6.8.2. — teoria plazmy
1.1.1. — metody analityczne
i półanalityczne

Jacek Zawistowski

WYZNACZENIE SYMETRII ZMODYFIKOWANEGO RÓWNANIA NLS DLA PLAZMY

11/1994

WARSZAWA 1994

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 lutego 1994 r.

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark.wyd.1,5 Ark.druk. 2,00
Oddano do drukarni w marcu 1994 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul.Jasna 1

Jacek Zawistowski
Samodzielna Pracownia Dynamiki Plazmy

WYZNACZENIE SYMETRII ZMODYFIKOWANEGO RÓWNANIA NLS DLA PLAZMY

Streszczenie

Zaproponowano metodę bezpośredniego, bez przechodzenia do układu równań różniczkowych dla momentów, wyznaczania grup symetrii równań różniczkowo-całkowych. Zastosowano tę metodę do badania symetrii zmodyfikowanego (nielokalnego) równania NLS. Równanie to opisuje zachowanie się obwiedni solitonów Langmuira w plazmie.

1. Wstęp

W pracach [1] i [2] wyprowadzone zostało zmodyfikowane, nieliniowe równanie Schrödingera (MNLS):

$$(1) \qquad 0 = i\mathcal{E}_t + a\mathcal{E}_{xx} + b|\mathcal{E}|^2\mathcal{E} + \\ + \mathcal{E}\frac{1}{2\omega^3}\sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2\left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{t}dt_1\,\partial_{t_1}\left|\mathcal{E}(x-u(t-t_1),t_1)\right|^2\frac{1}{u}\partial_u f_{\alpha 0}$$

gdzie

$$(2) \qquad a = \frac{3}{2\omega^3}\sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2\int_{-\infty}^{\infty}du\, u^2 f_{\alpha 0}\,, \qquad b = \frac{-1}{2\omega^3}\sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2\left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}du\,\frac{1}{u}\partial_u f_{\alpha 0}$$

oraz

$\mathcal{E}(x,t)$ - amplituda pola elektrycznego $\vec{E} = (E,0,0)$,
$f_{\alpha 0}(u)$ - równowagowa funkcja rozkładu dla składnika α plazmy,
q_α, m_α - ładunek i masa składnika α plazmy,

u - składowa wektora prędkości $\vec{v} = (u,0,0)$,
$\omega_{\alpha 0}$ - częstość plazmowa dla składnika α :

$$\omega_{\alpha 0} = \left(\frac{N_{\alpha 0}\, q_\alpha^2}{\epsilon_0\, m_\alpha} \right)^{1/2},$$

$N_{\alpha 0}$ - równowagowa koncentracja składnika α plazmy,
ϵ_0 - przenikalność dielektryczna próżni.

Równanie (1) opisuje ewolucję (bez efektów przejściowych zależnych od szczegółów pobudzenia) wolno zmiennej amplitudy $\mathcal{E}(x,t)$ pola elektrycznego

$$(3) \qquad E(x,t) = \mathcal{E}(x,t)\, e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$$

w wieloskładnikowej plazmie, w jednowymiarowym przypadku bez pola magnetycznego. Zostało ono otrzymane w ramach opisu kinetycznego plazmy metodą równań hierarchii i asymptotycznego rozwinięcia względem odwrotności częstości $1/\omega$ fal Langmuira (3) dla $\omega \longrightarrow \infty$. Dokładniej, przyjęto założenie, że amplituda $\mathcal{E}(x,t)$ jest wolno zmienną funkcją czasu t w skali $1/\omega$, tj.

$$(4) \qquad \frac{1}{\omega}\,\partial_t \mathcal{E}(x,t) \ll \mathcal{E}(x,t),$$

a postać równania (1) odpowiada przypadkowi ([2])

$$\omega^2 = \omega_0^2 \equiv \sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2 \approx \omega_{e0}^2$$

gdzie ω_{e0} - elektronowa częstość plazmowa.

Dla najważniejszego fizycznie rozkładu Maxwella

$$(5) \qquad f_{\alpha 0}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, a_{\alpha 0}}\, e^{-u^2/2a_{\alpha 0}^2}, \qquad a_{\alpha 0}^2 = \frac{kT_\alpha}{m_\alpha}$$

współczynniki a i b równania (1) są równe

$$(6) \qquad a = \frac{3}{2\omega^3} \sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2\, a_{\alpha 0}^2 \quad , \quad b = \frac{1}{2\omega^3} \sum_\alpha \frac{\omega_{\alpha 0}^2}{a_{\alpha 0}^2} \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \right)^2$$

Amplituda pola elektrycznego $\mathcal{E}(x,t)$ musi spełniać następujące warunki asymptotyczne ([2])

$$\mathcal{E},\ \mathcal{E}_x,\ \mathcal{E}_t,\ \mathcal{E}_{xx},\ \mathcal{E}_{tt}\Big|_{\substack{x=\pm\infty\\ t=-\infty}} = 0$$

oznaczające skończoność przestrzenną zaburzenia początkowego w chwili $t=-\infty$.

W przypadku tak skomplikowanych, nieliniowych równań jak równanie (1) bardzo duże znaczenie ma badanie grup symetrii dopuszczanych przez te równania. Innymi metodami często nie potrafimy nie tylko znajdować rozwiązań tych równań ale również rozstrzygnąć czy i jakiego rodzaju rozwiązania istnieją. Grupa symetrii pozwala konstruować nowe rozwiązania na podstawie znajomości rozwiązań szczególnych. Ponadto, dostarcza informacji na temat charakteru możliwych rozwiązań, co jest bardzo ważne przy konstruowaniu metod przybliżonych.

Ponieważ dla równań różniczkowych podstawowe zagadnienia mają lokalny charakter (np. twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności), więc wystarczy ograniczyć się do badania lokalnych, spójnych grup Liego przekształceń działających w przestrzeni rozwiązań danego równania. Lokalna grupa Liego jest jednoznacznie określona przez algebrę Liego generatorów tej grupy. W ten sposób skomplikowane, nieliniowe związki, wyrażające warunki niezmienniczości równania względem grupy przekształceń, redukują się do liniowych, jednorodnych równań określających generatory. Dzięki temu udało się stworzyć efektywny algorytm wyznaczania grup symetrii równań różniczkowych [3] — [7], który jest przedstawiony w punkcie 2.

Celem tej pracy jest rozszerzenie tego formalizmu na przypadek równań różniczkowo- całkowych i zastosowanie tak zmodyfikowanego formalizmu do równania (1).

2. Wyznaczanie lokalnych grup symetrii dla cząstkowych równań różniczkowych

Przedstawimy teraz w skrócie algorytm wyznaczania lokalnej grupy Liego przekształceń punktowych

$$(7)\quad \begin{aligned} \tilde{x} &= X(x,y,\lambda) = e^{G\lambda}x = x + \lambda\cdot\xi(x,y) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ \tilde{y} &= Y(x,y,\lambda) = e^{G\lambda}y = y + \lambda\cdot\eta(x,y) + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned}$$

gdzie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - zmienne niezależne, y - zmienna zależna, G- generator:

$$(8)\quad G = \xi_i(x,y)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} ,$$

względem których skalarne, cząstkowe równanie różniczkowe k-tego rzędu

$$(9)\quad F(x, y, \underset{1}{y}, \dots, \underset{k}{y}) = 0$$

jest niezmiennicze $([3] - [6])$. Symbol $\underset{j}{y}$ oznacza zbiór wszystkich pochodnych cząstkowych j-tego rzędu

$$\frac{\partial^j y}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_j}} \equiv y_{i_1 \dots i_j}$$

W (8) i dalej stosujemy konwencję sumacyjną Einsteina: sumowanie po powtarzających się wskaźnikach. W przypadku układu m równań cząstkowych na m zmiennych zależnych $y = (y^1, y^2, \dots, y^m)$ procedura jest analogiczna $([6])$.

