LA DIRECTIVITÉ EN ACOUSTIQUE SOUS-MARINE.

J'ai eu récemment l'occasion de réfléchir aux problèmes que pose, en acoustique générale et plus particulièrement en acoustique sous-marine, la question de la directivité des appareils émetteurs et récepteurs. Pour l'émission, la surface de contact de l'appareil avec le milieu est mise en vibration par une excitation intérieure à l'appareil, et de nature mécanique, électro-magnétique ou piézoélectrique. L'amplitude de cette vibration dans la direction normale à la surface détermine l'émission d'ondes élastiques dans le milieu que nous supposerons homogène et limité, soit par des surfaces rigides telles que coques, rochers, fond, etc., soit par des surfaces libres sur lesquelles la variation de pression doit être constamment nulle, tandis que sur les surfaces rigides c'est l'amplitude du déplacement normal qui doit rester nulle. Ces conditions aux limites donnent lieu à réflexion des ondes, sans changement de signe du déplacement normal dans le premier cas et avec changement de signe dans le second. Le cas d'un milieu hétérogène, avec réflexion partielle des ondes sur les surfaces de séparation des diverses parties, donne lieu à une généralisation facile et sans modification essentielle des résultats que nous allons obtenir.

Nous supposerons que le déplacement de la source et par conséquent celui d'un point quelconque du milieu, est une fonction sinusoïdale du temps, de fréquence ν et de pulsation $\omega = 2\pi\nu$ bien déterminées, et que l'amplitude est assez petite pour justifier l'emploi des équations linéaires habituelles de propagation. Nous verrons en terminant que cette hypothèse est pleinement justifiée dans les conditions ordinaires de la pratique, et qu'il est inutile d'envisager les phénomènes de déferlement, de changement de type, auxquels donnent lieu les ondes de grande amplitude. Nous n'introduirons pas non plus de manière explicite les phénomènes d'absorption par viscosité ou conductibilité calorifique du milieu. On peut montrer que rien d'essentiel n'est changé dans nos conclusions lorsqu'on en tient compte. D'autre part, l'application du principe de superposition, lié au caractère linéaire des équations de propagation permet d'étendre ces mêmes conclusions au cas d'une émission non sinusoïdale ou même non périodique.

La forme de la source et ses dimensions par rapport à la longueur d'onde émise dans le milieu $\lambda = \frac{V_0}{\nu}$ (V_0 représentant la vitesse de propagation des ondes de faible amplitude dans le milieu) déterminent, si l'on tient compte en même temps de la forme et de la position des surfaces limites, la distribution des ondes dans le milieu, leur variation d'amplitude d'un point à l'autre de celui-ci en fonction de la distance et de la direction à partir de la source, et, de manière générale, ce que nous appellerons la directivité de l'appareil à l'émission.

A la réception, l'appareil est en contact avec le milieu par une surface sur laquelle arrivent les ondes à détecter. Quel que soit le mode de fonctionnement de cet appareil, nous pourrons, en raison de la petitesse des amplitudes, le supposer régi par des équations linéaires, au moins jusqu'à l'entrée des appareils détecteurs s'il en comporte. Il en résulte que *l'amplitude du mouvement pris par la surface de contact sous l'action des ondes incidentes est proportionnelle à l'amplitude de la pression exercée par les ondes sur cette surface du récepteur supposée immobile.* De toute manière, l'intensité de la réception sera uniquement fonction de cette amplitude de pression et on pourra légitimement comparer les actions de deux sources différentes sur ce récepteur en utilisant le rapport des amplitudes de pression produites à sa surface par les ondes venant de ces deux sources. De manière générale, nous définirons la *réceptivité* d'un appareil relative à deux sources par le rapport des amplitudes de pression qu'il reçoit de ces sources, et *la directivité* à la réception par la valeur que prend ce rapport dans le cas particulier où les sources sont supposées identiques, actionnées de la même manière et placées à la même distance du récepteur dans des directions différentes par rapport à celui-ci.

