

7.73 — ośrodki niejednorodne, kompozyty

Marek Sokołowski

**PRZYBLIŻONA ANALIZA
USTALONEGO I NIEUSTALONEGO
PRZEPLYWU CIEPŁA
W OŚRODKU ZAWIERAJĄCYM INKLUZJE**

26/1987

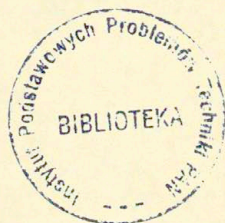
P. 269



WARSZAWA 1987

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 czerwca 1987 r.



56830



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,71 Ark.druk. 2,5

Oddano do drukarni w lipcu 1987 r.

Nr zamówienia 387/87.

warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

PRZYBLIŻONA ANALIZA USTALONEGO I NIEUSTALONEGO PRZEPLYWU CIEPŁA
W OŚRODKU ZAWIERAJĄCYM INKLUZJE

1. Wstęp

W kilku wcześniejszych pracach / [1] - [4] / zajęliśmy się problemem przybliżonego lecz efektywnego określania wpływu różnego rodzaju defektów /otworów, inkluzji, szczelin/ na rozkład naprężeń w nieograniczonych ośrodkach sprężystych poddanych płaskiemu lub antypłaskiemu stanowi odkształcenia. Zastosowana do tych zagadnień przybliżona metoda analizy opierała się na spostrzeżeniu, że działanie takich defektów można w pewnych przypadkach zastąpić działaniem momentów skupionych różnego rzędu /multipoli siłowych/ przyłożonych do ośrodka jednorodnego /bez defektów/. Intensywność tych zastępczych multipoli określa się w prosty sposób w zależności od charakteru defektu /inkluzja, otwór, szczelina/, jego kształtu /kołowego lub eliptycznego/ i rozmiarów oraz od własności tzw. pierwotnego pola naprężeń, którym to mianem określa się takie pole naprężeń jakie panowałoby w ośrodku sprężystym pozbawionym rozważanego defektu. Dzięki takiemu sposobowi modelowania defektów lub takiemu sposobowi dyskretyzacji problemu ośrodka niejednorodnego, zagadnienie wpływu defektów na pole naprężeń i ich wzajemnego oddziaływania sprowadzić można do rozwiązania prostego układu liniowych równań algebraicznych przypominających swym charakterem znane z mechaniki budowli układy równań dla konstrukcji statycznie niewyznaczalnych. Przy założeniu, że pola naprężeń pierwotnych są dostatecznie regularne a defekty nie są rozmieszczone zbyt gęsto, metoda ta okazuje się nie tylko bardzo prosta ale i dokładna oraz efektywniejsza niż zazwyczaj w takich przypadkach stosowane metody numeryczne różnic lub elementów skończonych.

W wymienionych na wstępie pracach zajęto się jedynie ustalonymi stanami naprężenia. Tutaj podejmiemy próbę wykazania, że metoda może być rozszerzona na przypadki pól zależnych od czasu, a więc niestalonych. Ponieważ chodzić nam tu będzie jedynie o pokazanie zasady postępowania w takich przypadkach, ograniczymy się do przeanalizowania równania przewodnictwa ciepła i przypadków jedno- oraz dwuwymiarowych w ośrodkach nieograniczonych zawierających kołowo-cylindryczne inkluzje lub otwory.

Problemy jednowymiarowe przepływu ciepła w ośrodkach niejednorodnych są oczywiście elementarne i nie wymagają wprowadzania jakichś szczególnych metod analizy; włączamy je jednak do naszych rozważań będąc zdania, że nadają się najlepiej do zademonstrowania zasad stosowania omawianej metody i jej podobieństwa do metod analizy układów statycznie niewyznaczalnych znanych z mechaniki budowli.

2. Jednowymiarowy ustalony przepływ ciepła w ośrodku niejednorodnym

Załóżmy, że jednorodny ośrodek przewodzący ciepło, scharakteryzowany współczynnikiem przewodnictwa λ zajmuje obszar ograniczony płaszczyznami $x = 0$ i $x = 1$; ośrodek zawiera warstwę /inkluzję/ $a \leq x \leq a + c$ z materiału o współczynniku przewodnictwa λ_1 i znajduje się w stanie ustalonego przepływu ciepła przy ustalonych temperaturach powierzchni zewnętrznych: $T(0) = T_0$, $T(1) = 0$.

Rozwiązanie tego zagadnienia jest oczywiście elementarnie proste. Równanie przewodnictwa ciepła

$$T''(x) = 0$$

z warunkami brzegowymi $T(0) = T_0$, $T(1) = 0$ i warunkami ciągłości temperatury $T(x)$ i strumienia ciepła

$Q_x = -\lambda \partial T / \partial x$ na powierzchniach rozdzielających ośrodki $x = a$ i $x = a + c$ prowadzi do liniowych rozwiązań w trzech obszarach: I ($0 \leq x \leq a$), II ($a \leq x \leq a + c$), III ($a + c \leq x \leq 1$).

$$T_I = T_0 \left[1 - \frac{x/l}{1 + \delta(\varphi - 1)} \right],$$

$$/2.1/ \quad T_{II} = T_0 \left[1 - \frac{\alpha + \varphi(x/l - \alpha)}{1 + \delta(\varphi - 1)} \right],$$

$$T_{III} = T_0 \frac{1 - x/l}{1 + \delta(\varphi - 1)}$$

przy oznaczeniach

$$/2.2/ \quad \delta = c/l, \quad \alpha = a/l, \quad \varphi = \lambda/\lambda_1.$$

Na rys.1 przedstawiono linią ciągłą przebieg temperatury /2.1/ w ciele z inkluzją, a linią przerywaną - przebieg temperatury w przypadku ciała jednorodnego,

$$/2.3/ \quad T = T_0 (1 - x/l).$$

Kształt zakreskowanego pola zawartego między tymi wykresami sugeruje możliwość zastąpienia inkluzji /niejednorodności ośrodka/ odpowiednim rozkładem źródeł ciepła w ośrodku jednorodnym.

W przypadku źródeł ciepła o intensywności $W(x)$ rozłożonych w jednorodnym ośrodku o współczynniku λ temperaturę wyznaczamy z równania

$$/2.4/ \quad \frac{d^2 T}{dx^2} = - \frac{W(x)}{\lambda}.$$

W przypadku źródła skupionego na płaszczyźnie $x = a$ /lub w punkcie $x = a$ jeśli operować będziemy jednowymiarowym obrazem ośrodka/, a więc gdy $W(x) = W_a \delta(x - a)$, gdzie $\delta(x - a)$ oznacza funkcję Diraca, rozwiązaniem równania /2.3/ z jednorodnymi warunkami brzegowymi $T(0) = T(1) = 0$ jest funkcja

$$T_L(x) = \frac{W_a}{\lambda} (1 - \alpha) x, \quad x/l < \alpha,$$

$$T_R(x) = \frac{W_a}{\lambda} \alpha (1 - x), \quad x/l > \alpha.$$

Przyłożenie drugiego źródła ciepła o intensywności $-W_a$ w punkcie $x = a + c$ prowadzi do rozkładu temperatur przedstawionego zakreśkowanym polem na rys.2 o kształcie identycznym z wykresem na rys.1. W granicznym przypadku, gdy $c \ll 1$ i zmierza do zera przy zachowaniu stałości iloczynu $W_a \cdot c = M_a$, działanie skupionych źródeł ciepła W_a ; $-W_a$ zastąpić można działaniem dipola źródłowego /"momentu"/ M_a prowadzącego do rozkładu temperatury

$$/2.5/ \quad T_L(x) = \frac{M_a}{\lambda} \frac{x}{l}, \quad T_R(x) = -\frac{M_a}{\lambda} \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Rys.3 uwidacznia zupełną analogię wykresu $T(x)$ /2.5/ z wykresem momentów zginających w belce swobodnie podpartej w punktach $x = 0$ i $x = 1$ obciążonej momentem skupionym w punkcie $x = a$.

