NOTE SUR LA LOI DE RÉSISTANCE DE L'AIR
ET SUR LA CORRECTION D'ÉLASTICITÉ
PROPOSÉES PAR M. LE CAPITAINE DARRIEUS.

Sur la demande qu'a bien voulu me faire M. le général Mochot, j'ai examiné au point de vue théorique et soumis au contrôle de l'expérience les idées émises par M. le capitaine Darrieus dans ses Notes datées du 20 février et du 5 mars 1918 «sur une nouvelle cause de variation de portée avec la température».

Les résultats que j'ai obtenus confirment entièrement les prévisions contenues dans ce travail que je considère comme étant de tout premier ordre, tant par l'importance des indications nouvelles qu'il apporte que par la pénétration dont l'auteur a fait preuve en établissant par des considérations simples, mais discutables, de théorie cinétique, une forme de la loi de résistance de l'air qui se trouve être exacte aux vitesses des projectiles d'artillerie, mais qui cesse de l'être aux faibles vitesses lorsque les effets de viscosité ne sont plus négligeables par rapport aux effets d'inertie et d'élasticité du milieu.

Je considère, en particulier, comme tout à fait remarquable la manière dont le capitaine Darrieus déduit, par application d'un théorème de similitude balistique, les conséquences pratiques de sa loi de résistance, et montre comment les coefficients de correction déjà connus permettent d'exprimer la correction nouvelle.

I. Similitude aérodynamique et loi de résistance.

Voyons tout d'abord comment *il est possible de déduire des équations générales de l'aérodynamique la forme de loi proposée par M. Darrieus,* sous la condition que les termes de viscosité puissent être négligés.

Le résultat énoncé par M. Darrieus est le suivant : si on désigne par v la vitesse du mobile, par a la vitesse du son dans le fluide de densité Δ_0 où le mobile se meut et par α une dimension linéaire de ce mobile, la résistance F à laquelle il est soumis est de la forme :

$$F = \Delta_0 \alpha^2 v^2 \psi\left(\frac{v}{a}\right) \tag{1}$$

où la fonction ψ ne dépend que de la forme du projectile.

Notre démonstration sera simplifiée si nous mettons la relation (1) sous une autre forme également utile pour la vérification expérimentale dont il sera question plus loin.

Remplaçons dans (1) la densité Δ_0 par sa valeur tirée de la formule de Laplace :

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\Delta_0}} \tag{2}$$

où p_0 représente la pression du fluide dans les régions où la perturbation due au passage du projectile n'a pas encore pénétré. On obtient la forme :

(3) $$F = \alpha^2 p_0 \varphi\left(\frac{v}{a}\right)$$

en posant :

$$\varphi\left(\frac{v}{a}\right) = \gamma \frac{v^2}{a^2} \psi\left(\frac{v}{a}\right).$$

C'est la relation (3) que nous nous proposons d'établir pour le cas du régime permanent de mouvement de translation d'un projectile dans un fluide compressible non visqueux.

L'absence de viscosité implique l'existence à tout instant, en tout point du fluide, dans la région troublée par le passage du mobile, d'une pression isotrope que nous représentons par p au point de coordonnées x, y, z, et à l'instant t.

Sur chaque élément de surface ds du mobile, le fluide exerce, en vertu de la même hypothèse, une action élémentaire normale égale à $p\, ds$.

L'ensemble de ces actions se réduit, dans le cas général, au système d'une force et d'un couple résultant. La composante de la force dans la direction d'un axe, celui des x par exemple, a pour valeur :

(4) $$F = \int p \cos\beta \, ds,$$

β étant l'angle que fait, avec l'axe des x, la direction normale à l'élément ds, et l'intégrale étant étendue à toute la surface du projectile.

La manière dont la pression p varie autour du projectile en mouvement est déterminée, *par rapport à celui-ci*, dans le cas du régime permanent, par les équations habituelles de l'aérodynamique où v_x, v_y, v_z représentent les composantes de la vitesse au point x, y, z, et Δ la densité :

5) $$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} &= v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} &= v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}\right.$$

auxquelles il faut joindre la condition de continuité :

(6) $$\frac{\partial(\rho v_x)}{dx} + \frac{\partial(\rho v_y)}{dy} + \frac{\partial(\rho v_z)}{dz} = 0$$

ainsi que les conditions aux limites :

1° Vitesse normale nulle sur la surface du mobile ;

2° Vitesse égale à $-v$ à distance infinie.