Si le récepteur n'est pas de petites dimensions par rapport à la longueur d'onde dans le milieu, la pression de l'onde incidente varie d'un point à l'autre de sa surface, soit d'amplitude, soit de phase. Nous admettrons ici que les différents éléments égaux de cette surface sont équivalents au point de vue de la réception et que la grandeur finalement utilisée pour celle-ci, variation de potentiel sur une grille d'entrée d'amplificateur, par exemple, s'obtient additivement à partir des contributions de ces divers éléments, c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle au module de l'intégrale :

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{E} = \int p\, ds$$

étendue à toute la surface du récepteur, où p représente l'amplitude imaginaire de la pression produite par l'onde à déceler sur l'élément ds de cette surface. Nous appellerons cette quantité E l'*effet* produit par les ondes sur le récepteur.

Nous supposerons en même temps, si la même surface fonctionne comme émettrice, que l'amplitude des déplacements imposés à ses différents points est la même pour tous, ainsi que la phase.

Si ces conditions ne sont pas remplies, et s'il est nécessaire d'introduire un coefficient caractéristique de chaque élément de la surface au point de vue de son efficacité à la réception, on peut démontrer, en analysant plus profondément le fonctionnement des appareils réversibles régis par les équations linéaires, que les amplitudes aux différents points lorsque l'appareil est employé comme émetteur sont proportionnelles à ces mêmes coefficients. En tout cas, pour des appareils de petites dimensions par rapport à la longueur d'onde, cette question ne se pose pas puisque l'amplitude de pression est la même dans toute leur étendue, à la réception, et que leur émission est, comme je le rappellerai tout à l'heure, déterminée simplement par l'amplitude de leur variation globale de volume.

De manière analogue à ce que nous venons de faire pour la réception, nous appellerons *émissivité* d'un appareil, relative à deux autres fonctionnant comme récepteurs, le rapport des *effets* produits sur les deux récepteurs par l'émetteur dans les mêmes conditions de fonctionnement de celui-ci. Cette émissivité deviendra la *directivité* à l'émission relative aux deux récepteurs, dans le cas particulier où ceux-ci seront supposés identiques et placés à la même distance de l'émetteur dans des directions différentes par rapport à celui-ci.

Ces définitions étant posées, nous allons pouvoir démontrer de manière très générale que, en appelant *appareil* une portion quelconque des surfaces solides limitant le milieu où se propagent les ondes, l'*émissivité* d'un appareil quelconque A_1 par rapport à deux autres également quelconques A_2 et A_3 est égale à sa *réceptivité* par rapport à ces mêmes appareils fonctionnant comme émetteurs pour des amplitudes égales de déplacement normal. Il en résultera que *la directivité d'un appareil quelconque à la réception est toujours la même que sa directivité à l'émission.* Ce résultat a été récemment mis en doute et il n'est peut-être pas inutile que j'insiste un peu sur sa démonstration.

Celle-ci s'appuie sur un théorème de réciprocité dû à Lord Rayleigh et dont l'exactitude est liée à celle de l'équation linéaire de propagation des ondes.

Désignons par p la variation de pression en un point du milieu à partir de la pression statique en ce point; il en résulte une variation de la densité du fluide qui passe de ρ_0 à ρ; on définit la *condensation* S du fluide par le rapport :

$$S = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}.$$

Dans la limite des variations pratiques, S est proportionnel à p avec le coefficient μ de compressibilité. Un raisonnement classique montre que, dans l'hypothèse de déplacements assez petits pour qu'on puisse confondre les variables d'Euler et celles de Lagrange, les variations de S en fonction des coordonnées d'espace x, y, z et du temps t satisfont à l'équation dite de propagation :

$$\Delta S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \rho_0 \mu \frac{\partial^2 S}{\partial t^2},$$

ou :

$$\Delta S = \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}, \tag{2}$$

V_0 représentant la vitesse de propagation : $\frac{1}{\sqrt{\rho_0 \mu}}$.

On en déduit :

$$p = \frac{S}{\mu} = \rho_0 V_0^2 S. \tag{3}$$

Le fait qu'on néglige, pour établir cette équation, les effets d'absorption a pour conséquence, par application d'un théorème d'Helmholtz, que le mouvement du fluide dérive constamment d'un potentiel des vitesses φ, c'est-à-dire que les composantes u_x, u_y, u_z de la vitesse du fluide en un point s'expriment au moyen des dérivées d'espace du potentiel par les relations :

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

la vitesse u elle-même étant ainsi donnée par le gradient de φ; la composante de la vitesse dans une direction quelconque n est donnée par la dérivée $\frac{d\varphi}{dn}$ du potentiel des vitesses par rapport à un déplacement dans cette direction.