Przy analizie rozkładu temperatury w ośrodku z niejednorodnościami porównanie rys.1, 2, 3 prowadzi do wniosku, że działanie niejednorodności modelować można bądź za pomocą dwóch źródeł ciepła /rys.2/, bądź też dipola źródłowego M_a /rys.3/ o odpowiednio dobranej intensywności. Z porównania wzorów /2.1/ i /2.3/ otrzymujemy zależność

$$/2.6/ \quad M_a = \frac{\lambda_1 c (\varphi - 1)}{1 + \delta(\varphi - 1)} \frac{T_0}{1}.$$

Oznaczając teraz symbolem $T^{PR}(x)$ pierwotny rozkład temperatury, to jest rozkład jaki panowałby w ośrodku bez inkluzji w punkcie a /w rozważanym przypadku $T^{PR} = T_0(1 - x/l)$, wzór /2.3/ /, zależność /2.6/ przedstawić można w postaci

$$/2.7/ \quad M_a = -\lambda \left[\frac{T^{PR}}{x} \right]_{x=a} \cdot c \frac{\varphi - 1}{1 + \delta(\varphi - 1)}.$$

Jak widać, zastępczy dipol źródłowy jest proporcjonalny do iloczynu trzech wielkości: strumienia ciepła w układzie pierwotnym obliczonym dla punktu $x = a$,

$$-\lambda \left[\frac{\partial T^{PR}(x)}{\partial x} \right]_{x=a} = Q_a^{PR},$$

do rozmiarów inkluzji c oraz współczynnika charakteryzującego niejednorodność

$$\frac{\varphi - 1}{1 + \delta(\varphi - 1)};$$

Współczynnik ten przy $\delta \rightarrow 0$ zmierza do wartości $\lambda/\lambda_1 - 1$ i zmieniać się może w granicach $(-1, \infty)$.

Oznaczając iloczyn

$$c \frac{\varphi - 1}{1 + \delta(\varphi - 1)} \text{ przez } \Phi_a,$$

wzór /2.7/ możemy wyrazić w postaci

$$/2.8/ \quad M_a = Q_a^{PR} \Phi_a.$$

Wyprowadzone wyżej wzory możemy wykorzystać do ułożenia odpowiedniego układu równań dla ośrodka $0 < x < 1$ o współczynniku przewodnictwa λ zawierającego n inkluzji, a więc warstw o grubościach c_i zajmujących obszary $a_i \pm c_i/2$ i o współczynnikach przewodnictwa λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Jeśli warunki brzegowe dla temperatury pozostają niezmienione, $T(0) = T_0$ i $T(1) = 0$, to na podstawie wzoru /2.8/ intensywność zastępczych dipoli źródłowych umieszczonych w płaszczyznach $x = a_i = \alpha_i l$ wynosi

$$/2.9/ \quad M_i = Q_i^{PR} \Phi_i,$$

gdzie

$$\Phi_i = c_i \frac{\varphi_i - 1}{1 + \delta_i (\varphi_i - 1)}, \quad \varphi_i = \frac{\lambda}{\lambda_i},$$

/2.10/

$$\delta_i = c_i / l, \quad q^{Pr} = -\lambda \left[\partial T^{Pr} / \partial x \right]_{x=a_i}.$$

Z kolei gradient pierwotnego pola temperatury wyrazić można przez gradient temperatury /2.3/ wywołany w układzie podstawowym /jednorodnym/ warunkami brzegowymi /"obciążeniem zewnętrznym"/, czyli $-T_0/l$ oraz przez sumę gradientów temperatury pochodzących od niewiadomych dipoli zastępczych M_k , $k \neq i$, umieszczonych w płaszczyznach $x = a_k$. Zgodnie ze wzorem /2.5/ gradienty te są równe $M_k / \lambda l$. Wobec tego układ równań /2.9/ przyjmuje postać

$$/2.11/ \quad M_i + \frac{1}{l} \Phi_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{k=n} M_k = \Phi_i \lambda T_0 / l, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Na uwagę zasługują dwa wnioski wynikające z przedstawionych rozważań.

/1/ Nakład pracy obliczeniowej. W przypadku obszaru zawierającego n inkluzji o parametrach λ_i , a_i , c_i , zagadnienie wyznaczenia temperatury sprowadza się do rozwiązania układu n równań algebraicznych /2.11/ z taką samą liczbą niewiadomych M_i . Zwykła droga postępowania polegająca na założeniu liniowych przebiegów temperatury $A_1 + B_1 x$ w poszczególnych podobszarach I, II, ..., $2n + 1$ i wyznaczeniu współczynników A_1 i B_1 z warunków ciągłości temperatury i strumienia ciepła wymaga rozwiązania czterokrotnie większej liczby równań.

/2/ Dokładność rozwiązania. Ze względu na szczególnie prosty charakter rozwiązań ustalonego problemu jednowymiarowego /liniowe przebiegi temperatur/, metoda dipoli zastępczych /2.11/ prowadzi do rozwiązania ścisłego poza obszarem inkluzji; rozszerzenie rozwiązania na obszar inkluzji jest elementarnie proste i może być przeprowadzone nawet sposobem wykreślnym.

Problem ten wyjaśni następujący przykład.

Przykład 1. Załóżmy, że obszar $0 < x < 1$ zawiera dwie inkluzje o charakterystykach $\lambda_1 = \lambda/6$, $\alpha_1 = 0.25$, $\delta_1 = 0.1$ i $\lambda_2 = \lambda/3$, $\alpha_2 = 0.65$, $\delta_2 = 0.1$ /rys.4/. Układ równań /2.11/, wobec

$$\Phi_1 = \frac{0.1 \cdot 5}{1 + 0.1 \cdot 5} = \frac{1}{3}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{6}$$

ma postać

$$M_1 + \frac{1}{3} M_2 = \frac{1}{3} \lambda T_0, \quad ,$$

$$\frac{1}{6} M_1 + M_2 = \frac{1}{6} \lambda T_0$$

i rozwiązanie

$$M_1 = \frac{5}{17} \lambda T_0, \quad M_2 = \frac{2}{17} \lambda T_0.$$

Uwzględniając wzory /2.5/ i /2.3/ otrzymujemy wzory na temperaturę $T(x)$ w obszarach I, II, III /rys.4/.,

$$T_I = \frac{T_0}{17}(17 - 10x), \quad T_{II} = \frac{T_0}{17}(12 - 10x), \quad T_{III} = \frac{T_0}{17}(10 - 10x).$$

Wykres $T(x)$ uzyskany w ten sposób, uzupełniony odcinkami kreskowanymi w obszarze inkluzji /rys.5/, spełnia wszystkie warunki zadania i jest ścisły.

3. Dwuwymiarowy ustalony przepływ ciepła

Rozważmy przypadek nieskończonego obszaru przewodzącego ciepło ze współczynnikiem przewodnictwa λ zawierający kołową /kołowo-cylindryczną/ inkluzję z materiału o współczynniku λ_1 , zajmującą obszar $x^2 + y^2 < a^2$. W dużej odległości od inkluzji, dla $x^2 + y^2 = r^2 \gg a^2$, zakładamy stałe wartości składowych strumienia ciepła, $Q_x = -A_0$, $Q_y = -B_0$, a więc liniowy rozkład temperatury: dla $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$

$$/3.1/ \quad T^{\text{sc}}(x,y) = \frac{A}{\lambda} x + \frac{B}{\lambda} y + \text{const.}$$

Podobne zadania, jednak z bardziej ogólnymi warunkami brzo-
gowymi w nieskończoności i odnoszące się do antypłaskiego sta-
nu odkształcenia w ciele sprężystym zawierającym inkluzje o
przekroju eliptycznym, rozważono obszernie w pracy [4]. Tutaj
ograniczmy się do najprostszej postaci warunku /3.1/.

Ścisłe rozwiązanie postawionego tu zadania jest oczywiście
znane /por. np. [5] / i ma postać

$$/3.2/ \quad T(\varrho, \theta) = \frac{A_0 a}{\lambda} \left(\varrho + \frac{\Lambda}{\varrho} \right) \cos \theta + \\ + \frac{B_0 a}{\lambda} \left(\varrho + \frac{\Lambda}{\varrho} \right) \sin \theta ,$$

gdzie $2a$ jest średnicą inkluzji, $\varrho = r/a$, $x = r \cos \theta$,
 $y = r \sin \theta$, a współczynnik

$$/3.3/ \quad \Lambda = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda + \lambda_1}$$

charakteryzuje niejednorodność ośrodka i przyjmuje wartość z
przedziału $(-1, 1)$; przypadek $\Lambda = -1$ oznacza inkluzję
wykonaną z doskonałego przewodnika ciepła, $\Lambda = 1$ - z dos-
konalego izolatora, zaś $\Lambda = 0$ - brak inkluzji /ośrodek
jednorodny/.