Niezmienniczość równania cząstkowego (9) względem grupy przekształceń (7) (innymi słowy: dopuszczanie przez równanie (9) grupy przekształceń (7)) oznacza niezmienniczość przestrzeni rozwiązań tego równania, tj. przekształcenia (7) przeprowadzają rozwiązanie $y(x)$ równania (9) w inne rozwiązania $\tilde{y}(\tilde{x})$ tego równania:

$$(10)\quad F(x, y, \underset{1}{y}, \dots, \underset{k}{y}) = 0 \implies F(\tilde{x}, \tilde{y}, \underset{1}{\tilde{y}}, \dots, \underset{k}{\tilde{y}}) = 0$$

Podstawiając, przekształcone zgodnie z (7), nowe zmienne $\tilde{x}, \tilde{y}$ do warunku (10) i pozostawiając tylko wyrazy pierwszego rzędu względem parametru λ otrzymujemy infinitezymalne kryterium niezmienniczości równania różniczkowego (9). Wówczas $x, y, \underset{1}{y}, \dots, \underset{k}{y}$ traktowane są jako zmienne niezależne i rozważa się tzw. rozszerzone przekształcenia działające w tej przestrzeni, którym odpowiadają rozszerzone generatory o postaci

$$(11) \quad \overset{(k)}{G} = \xi_i(x,y)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \overset{(1)}{\eta_i}(x,y,\underset{1}{y})\frac{\partial}{\partial y_i} + \dots + \overset{(k)}{\eta}_{i_1\dots i_k}(x,y,\underset{1}{y},\dots,\underset{k}{y})\frac{\partial}{\partial y_{i_1\dots i_k}}$$

Współczynniki $\overset{(1)}{\eta}, \dots, \overset{(k)}{\eta}$ dane są następującymi rekurencyjnymi wzorami ([6]) :

$$\overset{(0)}{\eta} = \eta(x,y)$$

$$(12) \quad \overset{(1)}{\eta_i} = D_i\eta - y_j D_i \xi_j \quad , \quad i = 1,2,\dots,n$$

$$\vdots$$

$$\overset{(k)}{\eta}_{i_1\dots i_k} = D_{i_k}\overset{(k-1)}{\eta}_{i_1\dots i_{k-1}} - y_{i_1\dots i_{k-1}j} D_{i_k}\xi_j$$

gdzie

$$(13) \quad D_i \equiv \frac{D'}{Dx_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i\frac{\partial}{\partial y} + y_{ij}\frac{\partial}{\partial y_j} + \dots + y_{ii_1\dots i_n}\frac{\partial}{\partial y_{i_1\dots i_n}} + \dots$$

zaś pochodne cząstkowe są oznaczone następująco

$$\xi_i \equiv \frac{\partial \xi}{\partial x_i}, \quad y_i \equiv \frac{\partial y}{\partial x_i}, \quad y_{ij} \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}, \dots$$

Wzory (12) wynikają z żądania zachowania relacji różniczkowych

$$dy = \underset{1}{y}dx, \dots, d\underset{k-1}{y} = \underset{k}{y}dx$$

przez rozszerzone przekształcenia, tj.

$$d\tilde{y} = \underset{1}{\tilde{y}}\, d\tilde{x}, \ldots, d\underset{k-1}{\tilde{y}} = \underset{k}{\tilde{y}}\, d\tilde{x} .$$

Infinitezymalne kryterium niezmienniczości równania (9) względem grupy przekształceń (7) wyraża się za pomocą generatora (11) następująco:

$$(14) \qquad F(x,y,\underset{1}{y},\ldots,\underset{k}{y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad G^{(k)} F(x,y,\underset{1}{y},\ldots,\underset{k}{y}) = 0$$

Ponieważ generator $G^{(k)}$ jest operatorem liniowym, więc warunek (14) można zapisać w równoważnej, wygodnej w zastosowaniach, postaci

$$(15) \qquad G^{(k)} F(x,y,\underset{1}{y},\ldots,\underset{k}{y}) = \varrho(x,y)\cdot F(x,y,\underset{1}{y},\ldots,\underset{k}{y})$$

gdzie $\varrho(x,y)$ - dowolna funkcja.

Warunek (14) musi być spełniony tożsamościowo ze względu na zmienne $x, y, \underset{1}{y}, \ldots, \underset{k}{y}$. Z przyrównania współczynników przy odpowiadających sobie zmiennych otrzymujemy układ jednorodnych równań liniowych na współczynniki $\xi_i(x,y)$, $\eta(x,y)$ - tzw. równania określające. Rozwiązując równania określające wyznaczamy wszystkie dopuszczalne generatory (8) , które jednoznacznie określają lokalną grupę Liego (7) symetrii równania (9)

3. Wyznaczanie lokalnych grup symetrii dla równań różniczkowo-całkowych

W fizyce plazmy niezwykle często spotykamy się z równaniami różniczkowo-całkowymi. Najważniejsze przykłady to układ równań Własowa-Maxwella i równanie Boltzmana. Podejmowane były liczne próby opracowania metod badania symetrii takich równań. Często stosowane były specjalne metody o ograniczonym zasięgu jak np. w pracy [8] , gdzie wykorzystano równoważność pewnego typu liniowych równań cząstkowych z układami równań zwyczajnych drugiego rzędu ([9]). Stosowane były również metody pośrednie, w których najpierw przechodzi się od równania różniczkowo-całkowego do nieskończonego układu równań różniczkowych na momenty, bada się symetrię tego układu równań a następnie dokonuje się transformacji do pierwotnych zmiennych ([10], [11]). Do wad tych metod należą komplikacje rachunkowe, trudności związane ze znalezieniem równoważnego układu równań różniczkowych i z konstrukcją transformacji odwrotnej oraz wątpliwości dotyczące równoważności wyjściowego i zastępczego układu równań.

Niżej proponujemy metodę bezpośredniego wyznaczania symetrii równań różniczkowo-całkowych wzorowaną na formalizmie opisanym w punkcie 2. Rozważymy równanie różniczkowo-całkowe postaci

$$(16) \qquad 0 = F(x,y,\underset{1}{y},\dots,\underset{k}{y}) + \int\limits_{X} dx_1 \dots dx_l\, f(x,y,\underset{1}{y}) \;, \quad l \leqslant n$$

Ograniczenie się do pochodnych pierwszego rzędu pod całką, wystarczające dla naszych celów, podyktowane jest uproszczeniem zapisu. Uogólnienie na przypadek występowania pochodnych wyższego rzędu jest trywialne (porównaj [13]).