Enfin la pression p et la densité ρ sont liées par la loi de compressibilité que nous pouvons, en raison de la rapidité du mouvement, supposer adiabatique, et qui s'exprime par les conditions suivantes :

3° En dehors des surfaces de discontinuité, comme celle de l'onde de choc, par la condition :

$$\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{p}{\Delta^\gamma} = 0. \tag{7}$$

4° Sur la surface de l'onde de choc, en un point où la normale à celle-ci fait un angle θ avec la direction de la vitesse v, par la relation d'Hugoniot :

$$\frac{\gamma + 1}{2} \frac{p - p_0}{\Delta_0} + \gamma \frac{p_0}{\Delta_0} = v^2 \sin^2 \theta. \tag{8}$$

Il s'agit de montrer que toutes ces conditions satisfont à un théorème de similitude que nous établirons de la manière suivante :

Introduisons des variables réduites définies par les relations :

$$\left\{\begin{array}{c} \xi = \frac{x}{a} \qquad \eta = \frac{y}{a} \qquad \zeta = \frac{z}{a} \\ d\sigma = \frac{1}{a^2} ds \\ U_x = \frac{v_x}{a} \qquad U_y = \frac{v_y}{a} \qquad U_z = \frac{v_z}{a} \\ U = \frac{v}{a} \\ \varpi = \frac{p}{p_0} \qquad \delta = \frac{\Delta}{\Delta_0}. \end{array}\right. \tag{9}$$

L'expression de la composante F devient :

$$F = a^2 p_0 \int \varpi \cos \beta d\sigma. \tag{10}$$

La distribution de la pression réduite ϖ est déterminée par des équations et des conditions faciles à obtenir par substitution, et qui se présentent sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\gamma\delta} \frac{\partial \varpi}{\partial \xi} = u_x \frac{\partial u_x}{\partial \xi} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial \eta} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial \zeta} \\ \frac{1}{\gamma\delta} \frac{\partial \varpi}{\partial \eta} = u_x \frac{\partial u_y}{\partial \xi} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial \eta} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial \zeta} \\ \frac{1}{\gamma\delta} \frac{\partial \varpi}{\partial \zeta} = u_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial \eta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \end{array}\right. \tag{5'}$$

$$\frac{\partial (\delta u_x)}{\partial \xi} + \frac{\partial (\delta u_y)}{\partial \eta} + \frac{\partial (\partial u_z)}{\partial \zeta} = 0. \tag{6'}$$

1° Valeur nulle de la composante normale de u sur la surface.

2° Valeur de a égale à $-$ U à l'infini.

3° En dehors des surfaces de discontinuité :

$$\left(u_x \frac{\partial}{\partial \xi} + u_y \frac{\partial}{\partial \eta} + u_z \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \frac{\varpi}{\delta \gamma} = 0. \tag{7'}$$

4° Sur la surface de l'onde de choc, on a la condition réduite d'Hugoniot :

$$(\gamma + 1)\,\varpi - (\gamma - 1) = 2\gamma U^2 \sin^2 \theta. \tag{8'}$$

Ces équations ne font intervenir que les variables réduites et sont les seules qui doivent être satisfaites par la distribution du mouvement en régime permanent. Si donc une distribution de régime permanent est possible dans un gaz autour d'un projectile en mouvement par une valeur donnée de U, une distribution homologue de ϖ et δ est possible autour d'un projectile semblable se mouvant dans un gaz de même γ avec la même valeur de U.

Toutes ces distributions homologues correspondent à une même solution des équations réduites, caractérisée, en particulier, par une distribution déterminée de ω en fonction de ξ, η, ζ, U et γ, la forme de cette fonction dépendant uniquement de la forme du projectile et de son orientation par rapport à la direction de la vitesse réduite U.

L'intégrale :

$$\int \varpi \cos \beta \, d\sigma = \varphi(U)$$

est donc elle-même une fonction de U dont la forme dépend de γ, des paramètres caractéristiques de la forme du projectile et de son orientation par rapport au mouvement.

