RÉSONANCE ET FORCES DE GRAVITATION.

Depuis qu'Eötvös a signalé, voici bientôt 50 ans, la possibilité d'utiliser les effets de résonance pour amplifier les oscillations de la balance de torsion sous l'action des forces de gravitation, il ne me semble pas qu'on en ait tiré un parti suffisant, soit pour réaliser d'une manière simple la mise en évidence de ces forces devant un auditoire, soit pour augmenter la précision obtenue jusqu'ici dans la mesure de la constante de Newton.

Soient deux systèmes matériels rigides A et B mobiles autour d'un même axe vertical et possédant l'un et l'autre un plan de symétrie passant par cet axe. Le système A est suspendu, suivant l'axe, à un fil de torsion. Nous prendrons pour origine des azimuts la position du plan de symétrie de A lorsque ce système est en équilibre en l'absence de B. Pour toute autre orientation de A, l'azimut du plan de symétrie sera désigné par α; soit θ l'azimut du plan de symétrie de B. Par raison de symétrie, le moment C par rapport à l'axe des forces de gravitation exercées par B sur A ne dépend que de l'écart angulaire $\theta - \alpha$ et en est une fonction périodique impaire de période 2π si A et B ne possèdent pas d'autres plans de symétrie passant par l'axe. Le développement de cette fonction en série de Fourier est donc de la forme :

$$(1) \qquad C = C_1 \sin(\theta - \alpha) + C_2 \sin 2(\theta - \alpha) + \dots + C_n \sin n(\theta - \alpha) + \dots$$

Il est facile, comme nous le verrons sur un exemple, de disposer les masses de A et de B de manière que les coefficients C_1, C_2... forment une série rapidement décroissante.

Nous supposerons qu'on donne au système B un mouvement connu, par exemple une rotation uniforme de vitesse angulaire ω, autour de l'axe commun. Le mouvement de A est alors régi par l'équation :

$$(2) \qquad I\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \lambda\frac{d\alpha}{dt} + K\alpha = \Sigma C_n \sin n(\omega t - \alpha)$$

en supposant qu'à l'origine du temps le plan de symétrie de B coïncide avec l'azimut origine. I est le moment d'inertie de A par rapport à l'axe commun, λ le coefficient qui détermine l'amortissement des oscillations de A, et K le coefficient de torsion du fil de suspension, modifié, s'il y a lieu, par les autres actions directrices auxquelles peut être soumis le système A. Comme terme de comparaison pour la déviation α, nous prendrons la quantité :

$$(3) \qquad \alpha_0 = \frac{C_1}{K}$$

que nous appellerons la *déviation statique* et qui coïncide très sensiblement, pour les systèmes à C_n rapidement décroissants, avec la déviation statique de A lorsque l'écart angulaire $\theta - \alpha$ prend la valeur, voisine de $\frac{\pi}{2}$, pour laquelle le moment C est maximum. La petitesse des actions de gravitation fait que l'angle α_0 sera généralement petit, de l'ordre d'un degré au maximum.

Si le but poursuivi, celui de démonstration expérimentale, par exemple, n'exige pas une grande précision, nous pourrons nous contenter d'une première approximation dans laquelle nous négligerons, au second membre de (2), la déviation α devant ωt.

L'équation (2) devient alors linéaire et la solution α est la somme de termes α_n qui correspondent respectivement aux différents termes de la somme qui figure au second membre.

Considérons tout d'abord la solution de régime permanent; elle aura pour expression, en désignant par Ω la pulsation $\sqrt{\frac{K}{I}}$ des oscillations propres du système A :

$$\alpha = \Sigma A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \tag{4}$$

avec :

$$A_n = \frac{C_n}{I\sqrt{(n^2\omega^2 - \Omega^2)^2 + \frac{n^2\omega^2\Omega^2\delta^2}{\pi^2}}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{n\omega\Omega\delta}{(n^2\omega^2 - \Omega^2)\pi}$$

δ étant le décrément logarithmique :

$$\delta = \frac{\pi\gamma}{I\Omega}$$

des oscillations propres du système A.