Podobnie jak w warunku (10), niezmienniczość równania (16) względem grupy przekształceń (7) oznacza, że jeśli $y(x)$ jest rozwiązaniem równania (16), to również $\tilde{y}(\tilde{x})$ jest rozwiązaniem tego równania. Infinitezymalne kryterium niezmienniczosci równania (16) wyznaczymy obliczając liniową część przyrostu prawej strony równania (16) przy przekształceniu (7). Dla członu różniczkowego tego równania liniową część przyrostu obliczamy tak jak w punkcie 2 (porównaj (14)):

$$(17) \qquad F(\tilde{x},\tilde{y},\underset{1}{\tilde{y}},\dots,\underset{k}{\tilde{y}}) - F(x,y,\underset{1}{y},\dots,\underset{k}{y}) = \lambda \cdot G^{(k)} F(x,y,\underset{1}{y},\dots,\underset{k}{y}) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Pozostaje wyznaczyć liniową częśc przyrostu całki

$$(18) \qquad \Delta I = \int\limits_{\tilde{X}} d\tilde{x}_1 \dots d\tilde{x}_l\, f(\tilde{x},\tilde{y},\underset{1}{\tilde{y}}) - \int\limits_{X} dx_1 \dots dx_l\, f(x,y,\underset{1}{y})$$

pod wpływem przekształcenia (7). Zauważmy, że w całce poddajemy przekształceniu (7) nie tylko granice całkowania i niecałkowane zmienne $x_{l+1},\dots,x_n$ ale również "ciche" zmienne $x_1,\dots,x_l$, po których całkujemy. Z punktu widzenia tych zmiennych całka jest liczbą, tj. nie zależy od wycałkowanych zmiennych. Jednak wartość tej liczby musi być obliczona dla właściwej funkcji, tj, dla $y(x)$ albo $\tilde{y}(\tilde{x})$.

Aby obliczyć przyrost (18) dokonamy w pierwszej całce zamiany zmiennych $x_1,\dots,x_l \longrightarrow \tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_l$ zgodnie ze związkami (7). W tym celu musimy wyznaczyć jakobian transformacji (7) ograniczonej do l zmiennych z dokładnością do wyrazów rzędu $\mathcal{O}(\lambda^2)$. Elementy macierzy Jacobiego przekształcenia (7) są równe

$$(19) \qquad \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \mathcal{O}(\lambda^2)\,, \quad i,j = 1,\dots,l$$

Pozadiagonalne elementy macierzy (19) są rzędu $\sim\lambda$, zatem wkład do wyznacznika tej macierzy nie przekraczający $\mathcal{O}(\lambda^2)$ pochodzi tylko z iloczynu wyrazów diagonalnych

$$(20) \qquad \frac{\partial(\tilde{x}_1\cdots\tilde{x}_l)}{\partial(x_1\cdots x_l)} = \left(1+\lambda\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\right)\cdots\left(1+\lambda\frac{\partial\xi_l}{\partial x_l}\right) + \mathcal{O}(\lambda^2) =$$

$$= 1 + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Możemy więc zapisać przyrost (18) w następującej postaci

$$\Delta I = \int\limits_X dx_1\cdots dx_l \left[f(\tilde{x},\tilde{y},\underset{1}{\tilde{y}})\left(1+\lambda\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}\right) - f(x,y,\underset{1}{y})\right] + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Stosując do funkcji podcałkowej rozwinięcie Taylora i ograniczając się tylko do wyrazów pierwszego rzędu otrzymujemy

$$\Delta I = \lambda \int\limits_X dx_1 \cdots dx_l \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \xi_i + \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i^{(1)} + \right.$$

$$\left. + f \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \right] + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

czyli ostatecznie

$$(21) \qquad \Delta I = \int\limits_{\tilde{X}} d\tilde{x}_1 \cdots d\tilde{x}_l \, f(\tilde{x}, \tilde{y}, \underset{1}{\tilde{y}}) - \int\limits_X dx_1 \cdots dx_l \, f(x, y, \underset{1}{y}) =$$

$$= \lambda \int\limits_X dx_1 \cdots dx_l \left[G^{(1)} f(x, y, \underset{1}{y}) + f(x, y, \underset{1}{y}) \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \right] + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Jeśli pod całką w (16) występują pochodne k-tego rzędu, to w (21) pojawi się k-te rozszerzenie generatora grupy (7) dane wzorem (11) (porównaj [13]).

Na podstawie (17) i (21) <u>infinitezymalne kryterium niezmienniczości równania różniczkowo-całkowego (16)</u> przyjmuje postać analogiczną do (14) :

$$(22) \qquad G^{(k)} F(x, y, \underset{1}{y}, \dots, \underset{k}{y}) + \int\limits_X dx_1 \cdots dx_l \left[G^{(1)} f(x, y, \underset{1}{y}) + f(x, y, \underset{1}{y}) \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \right] = 0$$

dla $y(x)$ spełniających równanie (16).

Z liniowości (22) wynika równoważna, analogiczna do (15), postać

$$(23) \qquad G^{(k)} F(x, y, \underset{1}{y}, \dots, \underset{k}{y}) + \int\limits_X dx_1 \cdots dx_l \left[G^{(1)} f(x, y, \underset{1}{y}) + f(x, y, \underset{1}{y}) \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \right] =$$

$$= \varrho(x, y, \underset{1}{y}, \ldots, \underset{k}{y}) \cdot \left[F(x, y, \underset{1}{y}, \ldots, \underset{k}{y}) + \int\limits_X dx_1 \ldots dx_L \, f(x, y, \underset{1}{y}) \right]$$

gdzie $\varrho(x, y, \underset{1}{y}, \ldots, \underset{k}{y})$ - dowolna funkcja.

Warunek (22) lub (23) musi być spełniony tożsamościowo ze względu na zmienne $x, y, \underset{1}{y}, \ldots, \underset{k}{y}$ (dla wszystkich rozwiązań $y(x)$). Przyrównując współczynniki przy odpowiadających sobie zmiennych otrzymujemy <u>układ równań określających</u> na współczynniki $\xi_i(x,y)$, $\eta(x,y)$ generatora G grupy przekształceń (7) symetrii równania (16).

Wyznaczenie przyrostu ΔI pod wpływem przekształceń (7) (dokładniej: pod wpływem rozszerzonych przekształceń generowanych przez (11)) stanowi klasyczny problem obliczenia tzw. wariacji całki z wariacją zmiennych niezależnych. W fizyce spotykamy się z nim przy formułowaniu zasad wariacyjnych mechaniki (zasada Maupertuis) i przy wyprowadzaniu praw zachowania na podstawie symetrii lagranżjanu (twierdzenie Noether) (porównaj [12], [13] oraz wywody poniżej wzoru (24)). Nasz przypadek różni się od zasad wariacyjnych wyborem przestrzeni funkcyjnej, w której zerujemy pierwszą wariację. Zwykle zasady wariacyjne formułuje się na przestrzeni C (funkcji ciągłych z normą supp), tzw. ekstremum silne lub na przestrzeni D_1 (funkcji różniczkowalnych z normą supp plus supp pochodnej), tzw. ekstremum słabe. Naszą przestrzenią funkcyjną jest zbiór rozwiązań danego równania różniczkowo-całkowego. Zerowanie się pierwszej wariacji całki nie oznacza poszukiwania ekstremum, lecz stanowi warunek stałości tej całki. Jest to bliższe twierdzeniu Noether z tą jednak różnicą, że zajmujemy się równaniem a nie odpowiadającym mu lagranżjanem.

