii magnetojonowej /patrz R. M. Lewis [3] /. Po odpowiednim przekształceniu zmiennych zależnych i zmiennych niezależnych dostajemy

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times H + pbJ = 0, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} - pbE = 0. \tag{4.3}$$

E, H, J są wektorami odpowiednio pola elektrycznego, pola magnetycznego i prądu. b jest daną funkcją zmiennych x, y, z. Dla $(u_i) = (E,H,J)$ układ /4.1/-/4.3/ przybiera postać /1.1/ z symetrycznymi macierzami $A^{\varkappa}_{ik}$ i z antysymetrycznym B^k_i. Jest to układ liniowy i konserwatywny /brak jest dysypacji/.

Rozpatrzymy teraz interesujący przykład układu równań linii transmisyjnej

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{C}\frac{\partial i}{\partial x} + p\alpha u = 0, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{1}{L}\frac{\partial u}{\partial x} + p\beta i = 0. \tag{4.5}$$

Zmienne u, i są odpowiednio napięciem i prądem. C, L są pojemnością i indukcyjnością na jednostkę długości linii transmisyjnej. $\alpha = G/C$, $\beta = R/L$, gdzie G jest upływnością i R opornością na jednostkę długości linii. Układ równań /4.4/-/4.5/, który ma postać /1.1/, nie jest konserwatywny, gdyż równanie dyspersyjne ma zespolone pierwiastki. Jednakże dopuszczenie ujemnej oporności R /jest to możliwe do zrealizowania/ oraz dobranie parametrów tak, by $\alpha = -\beta$, powoduje, że pierwiastki równania dyspersyjnego,

/4.6/ $$\omega = \pm\sqrt{k^2c^2-\alpha^2},$$

są rzeczywiste dla $k^2 > \alpha^2/c^2$, gdzie $c^2 = 1/LC$. Zatem w tym przypadku procedura fali biegnącej jest poprawna, pod warunkiem że wartość początkowa dla funkcji k jest dostatecznie duża. Parametry α, β mogą być funkcjami zmiennych niezależnych u, i. Należy jedynie zadbać, by $\alpha = -\beta$ dla $(u_k^0) = (u^0, i^0)$, tj. dla $u^0 = 0$, $i^0 = 0$ /przyjmujemy, że $u_k^0 =$ const/.

Innym sposobem pozbycia się dysypacji w równaniach /4.4/-/4.5/ jest zastosowanie przekształcenia $u_k = v_k \exp[-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)t]$, gdzie $(u_k) = (u, i)$ /patrz R. Courant, D. Hilbert [4] /. Wtedy otrzymujemy

/4.7/ $$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{C}\frac{\partial v_2}{\partial x} + p\gamma v_1 = 0,$$

/4.8/ $$\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{1}{L}\frac{\partial v_1}{\partial x} - p\gamma v_2 = 0,$$

$\gamma = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$. Bezwymiarowy parametr p został usunięty przed przekształceniem i następnie ponownie wprowadzony. Równanie dyspersyjne układu /4.7/-/4.8/ ma rzeczywiste pierwiastki

/4.9/ $$\omega = \pm\sqrt{k^2c^2-\gamma^2}$$

pod warunkiem że $k^2 > \gamma^2/c^2$.

Następnym przykładem, jaki rozpatrzymy, będzie jednowymiarowe równanie Kleina-Gordona

/4.10/ $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0.$$

To równanie jest równoważne układowi dwóch równań pierwszego rzędu /patrz G. B. Whitham [5] /. Istotnie, można go zapisać jako

/4.11/ $$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u + u = 0.$$

Zatem wprowadzając nową zmienną $v = \partial u/\partial t + c\,\partial u/\partial x$ dostajemy

/4.12/ $$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} - v = 0,$$

/4.13/ $$\frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial v}{\partial x} + u = 0.$$

Przypuśćmy, że w równaniu /4.10/ wyraz nieróżniczkowany jest pomnożony przez p^2. W takim razie wprowadzając nową zmienną $pv = \partial u/\partial t + c\,\partial u/\partial x$ otrzymujemy

/4.14/ $$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} - pv = 0,$$

/4.15/ $$\frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial v}{\partial x} + pu = 0,$$

czyli układ równań postaci /1.1/ z $(u_i) = (u,v)$. Jest on symetrycznie hiperboliczny i konserwatywny, tj. B_i^k jest antysymetryczne. Pierwiastki równania dyspersyjnego,

/4.16/ $$\omega = \pm\sqrt{k^2c^2+1}$$

są rzeczywiste dla każdego k.

Nieliniowe równanie Kleina-Gordona

/4.17/ $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p^2 V(u) = 0$$

można w sposób opisany wyżej zastąpić układem równań

/4.18/ $$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} - pv = 0,$$

/4.19/ $$\frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial v}{\partial x} + pV(u) = 0.$$

Funkcja $V(u)$ powinna spełniać warunek $V'(u^\circ) = 1$ po to, by ten układ równań był konserwatywny. Stąd wniosek, że albo $V(u) = u$, albo u° = const. W tym drugim przypadku $v^\circ = 0$, a więc także $V(u^\circ) = 0$. Przykładem funkcji spełniającej warunki $V(u^\circ) = 0$ i $V'(u^\circ) = 1$ dla u° = const jest $V(u) = \sin u$ dla $u^\circ = 0$ albo $V(u) = -\cos u$ dla $u^\circ = \pi/2$. Równanie dyspersyjne dla układu /4.18/-/4.19/ jest takie samo jak dla układu /4.14/-/4.15/.

5. KONKLUZJA

Rozważania punktu 3 pokazują, że nieliniowość układu równań /1.1/, która objawia się już w pierwszym wyrazie rozwinięcia asymptotycznego /1.2/, jest dla $p \to \infty$ w pierwszym przybliżeniu do pominięcia. Dzieje się tak przynajmniej wtedy, gdy u_i° = const. Istotnie, w równości /3.7/ wyrażenie P, zawierające czynnik a, jest rzędu $1/p$ dla $p \to \infty$. Natomiast funkcja b, dana przez /1.17/, zależy tylko od macierzy dyspersyjnej $\mathcal{A}_{ik}(u^\circ)$ /za pośrednictwem jej wektorów zerowych/, a więc od wartości macierzy $B_i^k(u^\circ)$. Ten związek funkcji b z nieliniowością wyrazu nieróżniczkowanego w równaniach /1.1/ ma jednak niewielkie znaczenie. Można bowiem zastąpić /1.1/ przez układ równań z wyrazem nieróżniczkowanym liniowym postaci $B_{ik}u_k$, gdzie $B_{ik} = B_i^k(u^\circ)$.

LITERATURA

[1] W. KAPRUS, Metoda fal biegnących dla równań quasi-liniowych dyspersywnych, Prace IPPT, 3/1981.

[2] R. COURANT and D. HILBERT, Methods of Mathematical Physics, Vol. 2, Interscience Publishers, 1962. Rozdz. VI, §10.

[3] R. M. LEWIS, Asymptotic methods for the solution of dispersive hyperbolic equations /w monografii "Asymptotic Solutions of Differential Equations and Their Applications" wyd. C. H. Wilcox, John Wiley and Sons, 1964/.

[4] R. COURANT and D. HILBERT, op. cit., rozdz. III, §3.

[5] G. B. WHITHAM, Linear and Nonlinear Waves, John Wiley and Sons, 1974. Rozdz. V, §5.2 .