ФРАНЦУЗСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО И ЕГО ДѢЯТЕЛЬНОСТЬ ВЪ 1884 ГОДУ.

Французское Математическое Общество было учреждено въ 1872 г. Первое засѣданіе, посвященное исключительно выбору должностныхъ лицъ Общества, происходило 6-го ноября. Спустя нѣсколько времени, именно 3 марта 1873 года, первый президентъ юнаго Общества, знаменитый геометръ М. Шаль, представляя Парижской Академіи Наукъ I-ый нумеръ Бюллетеня Общества (Bulletin de la Société mathématique de France) сдѣлалъ слѣдующее сообщеніе о мотивахъ, вызвавшихъ его существованіе. «Различныя ученыя Общества основали нѣсколько лѣтъ тому назадъ къ великой пользѣ для науки періодическія изданія, дающія отчетъ объ ихъ работахъ. Таковы Общества: Ботаническое, Геологическое, Біологическое, Метеорологическое и др. Сдѣлано это было по примѣру знаменитаго Общества Поощренія, труды котораго во всемъ ихъ разнообразіи и объемѣ имѣли столь счастливое вліяніе какъ во Франціи такъ и заграницей и не разъ вдохновляли различныя другія частныя ассоціаціи, посвященныя *прикладнымъ* наукамъ. Теоретическая математика, представляющая во всѣхъ своихъ частяхъ главное основаніе техническихъ работъ, не могла не желать также и для себя спеціальной ассоціаціи въ родѣ той, которая была въ послѣднее время основана въ Англіи въ подражаніе Лондонскому Астрономическому Обществу, съ самаго начала текущаго столѣтія такъ много способствовавшему прогрессу различныхъ частей Небесной Механики и установленію соревнованія между многочисленными обсерваторіями Великобританіи съ одной стороны и нашего континента и Америки съ другой. Независимо отъ Лондонскаго Математическаго мы можемъ указать еще на образовавшіяся недавно въ Москвѣ и въ Прагѣ. Мы считаемъ за счастіе для себя сказать Академіи, что наше Математическое Общество, только что родившись, насчитываетъ уже сто пятьдесятъ членовъ и увѣрено, что его усилія заслужатъ содѣйствія и поощреній со стороны всѣхъ, которымъ понятна важность и высокая во всѣхъ отношеніяхъ необходимость непрестанной разработки всѣхъ вѣтвей наукъ математическихъ» *).

Въ началѣ 1884 года въ Обществѣ было 206 членовъ—163 француза и 43 иностранца (7 Русскихъ, 8 Нѣмцевъ, 2 Англичанина, 7 Итальянцевъ, 3 Бельгійца, 1 Перуанецъ, 4 Шведа, 7 Чеховъ, 1 Австріецъ, 1 Голландецъ, 1 Датчанинъ и 1 Китаецъ). Такимъ большимъ числомъ членовъ Общество обязано своему чрезвычайно либерально и цѣлесообразно составленному Уставу. Поставивши предметомъ Общества «преуспѣяніе и распространеніе чистыхъ и прикладныхъ математическихъ ученій» (§ 1 Статутовъ), учредители вовсе не думали, что привилегія на то и другое исключительно принадлежитъ лицамъ, имѣющимъ какое-нибудь опредѣленное положеніе въ ученой іерархіи. А такъ, къ сожалѣнію, еще и въ наши дни продолжаютъ думать въ странахъ и корпораціяхъ, которыя, не смотря на свой казовый либерализмъ, все еще никакъ не могутъ отрѣшиться отъ преданій мѣстничества и идеаловъ Табели о рангахъ. Столь-же чуждой была для учредителей Французскаго Математическаго Общества также и національная исключительность. Въ § 3 Статутовъ мы читаемъ «Французы и иностранцы равно могутъ участвовать въ Обществѣ»; въ § 4—«условія, подлежащія къ выполненію при поступленіи въ члены Общества, суть слѣдующія: 1) необходимо быть представленнымъ двумя членами, къ которымъ адресуется подписанное прошеніе; 2) нужно получить въ одномъ изъ слѣдующихъ засѣданій голоса большинства присутствующихъ членовъ». Равнымъ образомъ въ Статутахъ не положено также и никакихъ ограниченій въ отношеніи числа и мѣста жительства членовъ. «Число городскихъ и иногородныхъ членовъ неограниченно», говорится въ § 5.

Въ числѣ членовъ Общества за 1884 годъ мы находимъ почти всѣхъ сколько-нибудь выдающихся французскихъ математиковъ. Но этого нельзя сказать въ отношеніи иностранныхъ. Кромѣ гг. Кронекера, Чебышева и нѣкоторыхъ итальянцевъ, имена всѣхъ другихъ иностранныхъ членовъ Общества мало или даже и совсѣмъ неизвѣстны. Въ этомъ отношеніи ожиданія, высказанныя покойнымъ Шалемъ, оказываются пока еще далеко не вполнѣ сбывшимися. Причину этого нежелательнаго явленія, впрочемъ, едва-ли слѣдуетъ

*) Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXVI, p. 586—587.

искать въ Статутахъ Общества. Она лежитъ скорѣе частью быть можетъ въ недостаткѣ энергіи въ средѣ Администраціи Общества, частью же и главнымъ образомъ въ равнодушіи къ судьбамъ Математики нѣкоторыхъ изъ ея выдающихся дѣятелей.