Dodatkowego komentarza wymaga fakt zmiany obszaru całkowania $X \longrightarrow \widetilde{X}$ pod wpływem przekształceń (7) przy obliczaniu przyrostu (18). Zostało to w istotny sposób wykorzystane przy dokonywaniu zamiany zmiennych w pierwszej całce w (18). Wątpliwości nie budzi konieczność zmiany granic całkowania np. w wypadku równania (1), gdzie w górnej granicy całki występuje zmienna niezależna t. Podobnie jest w wypadku ustalonych granic całkowania ale równych $\pm\infty$, gdyż te nie zmieniają się przy przekształceniach (7). W wypadku ustalonych i skończonych granic całkowania np. dla $\int_a^b dx_1 \ldots$

mogłoby się wydawać, że należy ograniczyć się do zamiany $y(x) \to \tilde{y}(\tilde{x})$ tylko w wyrażeniu podcałkowym. Co prawda przypadek ustalonych i skończonych granic całkowania nie dotyczy rozważanego przez nas przykładu, jednak dla ogólności proponowanej tu metody pokażemy, że procedura zastosowana w (18) jest słuszna również w tym przypadku, tj.

$$(24) \qquad \int_a^b dx_1 \cdots \xrightarrow{(7)} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} d\tilde{x}_1 \cdots$$

przynajmniej z interesującą nas dokładnością do wyrazów rzędu $\theta(\lambda^2)$.

Zastosujemy metodę używaną czasem do obliczania tzw. wariacji całki z wariacją czasu przy formułowaniu zasad wariacyjnych mechaniki (np. zasada Maupertuis [12]). Polega ona na zamianie zmiennych w rozważanej całce. Wprowadzamy nowe zmienne $\tau_1, \ldots, \tau_l$, które nie zmieniają się przy przekształceniach (7):

$$(25) \qquad \begin{gathered} x_1 = X_1(\tau_1), \ldots, x_l = X_l(\tau_l) \\ \frac{\partial(x_1 \cdots x_l)}{\partial(\tau_1 \cdots \tau_l)} = \frac{dx_1}{d\tau_1} \cdots \frac{dx_l}{d\tau_l} \equiv x'_1 \cdots x'_l \neq 0 \end{gathered}$$

(Primem zaznaczamy różniczkowanie względem zmiennych $\tau_1, \ldots, \tau_l$). Unikamy w ten sposób trudności interpretacyjnych związanych ze zmianą obszaru X, gdyż wariacja tak przekształconej całki jest zwykłą wariacją bez wariacji zmiennych niezależnych (całkowania) - obszar całkowania Ω w zmiennych $\tau_1, \ldots, \tau_l$ nie zmienia się.

Ponieważ

$$y'_i \equiv \frac{\partial y}{\partial \tau_i} = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{dx_j}{d\tau_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\tau_i} \equiv \frac{\partial y}{\partial x_i} x'_i$$

(w tych rachunkach nie stosujemy konwencji sumacyjnej aby uniknąć pomyłek związanych z zakresem sumowania : $l \leq n$)
więc pochodne cząstkowe (zawarte w symbolu $\underset{1}{y}$) są równe

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{y'_i}{x'_i}$$

Zatem całka występująca w równaniu (16) przyjmuje w zmiennych $\tau_1,\dots,\tau_l$ postać

$$(26)\qquad I=\int\limits_X dx_1\cdots dx_l\, f\left(x_1,\dots,x_n,y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)=$$

$$=\int\limits_\Omega d\tau_1\cdots d\tau_l\,\mathcal{F}\left(\tau_1\cdots\tau_l,x_1\cdots x_n,y,x_1'\cdots x_l',y_1'\cdots y_l',\frac{\partial y}{\partial x_{l+1}},\dots,\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)$$

gdzie

$$(27)\qquad \mathcal{F}\left(\tau_1\cdots\tau_l,x_1\cdots x_n,y,x_1'\cdots x_l',y_1'\cdots y_l',\frac{\partial y}{\partial x_{l+1}},\dots,\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)=$$

$$=f\left(x_1(\tau_1)\cdots x_l(\tau_l),x_{l+1}\cdots x_n,y,\frac{y_1'}{x_1'},\dots,\frac{y_l'}{x_l'},\frac{\partial y}{\partial x_{l+1}},\dots,\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)\cdot x_1'\cdots x_l'$$

Obliczymy teraz liniową część przyrostu (wariację) całki (26) pod wpływem przekształceń (7)

$$\Delta I=\int\limits_\Omega d\tau_1\cdots d\tau_l\left[\mathcal{F}\left(\tau_1\cdots\tau_l,\tilde{x}_1\cdots\tilde{x}_n,\tilde{y},\tilde{x}_1'\cdots\tilde{x}_l',\tilde{y}_1'\cdots\tilde{y}_l',\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x_{l+1}},\dots,\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x_n}\right)+\right.$$

$$\left.-\mathcal{F}\left(\tau_1\cdots\tau_l,x_1\cdots x_n,y,x_1'\cdots x_l',y_1'\cdots y_l',\frac{\partial y}{\partial x_{l+1}},\dots,\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)\right]$$

Stosując rozwinięcie Taylora do funkcji podcałkowej i ograniczając się do wyrazów rzędu niższego niż $\mathcal{O}(\lambda^2)$ otrzymujemy

$$(28)\qquad \Delta I=\int\limits_\Omega d\tau_1\cdots d\tau_l\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial f}{\partial x_i'}\Delta x_i'+\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial f}{\partial y_i'}\Delta y_i'+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)}\Delta\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\right]+\mathcal{O}(\lambda^2)$$

gdzie

$$
(29)\quad
\begin{aligned}
\Delta x_i &= \tilde{x}_i - x_i = \lambda \xi_i + \mathcal{O}(\lambda^2)\\
\Delta y &= \tilde{y} - y = \lambda \eta + \mathcal{O}(\lambda^2)\\
\Delta x'_i &= \frac{d\tilde{x}_i}{d\tau_i} - \frac{dx_i}{d\tau_i} = \frac{d}{d\tau_i}\Delta x_i = x'_i \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i} = \lambda \cdot x'_i \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\\
\Delta y'_i &= \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau_i} - \frac{\partial y}{\partial \tau_i} = \frac{d}{d\tau_i}\Delta y = x'_i \frac{\partial \Delta y}{\partial x_i} = \lambda \cdot x'_i \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i}
\end{aligned}
$$

Przekształcimy (28) do postaci umożliwiającej powrót do zmiennych całkowania $x_1,\dots,x_l$. Zgodnie z (27) mamy

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x'_1 \cdots x'_l\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} \cdot x'_1 \cdots x'_l\\
\frac{\partial F}{\partial x'_i} &= \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)} \frac{\partial (y'_i/x'_i)}{\partial x'_i} x'_1 \cdots x'_l + f \cdot x'_1 \cdots x'_{i-1} \cdot x'_{i+1} \cdots x'_l\\
\frac{\partial F}{\partial y'_i} &= \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)} \frac{\partial (y'_i/x'_i)}{\partial y'_i} x'_1 \cdots x'_l
\end{aligned}
$$

Ponieważ

$$
\frac{\partial (y'_i/x'_i)}{\partial x'_i} = -\frac{y'_i}{x'^2_i}, \qquad \frac{\partial (y'_i/x'_i)}{\partial y'_i} = \frac{1}{x'_i}
$$

więc (28) jest równe

$$
\Delta I = \int_\Omega d\tau_1 \cdots d\tau_l \cdot x'_1 \cdots x'_l \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)} \left(\frac{\partial \Delta y}{\partial x_i} - \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i} \right) + \right.
$$

$$
\left. + \sum_{i=l+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)} \Delta \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) + f \cdot \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i} \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) =
$$

$$= \int\limits_{X} dx_1 \cdots dx_l \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)} \left(\frac{\partial \Delta y}{\partial x_i} - \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=l+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)} \Delta \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) + f \cdot \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i} \right] + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Pokażemy teraz, że

$$\frac{\partial \Delta y}{\partial x_i} - \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i} = \Delta \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{30}$$

W tym celu zróżniczkujemy przyrost $\Delta y = \tilde{y}(\tilde{x}) - y(x)$

$$\frac{\partial \Delta y}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x_i}(x + \Delta x) \cdot \left(1 + \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x_i}(x + \Delta x) - \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) \right)}_{\equiv \Delta \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)} \cdot \left(1 + \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i}$$

skąd

$$\frac{\partial \Delta y}{\partial x_i} - \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i} = \Delta \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \cdot \left(1 + \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i} \right)$$

Zgodnie z (29)

$$\frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

co dowodzi (30). Zatem przyrost (28) jest równy

$$(31)\quad \Delta I = \lambda \int_X dx_1 \cdots dx_l \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \xi_i + \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i^{(1)} + f \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \right] + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

skąd wynika wzór (21), który uprzednio wyprowadziliśmy przy założeniu, że $X \longrightarrow \widetilde{X}$ pod wpływem przekształceń (7).