On déduit, en outre, des équations fondamentales, que la condensation S est liée à ce potentiel des vitesses par la relation :

$$S = \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{4}$$

et que φ satisfait aussi à l'équation de propagation :

$$\Delta\varphi = \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{5}$$

Dans le cas d'un phénomène sinusoïdal en fonction du temps, de pulsation ω, on a :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\omega^2 \varphi,$$

et, par conséquent :

$$\Delta\varphi = -\frac{\omega^2}{V_0^2} \varphi. \tag{6}$$

L'imaginaire correspondante à $\frac{d\varphi}{dt}$ étant proportionnelle à l'imaginaire correspondante à φ avec le coefficient $\omega\sqrt{-1}$, il en résulte que la pression p en un point, donnée par :

$$p = \rho_0 V_0^2 S = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{dt}, \tag{7}$$

a son imaginaire proportionnelle à celle de φ avec le coefficient $\rho_0\omega\sqrt{-1}$.

Pour démontrer le théorème de réciprocité, considérons, dans le même milieu, deux distributions d'ondes de même fréquence correspondant aux deux potentiels des vitesses ψ et φ qui satisfont aux équations :

$$\Delta\varphi = -\frac{\omega^2}{V_0^2}\varphi \text{ et } \Delta\psi = -\frac{\omega^2}{V_0^2}\psi \tag{8}$$

et appliquons la transformation de Green à l'intégrale :

$$\iiint \left(\frac{\partial\varphi}{dx}\frac{\partial\psi}{dx} + \frac{\partial\varphi}{dy}\frac{\partial\psi}{dy} + \frac{\partial\varphi}{dz}\frac{\partial\psi}{dz}\right) dx\, dy\, dz.$$

On en déduit :

$$\iint \varphi \frac{d\varphi}{dn} ds - \iiint \varphi\Delta\psi dx\, dy\, dz = \iint \psi \frac{d\varphi}{dn} ds - \iiint \psi\Delta\varphi\, dx\, dy\, dz.$$

Les intégrales de surface sont étendues à l'ensemble des surfaces qui limitent le milieu fluide. Les intégrales de volumes sont égales à cause des relations (8), d'où résulte le théorème cherché :

$$\int \varphi \frac{d\varphi}{dn} ds = \int \psi \frac{d\psi}{dn} ds. \tag{9}$$

Supposons maintenant que trois *appareils*, A_1, A_2, A_3, font partie des surfaces limites, le reste de ces surfaces étant, soit rigide avec une amplitude nulle du déplacement normal et par conséquent une dérivée normale nulle du potentiel des vitesses, soit libre et par conséquent avec une amplitude nulle de la variation de pression ou du potentiel des vitesses en raison de (7).

Si l'on fait fonctionner successivement les trois appareils comme émetteurs, on obtient trois régimes de distribution d'ondes, avec des potentiels des vitesses $\varkappa$, ψ et φ correspondant respectivement aux émissions de A_1, A_2 et A_3. L'application du théorème de réciprocité aux deux potentiels φ et ψ donne :

$$\int_2 \varphi \frac{d\psi}{dn} ds = \int_1 \psi \frac{d\varphi}{dn} ds. \tag{10}$$

L'intégrale du premier membre ne comporte comme éléments non nuls que ceux qui correspondent à la surface de l'appareil A_2 puisque, d'après ce qui a été dit plus haut, le produit $\varphi \frac{d\psi}{dt}$ est nul partout ailleurs sur les surfaces limites, y compris celles de A_1 et A_3 supposés immobiles. De la même manière, l'intégrale du second membre ne comporte comme éléments non nuls que ceux qui correspondent à la surface de A_1. Si, comme nous l'avons dit plus haut, nou supposons même amplitude et même phase au déplacement dans toute l'étendue d'une surface émettrice, $\frac{d\varphi}{dn}$ a une même valeur $\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1$ pour la surface de l'appareil A_1 et $\frac{d\psi}{dn}$ a une même valeur $\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_2$ pour toute la surface de l'appareil A_2. La relation (10) peut donc s'écrire :

$$\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_2 \int_2 \varphi dS = \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1 \int_1 \psi ds.$$