Что касается до денежныхъ средствъ Общества, то въ его Бюллетенѣ не содержится относительно этого предмета почти никакихъ указаній. Сумму, получаемую въ видѣ членскихъ взносовъ (по 20 франковъ ежегодно съ каждаго городскаго члена и по 15 съ иногороднаго), едва-ли можно считать достаточною для покрытія расходовъ по изданію Бюллетеня и разныхъ издержекъ, вызываемыхъ текущею жизнью Общества. Въ Статутахъ кромѣ этого главнаго источника средствъ указывается какъ на возможныя еще на слѣдующія: 1) на единовременные взносы отъ вновь поступающихъ членовъ Общества (10 франковъ); 2) на непрерывныя подписки; 3) на доходы отъ продажи изданій Общества и, наконецъ, 4) на дары, которые оно можетъ получить. Въ какой мѣрѣ эксплуатируется каждая изъ этихъ статей дохода, за исключеніемъ, конечно, первой, намъ неизвѣстно.

Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній о началѣ Общества и современномъ состояніи его интеллектуальныхъ силъ и денежныхъ средствъ мы можемъ перейти къ главному предмету нашей статьи— къ обозрѣнію ученой дѣятельности Общества въ истекшемъ году.

Годъ ученой дѣятельности Общества всегда начинается съ мѣсяца его основанія, то-есть съ ноября. По Уставу, за исключеніемъ трехъ вакаціонныхъ мѣсяцевъ,—августа, сентября и октября,—каждый мѣсяцъ происходятъ два обыкновенныхъ засѣданія. Изъ нихъ первое въ январѣ посвящается преимущественно выборамъ новыхъ членовъ Бюро и Совѣта Общества въ замѣнъ выходящихъ по Уставу. Въ отношеніи числа обыкновенныхъ засѣданій въ истекшемъ году дѣятельности Общества было допущено только одно отступленіе отъ Устава, именно въ апрѣлѣ происходило вмѣсто двухъ одно засѣданіе.

Въ засѣданіяхъ истекшаго 1883—84 года, какъ показываютъ помѣщенные въ №№ 4 и 5 Бюллетеня Общества протоколы, были сдѣланы слѣдующія сообщенія: *2 ноября. Пуанкаре*. О непрерывныхъ группахъ, содержащихся въ линейной группѣ съ n перемѣнными; *Люціанъ Леви*. Объ обобщеніи задачи развертокъ; *д'Оканъ*. Объ обобщеніи инверсіи кривыхъ. *16 ноября. Пикаръ*. О функціяхъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, остающихся неизмѣнными при подстановкахъ прерывной группы; *Андре*. О вѣроятности того, чтобы данная перестановка изъ *n* буквъ была попеременной перестановкой; *Лагерръ.* Объ одной теореме Элементарной Алгебры; *Перотть* (иногородный членъ). О задаче слоновъ. *7 декабря. Люціанъ Леви.* О комплексе нормалей въ однофокусныхъ эллипсоидахъ; *Фуре.* О двухъ теоремахъ, касающихся двухъ системъ правильныхъ многоугольниковъ того-же числа сторонъ. *21 декабря. Андре.* О числе перестановокъ *n* элементовъ, которые имеютъ *S* следованій; *Лагерръ.* О корняхъ трансцендентныхъ уравненій. *4 января. Жорданъ.* О приближенномъ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій съ помощью квадратуръ. Въ этомъ же заседаніи была доставлена присланная иногороднымъ членомъ *Давидомъ* рукопись подъ заглавіемъ «О преобразованіи линейнаго дифференціальнаго уравненія какого нибудь порядка». *18 января. Лагерръ* О пределахъ значеній, которыя можетъ принимать многочленъ; *д'Оканъ* О геометрическомъ изученіи распределенія напряженій вокругъ точки въ прямоугольной балке; *Вейллъ* О многоугольникахъ, все вершины которыхъ расположены на алгебраической или трансцендентной кривой; *Фуре* Объ обобщеніи гиперболической спирали. *1 февраля. Стефаносъ* О разложеніи бинарной формы на сумму степеней линейныхъ выраженій; *Раффи* О роде алгебраическихъ функцій со многими переменными. *Пикаръ* Объ одномъ классе функцій θ. *15 февраля. Гатонъ де ла Гупильеръ* Объ одномъ свойстве циклоиды, составляющей кривую равновесія для механическихъ влеченій по отлогости; *Пикаръ* О неопределенныхъ квадратичныхъ формахъ и объ одномъ классе абелевыхъ функцій. *7 марта. д'Оканъ* О системе координатъ, удобныхъ для изученія некоторыхъ кривыхъ; *Вейллъ* О касательныхъ къ некоторымъ кривымъ; *Раффи* О теореме Эрмита, относящейся къ псевдо-эллиптическимъ интеграламъ; *Андре* О теореме, позволяющей понизить пределъ, даваемый теоремой Декарта; *Пикаръ* О группе преобразованій точекъ пространства. *21 марта. Стефаносъ* О законе взаимности симметрическихъ функцій; *Пуанкаре* О дифференціальномъ уравненіи, разсмотренномъ г. Гильденъ. *4 апреля. Раффи* Объ инваріантныхъ преобразованіяхъ эллиптическихъ дифференціаловъ; *Стефаносъ* О левыхъ детерминантахъ; *Пикаръ* О форме интеграловъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка въ соседстве некоторыхъ критическихъ точекъ и О гиперабелевскихъ группахъ. *2 мая. Пуанкаре* О методе Гильдена. *16 мая. Лагерръ* О некоторомъ преобразованіи поверхностей, выводимомъ изъ разсмотренія антикаустиковъ; *Гальфенъ* О функціи $\zeta(z)$ Дирикле; *д'Оканъ* О преобразованіи угловыхъ свойствъ;