Efektom działania inkluzji jest więc, jak to wynika z porów-
nania wzorów /3.1/ i /3.2/, dodatkowe pole temperatury

$$/3.4/ \quad \Delta T = \frac{A_0 a}{\lambda} \frac{\Lambda}{\varrho} \cos \theta + \frac{B_0 a}{\lambda} \frac{\Lambda}{\varrho} \sin \theta .$$

Podobne pole temperatury uzyskać można w ośrodku jednorod-
nym o współczynniku λ przykładając doń odpowiedni układ
źródeł ciepła. Skupione, liniowe źródło ciepła rozłożone wzdłuż
osi $(0,0,z)$ prowadzi w ośrodku nieograniczonym do pola tem-
peratury

$$/3.5/ \quad T(x,y) = - \frac{V}{2\pi\lambda} \log r \quad .$$

Rozwiązanie odpowiadające działaniu dipola źródłowego w początku układu współrzędnych otrzymamy różniczkując funkcję /3.5/ względem x oraz y . Oznaczając składowe tego dipola przez M_x i M_y otrzymujemy

$$/3.6/ \quad T(r,\theta) = - \frac{1}{2\pi\lambda} \left[M_x \frac{\cos\theta}{r} + M_y \frac{\sin\theta}{r} \right]$$

albo, przy oznaczeniach

$$/3.7/ \quad T^x = - \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{\cos\theta}{r} \quad , \quad T^y = - \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{\sin\theta}{r}$$

wzór

$$/3.8/ \quad T(r,\theta) = M_x T^x(r,\theta) + M_y T^y(r,\theta).$$

Porównanie wzorów /3.7/ lub /3.8/ z /3.4/ prowadzi do wniosku, że działanie inkluzji kołowo-cylindrycznej $r = a$ w nieograniczonym ośrodku poddanym w nieskończoności działaniu temperatury /3.1/ jest, w obszarze poza inkluzją, ściśle równoważne działaniu dipoli źródłowych M_x , M_y przyłożonych w punkcie $r = 0$ ośrodka jednorodnego. Intensywności tych dipoli zastępczych wynoszą

$$/3.9/ \quad \begin{aligned} M_x &= - A_0 \wedge 2\pi a^2 \quad , \\ M_y &= - B_0 \wedge 2\pi a^2 \quad . \end{aligned}$$

Ponieważ jednak /por./3.1/ /

$$A_0 = -\lambda \left[\frac{\partial T^{Pr}}{\partial x} \right]_{x=y=0} \quad , \quad B_0 = -\lambda \left[\frac{\partial T^{Pr}}{\partial y} \right]_{x=y=0} \quad ,$$

gdzie $T^{Pr} = T^\infty$ oznacza pierwotne pole temperatury obli-

zione dla ośrodka bez inkluzji w punkcie $r = 0$, to wzory /3.9/ przedstawić można również w postaci

$$/3.10/ \quad M_x = Q_{x0}^{pr} 2\lambda \pi a^2, \quad M_y = Q_{y0}^{pr} 2\lambda \pi a^2.$$

Porównanie wzorów /3.10/ i /2.7/ pokazuje pełną analogię obu wyników: przedstawiają one iloczyny składowych pierwotnego pola strumieni ciepła, rozmiary inkluzji i charakterystykę niejednorodności, tym razem w prostej postaci

$$2\lambda = 2(\lambda - \lambda_1) / (\lambda + \lambda_1).$$

Zastępowanie pojedynczej inkluzji parą dipoli źródłowych /3.10/ w celu uzyskania ścisłego /poza obszarem inkluzji/ rozwiązania problemu nie ma, oczywiście, praktycznego sensu. Takie modelowanie inkluzji nabiera dopiero znaczenia w przypadku istnienia szeregu inkluzji prowadzącego do niejednorodnego pola pierwotnych pól przepływu ciepła.

Założmy, że ośrodek zawiera więcej inkluzji; na rys.6 zaznaczono jedynie dwie z nich o środkach w punktach $0,0$, x_2, y_2 , promieniach a_1 i a_2 oraz współczynnikach przewodnictwa λ_1 i λ_2 . Zakładając, że temperatura ośrodka w nieskończoności zmierza znów do funkcji /3.1/, intensywność dipoli zastępczych dla inkluzji (1), M_{x1} , M_{y1} , obliczamy ze wzoru /3.10/ posługując się /3.1/ oraz /3.7/. Pierwotne pole temperatur dla tej inkluzji T_1^{pr} składa się z temperatury "układu podstawowego" /3.1/ oraz z temperatury pochodzącej od /tymczasem nieznanym/ dipoli M_{x2} , M_{y2} zastępujących inkluzję (2) /wzory /3.7/, /3.8/ /.

$$/3.11/ \quad T_1^{pr}(x,y) = \frac{A_0}{\lambda} x + \frac{B_0}{\lambda} y + \\ + M_{x2} T^x(x-x_2, y-y_2) + M_{y2} T^y(x-x_2, y-y_2).$$

Odpowiednie gradienty tego pola potrzebne do obliczenia M_{x1} , M_{y1} wynoszą więc

$$\left[\frac{\partial T_1^{\text{Pr}}}{\partial x} \right]_1 = \frac{A_0}{\lambda} + M_{x2} \left[\frac{\partial T^x}{\partial x} \right]_1 + M_{y2} \left[\frac{\partial T^y}{\partial y} \right]_1, \quad /3.12/$$

$$\left[\frac{\partial T_1^{\text{Pr}}}{\partial y} \right]_1 = \frac{B_0}{\lambda} + M_{x2} \left[\frac{\partial T^x}{\partial y} \right]_1 + M_{y2} \left[\frac{\partial T^y}{\partial y} \right]_1.$$

Ze wzoru /3.10/ otrzymujemy więc dwa równania

$$M_{x1} = Q_{x1}^{\text{Pr}} 2\lambda_1 \pi a_1^2, \quad /3.13/$$

$$M_{y1} = Q_{y1}^{\text{Pr}} 2\lambda_1 \pi a_1^2,$$

zawierające cztery niewiadome M_{x1} , M_{y1} , M_{x2} , M_{y2} . Podobne równania napisane dla inkluzji (2) prowadzą do dwóch dalszych równań i umożliwiają rozwiązanie problemu. W przypadku n inkluzji otrzymujemy w ten sposób $2n$ równań liniowych typu /3.13/ z $2n$ niewiadomymi.

Należy tu podkreślić dwa elementy przedstawionego sposobu analizy.

/1/ Nakład pracy. Rozwiązanie ściśle problemu w przypadku istnienia kilku inkluzji jest w ogólnym przypadku nieosiągalne i stosuje się w takich zadaniach metody numeryczne, a więc np. metodę różnic lub elementów skończonych, co związane jest z reguły z koniecznością rozwiązywania układów równań o liczbie niewiadomych wielokrotnie przekraczającej $2n$.

/2/ Dokładność rozwiązania. W odróżnieniu od przypadku jednowymiarowego lub pojedynczej inkluzji kołowej, rozwiązanie uzyskane omawianą metodą w przypadku kilku inkluzji lub nielinowego rozkładu temperatury w nieskończoności jest przybliżone. Dokładność tego rozwiązania można łatwo zwiększyć wprowadzając do rozważań multipole wyższego rzędu, co zostało omówione szczegółowo w pracy [4]. Dokładność rozwiązania przybliżonego jest tym mniejsza im gęstszy jest rozkład inkluzji. W pracy [4] pokazano, że jeśli odległość wzajemna krawędzi inkluzji nie jest mniejsza od ich średnic, błąd rozwiązania

Przybliżonego nie powinien przekraczać 1%.

Przykład 2. Sposób wyznaczania momentów zastępczych i przybliżonego rozkładu temperatury wyjaśnimy na prostym przykładzie nieograniczonego ośrodka z dwiema jednakowymi inkluzjami (1) i (2) umieszczonymi w odległości H od siebie i położonymi bądź nad sobą /przypadek I/ lub obok siebie /przypadek II/, rys.7; zakładamy w obu przypadkach, że w dużej odległości od inkluzji zapewniony jest stały przepływ ciepła w kierunku osi y , a więc $T^\infty = y B_0 / \lambda + \text{const.}$, $Q_y^\infty = -B_0$.

