PODSTAWY MATEMATYCZNE
UBEZPIECZEŃ ŻYCIOWYCH.

DZIEŁA I ROZPRAWY MATEMATYCZNO FIZYCZNE,
WYDAWANE,
przez A. CZAJEWICZA,
Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH
NA POLU NAUKOWEM, IMIENIA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

III.

PODSTAWY MATEMATYCZNE UBEZPIECZEŃ ŻYCIOWYCH.

NAPISAŁ

A. B. DANIELEWICZ,

Magister Nauk Fizyczno Matematycznych
b. Szkoły Głównej Warszawskiej;
Matematyk Główny Towarzystwa Ubezpieczeń
„Przezorność”.

WARSZAWA.
W DRUKARNI NOSKOWSKIEGO,
Warecka № 15.

1896.

Дозволено Цензурою.
Варшава, 8 Іюня 1896 года.

PRZEDMOWA.

Ubezpieczenia życiowe posiadają dwie ważne zalety: stanowią bardzo piękne zastosowanie matematyki do celów praktycznych i tworzą potężną dźwignię dobrobytu społecznego.

Pierwsza z tych zalet dostarcza obfitego pokarmu duchowego osobom interesującym się nauką, druga podaje skuteczny środek zapobiegania nędzy społecznej, obie więc razem powinny baczną zwrócić uwagę szerokiego koła ludzi inteligentnych na przedmiot ubezpieczeń życiowych, co wszakże jeszcze nie wszędzie ma miejsce.

W środkowej i zachodniej Europie, u ludów o wysokiej kulturze umysłowej i ekonomicznej, jak w Niemczech, Anglii, Szwajcaryi i Francyi oraz w Stanach Zjednoczonych Ameryki Północnej, nie tylko ludzie inteligentniejsi, ale nawet ogół już oddawna zrozumiał wysokie znaczenie ubezpieczeń życiowych; to też znajdujemy tam bogatą literaturę ubezpieczeniową i liczne towarzystwa, cieszące się ogromnem powodzeniem.

U nas inaczej. — Podczas gdy np. w Niemczech, obok licznych dzieł i broszur, w 1892 r. wychodziło 12 pism specyalnych i funkcyonowało przeszło 50 towarzystw krajowych, u nas dopiero w 1892 r. poczęło działać pierwsze prywatne towarzystwo ubezpieczeń życiowych; jedno specyalne pismo, po rocznej wegetacyi, upadło, a podręcznika nie posiadaliśmy dotąd żadnego!

Temu ostatniemu brakowi dawno już pragnąłem zaradzić, jednak niepomyślne okoliczności stawały mi ciągle na przeszkodzie. W ostatnich dopiero latach, znalazłszy zachętę i poparcie ze strony kilku osób' zdołałem mój zamiar urzeczywistnić i jestem z tego powodu bardzo zadowolniony, gdyż ułatwiwszy chętnym gruntowniejsze zapoznanie się ze stroną naukową ubezpieczeń życiowych, spełniłem najważniejszy obowiązek moralny, jaki na mnie moja obecna pozycya włożyła.

Przy pisaniu niniejszego podręcznika oparłem się głównie na książce D-ra Augusta Zillmer'a „Die mathematischen Rechnungen bei Lebens - und Renten - Versicherungen" (Berlin, 1887), ale przerobiłem ją zupełnie: zmieniłem układ, dodałem przykłady i tablice, włączyłem elementarny wykład rachunku prawdopodobieństwa i obszerny rozdział o tablicach śmiertelności; niektóre rzeczy, jako mniej ważne, opuściłem, natomiast wiele dodałem — czerpiąc materyał z innych źródeł lub postępując całkiem samodzielnie.

Chcąc być zrozumianym przez szersze koło czytelników, unikałem w wykładzie rachunku wyższego, poprzestając na rachunku niższym, znanym mniej więcej wszystkim, którzy ukończyli kursa gimnazyalne. Mimo to wykład jest ścisły i rachunek zupełnie dla dzisiejszej praktyki wystarczający.

W pierwszych trzech rozdziałach pomieściłem rachunek prawdopodobieństwa, rzecz o tablicach śmiertelności oraz teoryę procentów i spłat. Te więc trzy pierwsze rozdziały mogą być przydatne nie tylko chcącym się zapoznać z zasadami ubezpieczeń życiowych, ale i osobom interesującym się sprawami społecznemi w ogóle, stanowią bowiem mniej więcej to, co czasami arytmetyką społeczną lub polityczną bywa nazywane.

Pozostałe sześć rozdziałów mają już znaczenie specyalnie ubezpieczeniowe i zalecają się tym osobom, które dokładnie ze sprawami ubezpieczeń życiowych zapoznać się pragną.

Oprócz książki Zillmer'a, posiłkowałem się jeszcze następującemi dziełami i broszurami, które przytaczam w porządku chronologicznym ich wydania:

Ludwig Moser. Die Gesetze der Lebensdauer. Berlin, 1839.

Laplace. Essai philosophique sur les probabilités. Paryż, 1840.

В. Я. Буняковскій. Основанія математической теоріи вѣроятностей. Petersburg, 1846.

Ph. Fischer. Grundzüge des auf menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens. Oppenheim nad Renem, 1860.

Albert Wild. Politische Rechnungs-Wissenschaft. Monachium, 1862.

A. Zillmer. Beiträge zur Theorie der Prämien-Reserve. Szczecin, 1863 r.

G. Hagen. Grundzüge der Warscheinlichkeits-Rechnung. Berlin, 1867.

Th. Wittstein. Mathematische Statistik und deren Anwendung auf National-Ökonomie und Versicherungs-Wissenschaft. Hanower, 1867.

G. F. Knapp. Über die Ermittlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungs-Statistik. Lipsk, 1868.

Gustav Zeuner. Abhandlungen aus der Mathematischen Statistik. Lipsk, 1869.

К. Андреевъ. О таблицахъ смертности. Moskwa, 1871.

W. Karup. Theoretisches Handbuch der Lebensversicherung. Lipsk, 1871 r.

H. Laurent. Traité du calcul des probabilités. Paryż, 1873.

Eugène Pereire. Tables de l'intérêt composé, des annuités et des rentes viagères. Paryż, 1873.

W. Folkierski. Zastosowania rachunku całkowego do rachunku prawdopodobieństwa. W tomie II-im „Zasad rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami". Paryż, 1873.

Nathan Willey. A treatise on the principles and practice of Life Insurance. New York, 1876.

G. Behm. Statistik der Mortalitäts - Invaliditäts - und Morbilitätsverhältnisse bei dem Beamtenpersonal der Deutschen Eisenbahn-Verwaltungen. Berlin, 1876. Z Nachtrag'ami za dalsze lata i Herm. Zimmermann'a Beiträge zur Theorie der Dintsunfähigkeits-und Sterbens - Statistik. Berlin, 1886 i dalsze lata.

Émile Dormoy. Théorie mathématique des assurances sur la vie. Paryż, 1878.

Ludwig Elster. Die Lebensversicherung in Deutschland. Jena, 1880

Simon Spitzer. Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. Wiedeń, 1881.

Harald Westergaard. Die Lehre von der Mortalität und Morbilität. Jena, 1882.

A. Morgenbesser. Die mathematischen Grundlagen des gesammten Versicherungswesens. Berlin, 1883.

Th. Wittstein. Das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit. Hanower, 1883.

Deutsche Sterblichkeits - Tafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungs-Gesellschaften, veröffentlicht im Auftrage des Collegiums für Lebensversicherungs - Wissenschaft zu Berlin. Berlin, 1883.

Th. Wittstein. Das mathematische Risiko der Versicherungs-Gesellschaften. Hanower, 1885.

Teofil Rozmarynowicz. Matematyczne podstawy ubezpieczenia na wypadek niezdolności do pracy. Warszawa, 1886.

Ernst Blaschke. Die Gruppenrechnung bei der Bestimmung der Prämienreserve. Wiedeń 1886.

J. Bertrand. Calcul des probabilités. Paryż, 1889.

Б. Θ. Малешевскій. Теорія и практика пенсіонныхъ кассъ. Petersburg, 1890.

D. Bischoff. Die rechtliche Bedeutung der Prämienreserve eines Lebensversicherungs-Betriebes. Brema, 1891.

Heinrich Knöpfmacher. Der Policen-Rückkauf in der Lebensversicherung. Lipsk i Wiedeń, 1891.

Philipp Falkowicz. Der Pensionsfond. Praga, 1892.

Ernst Blaschke. Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen. Wiedeń, 1893.

E. Béziat D'Audibert. Théorie élémentaire des assurances sur la vie. Paryż, 1893.

Gustav Berner. Beiträge zur Geschichte der Lebensversicherung. Lipsk, bez daty.

Wiele także korzystałem z wydawnictw peryodycznych i pism specyalnych, jak np. z niektórych tomów „Journal des actuaires français" (Paryż), „Bulletin trimestriel de l'Institut des actuaires français" (Paryż), — „Masius' Rundschau" (Lipsk),—Assecuranz - Jahrbuch A. Ehrenzweig'a (Wiedeń), — „Le Moniteur des assurances" (Paryż),—„Tygodnik asekuracyjny" (Warszawa).—Z „Deutsche Versicherungs-Zeitung" (Berlin), „Oesterreichische Versicherungs-Zeitung" (Wiedeń), „Annalen des gesammten Versicherungswesens" (Lipsk), „Der National—Oekonom" (Wiedeń), „L'Argus. Journal international des assurances" (Paryż), „Страховое обозрѣніе" (Petersburg) i ze „Zbioru urządzeń i wiadomości tyczących się ubezpieczeń w Królestwie Polskiem".