4. Wyznaczenie symetrii zmodyfikowanego równania NLS

Zastosujemy przedstawiony w poprzednim punkcie formalizm do nielokalnego równania NLS (1). Równanie (1) można zapisać w postaci (16) jako

$$(32)\quad 0 = F(\mathcal{E}, \mathcal{E}^*, \mathcal{E}_t, \mathcal{E}_{xx}) + \int_{-\infty}^{t} dt_1\, f\big(\mathcal{E}(x,t), \mathcal{E}(1), \mathcal{E}^*(1), \mathcal{E}_{t_1}(1), \mathcal{E}^*_{t_1}(1)\big)$$

gdzie

$$(33)\quad F(\mathcal{E}, \mathcal{E}^*, \mathcal{E}_t, \mathcal{E}_{xx}) = i\mathcal{E}_t + a\mathcal{E}_{xx} + b|\mathcal{E}|^2\mathcal{E} = i\mathcal{E}_t + a\mathcal{E}_{xx} + b\mathcal{E}^*\mathcal{E}^2$$

$$(34)\quad f\big(\mathcal{E}(x,t), \mathcal{E}(1), \mathcal{E}^*(1), \mathcal{E}_{t_1}(1), \mathcal{E}^*_{t_1}(1)\big) =$$

$$= \frac{1}{2\omega^3} \sum_{\alpha} \omega_{\alpha 0}^2 \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} du \left[\mathcal{E}(x,t)\mathcal{E}_{t_1}(1)\mathcal{E}^*(1) + \mathcal{E}(x,t)\mathcal{E}(1)\mathcal{E}^*_{t_1}(1) \right] \frac{1}{u} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u}$$

$$(35)\quad (1) \equiv \big(x - u(t - t_1), t_1\big)$$

Brak jawnie wypisanego argumentu oznacza, że mamy na myśli punkt (x,t). Prędkość u nie jest zmienną niezależną, a tylko parametrem względem, którego występuje dodatkowe całkowanie określające postać funkcji f. Pole elektryczne $\mathcal{E}$ nie zależy od u.

Związek oznaczeń z punktów 3 i 4 z wielkościami fizycznymi występującymi w równaniu (32) jest następujący:

$$x_1 \to t \qquad x_2 \to x \qquad y \to \mathcal{E}$$

$$\xi_1 \to \tau \qquad \xi_2 \to \xi \qquad \eta \to \eta$$

Przekształcenia (7) przyjmują teraz postać

$$\tilde{t} = e^{G\lambda} t = t + \lambda \tau(x,t,\mathcal{E}) + O(\lambda^2)$$

$$\tilde{x} = e^{G\lambda} x = x + \lambda \xi(x,t,\mathcal{E}) + O(\lambda^2) \tag{36}$$

$$\tilde{\mathcal{E}} = e^{G\lambda} \mathcal{E} = \mathcal{E} + \lambda \eta(x,t,\mathcal{E}) + O(\lambda^2)$$

a generator (8)

$$G = \tau \partial_t + \xi \partial_x + \eta \partial_{\mathcal{E}} \tag{37}$$

Rozszerzone generatory (11) dane są wzorami:

$$G^{(1)} = G + \eta^* \partial_{\mathcal{E}^*} + \eta(1) \partial_{\mathcal{E}(1)} + \overset{*}{\eta}(1) \partial_{\mathcal{E}^*(1)} + \tag{38}$$
$$+ \eta_1^{(1)} \partial_{\mathcal{E}_t} + \eta_1^{(1)*} \partial_{\mathcal{E}_t^*} + \eta_1^{(1)}(1) \partial_{\mathcal{E}_{t_1}(1)} + \eta_1^{(1)*}(1) \partial_{\mathcal{E}^*_{t_1}(1)}$$

$$G^{(2)} = G^{(1)} + \eta_{22}^{(2)} \partial_{\mathcal{E}_{xx}} + \dots \tag{39}$$

W $G^{(2)}$ pominęliśmy wyrazy, które w działaniu na (32), zgodnie z kryterium (22), nie dają wkładu.

Generatory (38) i (39) odpowiadają rozszerzonym przekształceniom (działającym w przestrzeni rozszerzonej) nie tylko o pochodne pola $\mathcal{E}$ ale również o pole $\mathcal{E}$ i jego pochodne brane w punkcie (1) oraz o sprzężone (w sensie zespolonym) pole $\mathcal{E}$ i jego pochodne w (x,t) jak i w (1).

Jeśli chodzi o pochodne, to operacji rozszerzenia dokonujemy w zwykły sposób (patrz np. [5] , [6] i [13]), tj. rozszerzone zmienne $\mathcal{E}_t$, $\mathcal{E}_{xx}$ transformują się względem rozszerzonych przekształceń tak jak pochodne zmiennej $\mathcal{E}$. Odpowiednie, wynikające stąd wzory (42) dane są niżej (patrz [6] , [14]).

W przypadku rozszerzenia na wielkości sprzężone i brane w punkcie (1) postępujemy zgodnie z ogólną zasadą. I tak wielkości sprzężone transformujemy w ten sposób, że najpierw niesprzężone wielkości poddajemy transformacji (36) a następnie stosujemy operację sprzężenia zespolonego. Zatem np. współczynnik η^* przy $\partial_{\mathcal{E}^*}$ w (38) otrzymujemy jako zespolone sprzężenie współczynnika η przy $\partial_{\mathcal{E}}$ itd. (porównaj [14]). Podobnie, postępujemy z wielkościami branymi w punkcie (1). Najpierw wielkości te brane w punkcie (x,t) przekształcamy za pomocą (36) a następnie w wyniku podstawiamy $\mathcal{E}(x,t) \rightarrow \mathcal{E}(1)$. Na przykład współczynnik $\eta(1)$ definiujący transformację $\mathcal{E}(1) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}(1)$:

$$\tilde{\mathcal{E}}(1) = \mathcal{E}(1) + \lambda\eta(1) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

znajdujemy dokonując transformacji (36)

$$\tilde{\mathcal{E}}(x,t) = \mathcal{E}(x,t) + \lambda\eta(x,t,\mathcal{E}(x,t)) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

a następnie podstawiając $(x,t) \rightarrow (1)$ w argumencie pola $\mathcal{E}$

$$\tilde{\mathcal{E}}(1) = \mathcal{E}(1) + \lambda\eta(x,t,\mathcal{E}(1)) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Zatem

$$\eta(1) = \eta(x,t,\mathcal{E}(1)) \tag{40}$$

Zgodnie z [6] § 4.2.3 oraz [14] współczynniki τ, ξ, η są postaci

$$\tau = \tau(x,t) \qquad \xi = \xi(x,t) \qquad \eta = g(x,t)\,\mathcal{E}(x,t) + h(x,t) \tag{41}$$

a współczynniki $\eta_1^{(1)}$ i $\eta_{22}^{(2)}$ wyrażają się przez τ, ξ, g, h następująco

$$
(42)\qquad
\begin{aligned}
\eta_1^{(1)} &= \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t}\varepsilon + \left(g - \frac{\partial \tau}{\partial t}\right)\varepsilon_t - \frac{\partial \xi}{\partial t}\varepsilon_x \\
\eta_{22}^{(2)} &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\varepsilon - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}\varepsilon_t + \left(2\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)\varepsilon_x + \\
&\quad - 2\frac{\partial \tau}{\partial x}\varepsilon_{tx} + \left(g - 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\varepsilon_{xx}
\end{aligned}
$$