Łatwo stwierdzić, że ze względu na symetrię obu zadań zastępcze dipole źródłowe dla obu inkluzji są identyczne, $M_{y1} = M_{y2} = M_y$ i $M_{x1} = M_{x2} = 0$. Wobec tego pierwotne pole temperatury $T_2^{\text{Pr}}(x, y)$ potrzebne do wyznaczenia zastępczego dipola $M_y = M_{y2}$ ma postać

$$T_2^{\text{Pr}} = \frac{B_0}{\lambda} y - \frac{1}{2\pi\lambda} M_{y1} \frac{y}{r^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

oraz

$$/3.14/ \quad -\lambda \frac{\partial T^{\text{Pr}}}{\partial y} = -B_0 + \frac{1}{2\pi} M_{y1} \frac{x^2 - y^2}{r^4}.$$

Wartość dipoli zastępczych M_{y2} obliczamy ze wzorów /3.10/. W przypadku I /rys.7/ obliczamy wartość wyrażenia /3.14/ w punkcie $x = 0$, $y = H$ otrzymując równanie

$$/3.15/ \quad M_{y2}^{\text{I}} = -2\pi a^2 \lambda B_0 - M_{y1}^{\text{I}} \lambda a^2 / H^2.$$

Ponieważ jednak $M_{y2}^{\text{I}} = M_{y1}^{\text{I}} = M_y^{\text{I}}$, z /3.15/ otrzymujemy bezpośrednio wartość dipola M_y^{I} ,

$$/3.16/ \quad M_y^{\text{I}} = -2\pi a^2 B_0 \frac{\lambda}{1 + \lambda \frac{a^2}{H^2}}.$$

W przypadku II otrzymujemy w podobny sposób

$$/3.17/ \quad M_y^{II} = -2\pi a^2 B_0 \frac{\Lambda}{1 - \Lambda \frac{a^2}{H^2}} \quad .$$

Porównanie obu tych wyników ze wzorem /3.9/₂ pozwala wyciągnąć /intuicyjnie oczywisty/ wniosek, że inkluzje w położeniu I wzajemnie osłabiają swój wpływ na pole przepływu ciepła /jeśli wykonane są z izolatora $\Lambda > 0$ /, a w położeniu II - potęgują ten wpływ. Pola te wyznaczamy z prostych wzorów.

W przypadku I :

$$Q_x = B_0 a^2 \frac{\Lambda}{1 + \Lambda \frac{a^2}{H^2}} \left[\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2x(y-H)}{[x^2 + (y-H)^2]^2} \right] ,$$

/3.18/

$$Q_y = -B_0 \left\{ a^2 \frac{\Lambda}{1 + \Lambda \frac{a^2}{H^2}} \left[\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - (y-H)^2}{[x^2 - (y-H)^2]^2} \right] + 1 \right\} .$$

W przypadku II :

$$Q_x = B_0 a^2 \frac{\Lambda}{1 - \Lambda \frac{a^2}{H^2}} \left[\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2(x-H)y}{[(x-H)^2 + y^2]^2} \right] ,$$

/3.19/

$$Q_y = -B_0 \left\{ a^2 \frac{\Lambda}{1 - \Lambda \frac{a^2}{H^2}} \left[\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x-H)^2 - y^2}{[(x-H)^2 + y^2]^2} \right] + 1 \right\} .$$

Są to oczywiście rozwiązania przybliżone. Ich błąd ocenić można np. zakładając $\Lambda = 1$ /inkluzja nieprzewodząca ciepła, $\lambda_1 = 0$ / i obliczając wartości strumienia ciepła na ich krawędzi. Okazuje się, że wartości te są rzędu $B_0 (a/l)^3$ /zamiast zero/, stanowią więc ułamek $(a/l)^3$ średniej wartości strumienia założonego w nieskończoności. Tak więc błąd przybli-

zenia /3.18/, /3.19/ ocenić można przy $a/l = 1/5$ /odległość krawędzi obu inkluzji równa 1,5 średnicy/ na poniżej 1%. Jak już wspomnieliśmy, dokładność rozwiązania można zwiększyć bez trudu wprowadzając multipole zastępcze wyższych rzędów [4].

4. Jednowymiarowy niestabilny przepływ ciepła

Rozważmy jednowymiarowe zagadnienie niestabilnego przepływu ciepła w ośrodku zajmującym półprzestrzeń $x > 0$. Ośrodek scharakteryzowany jest współczynnikiem przewodności ciepła i temperatury λ_1 i α_1 i zawiera inkluzję w postaci warstwy o grubości c , $a < x < a+c$ o współczynnikach λ_2 i α_2 . Temperatura powierzchni $x = 0$ jest daną funkcją czasu, $T(0, t) = \tau(t) \eta(t)$ /tutaj $\eta(t)$ oznacza funkcję Heaviside'a/, zaś w nieskończoności, przy $x \rightarrow \infty$, $\lim T(x, t) = 0$. Temperatura początkowa ośrodka jest stała i przyjmujemy, że $T(x, 0) = 0$. Na rys.8 przedstawiono wycinek tej półprzestrzeni ograniczony płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny x, z .

Do równania przewodnictwa

$$/4.1/ \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

stosujemy transformację Laplace'a \mathcal{L} ; oznaczając transformatę funkcji $f(t)$ symbolem $\bar{f}(p)$,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \bar{f}(p),$$

otrzymamy równanie /4.1/ w postaci

$$/4.2/ \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} - \frac{p}{\alpha} \bar{T} = 0$$

Jego całka z warunkami

$$\bar{T}(0, p) = \bar{\tau}(p), \quad \bar{T}(\infty, p) = 0$$

w przypadku ośrodka jednorodnego miałyby postać

$$/4.3/ \quad \bar{T}(x,p) = \bar{t}(p) e^{-qx} ,$$

gdzie dodatkowo oznaczono $q = \sqrt{p/\alpha^2}$; rozwiązanie to zaznaczono linią kreskowaną na rys.8.

W przypadku ośrodka niejednorodnego, z inkluzją, rozwiązanie w postaci transformat Laplace'a otrzymujemy spełniając, poza warunkami brzegowymi i w nieskończoności, warunki ciągłości temperatury $\bar{T}(x,p)$ i strumienia ciepła $Q_x = -\lambda_i \partial \bar{T} / \partial x$ na powierzchniach $x = a$ i $x = a+c$. Otrzymujemy trzy postacie rozwiązania \bar{T}_I , \bar{T}_{II} , \bar{T}_{III} w trzech obszarach $0 \leq x \leq a$, $a \leq x \leq a+c$, $a+c \leq x < \infty$ /rys.8/ ,

$$/4.4/ \quad \bar{T}_I(x,p) = \bar{t} \frac{R_1(p) e^{q_1(a-x)} + R_2(p) e^{q_1(x-a)}}{R_1(p) e^{q_1 a} + R_2(p) e^{-q_1 a}} ,$$

$$/4.5/ \quad \bar{T}_{II}(x,p) = \bar{t} \frac{2L_1 [(L_1+L_2) e^{q_2(b-x)} - (L_1-L_2) e^{q_2(x-b)}]}{R_1(p) e^{q_1 a} + R_2(p) e^{-q_1 a}} ,$$

$$/4.6/ \quad \bar{T}_{III}(x,p) = \frac{4 L_1 L_2 e^{q_1(b-x)}}{R_1(p) e^{q_1 a} + R_2(p) e^{-q_1 a}} .$$

Wprowadzono tu oznaczenia

$$R_1(p) = (L_1 + L_2)^2 e^{q_2 c} - (L_1 - L_2)^2 e^{-q_2 c} ,$$

$$R_2(p) = (L_1^2 - L_2^2) (e^{q_2 c} - e^{-q_2 c}) ,$$

$$L_i = \lambda_i / \sqrt{\alpha^2} , \quad q_i = \sqrt{p/\alpha^2} , \quad i = 1, 2 ,$$

Na rys.8 linią ciągłą przedstawiono przykładowy przebieg funkcji $\bar{T}(x,p)$, opisany wzorami /4.4/ - /4.6/.

W przypadku przestrzeni jednorodnej, bez inkluzji, możliwość znalezienia jawnej postaci odwrotnej transformacji Laplace'a /4.3/ zależy od warunku brzegowego dla $T(0,t)$; np. w przy-

padku $T(0, t) = T_0 \eta(t)$ otrzymujemy $\bar{\tau} = T_0 p^{-1}$ i

$$T(x, t) = T_0 \operatorname{Erfc} \frac{x}{2 \sqrt{\alpha t}}$$

/por. np. [6]/. Odwrócenie rozwiązania /4.4/ - /4.6/ w postaci jawnej nie jest możliwe, niezależnie od postaci funkcji $\bar{\tau}(p)$. Jedynym zapewne wyjątkiem jest bardzo szczególny przypadek niejednorodności $L_1 = L_2$, gdy $\lambda_1 / \lambda_2 = \sqrt{\alpha_1 / \alpha_2}$; wtedy

$$\bar{T}_I(x, p) = \bar{\tau}(p) e^{-q_1 x},$$

$$/4.7/ \quad \bar{T}_{II}(x, p) = \bar{\tau}(p) e^{-q_1 a - q_2(x-a)},$$

$$\bar{T}_{III}(x, p) = \bar{\tau}(p) e^{-q_1(x-c) - q_2 c},$$

co przy prostej postaci warunku $\tau(t) = T_0 \eta(t)$ prowadzi do jawnej postaci rozwiązania

$$/4.8/ \quad T_I(x, t) = T_0 \operatorname{Erfc} \frac{x}{2 \sqrt{\alpha_1 t}},$$

$$/4.9/ \quad T_{II}(x, t) = T_0 \operatorname{Erfc} \frac{(x-a)/\sqrt{\alpha_2} + a/\sqrt{\alpha_1}}{2 \sqrt{t}},$$

$$/4.10/ \quad T_{III}(x, t) = T_0 \operatorname{Erfc} \frac{(x-c)/\sqrt{\alpha_1} + c/\sqrt{\alpha_2}}{2 \sqrt{t}}.$$