W pracy mej nieocenionej pomocy i światłych rad udzielać mi raczyli pp. A. Czajewicz, S. Dickstein i Wł. Gosiewski, którym ośmielam się na tem miejscu wyrazić moją wdzięczność. Również miło mi złożyć serdeczne podziękowanie pp. Wł. Pyżykowskiemu i H. Pothsowi za pomoc w korekcie i przy układaniu tablic.

Bolesław Danielewicz.

Warszawa, w maju 1896 r.

TREŚĆ.

TABLICE.

ERRATA.

str.	*wiersz*	*zamiast*	*powinno być*
17	19 *od dołu*	$A n+1$	A_{n+1}
19	28 *od góry*	i nazwano	, nazwijmy
20	10 *od dołu*	$=\frac{300}{\sqrt{2\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times10000}}=$	$=\frac{300}{\sqrt{2\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times10000}}=$
20	3 „	$=\frac{l}{\sqrt{2\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times10000}}=$	$=\frac{l}{\sqrt{2\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times10000}}=$
		i w ogóle na str. 20 i 21 znaki równości (=) są nieco za nizko pomieszczone.	
26	16 i 17 *od góry*	największem	największą szansę mającem,
26	17 „	jest	, z jakiem zdarzenie A zachodzi, jest
74	10 i 13 *od dołu*	$\log . q$	$\log q$
110	14 „	Przyszłe i teraźniejsze wartości	Przyszła i teraźniejsza wartość
171	17 „	$(r \quad 1)R_x$	$(r - 1)R_x$
188	6 *od góry*	ρ_x	ρ^x
215	8 *od dołu*	$\lambda_{x+n-1}\rho^{n+1}$	$\lambda_{x+n+1}\rho^{n+1}$
221	3 „	$\tau_{x+x-1}\rho^n$	$\tau_{x+n-1}\rho^n$
251	15 „	$R_{z,x}$	$\overset{I}{R}_{z,x}$
256	7 „	(a)	(α)
257	7 „	$\lambda_{y+m-1}\lambda_{x+m \quad 1}$	$\lambda_{y+m-1}\lambda_{x+m-1}$

PODSTAWY MATEMATYCZNE UBEZPIECZEŃ ŻYCIOWYCH.

ROZDZIAŁ I.

PODSTAWY Z RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA.

1. Przedmiot rachunku prawdopodobieństwa. Każde zdarzenie jest koniecznem następstwem pewnych przyczyn. „Gdyby się znalazł rozum — powiada Laplace — znający wszystkie siły, ożywiające w danej chwili przyrodę, oraz wszelkie wzajemne stosunki jestestw, które ją składają, i gdyby był dość zdolny, aby te wielkości i stosunki poddać odpowiedniej analizie matematycznej, wtedy rozum ten potrafiłby ująć w jeden wzór ruchy zarówno ciał niebieskich jak i najlżejszego pyłku. Dla niego nie byłoby niepewności, przeszłość i przyszłość stałyby wyraźnie przed jego oczami. W doskonałości, jaką zdołano osiągnąć przy badaniach astronomicznych, duch ludzki przedstawia słaby obraz takiego rozumu."

Gdybyśmy więc, obdarzeni podobnym rozumem, rzucili np. monetę w górę, to — znając dokładnie rozkład w niej materyi, siłę i kierunek rzutu ręki, drgnięcie każdego naszego muskułu w chwili dokonania rzutu, ruch i opór powietrza w czasie wznoszenia się i opadania monety i t. d. — moglibyśmy z góry przewidzieć, na którą stronę moneta upadnie. Gdybyśmy, przy wyjmowaniu gałki z urny, znali dokładnie wszystkie okoliczności, jakie wyjęciu towarzyszą, i wpływy, jakie działały i działają przed i podczas aktu wyciągania gałki, i umieli te wszystkie dane odpowiednio zużytkować, wtedy moglibyśmy z góry przewidzieć, którą wyciągniemy gałkę. Ale ponieważ wszystkich tych szczegółów nie znamy i, będąc takimi jak jesteśmy, ani ich znać nie możemy, ani odpowiednio spożytkować nie umiemy, zatem wszystkie tego rodzaju zdarzenia, jakie ze zdarzeniem wyciągnięcia na chybił trafił gałki z urny zidentyfikować można, uważać musimy za zdarzenia przypadkowe — losowe i takie właśnie zdarzenia, które acz są rezultatem pewnych przyczyn, lecz przyczyn nie dających się przez nasz ograniczony umysł ani pochwycić, ani do rachunku wprowadzić, stanowią przedmiot rachunku prawdopodobieństwa.

2. Prawdopodobieństwo. Wyobraźmy sobie urnę, mieszczącą pewną liczbę, np. dziesięć gałek równych co do wielkości i identycznych w dotknięciu. Jeżeli te wszystkie gałki są białe, jesteśmy pewni, że wyciągniemy gałkę białą. Jeżeli w urnie jest 9 gałek białych i jedna czarna, to chociaż spodziewamy się wyciągnąć gałkę białą, jednak nie jesteśmy tego pewni, ponieważ może się zdarzyć, że właśnie trafimy na tę jedną jedyną gałkę czarną. W miarę zmniejszania się w urnie liczby gałek białych, a zwiększania się liczby czarnych — nasza nadzieja wyciągnięcia białej gałki stopniowo słabnie. Gdy w urnie będzie 5 białych i 5 czarnych gałek, przewidywania nasze całkiem znikną — nie mamy żadnej słusznej racyi spodziewać się, że wyciągniemy raczej białą, niż czarną gałkę lub naodwrót. Jeżeli w urnie znajdzie się więcej czarnych aniżeli białych gałek, spodziewamy się prędzej wyciągnąć gałkę czarną niż białą. Wreszcie, jeżeli wszystkie gałki są czarne, albo inaczej – gdy w urnie nie ma żadnej gałki białej, jesteśmy pewni, iż wyciągnięta gałka nie będzie białą.

Widzimy stąd, że szansa wyciągnięcia z urny białej gałki jest w pewnym, dotąd bliżej nieokreślonym, związku z liczbą tego samego koloru gałek w urnie.

Wyobraźmy sobie teraz dwie urny, z których pierwsza zawiera 4 białe i 5 czarnych gałek — razem 9, druga 40 białych i 50 czarnych gałek -- razem 90. Zachodzi pytanie, skąd większą mamy szansę wyciągnąć białą gałkę: z pierwszej czy z drugiej urny?

Połączmy w myśli każde 10 białych i każde 10 czarnych gałek drugiej urny w jedną grupę (oddzielnie białe i oddzielnie czarne), ale tak, żeby to nie przeszkadzało dokładnie mięszać gałek i każdą oddzielnie chwytać; wtedy mieć będziemy w drugiej urnie 9 grup: 4 po 10 białych i 5 po 10 czarnych gałek. Gdy uchwycimy którąkolwiek z białych gałek, wyciągniemy razem z nią odpowiednią grupę. gdy uchwycimy którąkolwiek czarną — wyciągniemy z urny odpowiednią grupę czarnych gałek. Ponieważ każda grupa składa się z jednakowej liczby gałek, oczywiście więc szansa wyciągnięcia białej gałki z drugiej urny identyfikuje się z szansą wyciągnięcia całej grupy białych gałek; że zaś grup białych jest 4, t. j. tyle ile jest białych gałek w pierwszej urnie, a grup czarnych jest 5, czyli tyleż co i czarnych gałek w urnie pierwszej, zatem zupełnie taka sama jest szansa wyciągnięcia białej grupy, resp. gałki z urny drugiej jak z pierwszej.

Okazuje się więc, że szansę wyciągnięcia białej gałki z urny określa nie bezwzględna liczba tychże, lecz stosunek liczby białych gałek do wszystkich znajdujących się w urnie, czyli — jak w obecnym przypadku — nie liczba 4 w urnie pierwszej, ani 40 w urnie drugiej, ale stosunek $\frac{4}{9}=\frac{40}{90}$.

Stosunek ten, nie ulegający zmianie przy proporcyonalnem zwiększaniu lub zmniejszaniu liczby białych i wszystkich gałek, może więc stanowić miarę szansy wyciągnięcia z urny białej gałki, za taką miarę został też istotnie przyjęty i nosi nazwę prawdopodobieństwa, z jakiem dane zdarzenie zajść może, albo krócej — prawdopodobieństwa danego zdarzenia.

Dla ułatwienia sobie mającego nastąpić uogólnienia i dalszych rozumowań, te zdarzenia, których zajście sprzyja zdarzeniu oczekiwanemu, jak np. w poprzedniem rozumowaniu wyciągnięcie białej gałki, nazywać będziemy przypadkami sprzyjającymi lub pomyślnymi dla oczekiwanego zdarzenia; wszelkie inne — przypadkami niesprzyjającymi lub niepomyślnymi. Suma liczby przypadków zarówno pomyślnych jak i niepomyślnych daje liczbę wszystkich możliwych przypadków, gdyż w danym rodzaju zdarzeń żadnych innych przypadków, oprócz pomyślnych i niepomyślnych, oczywiście, być nie może.