Z (40) i (41) wynika, że

$$\eta(1) = g(x,t)\,\varepsilon(1) + h(x,t)$$

i odpowiednio

$$(43)\qquad \eta_1^{(1)}(1) = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t}\varepsilon(1) + \left(g - \frac{\partial \tau}{\partial t}\right)\varepsilon_{t_1}(1) - \frac{\partial \xi}{\partial t}\varepsilon_x(1)$$

Teraz możemy skorzystać z kryterium (22) . Podobnie jak w [14] obliczamy

$$
(44)\qquad
\begin{aligned}
G^{(2)}F &= i\eta_1^{(1)} + a\eta_{22}^{(2)} + b\left(2\varepsilon^*\varepsilon\eta + \varepsilon^2\eta^*\right) = \\
&= i\frac{\partial h}{\partial t} + a\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(i\frac{\partial g}{\partial x} + a\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)\varepsilon + \left(ig - i\frac{\partial \tau}{\partial t} - a\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}\right)\varepsilon_t + \\
&\quad + \left(-i\frac{\partial \xi}{\partial t} - a\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2a\frac{\partial g}{\partial x}\right)\varepsilon_x - 2a\frac{\partial \tau}{\partial x}\varepsilon_{tx} + a\left(g - 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\varepsilon_{xx} + \\
&\quad + bh^*\varepsilon^2 + 2bh\,\varepsilon^*\varepsilon + b\left(2g + g^*\right)\varepsilon^*\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

Natomiast

$$(45)\quad \int_{-\infty}^{t} dt_1 \left[G^{(1)} f + f \frac{\partial \tau(x,t_1)}{\partial t_1} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\omega^3} \sum_{\alpha} \omega_{\alpha 0}^2 \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} du \Big[\eta\, \mathcal{E}_{t_1}(1) \mathcal{E}^*(1) + \eta\, \mathcal{E}(1) \mathcal{E}^*_{t_1}(1) +$$

$$+ \eta(1)\, \varepsilon\, \mathcal{E}^*_{t_1}(1) + \eta^*(1)\, \varepsilon\, \mathcal{E}_{t_1}(1) + \eta_1^{(1)}(1)\, \varepsilon\, \mathcal{E}^*(1) + \eta_1^{(1)*}(1)\, \varepsilon\, \mathcal{E}(1) +$$

$$+ \frac{\partial \tau}{\partial t_1} \varepsilon\, \mathcal{E}_{t_1}(1) \mathcal{E}^*(1) + \frac{\partial \tau}{\partial t_1} \varepsilon\, \mathcal{E}^*_{t_1}(1) \mathcal{E}(1) \Big] \frac{1}{u} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u} =$$

$$= \frac{1}{2\omega^3} \sum_{\alpha} \omega_{\alpha 0}^2 \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} du \Big[g\, \varepsilon\, \mathcal{E}_{t_1}(1) \mathcal{E}^*(1) + g\, \varepsilon\, \mathcal{E}(1) \mathcal{E}^*_{t_1}(1) +$$

$$+ g(x,t_1)\, \varepsilon\, \mathcal{E}(1) \mathcal{E}^*_{t_1}(1) + g^*(x,t_1)\, \varepsilon\, \mathcal{E}^*(1) \mathcal{E}_{t_1}(1) + \frac{\partial g(x,t_1)}{\partial t_1} \varepsilon\, \mathcal{E}(1) \mathcal{E}^*(1) +$$

$$+ \left(g(x,t_1) - \frac{\partial \tau(x,t_1)}{\partial t_1} \right) \varepsilon\, \mathcal{E}_{t_1}(1) \mathcal{E}^*(1) - \frac{\partial \xi(x,t_1)}{\partial t_1} \varepsilon\, \mathcal{E}_x(1) \mathcal{E}^*(1) + \frac{\partial g^*(x,t_1)}{\partial t_1} \varepsilon\, \mathcal{E}^*(1) \mathcal{E}(1) +$$

$$+ \left(g^*(x,t_1) - \frac{\partial \tau^*(x,t_1)}{\partial t_1} \right) \varepsilon\, \mathcal{E}^*_{t_1}(1) \mathcal{E}(1) - \frac{\partial \xi^*(x,t_1)}{\partial t_1} \varepsilon\, \mathcal{E}^*_x(1) \mathcal{E}(1) +$$

$$+ \frac{\partial \tau(x,t_1)}{\partial t_1} \varepsilon\, \mathcal{E}_{t_1}(1) \mathcal{E}^*(1) + \frac{\partial \tau(x,t_1)}{\partial t_1} \varepsilon\, \mathcal{E}(1) \mathcal{E}^*_{t_1}(1) +$$

$$+ \frac{\partial h(x,t_1)}{\partial t_1} \varepsilon\, \mathcal{E}^*(1) + \frac{\partial h^*(x,t_1)}{\partial t_1} \varepsilon\, \mathcal{E}(1) \Big] \frac{1}{u} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u}$$

Podstawiamy (44) i (45) do kryterium niezmienniczości (22) , przy czym musimy skorzystać z równania (32) ,żeby mieć do czynienia tylko z niezależnymi zmiennymi (w przestrzeni rozszerzonej). Z równania (32) najwygodniej jest wyliczyć wyraz z najwyższą pochodną

$$(46)\qquad a\, \mathcal{E}_{xx} = -i\, \mathcal{E}_t - b\, \mathcal{E}^* \mathcal{E}^2 - \int_{-\infty}^{t} dt_1 f$$

który wstawiamy do (44) :

$$(47)\quad a\left(g-2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\mathcal{E}_{xx}=i\left(2\frac{\partial\xi}{\partial x}-g\right)\mathcal{E}_t+b\left(2\frac{\partial\xi}{\partial x}-g\right)\mathcal{E}^*\mathcal{E}^2+$$

$$+\frac{1}{2\omega^3}\sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2\left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2\int_{-\infty}^{t}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}du\left[-g\mathcal{E}\mathcal{E}_{t_1}(1)\mathcal{E}^*(1)-g\mathcal{E}\mathcal{E}(1)\mathcal{E}^*_{t_1}(1)+2\frac{\partial\xi}{\partial x}\mathcal{E}\mathcal{E}_{t_1}(1)\mathcal{E}^*(1)+2\frac{\partial\xi}{\partial x}\mathcal{E}\mathcal{E}(1)\mathcal{E}^*_{t_1}(1)\right]\frac{1}{u}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u}$$