En introduisant ce résultat dans l'expression (10) de la résistance F et en remplaçant U par $\frac{v}{a}$, on obtient le résultat qu'il s'agissait d'établir :

$$F = a^2 p_0 \varphi\left(\frac{v}{a}\right).$$

Les trois composantes de la force exercée par le fluide ont des expressions de cette forme ; on verrait aisément de la même manière que le moment du couple résultant a des composantes de la forme :

$$a^3 p_0 \Phi\left(\frac{v}{a}\right). \tag{11}$$

On peut encore énoncer les résultats précédents sous une autre forme qui est peut-être plus saisissante.

La distribution du mouvement dans un gaz autour d'un projectile[1] *ne dépend que de la forme de celui-ci, du rapport de sa vitesse à la vitesse du son et du rapport γ des chaleurs spécifiques.*

---

[1] La similitude s'étend, naturellement, à la forme et à la position de l'onde *balistique* autour du projectile, lorsque la vitesse de celui-ci est supérieure à la vitesse du son.

Si nous étions partis des équations complètes de l'aérodynamique en y faisant figurer les termes de viscosité, nous n'aurions pas trouvé la même similitude. J'ai rappelé plus haut, et une évaluation facile permet de le démontrer, que ces termes sont négligeables dans les conditions habituelles des tirs de l'artillerie.

On peut comprendre le rôle important joué dans ces phénomènes par le rapport γ des chaleurs spécifiques en faisant intervenir les mouvements de rotation des molécules ou leurs mouvements internes dans le raisonnement cinétique sommaire, mais intuitif, que fait M. Darrieus dans sa première Note et qui l'a certainement mieux servi comme instrument de recherche que n'aurait pu le faire une démonstration plus précise.

Bien qu'il ne s'agisse pas exactement d'un régime permanent analogue à ceux qui ont été envisagés dans la démonstration précédente, il est intéressant de vérifier le résultat de M. Darrieus dans un cas particulier pour lequel on peut conduire le calcul jusqu'au bout.

Il s'agit du cas d'un plan indéfini se mouvant dans la direction de sa normale, avec une vitesse supérieure à celle de la propagation du son. Il se produit de chaque côté du plan une onde d'Hugoniot, séparée du plan par une région comprimée à l'avant et raréfiée à l'arrière, et dont la distance au plan augmente proportionnellement au temps.

Il est facile, étant données la vitesse v du plan et les conditions du milieu, de calculer les pressions avant et arrière entre le plan et les deux ondes de choc, et d'en déduire la résistance au mouvement, proportionnelle à la différence de ces deux pressions. Le résultat est bien de la forme indiquée par la théorie avec la valeur suivante pour la fonction φ (U) :

$$\varphi(\mathrm{U}) = \gamma \mathrm{U}\sqrt{4+\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2 \mathrm{U}^2}$$

d'où pour la fonction ψ de la formule (1) la forme simple :

$$\psi(\mathrm{U}) = \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2 + \frac{4}{\mathrm{U}^2}}.$$

Ce résultat n'est valable que pour les valeurs de U supérieures à l'unité et donne pour représenter la fonction $f(v)$, au-dessus de la vitesse du son, une courbe décroissante d'allure conforme à celle de la courbe de Gâvre, et tendant aux très grandes vitesses vers une asymptote horizontale d'ordonnée $\frac{\gamma+1}{2}$.
Ceci correspondrait, pour le plan se mouvant normalement à sa direction, à un indice de forme voisin de 5 aux grandes vitesses, résultat qui semble parfaitement acceptable *a priori*.

II. Similitude balistique et corrections de tir.

Si nous passons maintenant à l'étude du mouvement d'un projectile sous l'action combinée de la pesanteur et d'une résistance conforme à la loi démontrée plus haut, nous allons établir un théorème de similitude balistique, tout à fait indépendant de la similitude aérodynamique envisagée jusqu'ici et qui va nous permettre de retrouver, sous une forme un peu différente, les résultats de M. Darrieus sur la manière dont il convient de faire les corrections de tir pour tenir compte de la loi exacte suivie par la résistance de l'air.

Si m est la masse du projectile, la retardation due à la résistance a pour valeur :

$$r = \frac{F}{m} = \frac{p_0}{c} \varphi\left(\frac{v}{a}\right). \tag{12}$$

c étant un coefficient analogue au coefficient balistique ordinaire.