Otóż, ponieważ wyciągnięcie gałki z urny jest zdarzeniem, a wszystkich takich zdarzeń, pomiędzy sobą różnych, może tu być tyle, ile się mieści gałek w urnie, zatem wszystkich możliwych i od siebie różnych przypadków pierwsza urna dostarczyć może 9, druga 90. Gdy wyciągnięcie białej gałki stanowi zdarzenie oczekiwane, pomyślnych przypadków pierwsza urna dostarczyć może 4, druga 40. A ponieważ stosunek $\frac{4}{9} = \frac{40}{90}$ nazwaliśmy prawdopodobieństwem wyciągnięcia białej gałki, resp. zajścia zdarzenia oczekiwanego, przeto ogólnie powiedzieć można:

Prawdopodobieństwo zdarzenia oczekiwanego równa się stosunkowi liczby wszystkich przypadków pomyślnych, dla zdarzenia oczekiwanego, do liczby wszystkich możliwych. Np., jeżeli przez n oznaczymy liczbę wszystkich przypadków możliwych, przez m — liczbę wszystkich pomyślnych, wreszcie przez p — prawdopodobieństwo zdarzenia oczekiwanego, to

$$p = \frac{m}{n} \tag{1}$$

3. PRAWDOPODOBIEŃSTWA WZAJEMNIE SIĘ DOPEŁNIAJĄCE. Gdy we wzorze (1) założymy $m = o$, będzie $p = o$ — czyli, jeżeli pomiędzy wszystkiemi zdarzeniami możliwemi nie ma oczekiwanego, prawdopodobieństwo jego zajścia równa się zeru; a ponieważ wtedy rzeczone zdarzenie zajść nie może, zatem zero jest symbolem pewności, że zdarzenie oczekiwane nie zajdzie.

Gdy założymy $m = n$, będzie $p = 1$ — czyli, gdy wszystkie przypadki możliwe są pomyślne dla oczekiwanego, jego prawdopodobieństwo równa się jedności; a ponieważ wówczas tylko zdarzenie oczekiwane zajść może, więc jedność jest symbolem pewności, iż zdarzenie oczekiwane zajdzie.

Wszystkie inne stopnie prawdopodobieństwa zawierają się w granicach od 0 do 1, których prawdopobieństwo nigdy przekroczyć nie może. Prawdopodobieństwo większe od jednostki jest symbolem niedorzeczności.

Skoro jedność jest symbolem pewności, $p = \frac{m}{n}$ prawdopodobieństwem zdarzenia oczekiwanego a zajść musi albo zdarzenie oczekiwane, albo jemu przeciwne, to różnica $1 - p = \frac{n - m}{n}$ musi być prawdopodobieństwem zdarzenia przeciwnego oczekiwanemu. I rzeczywiście tak jest — skoro bowiem wszystkich możliwych zdarzeń jest n, a przypadków pomyślnych m, niepomyślnych być musi reszta, t. j. $n-m$, skutkiem czego, zgodnie z określeniem (art. 2), stosunek $\frac{n-m}{n}=q$ wyraża prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego oczekiwanemu.

Prawdopodobieństwa takich dwóch rodzajów zdarzeń, jedynie możliwych i sobie przeciwnych, dopełniają się do jedności, gdyż $p+q=\frac{m}{n}+\frac{n-m}{n}=1$, i dla tego bywają nazywane prawdopodobieństwami wzajem się dopełniającemi (do jedności).

4. **Przykłady.** Żeby wzór (1) wyrażał właściwie oznaczone prawdopodobieństwo, brane pod uwagę zdarzenia powinny być czysto, dla naszej świadomości, losowe i wszystkie przypadki jednakowo możliwe.

Dostrzeżenie tych własności zdarzeń często bywa bardzo łatwe, czasami jednak nadzwyczaj trudne — wymaga nieraz wielkiej bystrości umysłu i bardzo głębokiej rozwagi. Czasami ludzie niepospolicie zdolni popadali w błędy, z powodu nie dość gruntownego rozpoznania rzeczonych własności badanych zdarzeń.

Dla wprawy, weźmy kilka przykładów.

I. Urna zawiera α gałek białych, β czarnych, γ różowych, i t. d. Jakie jest prawdopodobieństwo wyjęcia z urny gałki białej, czarnej, różowej, i t. d.

Jeżeli wszystkie gałki są równe co do wielkości i identyczne w dotknięciu, co zakładamy, to każda gałka posiada tę samą szansę, aby być wyciągniętą. Wszystkich gałek, czyli wszystkich możliwych przypadków jest tu $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$

Gdy mamy na myśli wyciągnięcie gałki białej, przypadków pomyślnych jest α, skutkiem czego prawdopodobieństwo wyjęcia gałki białej równa się $\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}$. Podobnie rozumując, przekonamy się, że prawd. wyjęcia czarnej gałki $=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}$, prawdopodobieństwo wyjęcia różowej gałki $=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}$, i t. d.

II. Z urny, w której jest α gałek białych i β czarnych, wyjmujemy odrazu a gałek; jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie wyjęte gałki będą białe?

Wszystkich jednakowo możliwych przypadków może tu być tyle, ile jest różnych kombinacyj z $\alpha+\beta$ przedmiotów po a, t. j.

$$\frac{(\alpha+\beta)!}{(\alpha+\beta-a)!\,a!}\overset{(*)}{=}\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\ldots(\alpha+\beta-a+1)}{a(a-1)\ldots2.1.};$$

---

*) Przez wykrzyknik oznacza się iloczyn liczb całkowitych, kolejno idących od liczby stojącej przed wykrzyknikiem aż do jedności, np. $8!=8.7.6.5.4.3.2.1=40320$.

wszystkich przypadków pomyślnych — tyle, ile jest różnych kombinacyj z α przedmiotów po a, czyli $\frac{\alpha!}{(\alpha-a)!\,a!}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-a+1)}{a.(a-1)(a-2)\ldots 3.2.1}$.

Szukane prawdopodobieństwo równa się ilorazowi z wyrażenia drugiego przez pierwsze, t. j.

$$\frac{\alpha.(\alpha-1).(\alpha-2)\ldots(\alpha-a+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)\ldots(\alpha+\beta-a+1)}.$$

Np., gdyby w urnie było 5 gałek białych i 3 czarne, to 4 wyciągnięte gałki będą białemi z prawdopodobieństwem

$$\frac{5.4.3.2}{8.7.6.5}=\frac{1}{14}=0{,}0714\ldots$$

III. Z urny, zawierającej α gałek białych i β czarnych, wyjmujemy odrazu $a+b$ gałek; jakie jest prawdopodobieństwo, że pomiędzy wyjętemi będzie a białych i b czarnych?

Wszystkich jednakowo możliwych zdarzeń może tu być tyle, ile jest różnych kominacyj z $\alpha+\beta$ przedmiotów po $a+b$, t. j.

$$\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2`\ldots(\alpha+\beta-a-b+1)}{(a+b)!}.$$

Różnych kombinacyj z α gałek po a jest

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-a+1)}{a!},$$

różnych zaś kombinacyj z β gałek po b

$$\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-b+1)}{b!}.$$

Połączenie każdej kombinacyi z α gałek po a z każdą kombinacyą z β po b stanowi przypadek pomyślny, a ponieważ takich połączeń jest

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-a+1)}{a!}\times\frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-b+1)}{b!},$$

zatem szukane prawdopodobieństwo równa się

$$\frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-a+1)}{a!}\times\frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-b+1)}{b!}}{\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\ldots(\alpha+\beta-a-b+1)}{(a+b)!}}.$$

Gdyby np. w urnie było, jak poprzednio, 5 gałek białych i 3 czarne — to prawdopodobieństwo, że pomiędzy 5-u wyjętemi odrazu gałkami będą 3 białe i 2 czarne, równa się:

$$\frac{\frac{5.4.3}{3.2.1}\times\frac{3.2}{2.1}}{\frac{8.7.6.5.4}{5.4.3.2.1}}=\frac{30}{56}=0{,}5357\ldots$$

IV. Gra „w orła i reszkę” polega na rzucaniu monety w górę i odgadywaniu, na którą stronę moneta upadnie: na stronę z wyobrażeniem orła, czy też na przeciwną, noszącą w potocznej mowie graczów miano „reszki.” Ponieważ tutaj mogą być dwa tylko przypadki jednakowo możliwe: wyrzucenie orła lub reszki, przeto prawdopodobieństwo każdego z tych dwóch zdarzeń równa się $^1/_2$.

Zobaczmy, jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia w dwóch rzutach przynajmniej raz jeden orła?

D’Alembert rozumował tak: Możemy albo zaraz za pierwszym razem wyrzucić orła — jest to jedno zdarzenie możliwe; możemy za pierwszym razem wyrzucić reszkę, za drugim — orła, to drugie zdarzenie możliwe; wreszcie możemy za jednym i drugim razem wyrzucić reszkę i ten wypadek stanowi trzecie zdarzenie możliwe. Skoro więc są tu trzy zdarzenia możliwe, a z nich dwa pierwsze stanowią przypadki pomyślne, zatem szukane prawdopodobieństwo równa się $^2/_3$.