Si l'on donne à la rotation uniforme de B une vitesse angulaire ω précisément égale à la pulsation propre Ω des oscillations de A, on obtient un effet de résonance dans lequel le premier terme de (4) l'emporte de beaucoup sur les autres en amplitude et prend la forme simple :

$$\alpha_1 = \frac{\pi\alpha_0}{\delta} \cos \Omega t$$

δ pouvant être rendu très petit, on voit que l'amplification $\frac{\pi}{\delta}$ de l'amplitude de α, par rapport à la déviation statique, peut être rendue très grande.

Si l'on se fixe une amplification donnée A pour l'amplitude des oscillations de régime permanent par rapport à la déviation α_0, le décrément logarithmique se trouve fixé par :

$$\delta = \frac{\pi}{A}$$

ainsi que le temps nécessaire pour l'établissement de cette amplitude à une approximation donnée, au centième près par exemple. On obtient facilement pour ce temps :

$$t = 10\,\frac{A}{\Omega}.$$

Au point de vue de la rapidité des mesures ou de la démonstration expérimentale, il est avantageux de s'adresser au régime variable de préférence au régime permanent, en donnant au système A un amortissement aussi faible que possible. Nous supposerons qu'à l'origine du temps les angles α et θ sont nuls et que l'équipage A est immobile dans sa position d'équilibre, la valeur initiale de $\frac{dx}{dt}$ se trouvant ainsi nulle. Le terme d'amortissement dans le premier membre de l'équation (2) pouvant être considéré comme négligeable au début du régime variable, on obtient pour la solution α, qui correspond en première approximation au premier terme du second membre, et à la résonance :

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_0}{2}\,[\sin \Omega t - \Omega t \cos \Omega t]. \tag{6}$$

Les solutions $\alpha_n \ldots \alpha_n$ qui correspondent aux autres termes de la somme qui figure au second membre de l'équation (2) sont toutes de la forme :

$$\alpha_n = \frac{C_n}{K(n^2-1)}\,[n \sin \Omega t - \sin n\Omega t].$$

Il est remarquable que, pour les valeurs de t égales aux multiples entiers k de la période $\frac{2\pi}{\Omega}$ des oscillations propres de A ou de la rotation de B, les α_n s'annulent tous, à l'exception de α_1, qui donne :

$$\alpha_1 = k\pi\alpha_0. \tag{7}$$

L'amplification A égale à $k\pi$ que représente cette $k^{\text{ième}}$ élongation négative par rapport à la déviation statique α_0 est ainsi obtenue au bout d'un temps :

$$t = \frac{2k\pi}{\Omega} = \frac{2A}{\Omega}.$$

La comparaison avec l'équation (5) montre l'avantage que présente, sur l'observation du régime permanent, l'observation des élongations négatives en régime variable de résonance. Il faut y ajouter l'avantage que présente l'élimination des termes autre que celui en C_1 dans le second membre de l'équation (2).

En utilisant la disposition classique de M. Vernon Boys avec une suspension robuste et une durée d'oscillation d'une minute, on obtient facilement une déviation statique d'un demi-degré; la formule (7) montre qu'après quelques minutes de rotation de B, l'élongation négative α prend une valeur aussi grande qu'on peut le désirer pour une observation facile à distance.

Si l'on a en vue la détermination de la constante G de Newton, l'observation des élongations négatives en régime variable de résonance me semble permettre, dans des conditions plus commodes, d'augmenter la précision obtenue jusqu'ici par l'observation de la déviation statique dans des balances de torsion de très longue durée d'oscillation.

La mesure de G se ramène à la détermination, en valeur absolue, du moment C_1. Celle-ci peut s'obtenir par une méthode de zéro, en compensant C_1 par une action électromagnétique ou électrodynamique alternative, l'annulation de l'élongation négative, qui dépend seulement du terme fondamental dans le couple périodique C exercé sur A, servant de critérium sensible pour cette compensation. On peut aussi procéder directement par observation ou enregistrement du régime variable tel qu'il est représenté, en première approximation, par l'équation (6), avec des corrections qu'il est facile de déduire de la méthode suivante pour l'intégration de l'équation (2) par approximations successives. En divisant les deux membres de cette équation par K nous la mettrons sous la forme :