En tenant compte de la relation indiquée plus haut entre le potentiel des vitesses et la pression, on constate, en laissant de côté des considérations de phase sans importance, que les intégrales représentent, d'après la définition que nous avons donnée, respectivement, celle du premier membre, l'*effet* E_{12} produit par A_1 fonctionnant comme émetteur sur A_2 fonctionnant comme récepteur, et celle du second membre l'effet E_{21} produit par A_2 émetteur sur A_1 récepteur. D'où :

$$E_{12}\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_2 = E_{21}\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1.$$

En appliquant de la même manière, le théorème de réciprocité aux deux potentiels $\varkappa$ et φ, on obtient :

$$E_{12}\left(\frac{d\chi}{dn}\right)_3 = E_{31}\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1.$$

D'où l'on déduit, par division membre à membre de ces deux équations, en admettant l'égalité de $\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_2$ et de $\left(\frac{d\varkappa}{dn}\right)_3$, pour traduire l'égalité des amplitudes à l'émission, le résultat annoncé :

$$\frac{E_{12}}{E_{13}} = \frac{E_{21}}{E_{31}}.$$

L'émissivité de A_1 par rapport à A_2 est égale à sa réceptivité par rapport à ces mêmes appareils pour une même amplitude de déplacement de ceux-ci.

Il en résulte, en particulier, l'égalité entre la directivité à l'émission d'un appareil quelconque et sa directivité à la réception.

Une application immédiate de ce résultat consiste à démontrer qu'un appareil de petites dimensions par rapport à la longueur d'onde ne possède, *par lui-même,* c'est-à-dire lorsqu'il n'est pas placé au voisinage de surfaces plus étendues formant miroir, aucune directivité à la réception. Il suffit pour cela de constater que, dans ces mêmes conditions, il ne possède aucune directivité à l'émission. En effet, on démontre facilement en s'appuyant sur le théorème de Kirchhoff-Huyghens que, pour un semblable appareil éloigné de toute surface limite, c'est-à-dire placé au sein d'une masse fluide indéfinie, l'onde émise à distance dépend seulement de la variation globale du volume v de l'émetteur, le potentiel des vitesses φ à distance r de l'émetteur étant donné à l'instant t par la valeur, égale dans toutes les directions, de :

$$\frac{1}{4\pi r}\frac{dv}{dt}$$

prise à l'instant $t - \frac{r}{V_0}$ pour tenir compte du retard dû à la propagation (potentiel retardé).

L'absence de directivité à la réception, ainsi déduite de notre théorème de réciprocité, peut encore s'interpréter physiquement si l'on remarque qu'une onde de grande longueur par rapport aux dimensions du récepteur contourne complètement par diffraction l'obstacle que constitue ce récepteur et produit une pression d'autant plus uniforme sur la surface de celui-ci que ses dimensions sont plus petites par rapport à la longueur d'onde, cette pression ne dépendant pas non plus de l'orientation de l'appareil par rapport à la direction de propagation de l'onde.

Je voudrais maintenant examiner de plus près comment il est possible d'obtenir une directivité donnée, c'est-à-dire une répartition quelconque arbitrairement donnée de l'énergie émise sous forme d'ondes entre les diverses directions. Il est possible de résoudre complètement ce problème pour un appareil dont la surface de contact avec le milieu est plane et fait partie d'une paroi plane de grandes dimensions par rapport à la longueur d'onde, et en l'absence de toute autre surface limite à distance finie.

Kirchhoff, généralisant le théorème d'Huyghens, a démontré, comme conséquence de l'équation de propagation (5) que, si l'on se donne les valeurs de φ et de $\frac{d\varphi}{dn}$, c'est-à-dire de la pression et de la vitesse normale en tout point des surfaces qui limitent le fluide, on en peut déduire la valeur de φ en un point quelconque de ce fluide. Dans le cas particulier où celui-ci s'étend à l'infini d'un seul côté d'une paroi plane, il suffit de connaître la vitesse normale en tout point de ce plan. Si donc un appareil émetteur fait partie d'une paroi plane rigide, il suffit de connaître la vitesse normale imposée aux différents points de la surface émettrice pour en déduire, en toute rigueur, tout ce qui concerne les ondes émises et en particulier la variation de leur intensité avec la direction, à grande distance de l'appareil.