Раффи О развѣтвленіи алгебраической функціи вблизи критической точки. *6 іюня. Лемуанъ* Объ одномъ свойствѣ точки плоскости треугольника; *Гальфенъ* Объ эластической кривой. *20 іюня. Гурза* (иногородный членъ) прислалъ рукописную записку, озаглавленную «Объ интегрированіи нѣкоторыхъ линейныхъ уравненій посредствомъ двояко періодическихъ функцій»; *д'Оканъ* Объ одномъ рядѣ попеременнаго закона. *4 іюля. Стефаносъ* О теоріи элиминаціи. *19 іюля. Пикаръ* О гиперабелевыхъ функціяхъ и интегралахъ полныхъ дифференціаловъ перваго рода. *7 ноября. Пикаръ.* Замѣчаніе о приведеніи абелевыхъ интеграловъ къ эллиптическимъ интеграламъ; *Лемуанъ.* О псевдо-симметрическихъ числахъ. *21 ноября. Чебышевъ.* Объ алгебраическихъ дробяхъ, представляющихъ приближенно квадратный корень изъ перемѣннаго, заключеннаго между данными предѣлами; *д'Оканъ* О нѣкоторыхъ наименьшихъ фигурахъ. *Лебонъ.* О построеніи касательной въ точкѣ начала тѣни, отбрасываемой на самого себя цилиндромъ или полымъ конусомъ втораго порядка; *Чебышевъ.* О преобразованіи вращательнаго движенія въ движеніе по извѣстнымъ линіямъ съ помощью сочлененныхъ системъ.

Печатаніе сообщеній, сдѣланныхъ въ Обществѣ въ истекшемъ году, началось съ послѣдняго (5) № тома XI Бюллетеня, содержащаго въ себѣ собственно сообщенія предшествующаго 1882—83 г. Здѣсь помѣщены «О задачѣ слоновъ» Перотта и «О развертываемыхъ поверхностяхъ, образуемыхъ рефракціей пучка параллельныхъ лучей свѣта на данной кривой» Луціана Леви. Первое изъ нихъ опредѣляетъ число рѣшеній весьма извѣстной задачи, состоящей въ помѣщеніи на шахматной доскѣ даннаго числа слоновъ такимъ образомъ, чтобы ни одинъ слонъ не могъ быть взятъ другимъ. Это число оказывается равнымъ 22522960. Задача, разсматриваемая во второмъ сообщеніи, состоитъ въ группированіи рефрактирующихся лучей такимъ образомъ, чтобы сформировались развертываемыя поверхности. Авторъ приводитъ эту задачу къ уравненію Рикатти, два частныя рѣшенія котораго и находитъ. Задача тогда зависитъ уже не болѣе какъ только отъ одной квадратуры». Слѣдующіе затѣмъ по времени Мемуары помѣщены въ XII томѣ Бюллетеня. Всего содержится ихъ тамъ 18.

Между авторами напечатанныхъ Мемуаровъ усерднѣйшимъ членомъ Общества является безспорно *Морисъ д'Оканъ.* Ему принадлежатъ пять Мемуаровъ. Предметъ перваго изъ нихъ, читаннаго въ засѣданіи 21 декабря 1883 года, слѣдующій. Коллиньонъ далъ въ 1874 году весьма остроумный графическій методъ, дающій возможность путемъ простаго вычисленія поверхности получить моментъ или моментъ инерціи какой-нибудь площади относительно данной въ ея плоскости оси. Съ аналитической точки зрѣнія это приводится къ нахожденію помощью простой квадратуры значенія интеграла $\int xydy$ или интеграла $\int xy^2dy$, взятаго вдоль даннаго контура. Методъ можетъ быть обобщенъ для интеграла $\int xy^m dy$, гдѣ m есть число цѣлое и положительное. Цѣль разсматриваемаго Мемуара *д'Оканъ* состоитъ въ сообщеніи примѣненію метода Коллиньона большей точности, что и достигается доставленіемъ возможности опредѣлять фигурирующую въ немъ кривую съ желаемой степенью приближенія. Находя точки этой кривой, авторъ показываетъ въ то-же время, какъ находить проходящія черезъ нихъ касательныя. Кромѣ того имъ дается также и опредѣленіе радіуса кривизны.

Идея ряда съ попеременнымъ закономъ, составляющаго предметъ третьяго Мемуара автора, читаннаго въ засѣданіи 20 іюня, была вызвана слѣдующимъ геометрическимъ вопросомъ. Данъ треугольникъ ABC. Составляютъ послѣдовательно сперва треугольникъ $A_0\ B_0\ C_0$, имѣющій вершинами средины сторонъ даннаго треугольника, затѣмъ треугольникъ $A_1\ B_1\ C_1$, имѣющій вершинами средины сторонъ составленнаго треугольника $A_0\ B_0\ C_0$, потомъ треугольникъ $A_2\ B_2\ C_2$, имѣющій вершинами средины сторонъ треугольника $A_1\ B_1\ C_1$ и т. д. Требуется найти координаты вершинъ какого-нибудь изъ треугольниковъ этого ряда напр. треугольника $A_k\ B_k\ C_k$ въ функціи координатъ вершинъ даннаго треугольника ABC. Непосредственное вычисленіе, одинаково прилагающееся къ абсциссамъ и ординатамъ, даетъ напр., для абсциссъ выраженія:

$$x_0 = \frac{x'+x''}{2}, \qquad x'_0 = \frac{x+x''}{2}, \qquad x''_0 = \frac{x+x'}{2};$$

$$x_1 = \frac{2x+x'+x''}{4}, \qquad x'_1 = \frac{x+2x'+x''}{4}, \qquad x''_1 = \frac{x+x'+2x''}{4};$$

$$x_2 = \frac{2x+3x'+3x''}{8}, \qquad x'_2 = \frac{3x+2x'+3x''}{8}, \qquad x''_2 = \frac{3x+3x'+2x''}{8};$$

$$x_3 = \frac{6x+5x'+5x''}{16}, \qquad x'_3 = \frac{5x+6x'+5x''}{16}, \qquad x''_3 = \frac{5x+5x'+6x''}{16},$$

и т. д. и т. д. и т. д.