Rozumując w ten sposób, popełnił d’Alembert błąd, zidentyfikował bowiem szansę pierwszego zdarzenia z szansą drugiego i trzeciego, podczas gdy pierwsze zdarzenie posiada dwa razy większą szansę pojawienia się od każdego z dwóch drugich. Istotnie, ponieważ mamy tu na względzie dwa rzuty, zatem zdarzenie pierwsze, w którem zaraz za pierwszym rzutem pojawia się orzeł, rozpada się na dwa jednakowo możliwe pomiędzy sobą i równo szansowe ze zdarzeniem drugiem i trzeciem, mianowicie: orzeł za pierwszym rzutem i orzeł za drugim rzutem, orzeł za pierwszym rzutem i reszka za drugim. Wszystkich zatem zdarzeń równo możliwych posiadamy cztery:

1. za pierwszym razem orzeł, za drugim orzeł;
2. „ „ „ orzeł, „ „ reszka;
3. „ „ „ reszka, „ „ orzeł;
4. „ „ „ reszka, „ „ reszka.

Z tych czterech zdarzeń, trzy pierwsze są pomyślne, czyli szukane prawdopodobieństwo równa się nie $^2/_3$, jak oznaczył d’Alembert, lecz $^3/_4$.

V. Talia kart składa się z czterech maści: wino, żołędź, dzwonek i czerwień; w każdej maści jest 13 kart: tuz, dwójka, trójka, i t. d., dziesiątka (dyska), niżnik, wyżnik i król, razem 52 karty. Są cztery różnomaściowe tuzy, cztery dwójki, trójki, ..., cztery niżniki, wyżniki i cztery króle.

Z wszelką łatwością poznajemy, że ciągnąc na chybił trafił kartę, wyciągniemy np. tuza żołędziowego z prawdopodobieństwem $^1/_{52}$, tuza jakiegokolwiek z prawdopodobieństwem $^4/_{52}$, kartę dzwonkową z prawdopodobieństwem $^{13}/_{52}$, tuza lub króla z prawdopodobieństwem $^8/_{52}$, i t. d.

Do gry w pikietę używa się kart 32: czterech tuzów, króli, wyżników, niżników, czterech dziesiątek i t. d. aż do siódemek. Sobie i partnerowi dajemy po 12 kart, na stronę odrzucamy dwa talony: jeden dla partnera z pięciu kart, drugi dla siebie—z trzech. Zachodzi pytanie, z jakiem prawdopodobieństwem mogą się znajdować cztery tuzy pomiędzy kartami partnera?

Wszystkich możliwych sposobów ułożenia się kart na wyżej opisane cztery grupy, jak wiadomo z teoryi przemian, jest

$$\frac{32!}{12!\,12!\,5!\,3!}\,.$$

Dla oznaczenia wszystkich połączeń, sprzyjających naszemu zadaniu, t. j. tych, w których cztery tuzy znajdują się pomiędzy kartami partnera, dość jest z pośród wszystkich, użytych do gry, kart wyłączyć cztery tuzy —przypuściwszy, że się znajdują w kartach partnera. Obok tych czterech tuzów, będących, według założenia, u partnera, mogą istnieć wszystkie możliwe połączenia z pozostałych 28 kart po 12, 8, 5 i 3. Takich połączeń, a więc i pomyślnych dla naszego zadania przypadków jest

$$\frac{28!}{12!\,8!\,5!\,3!}\,.$$

Stąd szukane prawdopodobieństwo równa się

$$\frac{28!}{12!\,8!\,5!\,3!} : \frac{32!}{12!\,12!\,5!\,3!} = \frac{99}{7192} = 0{,}0137\ldots$$

Prawdopodobieństwo, że cztery tuzy znajdują się w talonie partnera równa się

$$\frac{28!}{12!\,12!\,1!\,3!} : \frac{32!}{12!\,12!\,5!\,3!} = \frac{1}{7192} = 0{,}000139\ldots$$

VI. Kość do gry stanowi sześcian foremny, na którego ścianach znajdują się wypalone „oczka" — od jednego do sześciu — w ten sposób, że zawsze suma oczek na przeciwległych ściankach równa się siedmiu, a więc: naprzeciwko ścianki z jednem oczkiem (as) znajduje się ścianka z sześciu oczkami (szóstka), naprzeciwko dwójki — piątka, naprzeciwko trójki — czwórka. Każdą ze ścianek wyrzucamy, oczywiście, z prawdopodobieństwem $^1/_6$.

Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia trzema kostkami nie więcej jak 10 oczek?

Dla oznaczenia tego prawdopodobieństwa potrzebaby przedewszystkiem policzyć, ile może być wszystkich połączeń ścianek oraz ile takich, na których suma oczek wynosi nie więcej jak 10. Droga ta, chociaż łatwa, jednak jest dość mozolna i dla tego lepiej ją pominąć, posiłkując się pewnego rodzaju spekulacyą, do jakiej często w tego rodzaju zagadnieniach uciekać się trzeba.

Ponieważ każde dwie przeciwległe ścianki liczą razem 7 oczek, więc jakkolwiek padną trzy kości, zawsze suma oczek na ściankach wierzchnich i spodnich równa się 21, czyli każdej sumie nie większej od 10 na ściankach wierzchnich odpowiada suma większa od 10 (dopełniająca do 21) na ściankach spodnich i naodwrót, t. j. liczba połączeń ścianek z sumą oczek nie większą od 10 równa się liczbie połączeń ścianek z sumą oczek większą od 10. Zatem prawdopodobieństwo wyrzucenia trzema kostkami sumy oczek nie większej od 10 równa się $^1/_2$.

VII. Często zarówno wszystkich możliwych jak i pomyślnych przypadków bywa nieograniczenie wiele, a pomimo to można oznaczyć prawdopodobieństwo oczekiwanego zdarzenia. Zazwyczaj potrzebny jest do tego rachunek wyższy, lecz czasami można go uniknąć posiłkując się drogą spekulacyjną.

Mamy posadzkę, ułożoną z równych sobie, foremnych sześciokątów. Rzucamy na nią przedmiot płaski, kolisty, np. monetę, i zapytujemy, z jakiem prawdopodobieństwem padnie moneta wewnątrz jednego z sześciokątów, nie pokrywając swoją powierzchnią żadnej krawędzi? Widocznie, zarówno wszelkich możliwych jak i pomyślnych położeń monety może tu być nieoznaczenie wiele.

Weźmy pod uwagę jeden tylko sześciokąt i w odległościach równych promieniowi monety od boków danego sześciokąta nakreślmy linie równoległe do tych ostatnich; tym sposobem utworzy się drugi sześciokąt — wewnętrzny, podobny do zewnętrznego. Jeżeli środek monety padnie wewnątrz sześciokąta wewnętrznego, moneta nie dotknie żadnego boku sześciokąta zewnętrznego; jeżeli środek monety padnie zewnątrz wielokąta wewnętrznego, moneta spotka jeden lub więcej boków wielokąta zewnętrznego. Szukane zatem prawdopodobieństwo równa się stosunkowi powierzchni sześciokąta wewnętrznego do powierzchni sześciokąta zewnętrznego, a to samo stosuje się i do całej posadzki, wszystkie bowiem sześciokąty, według założenia, są sobie równe.

Jeżeli np. boki sześciokątów posadzki mają po 3 centimetry, promień monety = 2 centimetrom, to powierzchnia sześciokąta zewnętrznego = 23,382 centimetrów kwadratowych, powierzchnia sześciokąta wewnętrznego = 1,23786 cent. kwadr., a więc odnośne prawdopodobieństwo równa się

$$\frac{1,23786}{23,382} = 0,0529\ldots$$

5. **Prawdopodobieństwo złożone.** Zdarzenie, powstające z zejścia się pewnej liczby zdarzeń pojedynczych, nazywać będziemy zdarzeniem złożonem, a prawdopodobieństwo zajścia takiego zdarzenia — prawdopodobieństwem złożonem.

Twierdzenie I. Prawdopodobieństwo p zdarzenia złożonego A, powstającego z zejścia się pewnej liczby od siebie niezależnych zdarzeń pojedynczych A_1, A_2, $A_3, \ldots$, równa się iloczynowi z prawdopodobieństw zdarzeń pojedynczych, składających zdarzenie złożone.

Niech m_1, m_2 $m_3, \ldots$ wyrażają liczby wszystkich przypadków, pomyślnych dla pojedynczych zdarzeń A_1, A_2, $A_3, \ldots$; n_1, n_2, $n_3, \ldots$ — odnośne liczby wszystkich przypadków możliwych. Wtedy prawdopodobieństwami zajścia pojedynczych zdarzeń A_1, A_2, $A_3, \ldots$ są

$$\frac{m_1}{n_1} = p_1, \frac{m_2}{n_2} = p_2, \frac{m_3}{n_3} = p_3, \ldots$$

Weźmy najprzód pod uwagę zdarzenie złożone z dwóch pojedynczych A_1 i A_2. Jeżeli zdarzenie A_1 nie zależy od zdarzenia A_2, to każdy pomyślny przypadek dla zdarzenia A_1 w połączeniu z każdym przypadkiem pomyślnym dla A_2 stanowi przypadek pomyślny dla zdarzenia A', złożonego z A_1 i A_2; skutkiem tego, wszystkich przypadków pomyślnych dla A' jest $m_1 \times m_2$.