$$(9)\qquad \frac{1}{\Omega^2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{\gamma}{K}\frac{d\alpha}{dt}+\alpha=\alpha_0[\sin(\omega t-\alpha)+c_2\sin 2(\omega t-\alpha)+\ldots]$$

en posant :

$$c_2=\frac{C_2}{C_1},\ \ldots,\ c_n=\frac{C_n}{C_1}.$$

Les nombres $c_2, \ldots, c_n$ sont petits et décroissent rapidement quand n augmente. Comme ils interviendront seulement dans des termes correctifs, on les déterminera avec une précision suffisante en appliquant la méthode des élongations négatives aux régimes variables de résonance sur les harmoniques successifs de la pulsation fondamentale ω. En faisant tourner B avec la vitesse angulaire $\frac{\Omega}{n}$, c'est le $n^{\text{ième}}$ terme de la somme qui figure au second membre, de l'équation (2) qui se trouvera en résonance avec l'oscillation du système A, et les élongations négatives en régime variable ne dépendront que de C_n.

L'angle α_0, mesuré en radians, étant très petit, nous obtiendrons la solution α de l'équation (9) sous forme d'une série très rapidement convergente en la développant suivant les puissances croissantes de α_0 sous la forme :

$$\alpha=\alpha_0 f_1(t)+\alpha_0^2 f_2(t)+\ldots+\alpha_0^n f_n(t)+\ldots$$

Les équations auxquelles satisfont les fonctions f s'obtiennent en substituant à α dans (9) le développement (10) et en égalant les coefficients des mêmes puissances de α_0 dans les deux membres. On obtient ainsi, en supposant la résonance sur le terme fondamental :

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega^2}\dfrac{d^2f_1}{dt^2}+\dfrac{\gamma}{K}\dfrac{df_1}{dt}+f_1=\sin\Omega t+c_2\ \sin 2\Omega t+\ldots+c_n\ \sin n\Omega t, \\ \dfrac{1}{\Omega^2}\dfrac{d^2f_2}{dt^2}+\dfrac{\gamma}{K}\dfrac{df_2}{dt}+f_2=F_2(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{1}{\Omega^2}\dfrac{d^2f_n}{dt^2}+\dfrac{\gamma}{K}\dfrac{df_n}{dt}+f_n=F_n(t). \end{cases}$$

Chaque second membre F_n s'exprime en fonction des f antérieurement connus, depuis f_1 jusqu'à f_{n-1}. Chaque fonction f est déterminée par la condition de s'annuler à l'origine du temps ainsi que sa dérivée par rapport à t. Les intégrations des équations (11) se font finalement par des calculs numériques classiques qu'il n'est d'ailleurs pas nécessaire de pousser bien loin pour obtenir une approximation largement suffisante.

On obtient ainsi l'équation dont (7) est la première approximation et qui donne les élongations successives en régime variable. De l'observation de ces élongations on déduira α_0 et par conséquent C_1.

Pour obtenir G, il faut connaître la valeur de C_1 pour une combinaison de deux systèmes A et B de structure assez simple pour que les actions de gravitation entre eux soient facilement calculables.

On fera, par exemple, en sorte que l'équipage oscillant puisse se composer d'un système de sphères homogènes A et d'un support A′ ou de ce support seul, et que la partie tournante puisse de la même manière se composer d'un système de sphères homogènes B et d'un support B′ ou de ce support seul. Le caractère additif des actions de gravitation a pour conséquence la relation évidente :

$$(12)\quad \begin{cases} C_1(A,B)=C_1(A+A',B+B')-C_1(A+A',B') \\ \qquad\qquad -C_1(A',B+B')+C_1(A',B'). \end{cases}$$

On déterminera expérimentalement, comme il a été dit, les quatre termes du second membre, ce qui donnera par (12) la valeur expérimentale de $C_1(A, B)$.