гдѣ x и y обозначаютъ координаты A, x' и y'—координаты B, x'' и y''—координаты C и вообще x_k и y_k—координаты A_k, x_k' и y'_k—координаты B_k и x_k'' и y_k''—координаты C_k. Авторъ находитъ для членовъ этихъ рядовъ слѣдующее общее выраженіе:

$$x_k^{(\,)} = \frac{S_x}{3} + \frac{\left[\frac{2^{R\left(\frac{k}{2}\right)}}{3} - R\left(\frac{k}{2}\right)\right] S_x - (-1)^k x^{(\,)}}{2^{k+1}},$$

гдѣ $S_x = x + x' + x''$, а $R\left(\frac{k}{2}\right)$ есть равный 1 или 0 остатокъ отъ дѣленія k на 2. Записка оканчивается нахожденіемъ общей формулы, позволяющей вычислить

$$\sum_{i=0}^{i=k} U_i = U_0 + U_1 + \ldots + U_k,$$

гдѣ U_k вообще обозначаетъ наибо̀льшій изъ трехъ коэффиціентовъ числителей въ вышеприведенныхъ выраженіяхъ абсциссъ.

Четвертый изъ напечатанныхъ Мемуаровъ Мориса д'Оканъ, озаглавленный «О средней прямой системы какихъ-нибудь прямыхъ, расположенныхъ въ одной плоскости» и читанный 18 іюля 1884 года, по странной случайности не упомянутъ въ протоколахъ засѣданій также какъ не упомянуто въ нихъ и самое засѣданіе 18 іюля. Предметъ этого сообщенія — «среднюю прямую» — авторъ опредѣляетъ слѣдующимъ образомъ: «Пусть A_1, A_2, ..., Ap представляютъ p какихъ-нибудь прямыхъ, данныхъ въ одной плоскости; положимъ, что въ этой послѣдней перемѣщается прямая, постоянно оставаясь параллельною неизмѣнному направленію $\triangle$ и въ каждый моментъ пересѣкая p данныхъ прямыхъ въ точкахъ, которыя мы обозначимъ буквами a_1, a_2, . . ., a_p. Центръ среднихъ разстояній g точекъ a_1, a_2, . . ., a_p опишетъ тогда прямую G, которую мы и будемъ называть *среднею прямою прямыхъ* A_1, A_2, . . ., A_p *относительно направленія* $\triangle$». Уравненіе средней прямой, какъ показываютъ изслѣдованія автора, представляется въ видѣ

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{A_i}{m_i - \mu} = o,$$

если уравненія

$$y - m_i x - n_i = o \text{ и } y - \mu x - v = o$$

будутъ выражать соотвѣтственно прямую A_i и прямую перемѣщающуюся.

Пятый Мемуаръ Мориса д'Оканъ, читанный 21 ноября 1884 года, посвященъ «задачамъ, способнымъ къ многочисленнымъ приложеніямъ и пришедшимъ въ голову автора по поводу нѣкоторыхъ встрѣтившихся ему въ практикѣ вопросовъ. Онѣ состоятъ въ разысканіи минимума нѣкоторыхъ существенно прерывныхъ функцій, измѣненія которыхъ вслѣдствіе этого не могутъ быть изучены съ помощью теоріи производныхъ». Для рѣшенія этихъ задачъ авторъ пользуется геометрическимъ методомъ. Всего такихъ задачъ онъ разсматриваетъ двѣ. Содержаніе ихъ слѣдующее. Первой — найти наименьшій кругъ, заключающій систему данныхъ въ плоскости точекъ. Второй — найти наименьшей ширины круговой вѣнчикъ, также заключающій систему данныхъ въ плоскости точекъ.

Послѣ Мориса д'Оканъ наибольшее число Мемуаровъ—3—принадлежитъ *Эмилю Пикаръ*. Первый изъ нихъ, читанный въ засѣданіи 7 марта, разсматриваетъ прерывную группу подстановокъ, по которой каждой точкѣ въ части пространства, находящейся съ одной стороны плоскости, соотвѣтствуетъ точка, также находящаяся въ той-же части пространства. Эта группа совершенно аналогична извѣстной ранѣе другой группѣ, по которой каждой точкѣ, расположенной надъ осью дѣйствительныхъ количествъ соотвѣтствуетъ точка, также находящаяся надъ тою-же осью. Второй Мемуаръ Пикара, первый изъ двухъ, читанныхъ имъ въ засѣданіи 4 апрѣля, состоитъ главнымъ образомъ въ изложеніи болѣе простаго способа доказательства, чѣмъ обнародованный имъ въ 1878 году (Comptes rendus, сентябрь и ноябрь). Наконецъ, въ своемъ третьемъ Мемуарѣ, читанномъ 7 ноября 1884 года, Пикаръ устанавливаетъ переходъ отъ предложенія, найденнаго имъ въ 1881 г. и относящагося къ приведенію абелевыхъ интеграловъ къ эллиптическимъ, къ аналогичной съ нимъ теоремѣ Вейерштрасса, приведенной въ IV томѣ Acta mathematica.