Z tej samej przyczyny, wszystkich przypadków możliwych jest $n_1 \times n_2$, czyli prawdopodobieństwo złożonego zdarzenia A' równa się

$$\frac{m_1 \times m_2}{n_1 \times n_2} = \frac{m_1}{n_1} \times \frac{m_2}{n_2} = p_1 \times p_2 = p'.$$

Łącząc zdarzenie A' z A_3, przekonamy się, drogą takiego samego rozumowania, że prawdopodobieństwo zejścia się zdarzenia A' z A_3, czyli A_1 z A_2 i A_3 równa się

$$p' \times p_3 = p_1 \times p_2 \times p_3 = \frac{m_1}{n_1} \times \frac{m_2}{n_2} \times \frac{m_3}{n_3},$$

a następnie i prawdopodobieństwo zdarzenia A, powstałego z zejścia się ilukolwiek niezależnych od siebie zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$, równa się iloczynowi z prawdopodobieństw tych ostatnich zdarzeń, t. j.

$$p = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \tag{2}$$

Jeżeli np. w jednej urnie mamy 5 białych i 3 czarne gałki, w drugiej — 7 białych i 6 czarnych, to prawdopodobieństwo wyjęcia z obu urn po białej gałce równa się

$$\frac{5}{8} \times \frac{7}{13} = \frac{35}{104} = 0{,}3365\ldots$$

Jeżeli oprócz tego jest trzecia urna z 4 białemi i 8 czarnemi gałkami, prawdopodobieństwo wyjęcia z pierwszej urny białej gałki oraz z drugiej i trzeciej po czarnej gałce równa się

$$\frac{5}{8} \times \frac{6}{13} \times \frac{8}{12} = \frac{5}{26} = 0{,}1923\ldots$$

Prawdopodobieństwo wyrzucenia pierwszą z trzech kostek do gry — asa, drugą — trójki i trzecią — szóstki równa się

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216} = 0{,}004629\ldots$$

Wniosek. Prawdopodobieństwo zdarzenia złożonego, powstającego z powtórzenia się tego samego zdarzenia pojedynczego pewną liczbę razy, równa się prawdopodobieństwu pojedynczego zdarzenia, podniesionemu do takiej potęgi, ile razy ma się ono powtórzyć — przy założeniu, że prawdopodobieństwo zdarzenia pojedynczego nie ulega zmianie.

Albowiem, zakładając w (2): $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_k$, otrzymujemy

$$p = p_1{}^k \tag{2'}$$

Jeżeli np. z urny, zawierającej 5 białych i 3 czarne gałki, wyciągamy cztery razy po gałce, wrzucając za każdym razem wyciągniętą gałkę nazad do urny, to prawdopodobieństwo wyciągnięcia samych tylko gałek białych równa się

$$\left(\frac{5}{8}\right)^4 = \frac{625}{4096} = 0{,}152\ldots$$

Prawdopodobieństwo wyrzucenia pięć razy z rzędu orła, lub — co na jedno wychodzi — pięciu orłów przy jednoczesnem rzuceniu pięciu monet, równa się

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0{,}03125\ldots$$

Twierdzenie II. Gdy zdarzenie B powstaje z zejścia się zdarzeń B_1 i B_2, z których B_2 zależy od B_1, wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia B = iloczynowi z prawdopodobieństwa zdarzenia B_1 przez prawdopodobieństwo, jakiego nabiera B_2 po zajściu B_1.

Jeżeli prawdopodobieństwo zdarzenia B oznaczymy przez p, liczbę przypadków pomyślnych — przez m, a wszystkich możliwych — przez n, to

$$p = \frac{m}{n}$$

Dajmy teraz, że z pośród wszystkich n przypadków możliwych, przypadków pomyślnych dla B_1 jest m_1, w takim razie prawdopodobieństwo zdarzenia $B_1 = \frac{m_1}{n}$. Ponieważ B_2 może zajść dopiero gdy zajdzie zdarzenie B_1, zatem pomyślne przypadki dla B_1 są wszystkimi możliwymi dla B_2 — jest ich, jak nam wiadomo, m_1. Gdy pomiędzy tymi m_1 przypadkami jest m_2 pomyślnych dla B_2, prawdopodobieństwo zdarzenia B_2, po zajściu B_1, równa się $\frac{m_2}{m_1}$. Ale przypadki pomyślne dla B_2, po zajściu B_1, są zarazem pomyślnymi i dla B, t. j. $m_2 = m$; okazuje się więc, że

$$p = \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n} \times \frac{m}{m_1} = \frac{m_1}{n} \times \frac{m_2}{m_1}. \tag{3}$$

W urnie znajduje się 6 gałek białych i 4 czarne. Jeżeli mamy wyciągnąć dwa razy po gałce, nie wrzucając nazad do urny raz wyciągniętej, zachodzi pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo wyjęcia za każdym razem białej gałki?

Za pierwszym razem możemy wyciągnąć białą gałkę z prawdopodobieństwem $\frac{6}{10}$. Jeżeli istotnie wyciągnęliśmy gałkę białą i nie wrzucamy jej nazad do urny, to w urnie pozostało 5 białych i 4 czarne, prawdopodobieństwo zatem wyjęcia za drugim razem białej gałki $= \frac{5}{9}$, skutkiem czego prawdopodobieństwo wyjęcia dwa razy po białej gałce, w warunkach obecnych, równa się

$$\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

Jeżeliby i za drugim razem wyszła gałka biała, w urnie pozostałyby 4 białe i 4 czarne, prawdopodobieństwo wyjścia za trzecim razem białej gałki $= \frac{4}{8}$, a prawdopodobieństwo trzykrotnego z kolei wyjęcia białej gałki równa się

$$\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6} = 0{,}166\ldots$$

Prawdopodobieństwo wyjęcia za pierwszym razem białej gałki, za drugim — czarnej, za trzecim — białej równa się

$$\frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{6}.$$

Prawdopodobieństwo wyjęcia za pierwszym i trzecim razem gałki białej, za drugim i czwartym — czarnej równa się

$$\frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{14} = 0{,}0714\ldots$$

6. PRAWDOPODOBIEŃSTWO ZUPEŁNE (totale). Przyczyną zdarzenia nazywa się to, co mu nadaje prawdopodobieństwo zajścia. Jeżeli np. w urnie znajdują się białe i czarne gałki, przyczyną wyjęcia białej lub czarnej gałki jest zbiór obu kolorów gałek w urnie.

Przyczyny wzajem się wyłączają, jeżeli jesteśmy pewni, że gdy oczekiwane zdarzenie zachodzi pod wpływem jednej z przyczyn, żadna inna przyczyna współcześnie nie oddziaływa na pojawienie się tegoż zdarzenia.

TWIERDZENIE. Jeżeli zdarzenie A może być przypisane działaniu jednej ze wzajem się wyłączających przyczyn $C_1, C_2, C_3, \ldots$, prawdopodobieństwo p zdarzenia A oblicza się ze wzoru

$$p = p_1 \times q_1 + p_2 \times q_2 + p_3 \times q_3 + \cdots, \tag{4}$$

gdzie p_i oznacza prawdopodobieństwo pojawienia się zdarzenia A pod wpływem przyczyny C_i, a q_i jest prawdopodobieństwem działania przyczyny C_i.

Niech N oznacza liczbę wszystkich jednakowo możliwych przypadków, jakie trafić się mogą, gdy oczekujemy zdarzenia A. Pomiędzy tymi N przypadkami, niech będzie m_i pomyślnych i n_i wszystkich możliwych, gdy działa przyczyna C_i.

Ponieważ przyczyny $C_1, C_2, C_3, \ldots$, według założenia, wzajem się wyłączają, zatem wszystkich zdarzeń pomyślnych dla A jest

$$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots;$$

skutkiem tego

$$p = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}{N}.$$

A że ostatnie wyrażenie można napisać w kształcie

$$p = \frac{m_1}{n_1} \times \frac{n_1}{N} + \frac{m_2}{n_2} \times \frac{n_2}{N} + \frac{m_3}{n_3} \times \frac{n_3}{N} + \cdots,$$

gdzie, według określenia, $\frac{m_1}{n_1}=p_1, \frac{m_2}{n_2}=p_2, \dots, \frac{n_1}{N}=q_1, \frac{n_2}{N}=q_2, \dots$, więc istotnie

$$p = p_1 \times q_1 + p_2 \times q_2 + p_3 \times q_3 + \cdots$$

Dowodzenie powyższe opiera się na założeniu, że liczba wszystkich przypadków pomyślnych $= m_1 + m_2 + m_3 + \dots$, czyli, że działające tu przyczyny wzajem się wyłączają. Gdyby się nie wyłączały, liczba wszystkich przypadków pomyślnych byłaby mniejszą od $m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ i dowodzenie nasze nie posiadałoby ścisłości. Dla tego, przy stosowaniu dowiedzionego twierdzenia, należy starannie zbadać, czy działające przyczyny rzeczywiście się wyłączają.

Są trzy zupełnie do siebie podobne urny: w jednej mieści się 5 białych i 3 czarne gałki; w drugiej — 7 białych i 6 czarnych, w trzeciej — 2 białe i 8 czarnych. Wprowadzamy osobę, nieznającą rozkładu gałek w urnach, i prosimy ją o wyjęcie z którejkolwiek urny jednej gałki; jakie jest prawdopodobieństwo, że ta osoba wyjmie gałkę białą?