Rozważmy teraz możliwość wyznaczania przybliżonej postaci funkcji $T(x, t)$ w ogólnym przypadku niejednorodności $L_1 \neq L_2$. Założmy przy tym, że $c \ll a$ oraz zajmijmy się przybliżeniem dla dużych wartości czasu t /a więc dla małych wartości parametrów transformacji p, q_1, q_2 /. W tym celu rozważmy najpierw przypadek półprzestrzeni jednorodnej /o sta-

lych λ_1 , ∂e_1 / z warunkami $T(0,t) = T(\infty,t) = 0$ i $T(x,0) = 0$ ze skupionym źródłem ciepła $W_a(t) \eta(t)$ działającym w płaszczyźnie $x = a$, a następnie z dipolem źródłowym $M_a(t) \eta(t)$ działającym w tej samej płaszczyźnie.

Rozwiązujemy równanie przewodnictwa w postaci przetransformowanej

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} - q_1^2 \bar{T} = - \frac{1}{\lambda_1} \bar{W} ,$$

w którym $\bar{W} = \bar{W}(x,p)$ jest transformatą Laplace'a funkcji rozkładu źródeł ciepła. W przypadku źródła skupionego, $\bar{W}(x,p) = \bar{W}_a(p) \delta(x - a)$ otrzymujemy

$$/4.11/ \quad \bar{T}_W(x,p) = \begin{cases} \frac{\bar{W}_a(p)}{\lambda_1 q_1} e^{-q_1 \tilde{a}} \operatorname{Sh} q_1 x , & 0 < x < \tilde{a} , \\ \frac{\bar{W}_a(p)}{\lambda_1 q_1} e^{-q_1 x} \operatorname{Sh} q_1 \tilde{a} , & \tilde{a} < x . \end{cases}$$

Rozwiązanie dla dipola źródłowego $\bar{M}_a(p) \delta(x - \tilde{a})$ otrzymujemy różniczkując /4.11/ względem \tilde{a} ,

$$\bar{T}_M(x,p; \tilde{a}) = - \frac{\partial}{\partial \tilde{a}} \bar{T}_W(x,p; \tilde{a}) ,$$

$$/4.12/ \quad \bar{T}_M(x,p) = \begin{cases} \frac{\bar{M}_a(p)}{\lambda} e^{-q_1 \tilde{a}} \operatorname{Sh} q_1 x , & 0 \leq x \leq a , \\ - \frac{\bar{M}_a(p)}{\lambda} e^{-q_1 x} \operatorname{Ch} q_1 \tilde{a} , & \tilde{a} < x . \end{cases}$$

Funkcja $\bar{T}_W(x,p)$ jest ciągła w punkcie $x = \tilde{a}$, a jej pochodna po x doznaje skoku o wartość

$$/4.13/ \quad \left. \frac{\partial \bar{T}_W}{\partial x} \right|_{\tilde{a}^+} - \left. \frac{\partial \bar{T}_W}{\partial x} \right|_{\tilde{a}^-} = - \frac{1}{\lambda} \bar{W}_a(p) .$$

Funkcja $\bar{T}_M(x, p)$ doznaje w punkcie $x = \tilde{a}$ skoku o wartość

$$/4.14/ \quad \bar{T}_M(\tilde{a}^+, p) - \bar{T}_M(\tilde{a}^-, p) = - \frac{1}{\lambda_1} \bar{M}_a(p) ,$$

natomiast jej pochodna $\partial \bar{T}_M / \partial x$ jest w tym punkcie ciągła. Na rys.9 pokazano przykłady wykresów funkcji $\bar{T}_W(x, q_1; \tilde{a})$ i $\bar{T}_M(x, q_1; \tilde{a})$ dla wartości $q_1 = 1$ oraz $\tilde{a} = 1/4$ i $\tilde{a} = 2$.

Na rys.10 pokazano wykres transformat temperatury $\bar{T}(x, p)$ dla ciała z inkluzją, a właściwie część tego wykresu w otoczeniu inkluzji /warstwy/ o grubości c . Przedłużenie krzywych $\bar{T}_I(x, p)$ i $\bar{T}_{III}(x, p)$ do przecięcia się z osią inkluzji $x = a + c/2$ prowadzi do wykresu w postaci linii łamanej $A A' B' B$ z uskokiem $A'A$ i z nieciągłością pochodnej w punkcie $x = a + c/2$ /styczne do krzywych \bar{T}_I i \bar{T}_{III} w punktach A' i B' nie są naogół równoległe/. Spostrzeżenie to pozwala przypuścić, że działanie inkluzji w omawianym przypadku można modelować za pomocą skupionego źródła ciepła $\bar{W}_a(p)$ i dipola źródłowego $\bar{M}_a(p)$ o odpowiednio dobranych intensywnościach, przyłożonych w płaszczyźnie $x = a + c/2$ półprzestrzeni.

Przykład 3. Dla oceny efektywności i dokładności tej drogi postępowania rozważmy bliżej wspomniany już wcześniej przypadek szczególny $L_1 = L_2$; z warunkiem brzegowym $T(0, t) = T_0 \eta(t)$ rozwiązania ściśle /4.8/ i /4.10/ służyć mogą jako sprawdzian dokładności naszego przybliżenia.

Wydażność zastępczego źródła ciepła oraz dipola źródłowego określamy z następujących warunków:

$$- \lambda_1 \left[\frac{\partial \bar{T}_{III}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{T}_I}{\partial x} \right]_{x=a+c/2} = \bar{W}_a(x, p) ,$$

/4.15/

$$\bar{T}_{III}(a+c/2, p) - \bar{T}_I(a+c/2, p) = - \frac{\bar{M}_a(p)}{\lambda_1} .$$

Podstawiając do /4.15/ funkcję /4.5/ i /4.7/ otrzymujemy

$$\bar{W}_a(p) = -\bar{t} \lambda_1 q_1 e^{-q_1 a - q_2 c/2} [e^{(q_2 - q_1)c/2} - e^{-(q_2 - q_1)c/2}]$$

/4.16/

$$\bar{M}_a(p) = \bar{t} \lambda_1 e^{-q_1 a - q_2 c/2} [e^{(q_2 - q_1)c/2} - e^{-(q_2 - q_1)c/2}]$$

Jak widać, zachodzi tu szczególny związek $\bar{W}_a(p) = -q_1 \bar{M}_a(p)$.

Rozważmy teraz przybliżenie rozwiązań dla małych wartości $q_1 c$ i $q_2 c$ /dużych czasów t /; przy małych wartościach bezwzględnych wykładników $(q_2 - q_1)c/2$ zachodzi równość przybliżona

$$e^{(q_2 - q_1)c/2} - e^{-(q_2 - q_1)c/2} \approx (q_2 - q_1)c + \dots$$

tak więc mamy

$$\begin{aligned} -q_1 \bar{M}_a(p) &= \bar{W}_a(p) = \\ &= -\bar{t} \lambda_1 q_1 (q_2 - q_1) c e^{-q_1 a - q_2 c/2}, \end{aligned}$$

a ponieważ w naszym przypadku przyjęliśmy

$$\begin{aligned} \lambda_1 / \lambda_2 &= \varphi = \sqrt{\partial e_1 / \partial e_2}, \quad q_2 - q_1 = \sqrt{p / \partial e_2} - \sqrt{p / \partial e_1} = \\ &= q_1 (\varphi - 1), \text{ to otrzymujemy równości przybliżone} \end{aligned}$$

$$\bar{W}_a(p) \approx -\bar{t} \lambda_1 q_1^2 (\varphi - 1) c e^{-q_1 a - q_2 c/2},$$

/4.17/

$$\bar{M}_a(p) \approx \bar{t} \lambda_1 q_1 (\varphi - 1) c e^{-q_1 a - q_2 c/2}.$$

Podstawiając teraz do wzorów /4.11/ i /4.12/ wyrażenia /4.17/ oraz $\tilde{a} = a + c/2$ otrzymujemy przybliżone rozwiązanie, które oznaczamy gwiazdką :

$$/4.18/ \quad \bar{T}^*(x, p) = \bar{t}(p) e^{-q_1 x} \quad \text{dla } x < a + c/2,$$

$$/4.19/ \quad \bar{T}^*(x, p) = \bar{t}(p) e^{-q_1 x} [1 - c(\varphi - 1) q_1 e^{-q_1(\varphi - 1) \frac{c}{2}}].$$