Otrzymujemy w ten sposób równanie, które musi być spełnione tożsamościowo ze względu na niezależne zmienne $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_t$, $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_{xt}$, $\mathcal{E}^*$, $\mathcal{E}(1)$, $\mathcal{E}^*(1)$, $\mathcal{E}_{t_1}(1)$, $\mathcal{E}^*_{t_1}(1)$, tzn. dla dowolnych wartości tych zmiennych. Muszą więc znikać współczynniki przy niezależnych wyrazach zbudowanych z tych zmiennych (równania określające). Ponieważ zmienne brane w punkcie (1) występują tylko w wyrazach całkowych, więc wyrazy te są niezależne od pozostałych i możemy żądać zerowania się osobno sumy wyrazów całkowych i sumy wyrazów bez całek. Ta ostatnia rozpada się na niezależne (różne) jednomiany zmiennych $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_t$, $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_{xt}$. Współczynniki przy tych jednomianach (patrz (44) i (47)) muszą być równe zeru:

(48 a) $\quad 0=i\frac{\partial h}{\partial t}+a\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ $\qquad \mathcal{E}^0$ (wyraz stały)

(48 b) $\quad 0=i\frac{\partial g}{\partial t}+a\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ $\qquad \mathcal{E}$

(48 c) $\quad 0=i\frac{\partial \tau}{\partial t}+a\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}-2i\frac{\partial\xi}{\partial x}$ $\qquad \mathcal{E}_t$

(48 d) $\quad 0=i\frac{\partial \xi}{\partial t}+a\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}-2a\frac{\partial g}{\partial x}$ $\qquad \mathcal{E}_x$

(48 e) $\quad 0=\frac{\partial \tau}{\partial x}$ $\qquad \mathcal{E}_{xt}$

(48 f) $\quad 0=h^*$ $\qquad \mathcal{E}^2$

(48 g) $\qquad 0 = h \qquad\qquad \varepsilon^*\varepsilon$

(48 h) $\qquad 0 = g + g^* + 2\frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad\qquad \varepsilon^*\varepsilon^2$

Zgodnie z (48 f,g) $h = 0 = h^*$ i równanie (48 a) jest spełnione tożsamościowo. Z równania (48 e) wynika, że τ nie zależy od x : $\tau = \tau(t)$. Zatem $\partial^2\tau/\partial x^2 = 0$ co upraszcza równanie (48 c) . Otrzymujemy więc układ równań

(49 a) $$0 = i\frac{\partial g}{\partial t} + a\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

(49 b) $$0 = \frac{\partial \tau}{\partial t} - 2\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

(49 c) $$0 = i\frac{\partial \xi}{\partial t} + a\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2a\frac{\partial g}{\partial x}$$

(49 d) $$0 = g + g^* + 2\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

gdzie $\tau = \tau(t)$, $\xi = \xi(x,t)$, $\eta = g(x,t)\varepsilon(x,t)$.

Skoro τ zależy tylko od t , więc $\frac{\partial \tau}{\partial t}$ też zależy tylko od t . Zatem, zgodnie z (49 b) $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ może zależeć tylko od t czyli $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$. Znika więc odpowiedni wyraz w równaniu (49 c) i nasz układ równań upraszcza się do postaci

(50 a) $$0 = i\frac{\partial g}{\partial t} + a\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

(50 b) $$0 = \frac{\partial \tau}{\partial t} - 2\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

(50 c) $$0 = i\frac{\partial \xi}{\partial t} - 2a\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$(50\ d) \qquad 0 = g + g^* + 2\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Otrzymaliśmy taki sam układ równań jak w przypadku zwykłego równania NLS (bez członu całkowego) , którego rozwiązania (patrz [14]) mają postać

$$\tau = 2\alpha t + \gamma_2$$

$$(51) \qquad \xi = \alpha x + \beta a t + \gamma_1 \qquad \mathbb{R} \ni \alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \delta \text{ - dowolne stałe}$$

$$\eta = g\mathcal{E} = \left(i\frac{\beta}{2}x - \alpha + i\delta\right)\mathcal{E}$$

Wyrazy całkowe zawarte w (45) i (47) dają, po przeprowadzeniu redukcji wyrazów podobnych, równanie

$$(52) \qquad 0 = \frac{1}{2\omega^3}\sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2\left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2\int_{-\infty}^{t} dt_1\int_{-\infty}^{\infty} du\Big[\Big(2\frac{\partial \xi}{\partial x} + g(x,t_1) + g^*(x,t_1)\Big)\mathcal{E}\,\mathcal{E}^*(1)\,\mathcal{E}_{t_1}(1) +$$

$$+\Big(2\frac{\partial \xi}{\partial x} + g(x,t_1) + g^*(x,t_1)\Big)\mathcal{E}\,\mathcal{E}(1)\,\mathcal{E}^*_{t_1}(1) +$$

$$+\left(\frac{\partial g(x,t_1)}{\partial t_1} + \frac{\partial g^*(x,t_1)}{\partial t_1}\right)\mathcal{E}\,\mathcal{E}(1)\,\mathcal{E}^*(1) +$$

$$-\frac{\partial \xi(x,t_1)}{\partial t_1}\mathcal{E}\,\mathcal{E}_x(1)\,\mathcal{E}^*(1) - \frac{\partial \xi^*(x,t_1)}{\partial t_1}\mathcal{E}\,\mathcal{E}^*_x(1)\,\mathcal{E}(1)\Big]\frac{1}{u}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u}$$

Współczynniki przy niezależnych jednomianach w (52) nie zależą od zmiennej $\mathcal{E}$, więc dla każdego z niezależnych wyrazów możemy skorzystać z lematu Lagrange'a (porównaj [13]) i przyrównać te współczynniki do zera. Otrzymujemy następujące równania

$$0 = 2\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} + g(x,t_1) + g^*(x,t_1)$$

Ponieważ, zgodnie z (51) , g nie zależy od t , więc $g(x,t) = g(x,t_1) = g(x)$ i równanie to pokrywa się z równaniem (50 d) .

Niezależność g od t powoduje, że następne równanie

$$0 = \frac{\partial}{\partial t_1}(g + g^*)$$

też nic nie wnosi, gdyż jest spełnione tożsamościowo.

Pozostaje równanie (zgodnie z (51) $\xi^* = \xi$)

$$(53) \qquad 0 = \frac{\partial \xi(x,t_1)}{\partial t_1}$$

które stanowi dodatkowy warunek w stosunku do równań (50) i wynikających z nich rozwiązań (51).. Spełnienie równania (53) wymaga znikania parametru β w rozwiązaniach (51) : $\beta=0$. Zatem rozwiązanie równań określających, wynikających z kryterium niezmienniczości (22) , przyjmuje postać

$$(54) \qquad \begin{aligned} \tau &= 2\alpha t + \gamma_2 \\ \xi &= \alpha x + \gamma_1 \\ \eta &= (-\alpha + i\delta)\varepsilon \end{aligned} \qquad \mathbb{R} \ni \alpha, \gamma_1, \gamma_2, \delta \text{ - dowolne stałe}$$

Podstawiając (54) do (37) i wybierając parametry α, γ_1, γ_2, δ tak, że tylko jeden z nich jest różny od zera i równy 1 , otrzymujemy cztery generatory

$$(55) \qquad \begin{aligned} G_1 &= \partial_t \\ G_2 &= \partial_x \\ G_3 &= i\varepsilon\partial_\varepsilon \\ G_4 &= 2t\partial_t + x\partial_x - \varepsilon\partial_\varepsilon \end{aligned}$$

rozpinające 4-wymiarową algebrę Liego z regułami przemienności (patrz [14])

$$(56) \qquad \begin{aligned} &[G_1, G_2] = [G_1, G_3] = [G_2, G_3] = [G_3, G_4] = 0 \\ &[G_1, G_4] = 2G_1 \qquad [G_2, G_4] = G_2 \end{aligned}$$

Algebra ta generuje 4-wymiarową grupę Liego symetrii zmodyfikowanego równania NLS (1) będącą podgrupą 5-wymiarowej grupy Liego symetrii zwykłego równania NLS (porównaj [14]).