Trzy urny z gałkami stanowią tu trzy, oczywiście wzajem się wyłączające, przyczyny wyjęcia białej gałki. Ponieważ jednaka jest szansa wybrania tej lub innej urny przez wprowadzoną osobę, więc prawdopodobieństwa wyjęcia gałki z tej lub innej urny są sobie równe i każde $= \frac{1}{3}$. Prawdopodobieństwo wyjęcia białej gałki z pierwszej urny $= \frac{5}{8}$, z drugiej $= \frac{7}{13}$, z trzeciej $= \frac{2}{10}$, prawdopodobieństwo zupełne

$$p = \frac{5}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{7}{13} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{709}{1560} = 0{,}454\dots$$

Do mylnego rezultatu doszedłby ten, ktoby rozumował w następujący sposób: Wszystkich gałek jest $(5 + 3) + (7 + 6) + (2 + 8) = 31$, białych $5 + 7 + 2 = 14$, prawdopodobieństwo $= \frac{14}{31}$. Błąd polegałby na tem, że tak rozumujący uważałby wyjście każdej gałki — bez względu na to, z której wyjętą zostanie urny — za jednakowo możliwe, gdy tymczasem, widocznie, inna jest szansa wyjścia dla każdej gałki z urny pierwszej, inna z urny drugiej i inna z trzeciej $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{13} \text{ i } \frac{1}{10}\right)$. Chcąc, bez pomocy dowiedzionego twierdzenia, dojść do dobrego rezultatu, należy przedewszystkiem liczbę gałek we wszystkich urnach zrównać, nie zmieniając pierwotnej szansy wyjścia białej gałki z każdej po szczególe urny.

Pomyślmy np.

w pierwszej urnie gałek $8 \times 65 = 520$, z tych $5 \times 65 = 325$ białych
„ drugiej „ „ $13 \times 40 = 520$, „ $7 \times 40 = 280$ „
„ trzeciej „ „ $10 \times 52 = 520$, „ $2 \times 52 = 104$ „

Prawdopodobieństwo wyjęcia białej gałki z każdej urny nie zmieniło się $\left(\frac{5 \times 65}{8 \times 65} = \frac{5}{8}, \text{i t. d.}\right)$, lecz każda gałka w każdej urnie ma teraz jednakową szansę wyjścia $\left(\frac{1}{520}\right)$, w każdej albowiem urnie jest ta sama liczba gałek (po 520). W takim stanie rzeczy, bez zmiany warunków zadania, możemy wszystkie gałki zsypać w jedną urnę i zwykłą drogą oznaczyć prawdopodobieństwo wyjęcia białej gałki.

Razem mamy gałek $520 \times 3 = 1\,560$, pomiędzy niemi białych $325 + 280 + 104 = 709$, prawdopodobieństwo $= \frac{709}{1560}$ i do takiego też rezultatu przyszliśmy, posiłkując się ostatnio dowiedzionem twierdzeniem.

Jeżeli kilka lub wszystkie przyczyny są tego rodzaju, że z samego faktu ich istnienia wynika konieczność pojawienia się oczekiwanego zdarzenia, wtedy odpowiednie takim przyczynom prawdopodobieństwa $p_1, p_2, p_3, \ldots$ równają się jedności, albo inaczej — liczba przypadków pomyślnych dla działania pewnej przyczyny jest ściśle równa liczbie przypadków pomyślnych dla zdarzenia oczekiwanego, pojawiającego się skutkiem działania rzeczonej przyczyny. Założywszy w (4)

$$p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = 1,$$

otrzymujemy

$$p = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots \tag{4'}$$

Stąd wypływa

Wniosek. Gdy przypadki pomyślne dla zajścia pewnego zdarzenia mogą się w rozmaity objawiać sposób, prawdopodobieństwo oczekiwanego zdarzenia równa się sumie prawdopodobieństw, z jakiemi owe sposoby się objawiają.

Urna zawiera 3 gałki białe, 7 czarnych, 8 różowych, 1 niebieską i 6 żółtych. Prawdopodobieństwo wyjęcia gałki różowej, niebieskiej lub żółtej równa się

$$\frac{8}{25} + \frac{1}{25} + \frac{6}{25} = \frac{15}{25} = 0{,}6.$$

Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia dwu kostkami do gry chociaż jednego asa?

Sposobów może być trzy: 1) pierwszą kostką wyrzucamy asa, drugą — nie; 2) pierwszą kostką nie wyrzucamy asa, drugą wyrzucamy; 3) pierwszą i drugą kostką wyrzucamy asa.

Prawdopodobieństwo pierwszego sposobu $= \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$,

„ drugiego „ $= \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$,

„ trzeciego „ $= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$;

prawdopodobieństwo zupełne równa się

$$\frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{11}{36} = 0{,}305\ldots$$

7. Twierdzenie Bayes'a. Gdy $p_1, p_2, \ldots p_i \ldots$ oznaczają prawdopodobieństwa, jakie wzajem się wyłączające przyczyny

$C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots$ nadają zdarzeniu A, i gdy $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots$ oznaczają prawdopodobieństwa działania tych przyczyn, — to, jeżeli zdarzenie A zaszło, prawdopodobieństwo ω_i, że ono zostało wywołane przez przyczynę C_i, oblicza się ze wzoru

$$(5) \qquad \omega_i = \frac{p_i\, q_i}{p_1\, q_1 + p_2\, q_2 + \ldots + p_i\, q_i + \ldots}.$$

Niech H_i przedstawia prawdopodobieństwo, przed zajściem zdarzenia A oznaczone, z jakiem A zajdzie pod wpływem przyczyny C_i, p – prawdopodobieństwo zdarzenia A w ogóle, t. j. bez względu na przyczynę, która je wywołała. Wtedy oczywiście: z jednej strony $H_i = p_i\, q_i$, z drugiej $H_i = p\, \omega_i$, stąd $p\, \omega_i = p_i\, q_i$ oraz

$$\omega_i = \frac{p_i\, q_i}{p};$$

a ponieważ, według wzoru (4),

$$p = p_1\, q_1 + p_2\, q_2 + \ldots + p_i\, q_i + \ldots,$$

zatem

$$\omega_i = \frac{p_i\, q_i}{p_1\, q_1 + p_2\, q_2 + \ldots + p_i\, q_i + \ldots}.$$

Są cztery urny:

w 1-ej	mieszczą się	4	gałki	białe,	5	czarnych,	razem	9,
„ 2-ej	„	3	„	„	4	„	„	7,
„ 3-ej	„	6	„	„	2	„	„	8,
„ 4-ej	„	2	„	„	3	„	„	5.

Z jednej urny, wybranej na chybił trafił, wyciągamy gałkę, która okazuje się białą; jakie jest prawdopodobieństwo, że została wyjętą z pierwszej urny?

Wybór urny jest dowolny, zatem prawdopodobieństwo wyboru którejkolwiek, więc i pierwszej $= \frac{1}{4}$; jeżeli wybrano pierwszą, prawdopodobieństwo wyjęcia z niej białej gałki $= \frac{4}{9}$, czyli prawdopodobieństwo wyjęcia białej gałki

z pierwszej urny $= \frac{4}{9} \times \frac{1}{4}$,

„ drugiej „ $= \frac{3}{7} \times \frac{1}{4}$,

„ trzeciej „ $= \frac{6}{8} \times \frac{1}{4}$,

„ czwartej „ $= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$.

Skutkiem tego, prawdopodobieństwo, że wyjęta gałka biała pochodzi z pierwszej urny, według (5), równa się

$$\frac{\frac{4}{9} \times \frac{1}{4}}{\frac{4}{9} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{4} + \frac{6}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}} = \frac{1120}{5098},$$

$$\text{że z 2-ej} = \frac{\frac{3}{7}\times\frac{1}{4}}{\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{4}+\frac{6}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}} = \frac{1080}{5098},$$

$$\text{„ z 3-ej} = \frac{\frac{6}{8}\times\frac{1}{4}}{\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{4}+\frac{6}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}} = \frac{1890}{5098},$$

$$\text{„ z 4-ej} = \frac{\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}{\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{4}+\frac{6}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}} = \frac{1008}{5098}.$$

Suma powyższych prawdopodobieństw równa się jedności i tak być powinno, gdyż wyciągnięta gałka na pewno z jednej z czterech danych urn pochodzi.

8. Prawo zdarzeń powtarzających się. Czynność, mającą na celu wywołanie pewnego zdarzenia, nazywać będziemy doświadczeniem albo próbą; zwracanie uwagi na rezultaty doświadczeń — spostrzeganiem lub obserwacyą; wreszcie zbiór rezultatów obserwacyj, odpowiednio uporządkowanych — statystyką danego rodzaju zdarzeń lub zjawisk.

Weźmy pod uwagę zdarzenie A, którego prawdopodobieństwo $= p$, prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego B, jak wiadomo, $= 1 - p = q$, tak, że $p + q = 1$.

Mamy zamiar wykonać n doświadczeń i zapytujemy, z jakiem prawdopodobieństwem zdarzenie A pojawi się α razy, zdarzenie B razy β?