По два напечатанныхъ Мемуара принадлежатъ *Эмилю Лемуанъ* и знаменитому нашему математику *П. Л. Чебышеву*. Изъ Мемуаровъ перваго одинъ, читанный въ засѣданіи 6 іюня, разсматриваетъ нѣкоторыя свойства параллелей и анти-параллелей къ сторонамъ треугольника; другой, читанный 7 ноября, посвященъ изложенію 10 открытыхъ авторомъ теоремъ о свойствахъ группы чиселъ, которыя онъ называетъ *псевдо-симметрическими*. Для разъясненія содержанія этого Мемуара необходимо замѣтить, что *симметрическими* (парисимметрическими въ случаѣ четнаго числа цифръ и импарисимметрическими въ случаѣ нечетнаго) авторъ называетъ числа, въ цифирныхъ изображеніяхъ которыхъ цифры равноотстояшія отъ концовъ равны напр. 2552 или 25652; *псевдосимметрическими-же* (также псевдопари- или псевдоимпари-)—числа, въ цифирныхъ изображеніяхъ которыхъ сумма цифръ, равноотстоящихъ отъ концовъ равна нулю или постоянному числу напр. 807004600302, 73, 603147502, 603107502, при чемъ въ случаѣ нечетнаго числа цифръ ставится еще условіе, чтобы средняя цифра равнялась или нулю или при четной постоянной суммѣ ея половинѣ.

Что касается до Мемуаровъ г. Чебышева, то первый изъ нихъ, читанный въ засѣданіи 21 ноября, находитъ для приближеннаго выраженія $\sqrt{z}$ при z, заключенномъ между предѣлами $z=A$ и $z=B$, формулу

$$\sqrt[4]{AB}\frac{kz+\sqrt{AB}}{z+k\sqrt{AB}};$$

второй-же посвященъ разсмотрѣнію двухъ простѣйшихъ случаевъ вопроса, уже давно занимающаго нашего знаменитаго математика. Эти случаи, весьма часто встрѣчающіеся въ практикѣ, состоятъ въ преобразованіи вращательнаго движенія точки въ движеніе по кругу или по прямой линіи.

Предметами всѣхъ остальныхъ Мемуаровъ изъ числа напечатанныхъ, кромѣ одного, служатъ различные вопросы Математическаго Анализа, преимущественно Интегральнаго Исчисленія. Первый изъ нихъ, читанный въ засѣданіи 4 января Мемуаръ *Давида*, находитъ съ помощью открытыхъ ранѣе Лагерромъ предложеній (Comptes rendus, t. LXXXVIII p. 117 et 225) одно преобразованіе линейнаго уравненія n-аго порядка и кромѣ того замѣняетъ *инваріантъ* (функція коэффиціентовъ) линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, также данный Лагерромъ, другимъ позволяющимъ въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ дополнить теоремы послѣдняго особенно во всемъ, что касается уравненій 4-го порядка. Такъ съ его помощью онъ находитъ для этихъ послѣднихъ преобразованіе, подобное найденному Лагерромъ для линейнаго дифференціальнаго уравненія 3-го порядка. Мемуаръ *Луи Раффи*, читанный въ засѣданіи 4 апрѣля, содержитъ въ себѣ рядъ интересныхъ теоремъ, относящихся къ инваріантнымъ преобразованіямъ эллиптическихъ дифференціаловъ. При раціональной функціи

$f(x)$ и цѣломъ многочленѣ 3-ей или 4-ой степени $R(x)$ авторъ называетъ эллиптическій дифференціалъ

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

способнымъ къ *инваріантному преобразованію*, если существуетъ такая функція y отъ x, что

$$f(x) = -f(y),$$

такъ какъ и

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}.$$

Въ своихъ теоремахъ, число которыхъ пять, авторъ 1) обнаруживаетъ, что всякій способный къ инваріантному преобразованію эллиптическій дифференціалъ интегрируется въ конечныхъ выраженіяхъ; 2) находитъ необходимыя и достаточныя условія наличности этой способности; 3) доказываетъ существованіе неопредѣленнаго множества раціональныхъ дробей $f(x)$, зависящій отъ которыхъ эллиптическій дифференціалъ

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

принимаетъ инваріантное преобразованіе 1-го порядка; 4) раскрываетъ типъ, къ которому принадлежатъ эллиптическіе дифференціалы, принимающіе инваріантное преобразованіе 1-го порядка; наконецъ, 5) доказываетъ, что всякое преобразованіе (въ смыслѣ Якоби), выполненное надъ эллиптическимъ дифференціаломъ, способнымъ къ инваріантному преобразованію, даетъ эллиптическій дифференціалъ, также способный къ инваріантному преобразованію. Мемуаръ *Поля Таннери* «Замѣтка о теоріи совокупностей», читанный въ засѣданіи 20 іюня и по странной случайности непопавшій въ протоколы, занимается обнаруженіемъ и устраненіемъ одного пробѣла, допущеннаго въ новѣйшихъ работахъ по теоріи совокупностей *Георга Кантора* (Журналъ Борхардта т. 84 и Acta mathematica т. 2). Мемуаръ *Гурза*, читанный въ засѣданіи 20 іюня, занимается интегрированіемъ, съ помощью двояко-періодическихъ функцій нѣкоторыхъ линейныхъ уравненій, представляющихъ приложеніе теоремы Пикара, въ силу которой, какъ извѣстно, если общій интегралъ единообразенъ (uniforme), то онъ выражается посредствомъ функціи θ. Это суть такія уравненія съ раціональными коэффиціентами, что перемѣнное и общій интегралъ могутъ выразиться единообразными (uniformes) двояко-періодическими функціями перваго или втораго рода одного и того-же параметра. Авторъ разсматриваетъ между прочими также и слѣдующее уравненіе 3-го порядка, содержащее восемь какихъ-нибудь цѣлыхъ чиселъ A, B, C, D, E, F, H, K и совершенно произвольный параметръ h