Pierwsza część tego rozwiązania, /4.18/, jest ścisła w zakresie $0 < x < a$ /por./4.5/ / i przybliżona na odcinku $a < x < a+c/2$, druga część /wzór /4.19/ / jest przybliżeniem rozwiązania ścisłego

$$/4.20/ \quad \bar{T}_{III}(x,p) = \bar{T}(p) e^{-q_1 [x - (\varphi-1)c]}$$

Przy założeniu, że $\bar{T}(p) = T_0/p$, obie transformaty /4.19/ i /4.20/ można odwrócić /por. [6]/ otrzymując

$$/4.21/ \quad T^*(x,t) = T_0 \operatorname{Erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}} - \frac{c(\varphi-1)}{2\sqrt{\alpha_1 t}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left[\frac{x + (\varphi-1)c}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right]^2}$$

$$/4.22/ \quad T_{III}(x,t) = T_0 \operatorname{Erfc} \frac{x + c(\varphi-1)}{2\sqrt{\alpha_1 t}}$$

Poniższa tablica obrazuje różnice między rozwiązaniem przybliżonym /4.21/ i ścisłym /4.22/ przy założeniu, że $a = 1$, $c = 0.1$, $\varphi = \lambda_1/\lambda_2 = \sqrt{\alpha_1}/\alpha_2 = 2$, $2\sqrt{\alpha_1 t} = 1$, dla kilku wybranych wartości $x \geq a + c$.

x	T^*	T_{III}	$(T^* - T_{III})/T^* \cdot 100\%$
1	wyniki ścisłe		
1.10	0.08972	0.08969	0.03 %
1.15	0.07714	0.07710	0.05 %
1.20	0.06604	0.06599	0.07 %
1.30	0.04775	0.04771	0.08 %
1.50	0.02368	0.02365	0.12 %

Tabela 1

Widać stąd, że nawet dla niewielkich wartości czasu t błąd rozwiązania przybliżonego jest rzędu dziesiątej części procentu.

W ogólnym przypadku niejednorodności transformaty rozwiązania ścisłego /4.4/ - /4.6/ nie udaje się odwrócić, zwłaszcza w przypadku większej liczby inkluzji. Przedstawiona metoda rozwiązania przybliżonego stwarza taką szansę. W tym celu należy, posługując się wzorami /4.4/ - /4.6/ , wyznaczyć różnicę temperatur $\bar{T}_{III}(a+c/2) - \bar{T}_I(a+c/2)$ oraz ich pochodnych

$\partial / \partial x [\bar{T}_{III}(x,p) - \bar{T}_I(x,p)]$ w punkcie $x = a + c/2$; te wielkości pozwalają z kolei określić intensywności zastępczego źródła ciepła $\bar{W}_a(p)$ i dipola $\bar{M}_a(p)$. Upraszczając te wzory przez założenie, że $q_1 c \ll 1$ i $q_2 c \ll 1$ otrzymamy zależności przybliżone

$$\bar{M}_0 \approx \bar{\tau} \lambda_1 c (\psi - 1) q_1 e^{-q_1 a} ,$$

/4.23/

$$\bar{W}_0 \approx \bar{\tau} c \left(1 - \frac{\lambda_2 \alpha_1}{\lambda_1 \alpha_2} \right) q_1^2 e^{-q_1 a} .$$

Pierwszy z tych wzorów ma znów budowę analogiczną do /2.7/ i składa się z iloczynu trzech czynników określających strumień ciepła w ośrodku jednorodnym

$$-\lambda_1 \left. \frac{\partial \bar{T}^{Pr}}{\partial x} \right|_{x=a} = \lambda_1 \bar{\tau} q_1 e^{-q_1 a} ,$$

gdzie \bar{T}^{Pr} wyraża się wzorem /4.3/, rozmiar inkluzji o oraz stopień niejednorodności $\psi - 1 = \lambda_1 / \lambda_2 - 1$.

Postępowanie w przypadku większej liczby inkluzji oraz sposob oceny ich wzajemnego oddziaływania będą podobne jak w przypadku przepływu ustalonego; zasadnicza różnica polega na tym, że w odpowiednich zależnościach występować teraz będą transformaty funkcji temperatury i strumienia ciepła zamiast ich wartości rzeczywistych. Możliwość odwrócenia otrzymanych w postaci transformat wyników jest nieporównanie większa od możliwości uzyskania jawnej postaci rozwiązania ścisłego.

5. Dwuwymiarowy nieustalony przepływ ciepła

Wskazemy na koniec możliwość zastosowania metody zastępczych źródeł ciepła i dipoli źródłowych do przybliżonej analizy płaskich przepływów ciepła w ośrodku z inkluzjami kołowo-cylindrycznymi. Nasze rozważania ograniczymy do próby naszkicowania drogi wyznaczania dipola źródłowego dla pojedynczej inkluzji o promieniu a i o środku umieszczonym w odległości L od brzegu półprzestrzeni $x > -L$. Zakładamy przy tym, że $L \gg a$ by móc zaniedbać oddziaływanie inkluzji na brzeg obszaru /rys.11/. W chwili $t = 0$ brzeg $x = -L$ półprzestrzeni /o zerowej temperaturze początkowej/ poddany zostaje działaniu temperatury $\tau(t)$.

Równanie przewodnictwa dla dwuwymiarowego, jednorodnego ośrodka o współczynnikach λ , α zawierającego rozłożone źródła ciepła $W(x,y;t)$ ma, po przeprowadzeniu transformacji Laplace'a, postać

$$/5.1/ \quad \nabla^2 \bar{T}(x,y;p) - \frac{p}{\alpha} \bar{T}(x,y;p) = - \frac{\bar{W}(x,y;p)}{\lambda} ;$$

w przypadku liniowego /na rysunku - punktowego/ źródła ciepła umieszczonego w początku układu współrzędnych, w odległości L od krawędzi półpłaszczyzny, funkcja $\bar{T}(r,p)$ wyraża się wzorem [5]

$$/5.2/ \quad \bar{T}_W(r,p) = \frac{\bar{W}_0(p)}{2\pi\lambda} K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\alpha}}\right) ,$$

gdzie K_0 jest zmodyfikowaną funkcją Bessela drugiego rodzaju. Przypominamy, że pochodna tej funkcji $K_0'(z) = -K_1(z)$. Przy z zmierzających do nieskończoności funkcja $K_0(z)$ zmierza wykładniczo do zera.

Różniczkując wyrażenie /5.2/ po x i y /por. wzory /3.6/-/3.8/ / otrzymujemy wzory na temperaturę wywołaną dipolami źródłowymi M_x i M_y umieszczonymi w początku układu współrzędnych,

$$/5.3/ \quad \bar{T}_{Mx} = - \frac{\bar{M}_x(p)}{2 \pi \lambda} \sqrt{\frac{p}{\alpha}} K_1 \left(r \sqrt{\frac{p}{\alpha}} \right) \cos \theta \quad ,$$

$$/5.4/ \quad T_{My} = - \frac{M_y p}{2 \pi \lambda} \sqrt{\frac{p}{\alpha}} K_1 \left(r \sqrt{\frac{p}{\alpha}} \right) \sin \theta \quad .$$

Posługując się teraz stwierdzoną w poprzednim rozdziale analogią między wzorami dla temperatury T w stanie ustalonym i dla transformaty \bar{T} w stanie nieustalonym możemy przypuścić, że wartości transformat dipoli źródłowych $\bar{M}_x(p)$, $\bar{M}_y(p)$ w naszym przypadku wyznaczyć możemy ze wzorów analogicznych do /3.10/,

$$/5.5/ \quad \begin{aligned} \bar{M}_x &= - \lambda \left[\frac{\partial \bar{T}^{Pr}}{\partial x} \right]_0 \quad 2 \pi a^2 \Lambda \quad , \\ \bar{M}_y &= - \lambda \left[\frac{\partial \bar{T}^{Pr}}{\partial y} \right]_0 \quad 2 \pi a^2 \Lambda \quad , \end{aligned}$$

gdzie $\Lambda = (\lambda - \lambda_1) / (\lambda + \lambda_1)$, a \bar{T}^{Pr} jest transformatą funkcji temperatury pierwotnej, bez inkluzji.