Les équations du mouvement du centre de gravité sont, en désignant par τ l'inclinaison de la tangente à la trajectoire sur l'horizon, et en supposant que la résistance n'a pas de composante transversale :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{p_0}{c} \varphi(U) \cos \tau \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{p_0}{c} \varphi(U) \cos \tau - g \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Envisageons d'abord le cas d'une atmosphère homogène pour laquelle p_0 et a sont constants, et introduisons des variables réduites définies par :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} & U_x = \dfrac{v_x}{a} \qquad U_y = \dfrac{v_y}{a} & \\ \xi = \dfrac{x}{a^2} & \eta = \dfrac{y}{a^2} & \theta = \dfrac{t}{a} \\ & K = \dfrac{p_0}{c} & \end{array} \right. \tag{14}$$

les équations (13) prennent la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{du_x}{d\theta} &= -K\varphi(U) \cos \tau \\ \frac{du_y}{d\theta} &= -K\varphi(U) \sin \tau - g \end{aligned} \right. \tag{15}$$

Il suffit, pour assurer la similitude des trajectoires, que K soit constant, c'est-à-dire que le *coefficient balistique varie en raison inverse de la pression ambiante* et que *la vitesse initiale varie proportionnellement à la vitesse du son.*

Dans ces conditions, *la portée, qui se comporte comme les coordonnées d'espace, varie proportionnellement au carré de la vitesse du son.*

La portée réduite :

$$\pi = \frac{X}{a^2}$$

ne dépend que des deux éléments U_0 et K, pour un angle donné de tir. On a donc pour les corrections :

$$(16) \qquad \frac{\partial \pi}{\pi} = C_v \frac{\partial U_0}{U_0} + C_c \frac{\partial K}{K}$$

en désignant par U_0 la vitesse initiale réduite :

$$U_0 = \frac{V_0}{a}$$

si V_0 est la vitesse initiale elle-même.

En remplaçant dans (16) les variables réduites par leurs expressions, il vient :

$$(17) \qquad \frac{\partial X}{X} = C_v \frac{\partial V_0}{V_0} - C_c \left(\frac{\partial c}{c} - \frac{\partial p_0}{p_0}\right) + (2 - C_v) \frac{\partial a}{a},$$

Comme la vitesse du son ne dépend que de la température, *si le gaz reste le même,* et varie proportionnellement à la racine carrée de la température absolue Θ_0, on peut écrire :

$$(18) \qquad \frac{\partial X}{X} = C_v \frac{\partial V_0}{V_0} - C_c \left(\frac{\partial c}{c} - \frac{\partial p_0}{p_0}\right) + \left(1 - \frac{C_v}{2}\right) \frac{\partial \Theta_0}{\Theta_0}$$

où les corrections sont exprimées en fonction des indications lues directement sur le baromètre et le thermomètre.

Si la composition du gaz change, γ restant le même, on peut conserver comme variables la pression et la densité, et on retrouve exactement la forme donnée par M. Darrieus :

$$(19) \qquad \frac{\partial X}{X} = C_v \frac{\partial V_0}{V_0} - C_c \frac{\partial c}{c} + \left(1 + C_c - \frac{C_v}{2}\right) \frac{\partial p_0}{p_0} - \left(1 - \frac{C_v}{2}\right) \frac{\partial \Delta_0}{\Delta_0}.$$

Ce mode de correction, pour tenir compte de la variation du degré hygrométrique, est cependant sujet à caution parce qu'il suppose constante la valeur du rapport γ des chaleurs spécifiques et que ce rapport n'est pas le même pour l'air et pour la vapeur d'eau. Il sera très probablement suffisant, au point de vue pratique, de s'en tenir à la forme (18) qui est la plus simple et la plus immédiate.

Je rappelle que le coefficient de correction C_c, lorsque la variation relative de vitesse le long de la trajectoire est faible, a pour valeur :

$$C_c = \frac{1}{2} \frac{d \log f}{d \log v}.$$

La fonction f est la fonction $\frac{F(v)}{v^2}$ habituellement considérée et qui se confond, à un facteur constant près, avec la fonction ψ de la formule (1).

III. Généralisation de la similitude balistique.

Je me propose de montrer *qu'il est possible d'étendre le théorème de similitude balistique au cas où la température* Θ *et la pression* p *varient avec l'altitude* y et de trouver la condition nécessaire et suffisante à laquelle doivent satisfaire les variations simultanées de p et de Θ pour que le théorème subsiste et que la formule de correction (18) reste applicable, exactement sous la même forme où p_0 et Θ_0 désigneront maintenant la pression et la température au sol.