$$x^3(x-1)^3\frac{d^3y}{dx^3}+[Ax+B(x-1)]\,x^2\,(-1)^2\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$+[Cx(x-1)+Dx+E(1-x)]\,x(x-1)\frac{dy}{dx}$$

$$-[Fx^2(x-1)+hx(x-1)+Hx+K(x-1)]\,y=0.$$

Предметъ повидимому не читаннаго въ засѣданіяхъ Общества Мемуара *Пуанкаре* «О приведеніи абелевыхъ интеграловъ» состоитъ въ обобщеніи и доказательствѣ слѣдующихъ двухъ теоремъ *Вейерштрасса*. «Если разсматриваютъ систему ρ абелевыхъ интеграловъ разряда ρ, между которыми есть одинъ способный къ приведенію къ эллиптическимъ интеграламъ, и если разсматриваютъ также соотвѣтствующую функцію θ, то

1) Эта функція θ съ ρ перемѣнными можетъ быть измѣнена посредствомъ преобразованія порядка k въ произведеніе функціи θ съ однимъ перемѣннымъ и функціи θ съ $\rho-1$ перемѣнными

2) Она можетъ быть также приведена посредствомъ линейнаго преобразованія, то-есть преобразованія перваго порядка къ такой формѣ, чтобы въ написанной слѣдующимъ образомъ таблицѣ періодовъ

$$(A)\left|\begin{array}{llllllll} 1, & 0 & \ldots & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1\rho}, \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2\rho} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \tau_{\rho 1} & \tau_{\rho 2} & \ldots & \tau_{\rho\rho} \end{array}\right.$$

съ обычными условіями

$$\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\beta\alpha},$$

періодъ τ_{12} былъ соизмѣримъ и чтобы періоды

$$\tau_{13},\ \tau_{14},\ \ldots,\ \tau_{1\rho}$$

были нули». Обѣ эти теоремы не были обнародованы авторомъ. Онъ сообщилъ ихъ въ своихъ письмахъ къ Кёнигсбергеру первую и къ г-жѣ Ковалевской вторую. Ознакомленіемъ съ этими теоремами ученая публика обязана напечатанной въ Acta mathematica статьѣ г-жи Ковалевской о приведеніи опредѣленнаго класса абелевыхъ интеграловъ 3-го разряда къ эллиптическимъ интеграламъ. Мемуаръ *Эрнеста Лебонъ*, читанный 21 ноября, имѣетъ дѣло съ построеніемъ, относящимся къ теоріи тѣней. Въ замѣну употребляемыхъ до сихъ поръ довольно копотливыхъ и долгихъ способовъ построенія, принадлежащихъ Гашетту и Пилле, авторъ даетъ новый замѣчательный по своей короткости.

Кромѣ разсмотрѣнныхъ Мемуаровъ и Отчета о состояніи Общества къ началу 1884 года мы находимъ въ XII томѣ Бюллетеня еще протоколы засѣданій, къ сожалѣнію оставляющіе желать очень многаго въ отношеніи полноты и точности помѣщаемыхъ въ нихъ свѣдѣній. Эти протоколы доведены до каникулярнаго времени то-есть до августа. Томъ заканчивается подробными оглавленіями (систематическимъ и по именамъ авторовъ) содержанія первыхъ десяти томовъ Бюллетеня, составляющихъ его первую серію. Эти оглавленія даютъ намъ возможность бросить бѣглый взглядъ на главнѣйшіе изъ результатовъ прошлой дѣятельности Общества. Всего Мемуаровъ было напечатано въ упомянутыхъ десяти томахъ 245; изъ нихъ 12 относятся къ Ариѳметикѣ и Теоріи чиселъ, 8 къ Геометріи шахматной доски и расположеній рядами, 33 къ Алгебрѣ, 50 къ Анализу, 7 къ Теоріи Вѣроятностей, 11 къ Геометріи, 43 къ плоскимъ кривымъ, 14 къ кривымъ въ пространствѣ, 23 къ поверхностямъ, 4 къ Обобщенной Геометріи, 4 къ Начертательной Геометріи, 8 къ Кинематической Геометріи, 1 къ Кинематикѣ, 7 къ Статикѣ, 4 къ Динамикѣ, 3 къ Прикладной Механикѣ, 1 къ Математической Физикѣ, 7 къ Исторіи Математики (изъ нихъ 5 принадлежатъ одному автору, именно *Леону Роде*) и 5 смѣшаннаго содержанія. Изъ этого перечня слѣдуетъ, что главнымъ предметомъ занятій Общества была Чистая Математика, а изъ ея отдѣловъ Геометрія, Анализъ и Алгебра. Что-же касается до занятій Прикладною Математикой, то ихъ результаты выражаются сравнительно ничтожнымъ числомъ 16 Мемуаровъ. Наиболѣе дѣятельными изъ членовъ Общества за обнимаемый разсматриваемыми томами Бюллетеня 10-лѣтній промежутокъ времени оказываются *Лагерръ*, *Гальфенъ* и *Фуре*, доставившіе первый 34 Мемуара, второй 30 и третій 10. Изъ математиковъ, пользующихся европейскою извѣстностью *Бріоски, Шаль* и *Эрмитъ* доставили Обществу по одному Мемуару, *Чебышевъ*—2 и *Дарбу*—3.