Jeżeli porządek pojawiania się zdarzeń ściśle określimy, np., że najprzód zajdzie zdarzenie A razy a', potem zdarzenie B razy b', następnie A razy a'', B razy b'' i t. d., $a' + a'' + \ldots = \alpha$, $b' + b'' + \ldots = \beta$, w takim razie prawdopodobieństwo określonego zdarzenia złożonego, według art. 5, równa się

$$p^{a'} \cdot q^{b'} \cdot p^{a''} \cdot q^{b''} \ldots = p^{\alpha} \cdot q^{\beta}.$$

Takich zdarzeń złożonych, w których A powtórzy się razy α, B razy β, bez względu na porządek, w jakim zachodzą, jest $\frac{n!}{\alpha!\,\beta!}$, t. j. tyle, ile utworzyć można różnych przemian z n przedmiotów, pomiędzy którymi jest α i β podobnych. Skutkiem tego, na zasadzie art. 6, prawdopodobieństwo zdarzenia, złożonego z powtórzenia się A razy α, B razy β we wszelkim możliwym porządku równa się

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!}\, p^{\alpha}\, q^{\beta}.$$

Zakładając kolejno:

$$\alpha = n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0$$

i odpowiednio:

$$\beta = 0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1, n,$$

otrzymamy szereg prawdopodobieństw:

$$p^n; \frac{n!}{(n-1)!\,1!}p^{n-1}q; \frac{n!}{(n-2)!\,2!}p^{n-2}q^2; \dots; \frac{n!}{2!\,(n-2)!}p^2\,q^{n-2};$$
$$\frac{n!}{1!\,(n-1)!}\,pq^{n-1}; q^n,$$

albo, po wykonaniu skróceń,

$$p^n; \frac{n}{1}p^{n-1}q; \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}p^{n-2}q^2; \dots; \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}p^2q^{n-2}; \frac{n}{1}pq^{n-1}; q^n,$$

z jakiemi, podczas n doświadczeń, pojawiają się zdarzenia, złożone z pojedynczych zdarzeń A i B tyle razy powtórzonych, jakie są wykładniki prawdopodobieństw p i q.

Suma powyższych prawdopodobieństw stanowi rozwinięcie dwumianu Newton'a, gdyż

$$(6) \qquad (p+q)^n = p^n + \frac{n!}{(n-1)!\,1!}p^{n-1}q + \frac{n!}{(n-2)!\,2!}p^{n-2}q^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{n!}{2!\,(n-2)!}p^2\,q^{n-2} + \frac{n!}{1!\,(n-1)!}pq^{n-1} + q^n \text{ (*)}.$$

Jak nam wiadomo, $p+q=1$, stąd $(p+q)^n = 1$, t. j. suma powyższych prawdopodobieństw $= 1$, jak być rzeczywiście powinno, albowiem jedno z tych zdarzeń złożonych, podczas n doświadczeń, koniecznie zajść musi.

(*) Rozwinięcie to można uogólnić, stosując je do ilukolwiek pojedynczych zdarzeń, których prawdopodobieństwa dopełniają się do jedności, mianowicie

$$(p+q+r+\dots)^n = \Sigma\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\dots}\,p^\alpha q^\beta r^\gamma \dots, \text{ gdzie}$$
$$p+q+r+\dots = 1, \alpha+\beta+\gamma+\dots = n.$$

Grecką literą Σ oznacza się sumę wyrazów, powstających z wyrażenia umieszczonego pod znakiem Σ, gdy ogólnym ilościom α, β, γ, ... nadawać będziemy odpowiednie wartości.

Symbolu Σ w dalszym ciągu używać będziemy bardzo często i dla tego, aby dokładnie czytelnika z tą symbolistyką obznajmić, dajemy tu pewne bliższe o niej szczegóły.

Jeżeli mamy sumę wyrazów

$$(\alpha) \qquad A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n,$$

możemy ją krótko przedstawić pod postacią

$$(\beta) \qquad \sum_{x=1}^{x=n} A_x,$$

gdzie dolne i górne znaczki ($x=1$, $x=n$) wskazują, iż w A_x należy kolejno podstawiać $x = 1, 2, 3, \dots, n$; zaś Σ, że stąd otrzymane wyrażenia $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ trzeba do siebie dodać, czyli połączyć je znakami dodawania, wtedy bowiem istotnie otrzymamy

$$(\gamma) \qquad \sum_{x=1}^{x=n} A_x = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n.$$

Znaczek $x=1$ nazywa się dolną granicą, znaczek $x=n$ górną granicą, w jakich x zmieniać należy. Kształt (β) nosi miano postaci skróconej lub symbolicznej sumy danych wyrazów, kształt (α) zowie się postacią rozwiniętą.

Prawdopodobieństwo, że zdarzenie A powtórzy się co najwyżej $\alpha + l$ razy $=$ sumie $\alpha + l + 1$ wyrazów końcowych rozwinięcia (6). Prawdopodobieństwo, że zdarzenie A powtórzy się co najwyżej $\alpha - l$ razy $=$ sumie $\alpha - l + 1$ wyrazów końcowych tegoż rozwinięcia. Prawdopodobieństwo, że zdarzenie A powtórzy się co najmniej $\alpha - l$ razy i co najwyżej $\alpha + l$ razy, równa się sumie $2l + 1$ wyrazów pośrednich rozwinięcia (6), poczynając od wyrazu $(\alpha + l + 1)$-go, a kończąc na $(\alpha - l + 1)$-ym od końca, t. j. równa się

$$\frac{n!}{(\alpha+l)!\,(n-\alpha-l)!}p^{\alpha+l}q^{n-\alpha-l} + \frac{n!}{(\alpha+l-1)!\,(n-\alpha-l+1)!}p^{\alpha+l-1}q^{n-(\alpha+l-1)} + \dots$$

$$\dots + \frac{n!}{(\alpha-l+1)!\,(n-\alpha+l-1)!}p^{\alpha-l+1}q^{n-(\alpha-l+1)} + \frac{n!}{(\alpha-l)!(n-\alpha+l)!}p^{\alpha-l}q^{n-(\alpha-l)}.$$

Wyrazy rozwinięcia (6) posiadają różną wielkość, czyli, podczas **n** doświadczeń, zdarzenie A z różnem prawdopodobieństwem powtarza się różną liczbę razy. Zapytujemy, jaką liczbę razy powtórzy się zdarzenie A z największem prawdopodobieństwem? — Oczywiście taką liczbę razy, jaka odpowiada największemu wyrazowi rozwinięcia (6).

Jeżeli za największy wyraz rozwinięcia (6) przyjmiemy

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!}p^{\alpha}q^{\beta},$$

Jeżeli zmienna x nie może przybierać większej od n wartości (ewentualnie n może być nieograniczenie wielkie), gdyż A_{n+1} i dalsze nie mają żadnego logicznego znaczenia lub stają się równe zeru, to w (β) górną granicę można opuścić, jest ona bowiem zbyteczną, jako domyślna.

Gdy nadto umówimy się, że suma, oznaczona symbolem (β), zaczyna się zawsze od wyrazu znajdującego się pod symbolem Σ, w takim razie i dolną granicę można opuścić, ponieważ dostatecznie zrozumiałem będzie dla nas oznaczenie

$$(\gamma') \qquad \sum A_1 = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n.$$

Gdybyśmy teraz, bez oznaczenia granic, chcieli symbolicznie przedstawić sumę

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots A_m, \text{ gdzie } m < n,$$

to ponieważ

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_m = (A_1 + A_2 + \dots + A_m + A_{m+1} + \dots + A_n) - (A_{m+1} + \dots + A_n),$$

zatem możemy napisać

$$(\delta) \qquad \sum_{x=1}^{x=m} A_x = \sum A_1 - \sum A_{m+1}.$$

Np., pojedynczy wyraz $A_1 = \sum A_1 - \sum A_2$; suma dwóch pierwszych wyrazów $A_1 + A_2 = \sum A_1 - \sum A_3$, i t. d.

Podobnie rzecz się ma i z sumami sum: gdy oznaczymy

$$\sum A_1 + \sum A_2 + \sum A_3 + \dots = \sum\sum A_1,$$

pojedyncza suma $\sum A_1 = \sum\sum A_1 - \sum\sum A_2$, suma dwóch pierwszych sum $\sum A_1 + \sum A_2 = \sum\sum A_1 - \sum\sum A_3$, i t d.; wreszcie

$$\sum A_1 + \sum A_2 + \dots + \sum A_m = \sum\sum A_1 - \sum\sum A_{m+1}.$$

który stanowi prawdopodobieństwo, z jakiem zdarzenie A pojawi się razy α, B razy β, $\beta = n - \alpha$, to wyraz rzeczony powinien być większy od obu sąsiednich, t. j. powinno być

$$\frac{n!}{(\alpha - 1)!\,(\beta + 1)!} p^{\alpha-1} q^{\beta+1} < \frac{n!}{\alpha!\,\beta!} p^{\alpha} q^{\beta} > \frac{n!}{(\alpha + 1)!\,(\beta - 1)!} p^{\alpha+1} q^{\beta-1},$$

czyli

$$\frac{q}{\beta + 1} < \frac{p}{\alpha} \text{ i } \frac{p}{\alpha + 1} < \frac{q}{\beta}, \text{ inaczej}$$

$$\frac{\beta + 1}{\alpha} > \frac{q}{p} > \frac{\beta}{\alpha + 1}.$$

Jeżeli do wszystkich trzech części powyższych nierówności dodamy po 1, będzie

$$\frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha} > \frac{p + q}{p} > \frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha + 1};$$

albo, ponieważ $p + q = 1$ i $\alpha + \beta = n$,

$$\frac{n + 1}{\alpha} > \frac{1}{p} > \frac{n + 1}{\alpha + 1}, \text{ czyli}$$

$$\alpha < (n + 1) p < \alpha + 1,$$

t. j. $\alpha =$ największej liczbie całkowitej, mieszczącej się w iloczynie $p(n + 1)$. Podobnie $\beta =$ największej liczbie całkowitej, mieszczącej się w iloczynie $q(n + 1)$.