Si l'amplitude et la phase des vitesses normales imposées sont uniformes dans toute l'étendue de l'appareil, le problème coïncide, comme l'a montré Lord Rayleigh, avec celui de la diffraction, tel qu'il est traité en optique, d'une onde plane au delà d'un écran plan parallèle au plan de l'onde et percé d'une ouverture ayant la forme et les dimensions de l'appareil.

Même pour des formes très simples du contour de l'appareil, la distribution des ondes à grande distance varie de manière complexe avec la direction. Pour un appareil circulaire, on a un maximum principal d'intensité dans la direction normale à la surface émettrice, avec diminution d'autant plus rapide, quand on s'écarte de cette direction, que le diamètre D de l'appareil est plus grand par rapport à la longueur d'onde dans le milieu ; puis on trouve un minimum nul dans toutes les directions formant autour de la normale un cône d'angle au sommet α donné par la relation bien connue :

$$\sin \alpha = 1{,}21 \frac{\lambda}{D}.$$

Ce cône renferme plus des neuf dixièmes de l'énergie émise. Quand on continue à s'écarter de la normale, on trouve une série de maxima secondaires beaucoup moins importants que le maximum principal et séparés par une série de minima nuls.

La directivité n'est pas complète, bien qu'en augmentant le diamètre de la source par rapport à la longueur d'onde on puisse concentrer la quasi-totalité de l'énergie émise dans les directions aussi voisines qu'on le veut de la normale.

J'ai pu démontrer qu'à condition de renoncer à l'uniformité de distribution des amplitudes dans la surface émettrice, il est possible de réaliser une distribution donnée *a priori* de l'énergie émise entre les diverses directions. Il est toujours possible de trouver une distribution des amplitudes imposées aux différents points de la surface émettrice qui réalise précisément à distance toute distribution donnée *a priori* de l'amplitude des ondes entre les diverses directions. En particulier, si l'on veut n'avoir qu'un seul maximum principal dans la direction normale à l'appareil, sans maxima secondaires avec, quand l'écart θ

de la direction avec la normale augmente, diminution de l'amplitude des ondes émises proportionnellement à l'exponentielle :

$$e^{-h\sin^2\theta}$$

il suffit que l'amplitude des vitesses imposées à la surface émettrice varie avec la distance r à un centre suivant la loi exponentielle :

$$(11) \qquad e^{-\frac{\pi^2}{\lambda^2 h}r^2}.$$

La directivité sera d'autant plus marquée que le module h sera plus grand et, par conséquent, en vertu de (11), que la distribution des amplitudes sera plus étalée autour du centre et qu'on devra s'écarter davantage de celui-ci pour trouver une amplitude négligeable.

Il me reste maintenant à examiner dans quelles limites l'emploi des équations linéaires de propagation, sur lesquelles repose tout ce qui précède, est légitime. Leur démonstration suppose l'amplitude des ondes infiniment petite par rapport à la longueur d'onde pour chaque composante sinusoïdale de la série ou de l'intégrale de Fourier par laquelle une perturbation quelconque peut être représentée. Il y a, dans ces conditions, une vitesse de propagation bien définie V_0, avec conservation du type de l'onde au cours de la propagation : pour une onde plane, en particulier, la loi du déplacement en fonction du temps reste la même pour tous les points du fluide atteints successivement par l'onde.

Si l'on tient compte de l'amplitude finie des déplacements, l'équation de propagation cesse d'être linéaire et il y a changement de type de l'onde au cours de la propagation. Une onde plane initialement sinusoïdale se déforme au cours de la propagation de manière à faire apparaître des régions de discontinuité où les phénomènes de viscosité et conductibilité calorifique par lesquels se produit la dégradation en chaleur de l'énergie de l'onde cessent d'être négligeables. J'ai étudié en détail ce processus dans un cours professé au Collège de France en 1924-1925, et j'ai montré que son influence est tout à fait négligeable dans les conditions ordinaires d'emploi de l'acoustique sous-marine, sonore ou ultra-sonore.