Въ заключеніе считаемъ не безполезнымъ привести списокъ напечатанныхъ въ Бюллетенѣ Общества работъ русскихъ математиковъ. *Алексѣевъ* (покойный членъ Академіи Наукъ) Объ извлеченіи квадратнаго корня изъ числа (VII, 167). *Лигинъ* (профессоръ Одесскаго Университета) О мѣстѣ точекъ неизмѣняемой, движимой въ пространствѣ общимъ образомъ, системы, которой ускоренія перваго порядка постоянны (I, 152). — Историческая замѣтка о проблемѣ цилиндрическихъ зацѣпленій (I, 251). *Селивановъ* (кандидатъ Петербургскаго Университета) Объ единообразно сходящихся интегралахъ (X, 147). *Сонинъ* (профессоръ Варшавскаго Университета). Замѣтка объ одной формулѣ Гаусса (IX, 162). *Чебышевъ* (членъ Петербургской и Парижской Академій Наукъ). О предѣлѣ степени цѣлой функціи, удовлетворяющей нѣкоторымъ условіямъ (III, 103). — О равнодѣйствующей двухъ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ (VII, 188).

РАБОТЫ ПО ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКѢ, ЧИТАННЫЯ ВЪ ЗАСѢДАНІЯХЪ ПАРИЖСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ ВЪ ТЕЧЕНІЕ ВТОРОЙ ПОЛОВИНЫ 1884 ГОДА.

(*Окончаніе*).

3) Геометрія *).

Изъ главныхъ отдѣловъ Чистой Математики Геометрія по числу относящихся къ ней сообщеній является въ циклѣ занятій Академіи за разсматриваемый періодъ представленною наиболѣе слабо. Въ теченіи всего семестра было сдѣлано только *четыре* сообщенія по Геометріи.

Первое изъ нихъ по времени, принадлежащее *Ле Пэжъ* и озаглавленное «О группахъ точекъ въ инволюціи, обозначенныхъ на

*) Особенный интересъ, представляемый въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ сообщеніями по Алгебрѣ вице-адмирала *де-Жонкьеръ*, заставилъ Редакцію озаботиться составленіемъ изъ нихъ одной цѣльной статьи, которая и появится въ одномъ изъ ближайшихъ нумеровъ отдѣла научныхъ статей. Отчетъ о содержаніи этихъ сообщеній въ настоящихъ Очеркахъ становится вслѣдствіе этого излишнимъ.

поверхности», докладывалось въ засѣданіи 29 сентября. Это сообщеніе занимается разсмотрѣніемъ частнаго случая гораздо болѣе общаго понятія объ инволюціяхъ въ области двухъ измѣреній, то-есть о группахъ точекъ, обозначенныхъ на поверхности. Упомянутое понятіе обязано своимъ происхожденіемъ, какъ полагаетъ авторъ, исключительно результатамъ его собственныхъ работъ, соединеннымъ съ результатами, полученными нѣкоторыми другими геометрами, именно Шуромъ, Эмилемъ Вейръ, де Паолисъ и др., и разсматриваемыми съ точекъ зрѣнія нѣсколько отличающихся отъ установленныхъ самими авторами. Что-же касается до занимающаго нашего автора частнаго случая, то онъ состоитъ въ томъ, что дается болѣе общая кубическая поверхность S_3 и что изъ 36 системъ паръ, начерченныхъ на S_3 кубическихъ линій въ пространствѣ принимается во вниманіе только одна.