Generatorom (55) odpowiadają następujące jednoparametrowe podgrupy symetrii (porównaj [13] i [14]):

G_1 generuje translacje w czasie

$$(57)\quad \begin{aligned} \tilde{t} &= t+\lambda \\ \tilde{x} &= x \\ \tilde{\mathcal{E}} &= \mathcal{E} \end{aligned}$$

Niezmienniczość równania (1) względem przekształceń (57) wynika z tego, że współczynniki w równaniu (1) nie zależą od czasu (jednorodność czasu).

G_2 generuje translacje w przestrzeni

$$(58)\quad \begin{aligned} \tilde{t} &= t \\ \tilde{x} &= x+\lambda \\ \tilde{\mathcal{E}} &= \mathcal{E} \end{aligned}$$

Niezmienniczość (1) względem (58) wynika z tego, że współczynniki równania (1) nie zależą od położenia (jednorodność przestrzeni).

G_3 generuje transformację cechowania pola

$$(59)\quad \begin{aligned} \tilde{t} &= t \\ \tilde{x} &= x \\ \tilde{\mathcal{E}} &= \mathcal{E} e^{i\lambda} \end{aligned}$$

Ta niezmienniczość wynika z tego, że z punktu widzenia czynnika fazowego w każdym wyrazie równania (1) pole $\mathcal{E}$ występuje liniowo ($|\mathcal{E}|^2$ nie zależy od fazy).

G_4 generuje transformację skalowania zmiennych zależnych i niezależnych

$$
\begin{aligned}
\tilde{t} &= t e^{2\lambda} = t\delta^2 \\
\tilde{x} &= x e^{\lambda} = x\delta \qquad\qquad \text{gdzie } e^{\lambda} = \delta \\
\tilde{\mathcal{E}} &= \mathcal{E} e^{-\lambda} = \mathcal{E}\delta^{-1}
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Tę symetrię równania (1) jest znacznie trudniej dostrzec na pierwszy rzut oka. Można ją jednak sprawdzić bezpośrednim rachunkiem zauważając, że różniczkowaniu względem danej zmiennej odpowiada dzielenie przez tę zmienną (iloraz różnicowy) zaś całkowaniu względem danej zmiennej mnożenie przez tę zmienną (suma Riemanna) Zatem przeskalowania poszczególnych wyrazów równania (1) pod wpływem (60) są następujące:

$$\mathcal{E}_t: \quad \mathcal{E} \to \delta^{-1}, \quad \partial_t \to \delta^{-2} \quad \Rightarrow \delta^{-3}$$

$$\mathcal{E}_{xx}: \quad \mathcal{E} \to \delta^{-1}, \quad \partial_x^2 \to \delta^{-2} \quad \Rightarrow \delta^{-3}$$

$$\mathcal{E}|\mathcal{E}|^2: \quad \mathcal{E} \to \delta^{-1}, \text{ do trzeciej potęgi} \quad \Rightarrow \delta^{-3}$$

$$\int_{-\infty}^{t} dt_1 \mathcal{E}\partial_{t_1}|\mathcal{E}|^2: \quad \mathcal{E}|\mathcal{E}|^2 \to \delta^{-3}, \quad \partial_t \to \delta^{-2}, \quad \int dt_1 \to \delta^2 \quad \Rightarrow \delta^{-3}$$

Zatem wszystkie wyrazy równania (1) mnożone są przez ten sam różny od zera czynnik δ^{-3}, czyli równanie (1) nie zmienia się.

Jak łatwo zauważyć, warunki asymptotyczne

$$\mathcal{E}, \mathcal{E}_x, \mathcal{E}_t, \mathcal{E}_{xx}, \mathcal{E}_{tt} \Big|_{\substack{x=\pm\infty \\ t=-\infty}} = 0$$

niezbędne do wyprowadzenia równania (1), są niezmiennicze względem przekształceń (57) - (60). Nie zmienia się położenie "brzegu" $t=-\infty$, $x=\pm\infty$ ani warunek zerowania się $\mathcal{E}, \mathcal{E}_x, \mathcal{E}_t, \mathcal{E}_{xx}, \mathcal{E}_{tt}$ na tym brzegu (tzn. odpowiednio szybkiego dążenia do zera pola $\mathcal{E}$ dla $t \to -\infty$, $x \to \pm\infty$) pod wpływem (57) - (60).

5. Podsumowanie

W niniejszej pracy przedstawione zostało inne niż w [13] wyprowadzenie kryterium niezmienniczości równania różniczkowo-całkowego. Pozwala ono uniknąć wątpliwości interpretacyjnych związanych ze zmianą obszaru całkowania.

Zbadane w tej pracy równanie stanowi istotnie odmienny przykład zastosowania naszej ogólnej metody bezpośredniego wyznaczania grup symetrii równań różniczkowo-całkowych. Granice całki $\int_{-\infty}^{t} dt_1 \dots$ zależą od zmiennych w odróżnieniu od [13].

Wyznaczenie grupy symetrii zmodyfikowanego równania NLS (1) i porównanie jej z grupą symetrii równania NLS jest bardzo ważne z punktu widzenia fizyki plazmy. Równanie NLS opisujące obwiedniowe solitony Langmuira zostało otrzymane w ramach opisu hydrodynamicznego, natomiast równanie (1) w ramach opisu kinetycznego plazmy. Właśnie nielokalny człon całkowy w (1) jest śladem po opisie kinetycznym.

6. Literatura

1. J. Zawistowski, Praca IPPT nr 13/1986: Redukcja opisu kinetycznego plazmy do równań typu NLS dla fal Langmuira
2. J. Zawistowski, Praca IPPT nr 23/1990: Nielokalne równanie NLS dla fal Langmuira w plazmie
3. L. W. Owsiannikow, Gruppowoj analiz differencjalnych urawnienij, Nauka, Moskwa 1978
4. N. H. Ibragimow, Gruppy preobrazowanij w matematiczeskoj fizykie, Nauka, Moskwa 1983
5. P. J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, Springer-Verlag, NY, Berlin 1986
6. G. W. Bluman, S. Kumei, Symmetries and Differential Equations, Springer-Verlag, NY, Berlin 1989
7. H. Stephani, Differential equations. Their solution using symmetries, Cambridge University Press, 1989
8. B. Abraham-Schrauner, J. Math. Phys. 26 (1985) No 6, 1426
9. A. Cohen, An Introduction to the Lie Theory of One Parameter Group, Heath, Boston 1911

10. W. B. Taranow, ŻTF 46 (1976), 1271
11. B. Atamaniuk, Praca IPPT nr 50/1988
12. W. Rubinowicz, W. Królikowski, Mechanika teoretyczna, PWN, Warszawa 1967
13. J. Zawistowski, Praca IPPT nr 23/1992: Zastosowanie teorii grup do równań różniczkowo-całkowych fizyki plazmy
14. J. Zawistowski, Praca IPPT (w przygotowaniu): Wyznaczenie symetrii nieliniowego równania Schrödingera

Spis treści