Pour nous en rendre compte ici de la manière la plus simple, considérons une onde plane se propageant dans la direction des x. Soit a le déplacement à l'instant t, dans cette direction, d'une molécule du fluide située, avant l'arrivée de l'onde, à la distance x du plan des yz. L'abscisse à l'instant t de cette molécule devient :

$$\xi = x + a.$$

Prenant x et t comme variables indépendantes, on a, pour vitesse à l'instant t de la molécule considérée :

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial t}.$$

Désignant toujours par p et ρ la pression et la densité du fluide, supposées fonction l'une de l'autre, on trouve comme équation de propagation quand on cesse de considérer le déplacement a comme infiniment petit :

$$(12) \qquad \left(1+\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = \frac{dp}{d\rho}\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}.$$

Si a est très petit, $\frac{da}{dx}$ est négligeable devant l'unité, $\frac{dp}{d\rho}$ a la valeur V_0^2 correspondant à la densité initiale ρ_0 et on retrouve l'équation linéaire habituelle :

$$(13) \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = V_0^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}.$$

Quand a et par conséquent u sont finis, on peut démontrer, par intégration de l'équation (12) que l'on a, en première approximation, largement suffisante comme on va le voir :

$$\frac{dp}{d\rho} = V_0^2\left(1+\alpha\frac{u}{V_0}\right),$$

α étant une constante caractéristique du fluide, qui, dans le cas de l'eau est sensiblement égale à 4. L'équation complète (12) ne diffère donc de l'équation linéaire (13) que par la présence des facteurs $\left(1+\frac{da}{dx}\right)^2$ et $\left(1+\frac{4u}{V_0}\right)$ dans les deux membres de l'équation. Cherchons, pour une onde initialement sinusoïdale :

$$(14) \qquad a = a_0 \cos\omega\left(t-\frac{x}{V_0}\right),$$

de combien ces facteurs s'écartent de l'unité.

On a, en vertu de (14) :

$$\frac{u}{V_0} = \frac{1}{V_0}\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\omega a_0}{V_0}\sin\omega\left(t-\frac{x}{V_0}\right) = -\frac{\partial a}{\partial x}.$$

Les deux termes correctifs en $\frac{da}{dx}$ et $\frac{u}{V_0}$ sont donc toujours de l'ordre de :

$$\frac{\omega a_0}{V_0} = \frac{2\pi a_0}{\lambda}.$$

Or, on établit facilement que la puissance ϖ transmise par unité de surface d'une onde sinusoïdale a pour valeur :

$$\varpi = \frac{1}{2}\rho_0 V_0 \omega^2 a_0^2,$$

d'où :

$$\frac{\omega a_0}{V} = \sqrt{\frac{2\varpi}{\rho_0 V_0^2}}.$$

Ce qui nous intéresse, au point de vue de la directivité à la réception, c'est l'équation de propagation au voisinage du récepteur supposé situé à distance r de la source. Si la puissance totale émise par celle-ci est P, la puissance ϖ par unité de surface au voisinage du récepteur est, dans le cas des ondes sonores de grande longueur d'onde par rapport aux dimensions de l'émetteur, de l'ordre de :

$$\varpi = \frac{P}{4\pi r^2},$$

d'où :

$$\frac{\omega a_0}{\lambda} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{P}{2\pi\rho_0 V_0^3}}.$$

Pour l'eau, ρ_0 est égal à l'unité et V_0 à $1{,}50 \times 10^5$. Une puissance émise de 1 kW ou 10^{10} ergs par seconde donnerait à la distance r de 1 km ou 10^5 cm :

$$\frac{\omega a_0}{\lambda} = 10^{-5}\sqrt{\frac{10^{10}}{2\times 10^{16}}} = 10^{-8}.$$

Les facteurs par lesquels l'équation de propagation s'écarte de la forme linéaire au voisinage du récepteur ne diffèrent de l'unité qu'à l'ordre de 10^{-8}. Au voisinage immédiat de l'émetteur l'écart ne serait encore, si l'on tient compte de ce que les dimensions de cet émetteur sont au moins de l'ordre du décimètre, que de l'ordre du dix-millième. On peut donc affirmer que, dans toute l'étendue du fluide, l'équation linéaire de propagation est suffisamment exacte pour que le théorème de réciprocité puisse être utilisé en toute certitude dans les conditions habituelles de la technique sous-marine.

XI. SUR DIVERS PROBLÈMES TECHNIQUES