Несравненно болѣе общимъ образомъ ставится вопросъ объ инволюціи въ сообщеніи *I. C.* и *M. H. Vaněček* «Объ инволюціи высшихъ измѣреній», читанномъ въ засѣданіяхъ Академіи 3, 17 и 24 ноября. Въ опроверженіе мнѣнія Ле Пэжа, полагающаго, что до введенія имъ понятія о поверхностной инволюціи никто и не помышлялъ ни о какихъ другихъ инволюціяхъ, кромѣ образованныхъ группами элементовъ, распредѣленныхъ на опорѣ одного измѣренія, господа Vaněček указываютъ, что ими уже была разъ изложена вкратцѣ теорія инволюціи, разсматриваемая съ точки зрѣнія гораздо болѣе общей, чѣмъ господствовавшая до сего времени. Изложенію главныхъ основаній этой теоріи авторы посвящаютъ первую часть своего сообщенія. Новизна и оригинальность взгляда авторовъ на предметъ заставляютъ насъ привести здѣсь это изложеніе съ нѣкоторыми несущественными сокращеніями. «Для полученія группъ точекъ, находящихся въ инволюціи, необходимы два фактора, именно: одна фигура, на которой находятся эти группы, и другая, которая производитъ ихъ на первой. Извѣстно, напримѣръ, что пучекъ перваго измѣренія изъ поверхностей опредѣляетъ на кривой точки, образующія инволюцію перваго разряда, что мы можемъ выразить такимъ образомъ: элементы мѣста поверхностей третьяго измѣренія встрѣчаютъ мѣсто перваго измѣренія въ группахъ точекъ, образующихъ инволюцію перваго разряда. Мы можемъ, очевидно, замѣнить опору перваго измѣренія другою втораго измѣренія. Будемъ разсматривать поверхность S какъ опору и положимъ, что L есть мѣсто кривыхъ втораго измѣренія. Мѣсто L встрѣчаетъ поверхность S по кривой. Возьмемъ на этой послѣдней какую-нибудь точку; если есть хотя одна кривая C мѣста L, проходящая черезъ эту точку, то эта кривая опредѣлитъ на S группу точекъ инволюціи. *Итакъ, мы видимъ, что мѣсто кривыхъ втораго измѣренія опредѣляетъ на мѣстѣ втораго измѣренія инволюцію такимъ же образомъ, какъ мѣсто поверхностей третьяго измѣренія дѣлаетъ это на мѣстѣ перваго измѣренія.* Не трудно видѣть, что инволюція, полученная такимъ образомъ есть почти таже, что и разсматриваемая до сего времени. Подвигаться же далѣе въ теоріи инволюціи мы можетъ только посредствомъ слѣдующаго процесса. Пусть дана поверхность S, какъ опора, и пусть L будетъ мѣстомъ кривыхъ третьяго измѣренія. Положимъ, что черезъ какую-нибудь точку въ пространствѣ проходитъ только одна кривая C мѣста L. Взявъ эту точку A на поверхности S, мы получимъ $CS—1$ другихъ точекъ вмѣстѣ съ S, которыя соотвѣтствуютъ точкѣ A такимъ образомъ, что когда мы разсматриваемъ какую-нибудь точку изъ этихъ $CS—1$ точекъ, какъ точку A, мы получимъ другія $CS—2$ точекъ и первоначальную точку A. Это есть основное свойство инволюціи. Мы тотчасъ-же получимъ группы инволюціи, когда возьмемъ только одну точку одной изъ этихъ группъ. Это есть инволюція перваго разряда, тѣмъ не менѣе она отлична отъ общеупотребительной инволюціи. Извѣстно, что точки обыкновенной инволюціи находятся на кривой, между тѣмъ какъ точки инволюціи, о которой говоримъ мы, заполняютъ поверхность. Итакъ мы можемъ назвать инволюцію, которую разсматривали до сего времени, *инволюціей перваго измѣренія*, а инволюцію, которую получаемъ на поверхности, *инволюціей втораго измѣренія*. Мы можемъ распознавать инволюцію втораго измѣренія по природѣ мѣста L. *Кривыя (линіи) мѣста L третьяго измѣренія опредѣляютъ на поверхности S группы точекъ инволюціи втораго измѣренія и перваго разряда. Кривыя (линіи) мѣста L втораго измѣренія опредѣляютъ на поверхности S группы точекъ инволюціи втораго измѣренія и нулеваго разряда.* Ясно, что когда мы возьмемъ мѣсто L высшаго измѣренія, то инволюція будетъ болѣе высокаго разряда. Нужно различать слѣдующіе два случая: 1) *Инволюція втораго измѣренія и $(2n+1)$-аго разряда. Группы этой инволюціи опредѣляютъ на произвольной поверхности S мѣсто кривыхъ измѣренія $2(n+3)$. Эта инволюція обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что, если взять (на S) $n+1$ произвольныхъ точекъ группы, то эта группа совершенно опредѣлится.* 2) *Инволюція втораго измѣренія и $2\ n$-аго разряда. Группы этой инволюціи* *опредѣляютъ на поверхности* S *мѣсто кривыхъ измѣренія* $2(n+1)$. Эта инволюція обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ: *n произвольныхъ точекъ* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *на поверхности* S *опредѣляютъ въ мѣстѣ* L *другое мѣсто втораго измѣренія, встрѣчающее поверхность* S *по кривой. Произвольная точка* p *этой кривой опредѣляетъ вмѣстѣ съ первыми точками* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *группу инволюціи.* Тѣмъ-же путемъ мы можемъ получать также инволюціи высшихъ измѣреній и высшихъ разрядовъ, что и разовьемъ въ дальнѣйшемъ изложеніи». Это развитіе авторы начинаютъ съ напоминанія о слѣдующемъ данномъ ими ранѣе опредѣленіи мѣстъ высшихъ измѣреній: «простое неопредѣленное множество геометрическихъ мѣстъ n-аго измѣренія будетъ называться геометрическимъ мѣстомъ измѣренія $(n+1)$». Выведя затѣмъ изъ этого опредѣленія нѣсколько слѣдствій, нужныхъ для послѣдующаго изложенія, авторы переходятъ къ самому изученію инволюціи высшихъ измѣреній. Они начинаютъ его съ изслѣдованія инволюціи, происходящей отъ пересѣченія двухъ мѣстъ, изъ которыхъ одно (S) образуется поверхностями S, встрѣчающимися съ кривыми C, заполняющими другое геометрическое мѣсто (C). Въ этомъ изслѣдованіи и состоитъ главнымъ образомъ предметъ второй части разсматриваемаго сообщенія. Третью часть послѣдняго авторы начинаютъ съ обнаруженія возможности сохраненія въ разсматриваемой ими инволюціи прежней терминологіи. Изслѣдовавши затѣмъ разность между разрядами двухъ мѣстъ, авторы заканчиваютъ свои разысканія разсмотрѣніемъ инволюціи высшихъ измѣреній въ плоскости.

Остальныя два сообщенія по Геометріи принадлежатъ одному и тому-же автору, именно *Морису д'Оканъ*. Первое изъ нихъ, озаглавленное «О нѣкоторыхъ общихъ свойствахъ алгебраическихъ поверхностей какой-нибудь степени», было читано 3 ноября. Оно состоитъ собственно въ простомъ, не сопровождаемомъ никакими доказательствами, перечисленіи девяти новыхъ теоремъ, выражающихъ упомянутыя въ заглавіи общія свойства. Что-же касается до доказательствъ, то авторъ обѣщаетъ ихъ дать въ Мемуарѣ, имѣющемъ появиться впослѣдствіи. Тотъ-же характеръ имѣетъ и второе сообщеніе автора, читанное 10 ноября подъ заглавіемъ «О плоскихъ алгебраическихъ кривыхъ какой-нибудь степени». Главный предметъ его составляетъ также не сопровождаемое никакими доказательствами изложеніе содержанія двухъ теоремъ, относящихся къ плоскимъ алгебраическимъ кривымъ.