Si Δ est la densité de l'atmosphère au point d'altitude y, on a, en désignant par R la constante des gaz parfaits pour l'unité de masse de cette atmosphère :

$$p = \mathrm{R}\Theta\Delta. \tag{20}$$

a désignera toujours la vitesse du son, *fonction de l'altitude* y et donnée par la formule :

$$a_0 = \sqrt{\gamma \frac{p}{\Delta}} = \sqrt{\gamma \mathrm{R}\Theta}. \tag{21}$$

La statique des gaz donne en outre la relation :

$$dp = -\Delta g\, dy. \tag{22}$$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ désignant toujours la vitesse du projectile, les équations du mouvement sont :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{p}{c}\varphi\left(\frac{v}{a}\right)\cos\tau \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{p}{c}\varphi\left(\frac{v}{a}\right)\sin\tau - g. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Introduisons des variables réduites définies par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} dx = a^2 d\xi & dy = a^2 d\eta & dt = a\ d\theta \\ \mathrm{U} = \dfrac{v}{a} & \mathrm{U}_x = \dfrac{v_x}{a} = \dfrac{d\xi}{d\theta} & \mathrm{U}_y = \dfrac{v_y}{a} = \dfrac{d\eta}{d\theta} \end{array}\right. \tag{24}$$

a étant fonction de y, l'équation différentielle $dy = a^2 d\eta$ définit η en fonction de y, à une constante arbitraire près que nous supposerons choisie de manière que η soit nul en même temps que y à l'origine de la trajectoire, où l'état du milieu est caractérisé par p_0 et Θ_0.

L'équation différentielle (22) devient, en tenant compte de (20) et (21) :

$$\frac{dp}{p} = -g\gamma\ d\eta,$$

d'où :

$$p = p_0 e^{-g\gamma\eta}. \tag{25}$$

La variable η est donc liée de manière très simple au rapport $\frac{p}{p_0}$ dont elle est une fonction représentée par :

$$\eta = -\frac{1}{g\gamma}\log\frac{p}{p_0}. \tag{26}$$

Les équations du mouvement (23), exprimées au moyen des variables réduites deviennent, en tenant compte du fait que a est fonction de y :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dU_x}{d\theta}+\frac{\gamma R}{2}U_xU_y\frac{d\Theta}{dy} &= -\frac{p_0}{c}e^{-g\gamma\eta}\varphi(U)\cos\tau \\ \frac{dU_y}{d\theta}+\frac{\gamma R}{2}U_y^2\frac{d\Theta}{dy} &= -\frac{p_0}{c}e^{-g\gamma\eta}\varphi(U)\sin\tau - g. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Pour que ces équations se conservent quand on passe d'une trajectoire à une autre correspondant à de nouvelles conditions atmosphériques, il est nécessaire :

1° Que $\frac{p_0}{c}$ reste le même, c'est-à-dire que le coefficient balistique varie proportionnellement à la pression au sol;

2° Que la fonction de η qui représente $\frac{d\Theta}{dy}$ reste la même, qu'elle soit une fonction *permanente, indépendante de l'état de l'atmosphère.*

Nous pouvons mettre cette condition sous une forme plus simple et plus intéressante.

En tenant compte de la relation :

$$dy = a^2 d\eta = \gamma R\Theta\, d\eta$$

la condition s'écrit, si la fonction f désigne une fonction *permanente :*

$$\frac{d\Theta}{\Theta} = f(\eta)\, d\eta$$

d'où, en tenant compte de (26) et en représentant par F une autre fonction *permanente :*

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = F\left(\frac{p}{p_0}\right), \tag{28}$$

Ce résultat est remarquable. La pression et la température peuvent varier de manière quelconque avec l'altitude, sans que le théorème de similitude cesse d'être exact, à condition que les variations simultanées de la pression et de la tempétature, quand on passe d'une trajectoire à une autre, soient telles que $\frac{\Theta}{\Theta_0}$ reste une *même* fonction de $\frac{p}{p_0}$, quelle que soit d'ailleurs cette fonction.

Ce résultat général comprend, comme cas particulier, le cas d'une atmosphère à température uniforme où la pression varie avec l'altitude suivant la loi de Laplace en $e^{-\frac{y}{H}}$ puisque, de quelque manière que varie cette température uniforme d'une trajectoire à l'autre, $\frac{\Theta}{\Theta_0}$ est bien une fonction permanente égale toujours à l'unité.