Dla weryfikacji tego przypuszczenia przyjmijmy, że obszar $x > -L$ znajduje się początkowo, tj. przy $t < 0$, w zerowej temperaturze odniesienia $T(x,y;0) \equiv 0$. Od chwili $t = 0$ brzeg obszaru $x = -L$ utrzymywany jest w stałej temperaturze T_0 , czyli $T(-L,y;t) = T_0 \eta(t)$. Rozwiązaniem tego zadania jest funkcja /4.3/ ,

$$/5.6/ \quad \bar{T}^{Pr}(x,y;p) = \bar{\tau}(p) e^{-(x+L) \sqrt{p/\alpha}} \quad .$$

Podstawienie /5.6/ do /5.5/ prowadzi do wzoru

$$/5.7/ \quad \begin{aligned} \bar{M}_x &= 2 \pi a^2 \Lambda \lambda \sqrt{\frac{p}{\alpha}} \bar{\tau}(p) e^{-L \sqrt{p/\alpha}} \quad , \\ \bar{M}_y &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Superpozycja temperatur wywołanych równomiernym ogrzaniem brzo-
gu półprzestrzeni, \bar{T}^{Pr} , i dipolem /5.7/ prowadzi do tempera-
tury

$$\begin{aligned} /5.8/ \quad \bar{T}(r, \theta; p) &= \\ &= -\bar{\tau}(p) \Lambda a^2 e^{-L \sqrt{p/\alpha\epsilon}} K_1(r \sqrt{p/\alpha\epsilon}) \frac{\cos \theta}{\alpha\epsilon} + \\ &+ e^{-(L+x) \sqrt{p/\alpha\epsilon}} \end{aligned}$$

Zakładamy teraz, że argument funkcji K_1 jest dużo mniej-
szy od jedności, $r \sqrt{p/\alpha\epsilon} \ll 1$ /przybliżenie dla dużych
czasów/; można wtedy skorzystać z zależności przybliżonej

$$K_1(z) \approx \frac{1}{z} \quad .$$

Ponieważ $\tau(t) = T_0 \eta(t)$ i $\bar{\tau}(p) = T_p p^{-1}$, to otrzymu-
jemy ze wzoru /5.8/ zależność przybliżoną

$$\begin{aligned} /5.9/ \quad \bar{T} \approx &= \frac{T_0 a^2 \Lambda \cos \theta}{r \sqrt{\alpha\epsilon}} \frac{e^{-L \sqrt{p/\alpha\epsilon}}}{\sqrt{p}} + \\ &+ T_0 \frac{e^{-(L+x) \sqrt{p/\alpha\epsilon}}}{p} \end{aligned}$$

Transformatę /5.9/ można odwrócić [6] :

$$/5.10/ \quad T(x, y; t) = \frac{T_0 a^2 \Lambda \cos \theta}{r \sqrt{\pi \alpha\epsilon t}} e^{-\frac{L^2}{4\alpha\epsilon t}} + T_0 \operatorname{Erfc} \frac{L+x}{2\sqrt{\alpha\epsilon t}}$$

Założmy teraz, że inkluzja wykonana jest z doskonałego prze-
wodnika ciepła, $\Lambda = -1$, co oznacza, że temperatura wszyst-
kich jej punktów powinna być w każdej chwili t jednakowa.
Ze wzoru /5.10/ otrzymujemy na granicy inkluzji $r = a$ tem-
peraturę

$$/5.11/ \quad T_g \approx \frac{T_0 a \cos \theta}{\pi \alpha t} e^{-L^2/4\alpha t} + T_0 \operatorname{Erfc} \frac{L + a \cos \theta}{2 \sqrt{\alpha t}} .$$

Ponieważ jednak $a \ll L$, funkcję Erfc rozwinąć można w szereg Taylora w otoczeniu punktu $L/2\sqrt{\alpha t}$ zachowując jedynie dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia,

$$\operatorname{Erfc} \frac{L + a \cos \theta}{2 \sqrt{\alpha t}} \approx \operatorname{Erfc} \frac{L}{2 \sqrt{\alpha t}} - \frac{a \cos \theta}{\sqrt{\pi \alpha t}} e^{-L^2/4\alpha t} .$$

W ten sposób otrzymaliśmy stałą /niezależną od kąta θ / temperaturę brzegu inkluzji,

$$T_g = T_0 \operatorname{Erfc} \frac{L}{2 \sqrt{\alpha t}} ;$$

jest ona ponadto równa $T^{Pr}(0, y; t)$, jak być powinno.

Przykład powyższy dowodzi, że metoda zastępczych dipoli źródłowych może znaleźć zastosowanie w analizie procesów nieustalonych przepływów ciepła w ośrodkach z inkluzjami.

Literatura

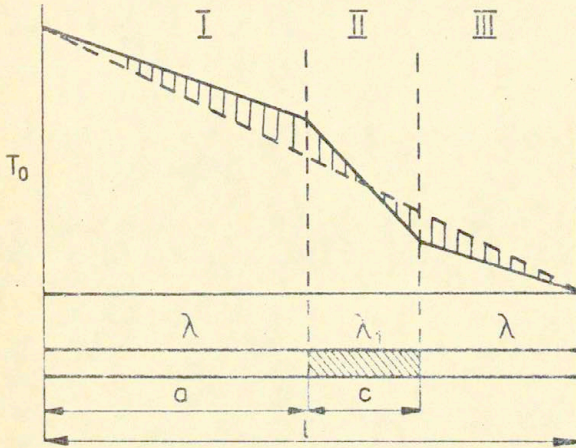
- 1 A.Kaczyński, M.Sokołowski, Interactions of cracks and inclusions in elastic media, Arch.Mech. 28, 2, 1976
- 2 M.Matczyński, M.Sokołowski, Interaction of cracks in elastic media, Arch.Mech. 34, 1, 1982
- 3 M.Sokołowski, E.Turska-Kłębek, On the approximate evaluation of interaction of cracks in elastic media, Engrg. Trans. 31, 1, 1983
- 4 M.Sokołowski, On an effective method of evaluation of the effect of cavities, inclusions and cracks upon the stress field in elastic media, Engrg.Trans. 34, 1-2, 1986
- 5 H.S.Carslaw, J.C.Jaeger, Conduction of Heat in Solids, Clarendon Press, Oxford
- 6 A.Erdélyi et al., Tables of Integral Transforms, McGraw-Hill, New York, Toronto, London 1954

Marek SOKOŁOWSKI
Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych
IPPT-PAN

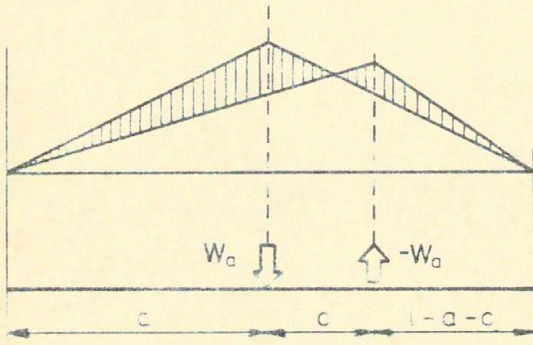
PRZYBLIŻONA ANALIZA USTALONEGO I NIEUSTALONEGO PRZEPIYU CIEPŁA
W OŚRODKU ZAWIERAJĄCYM INKLUZJE

Streszczenie

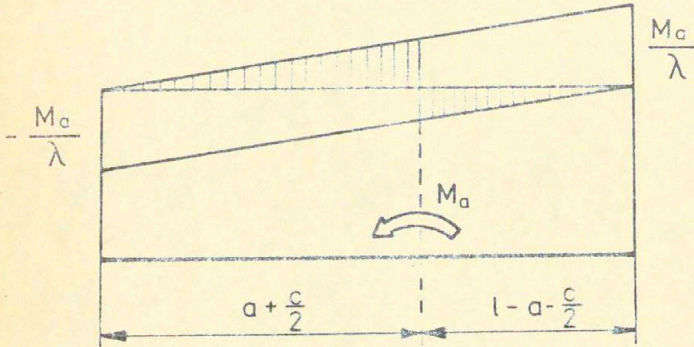
W pracach [1-4] zajęto się przedstawieniem metody przybliżonego ale efektywnego wyznaczania wpływu różnego defektów strukturalnych /otworów, szczelin, inkluzji/ na rozkład naprężeń w ośrodku sprężystym poddanym ustalonym obciążeniom. W obecnej pracy chodzi o wykazanie, że metoda ta może się również okazać efektywna w przypadku analizy stanów nieustalonych w takich ośrodkach. Dla maksymalnego uproszczenia zagadnienia metodę tę przedstawiamy na przykładzie nieustalonego przepływu ciepła w nieograniczonym ośrodku sprężystym zawierającym kołowo-cylindryczne inkluzje lub otwory.