Le même caractère additif des actions de gravitation permet de calculer la valeur théorique de $C_1(A, B)$ en associant successivement chacune des sphères qui composent A avec chacune de celles qui composent B. Soit, pour l'un de ces couples, a la distance à l'axe du centre de la sphère A, b la distance à l'axe du centre de la sphère B et h la distance des projections de ces centres sur l'axe, A l'azimut du centre de la sphère A par rapport au plan de symétrie du système oscillant, m la masse de cette sphère, B l'azimut du centre de la sphère B par rapport au plan de symétrie du système tournant, M la masse de cette sphère. On obtient facilement en posant $\rho=\dfrac{2ab}{\sqrt{h^2+b^2+a^2}}$.

$$(13)\quad \begin{cases} C_1 = \sum \dfrac{GMm\cos(A-B)}{\pi\sqrt{h^2+b^2+a^2}} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1+\rho\cos\theta}} \\ \quad = \sum \dfrac{GMm\cos(A-B)}{\pi\sqrt{h^2+b^2+a^2}} \cdot \dfrac{4}{\rho}\left[\dfrac{F(k^2)}{\sqrt{1+\rho}} - \sqrt{1+\rho}\, E(k^2)\right] \end{cases}$$

$F(k^2)$ et $E(k^2)$ sont les intégrales elliptiques complètes de Legendre pour le module défini par :

$$k^2 = \frac{2\rho}{1+\rho}.$$

La sommation qui figure dans (13) doit être étendue à toutes les combinaisons d'une sphère de A avec une sphère de B.

On obtiendrait de la même manière pour le coefficient C_n du terme général de la série (1).

$$(14)\qquad C_n = \sum \frac{GMmn}{\pi\sqrt{h^2+b^2+a^2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta\, d\theta}{\sqrt{1+\rho\cos\theta}} \times \cos(A,B).$$

L'intégrale qui figure dans (14) se calcule également à partir des fonctions de Legendre.

Quand les ρ sont petits, c'est-à-dire quand le système A est très ramassé autour de l'axe de suspension, ce qui est d'ailleurs favorable à la sensibilité, le rapport c_n de C_n à C_1 est de l'ordre de :

$$c_n = \left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n-2)}.$$

C'est-à-dire que les C_n décroissent sensiblement, quand n augmente, comme les termes d'une progression géométrique de raison $\frac{\rho}{2}$.

Si l'on veut mesurer la constante G par application des relations (3) et (13), la méthode la plus précise me paraît être l'observation des élongations négatives d'où l'on déduira α_0. Il sera nécessaire d'introduire des corrections de trois ordres, provenant, les premières de l'amortissement du système oscillant dont le décrément logarithmique sera désigné par δ, les deuxièmes, du fait que l'équation (2) n'est pas linéaire à cause de la présence de l'inconnue α dans son second membre ; les termes correctifs correspondants font intervenir la déviation statique α_0 et se calculent au moyen des équations (11). Les troisièmes correspondent à l'existence des harmoniques supérieurs dans l'expression (1) du couple C, par l'intermédiaire des coefficients c_n.

J'ai obtenu, de manière trop laborieuse pour que le détail puisse en être donné ici, les termes nécessaires pour pousser la précision jusqu'au dix-millième en admettant une déviation statique α_0 de l'ordre du centième de radian et un décrément logarithmique inférieur à 0,1, ce qui est très facilement réalisable. Il sera nécessaire, pour éviter les perturbations d'origine électrostatique, d'employer un fil métallique pour la suspension. Avec une durée d'oscillation de l'ordre de 100 secondes, il ne sera pas nécessaire d'aller au delà de la quatrième ou cinquième élongation négative après la mise en rotation du système B pour obtenir une déviation importante supérieure au dixième de radian. L'élongation négative de rang k est donnée par :

$$\alpha_k = \pi\alpha_0 \left\{ \frac{1-e^{-k\delta}}{\delta}\left(1-\frac{\alpha_0}{3}\right) - \frac{5k\pi}{32}\left(\frac{\delta^2}{\pi^2}-\frac{\alpha_0^2}{9}\right) \right.$$
$$\left. - \frac{\delta^2}{2\pi^2}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n^3-3)}{(n^2-1)^2}c_n + \left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nc_n}{n^2-1}\right)^2\right]\right\}.$$

L'entier k n'ira pas au delà de 5 et α_0 se déduira de cette équation par une série facile et rapidement convergente d'approximations successives. Le terme principal du second membre est $k\pi\alpha_0$.