Un autre cas particulier, le plus intéressant de beaucoup, parce qu'il correspond en moyenne exactement à la réalité, est celui où la variation de température avec l'altitude correspond à la loi de détente adiabatique, ainsi que le signale très justement M. Darrieus à la fin de sa Note du 20 février.

En effet, on a, dans ce cas, suivant la loi connue :

$$(29) \qquad \frac{\Theta}{\Theta_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Cette relation est bien la forme (28); la fonction permanente F étant une puissance dont l'exposant $\frac{\gamma-1}{\gamma}$ dépend uniquement de la nature des gaz qui composent l'atmosphère.

Enfin, pour que la similitude entre les trajectoires existe, il ne suffit pas que les équations différentielles du mouvement exprimées au moyen des variables réduites conservent leur forme, il faut encore que les constantes d'intégration *réduites* soient les mêmes, par conséquent l'angle de tir et la vitesse initiale réduite U_0, c'est-à-dire que la vitesse initiale elle-même V_0 doit varier proportionnellement à la racine carrée de la température *au sol* $\sqrt{\Theta_0}$.

On voit facilement que les conditions de similitude qui viennent d'être reconnues *nécessaires* sont en même temps *suffisantes*. La variation de portée s'obtient immédiatement en tenant compte de (26) et (28) :

$$(30) \qquad P = \int dx = \int a^2 d\xi = \gamma R \int \Theta d\xi = \Theta_0 \int \Phi(\eta) d\xi,$$

Φ étant une fonction permanente reliée de manière très simple à la fonction F par une exponentielle.

La portée varie donc comme la température au sol quand les conditions de similitude sont remplies.

Nous sommes ainsi conduits au remarquable énoncé suivant :

Si l'état de l'atmosphère change d'un tir à l'autre, de manière que le rapport de la température (absolue) en un point quelconque à la température au sol reste une même fonction quelconque du rapport de la pression en ce point à la pression au sol, la portée varie comme la température au sol lorsque, l'angle de tir restant le même, le coefficient balistique varie comme la pression au sol, et la vitesse initiale comme la racine carrée de la température au sol.

Les formules de correction de tir proposées par M. Darrieus restent exactes sous la seule condition très générale, que l'état de l'atmosphère change de la manière indiquée et en particulier en suivant toujours la loi adiabatique, conforme, en moyenne, aux faits d'observation météorologique.

Les formules de correction ont ceci de remarquable qu'elles ne font intervenir que des coefficients déjà connus et des observations faites au sol.

Il y a lieu, à mon avis, de les adopter dès maintenant, tant à cause de leur exactitude théorique que des vérifications expérimentales auxquelles j'ai pu soumettre la nouvelle loi de résistance de l'air.

Avant d'indiquer le principe et de donner les premiers résultats de ces recherches, il peut être intéressant de voir quelle forme particulière prennent, dans le cas de la distribution adiabatique, les fonctions qui figurent dans la théorie générale de la similitude.

La relation caractéristique :

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

jointe à (25) donne :

$$\Theta = \Theta_0 e^{-g(\gamma - 1)\eta}$$

d'où :

$$dy = \gamma R \Theta_0 e^{-g(\gamma - 1)\eta}\, d\eta$$

et par intégration :

$$\Theta = \Theta_0 - \frac{(\gamma - 1)g}{\gamma R}\, y.$$

La température varie en fonction linéaire de l'altitude, mais ce n'est qu'un cas particulier et cette relation n'est nullement nécessaire, ainsi qu'on l'a vu, pour que la loi de similitude et la formule de correction qu'elle entraîne soient exactes.

La vitesse du son varie en fonction de l'altitude suivant la relation :

$$a^2 = \gamma R \Theta_0 - (\gamma - 1) g y.$$

En vertu de la relation (30) la portée est donnée par :

$$X = \gamma R \Theta_0 \int e^{-g(\gamma - 1)\eta}\, d\xi.$$

La relation entre ξ et η permettant d'effectuer cette intégration dépend de la forme admise pour $\varphi(U)$, et s'obtiendra par intégration des équations (27) qui deviennent, en supposant les dérivées prises par rapport à τ :

$$\xi'' - \frac{(\gamma-1)g}{2}\,\xi'\eta' = -\frac{p_0}{c}\, e^{-\gamma g \eta}\, \varphi\left(\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}\right) \cos\tau$$

$$\eta'' - \frac{(\gamma - 1)g}{2}\,\eta'^2 = -\frac{p_0}{c}\, e^{-\gamma g \eta}\, \varphi\left(\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}\right) \sin\tau - g.$$