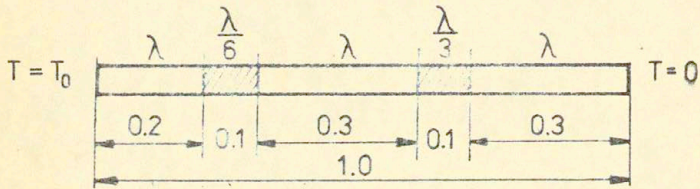
Rys. 1



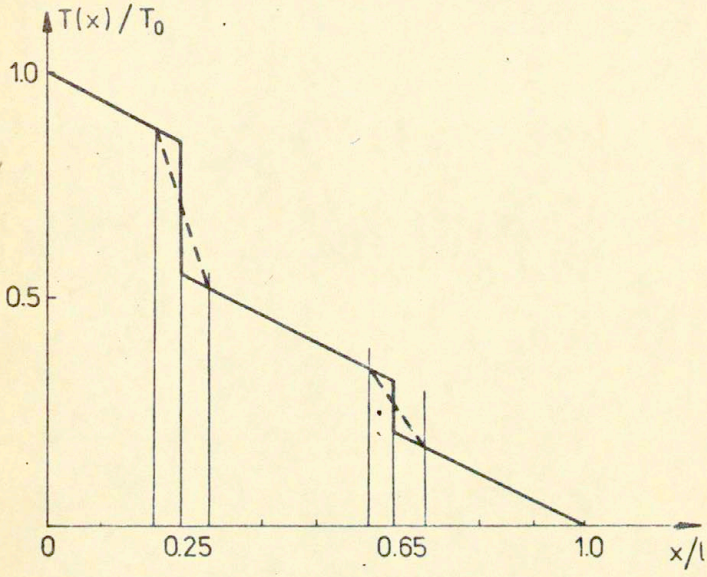
Rys. 2



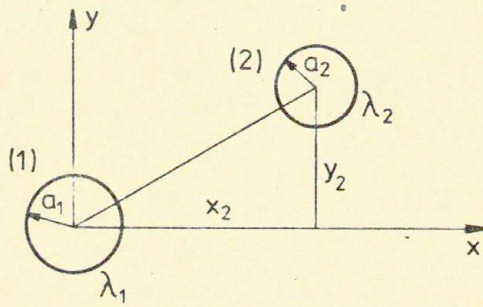
Rys. 3



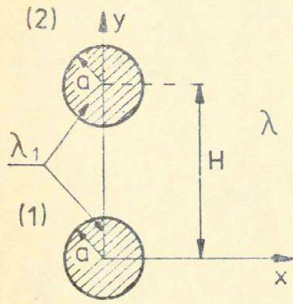
Rys. 4



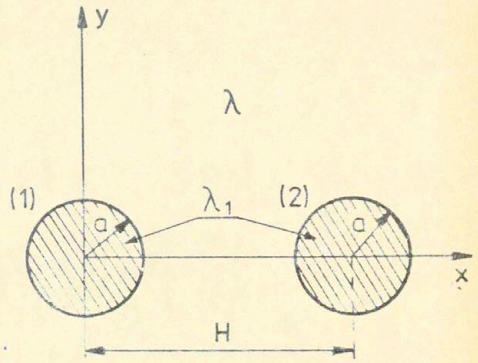
Rys. 5



Rys. 6

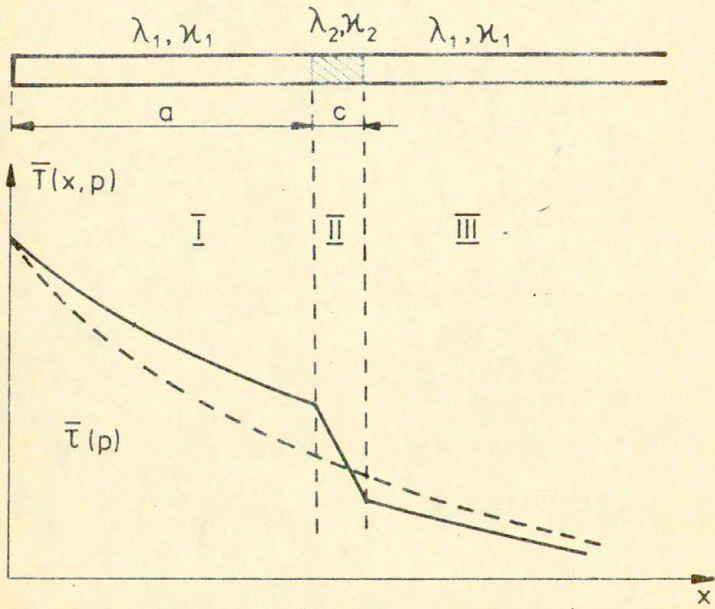


(I)

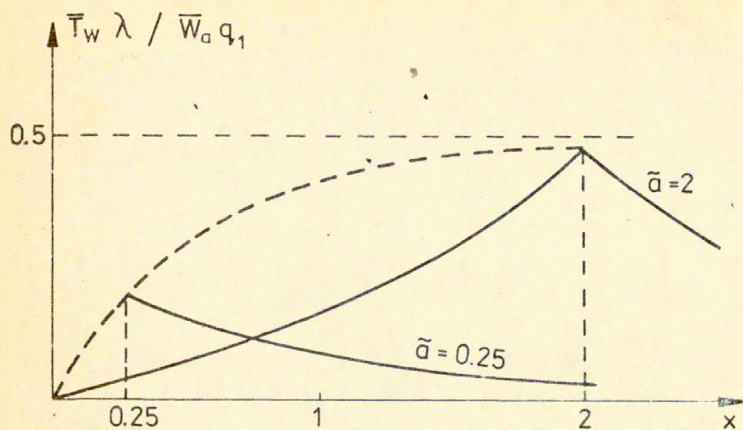


(II)

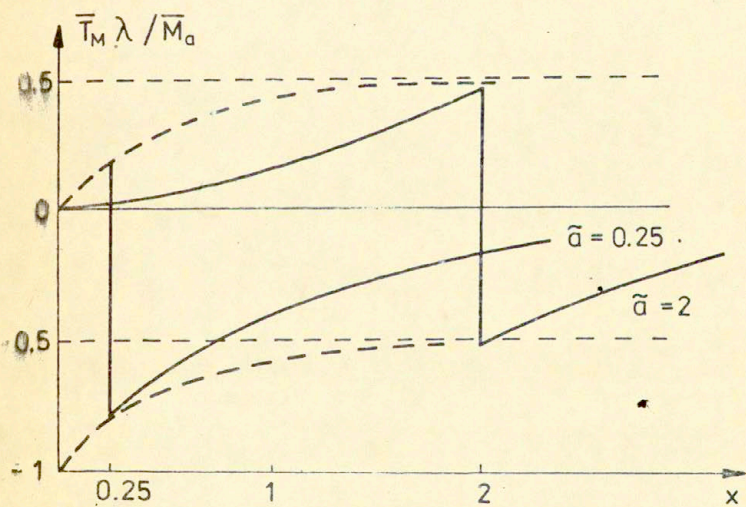
Rys. 7



Rys. 8

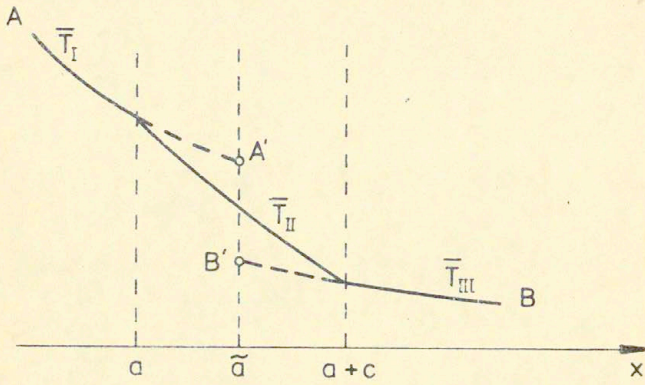


a)

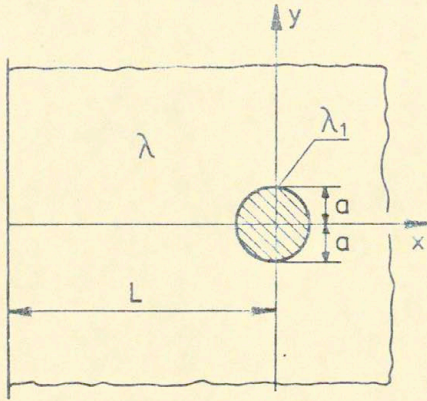


b)

Rys.9



Rys. 10



Rys. 11