On voit facilement, en tenant compte des relations introduites entre les variables, que la condition (28) peut encore s'écrire :

$$\Theta / \Theta_0 = F_1\left(\frac{y}{\Theta_0}\right), \tag{31}$$

F_1 étant une fonction quelconque. Cette forme a l'avantage de ne faire intervenir que les données des sondages de température. L'énoncé du théorème général de similitude devient :

Si l'état de l'atmosphère change d'un tir à l'autre de manière que le rapport de la température (absolue) en tout point à la température au sol reste une même fonction quelconque du quotient de l'altitude du point par la température au sol, la portée varie comme la température au sol lorsque, l'angle de tir restant le même, le coefficient balistique varie comme la pression au sol et la vitesse initiale comme la racine carrée de la température au sol.

Les formules de correction (18) et (19) restent applicables dans ces conditions.

IV. Vérification expérimentale.

Les recherches que j'ai entreprises en collaboration avec MM. Vaillant et Saphores sur l'utilisation des courants d'air à grande vitesse pour la solution des problèmes de balistique, trouvent dans la question actuelle une application immédiate et simple.

Supposons en effet que la veine gazeuse soit obtenue par détente dans l'atmosphère (de pression p_0) de l'air comprimé contenu dans un réservoir sous la pression p_1.

Les formules classiques montrent que le rapport de la vitesse v acquise par l'air détendu à la vitesse a du son dans les conditions où se trouve cet air ne dépend que du rapport $\frac{p_1}{p_0}$ par la relation :

$$\frac{v}{a} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]}.$$

Si la loi proposée est exacte, la poussée exercée par ce courant d'air sur un obstacle de forme quelconque est donnée par :

$$F = kp_0\varphi\left(\frac{v}{a}\right)$$

où k est une constante qui dépend uniquement de l'obstacle.

p_0 étant constant, *la force observée ne doit dépendre que de la pression* p_1 *quelle que puisse être la température de l'air comprimé dans le réservoir sous cette pression.*

Or il nous est facile de faire varier cette température. Le réservoir étant rempli à la température ambiante, sous diverses pressions de remplissage P que nous avons pu faire varier de 2 à 6 kg, la température de l'air qui reste dans ce réservoir au moment où sa pression est tombée pendant l'évacuation à une même valeur p_1 est d'autant plus basse que la pression de remplissage a été plus élevée. Par exemple, pour une pression p_1 de 2 kg, la température est ambiante, 20° par exemple pour P = 2 kg et égale à — 60° environ pour P = 6 kg. Nous avons ainsi une marge de température de 80°, que nous pourrons porter au delà de 300° quand l'installation en cours sera achevée.

Le mode expérimental est par conséquent très simple : *nous enregistrons les efforts exercés sur l'obstacle pour une même valeur de la pression dans le réservoir et diverses valeurs de la pression de remplissage. Ces efforts doivent rester les mêmes* bien que la vitesse et la température de la veine varient dans de larges limites.

Les vitesses ont varié de 100 à 400 m par seconde.

Les nombres ci-dessous sont relatifs à une tige cylindrique de 6 mm de diamètre.

D'autres enregistrements ont été pris pour divers obstacles et M. Vaillant en fait actuellement les lectures.

En face de chaque pression p_1 inscrite dans la première colonne du tableau se trouvent inscrits en ligne horizontale les efforts mesurés F relatifs à des pressions de remplissage de 6, 4 et 2 kg respectivement. La loi prévoit la constance des nombres dans chaque ligne horizontale.

	F		
p_1	P=6	P=4	P=2
1,06	0,44	0,43	0,42
1,12	0,83	0,82	0,83
1,18	1,32	1,29	1,28
1,37	2,01	2,04	2,03
1,44	2,22	2,22	2,28
1,51	2,53	2,54	2,53
1,58	2,89	2,85	2,85
1,65	3,22	3,18	3,22
1,72	3,58	3,50	3,43
1,87	4,09	3,95	4,03
1,95	4,51	4,49	4,48
2,11	5,87	5,91	
2,19	6,51	6,46	
2,28	7,05	7,00	
2,37	7,53	7,53	

La concordance est excellente et les divergences sont de l'ordre des erreurs expérimentales.