Gdy n uczynimy tak wielkiem, że zarówno przy niem jak i przy odpowiedniem α, jednostka, a tem bardziej ułamek zwyczajny, ma stosunkowo małe znaczenie, możemy przyjąć

$$\alpha = n.\,p, \ \beta = n - \alpha = n.\,q, \text{ skąd}$$

(7) $$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q},$$

t. j. przy znaczniejszej liczbie doświadczeń, największe prawdopodobieństwo posiada to zdarzenie złożone, w którem liczby powtórzeń się pojedynczych zdarzeń A i B są proporcyonalne do prawdopodobieństw samych tych zdarzeń.

Rezultat powyższy czyni nas skłonnymi do wyprowadzenia wniosku, że liczby, wykazujące ile razy powtórzą się zdarzenia A i B są, przy dokonywaniu bardzo wielkiej liczby doświadczeń, proporcyonalne do prawdopodobieństw pomienionych zdarzeń. Ponieważ jednak, w miarę zwiększania się liczby doświadczeń, liczba wyrazów rozwinięcia (6) staje się co raz większą, a tem samem wielkość każdego z nich, więc i największego, staje się co raz mniejszą, gdyż suma wyrazów stale równa się jedności, zatem przy bardzo wielkiej liczbie doświadczeń, największy wyraz rozwinięcia (6) staje się bardzo mały, czyli przeczuwana przez nas własność powtarzania się zdarzeń, przy bardzo wielkiej liczbie doświadczeń, staje się bardzo mało prawdopodobną i dla tego na wewnętrznej intuicyi poprzestać nie można, tylko trzeba szukać dowodu ściślejszego.

Dowodu tego dostarcza nam twierdzenie, podane po raz pierwszy przez Jakóba Bernoulli'ego w dziele „Ars Conjectandi", 1706 r., i nadające własności powtarzania się zdarzeń losowych formę ściśle matematyczną.

9. TWIERDZENIE BERNOULLI'EGO. Niech p oznacza prawdopodobieństwo pojedynczego zdarzenia A, f — liczbę razy, jaką się to zdarzenie pojawi podczas n doświadczeń, P — prawdopodobieństwo, że różnica pomiędzy p i $\frac{f}{n}$, co do swej bezwzględnej wielkości, jest mniejsza od pewnej ilości ε; wtedy można zawsze wziąć n tak wielkie, żeby P było mniejsze od jedności o ilość dowolnie małą.

Ponieważ dowodzenie tego twierdzenia wymaga znajomości rachunku wyższego, a ten z zakresu niniejszej książki wykreśliliśmy, ograniczyć się więc musimy do przytoczenia samego tylko rezultatu (*).

Przy wykonywaniu n doświadczeń, zdarzenie A może się powtórzyć rozmaitą liczbę razy. Każda liczba powtórzeń się zdarzenia A posiada różny stopień prawdopodobieństwa. Największe prawdopodobieństwo, według art. 8, posiada liczba $pn = \alpha$. Pomimo to, rzeczywista liczba powtórzeń f rzadko bywa równą α, zazwyczaj jest mniejszą lub większą. W dowodzeniu twierdzenia Bernoulli'ego chodzi przedewszystkiem o znalezienie ogólnego wyrażenia na prawdopodobieństwo P, z jakiem liczba f zawiera się w granicach od $\alpha - l$ do $\alpha + l$. Jeżeli przez $q = 1 - p$ oznaczymy prawdopodobieństwo zdarzenia B, przeciwnego zdarzeniu A, a przez γ wyrażenie

$$\gamma = \frac{l}{\sqrt{2pqn}}, \tag{8}$$

to szukane w twierdzeniu Bernoulli'ego prawdopodobieństwo P okazuje się pewnego kształtu funkcyą, zależną od γ. Funkcyę tę przyjęto oznaczać symbolem $\theta(\gamma)$ i nazwano ją *funkcyą* θ (**). Liczebne wartości funkcyi θ, odpowiadające różnym wielkościom γ, zostały obliczone i ujęte w formę tablicy, którą podajemy przy końcu niniejszej książki (Tab. I), zaczerpniętą z dzieła p. J. Bertrand'a (***).

Funkcya $\theta(\gamma)$ wyraża zatem prawdopodobieństwo, z jakiem rzeczywista liczba f powtórzeń zdarzenia A, zawiera się, podczas n doświadczeń, w grani-

---

(*) Zaznajomieni z rachunkiem wyższym, znaleźć mogą bardzo dobrze wyłożony dowód twierdzenia Bernoulli'ego w książce p. H. Laurent: „Traité du calcul des probabilités". Paryż, 1873 r.

(**) $\theta(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-x^2}\, dx$, gdzie $\gamma = \frac{l}{\sqrt{2pqn}}$, zaś e jest podstawą logorytmów Neper'a. Właściwie jest to wyrażenie tylko przybliżone.

(***) Calcul des probabilités. Paryż, 1889.

cach od $\alpha - l$ do $\alpha + l$, lub, co na jedno wychodzi, z jakiem $\frac{f}{n}$ zawiera się w granicach od $\frac{\alpha}{n} - \frac{l}{n}$ do $\frac{\alpha}{n} + \frac{l}{n}$, t. j. od $p - \frac{l}{n}$ do $p + \frac{l}{n}$.

Owóż, zawsze można dobrać takie liczby, aby, przy nieograniczenie wielkiem n, obok $\frac{l}{\sqrt{n}} = \infty$, było jednocześnie $\frac{l}{n} = o$, a ponieważ, gdy $\frac{l}{\sqrt{n}} = = \infty$, $\gamma = \infty$, zaś przy $\gamma = \infty$, według tablicy I, $P = \theta(\gamma) = \theta(\infty) = 1$, czyli pewności, zatem można zawsze pomyśleć tak wielką liczbę doświadczeń n, że przy niej „z pewnością" różnica pomiędzy stosunkiem $\frac{f}{n}$ a $p = \frac{\alpha}{n}$ staje się prawie żadną i to właśnie stanowi dowód twierdzenia Bernoulli'ego.

Funkcya $\theta(\gamma)$, oprócz dostarczenia dowodu dla twierdzenia Bernoulli'ego, pozwala jeszcze przybliżenie oznaczyć prawdopodobieństwo, z jakiem zdarzenie A, podczas ograniczonej liczby doświadczeń, powtórzy się nie mniej jak $\alpha - l$ i nie więcej jak $\alpha + l$ razy i naodwrót.

Np., jest urna, mieszcząca 2 gałki białe i 3 czarne; mamy zamiar wykonać 10000 ciągnień, wrzucając za każdym razem wyciągniętą gałkę nazad do urny. W ciągu tych 10000 ciągnień, gałka biała może się pojawić rozmaitą liczbę razy, a każdy taki przypadek posiada inne prawdopodobieństwo; największe prawdopodobieństwo odnosi się do przypadku pojawienia się gałki białej $10000 \times \frac{2}{5} = 4000$, czarnej $10000 \times \frac{3}{5} = 6000$ razy. Zachodzi pytanie, z jakiem prawdopodobieństwem pojawi się gałka biała nie mniej jak 3700, ani nie więcej jak 4300 razy.

Oczywiście, w niniejszym przykładzie:

$$n = 10000,\ l = 3\cdot 0,\ p = \frac{2}{5},\ q = \frac{3}{5},$$

skutkiem czego

$$\gamma = \frac{l}{\sqrt{2pqn}} = \frac{300}{\sqrt{2 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times 10000}} = 4{,}33.$$

Z tablicy I odnajdujemy dla $\gamma = 4{,}33$, $\theta(\gamma) = \theta(4{,}33) = 0{,}99999999901$, t. j. prawie pewność.

Zapytujemy teraz naodwrót, w jakich granicach zawierać się będzie liczba pojawień gałki białej z prawdopodobieństwem $\theta(\gamma) = 0{,}9914725$, podczas 10000 doświadczeń. Prawdopodobieństwu temu odpowiada, w tablicy I, $\gamma = 1{,}86$. Gdy więc założymy

$$\gamma = \frac{l}{\sqrt{2pqn}} = \frac{l}{\sqrt{2 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times 10000}} = 1{,}86,$$

wypadnie

$$l = 129,$$

t. j. liczba pojawień się gałki białej zawierać się będzie, z prawdopodobieństwem 0,9914725, w granicach od 3871 do 4129.

10. Prawo wielkich liczb. W funkcyi $\theta(\gamma)$ artykułu poprzedniego, prawdopodobieństwa p i q są ilościami stałemi. Poisson twierdzenie Bernoulli'ego rozciągnął do przypadku, gdy p i q, podczas wykonywania doświadczeń, się zmieniają i tak uogólnioną regułę nazwał prawem wielkich liczb.

Wyrazem matematycznym prawa wielkich liczb jest, w przybliżeniu, $\theta(\gamma)$, gdzie

$$(8') \qquad \gamma = \frac{l}{\sqrt{2\,\Sigma pq}}.$$

Dla otrzymania Σpq należy za p i q kolejno podstawiać zmieniające się z każdem doświadczeniem wartości prawdopodobieństw i wziąć sumę ich iloczynów.

Gdy p i q pozostają stałe, $\Sigma pq = pqn$, a $\gamma = \frac{l}{\sqrt{2pqn}}$, t. j. przychodzimy do twierdzenia Bernoulli'ego, które tem samem stanowi tylko szczególny przypadek ogólnego prawa wielkich liczb.

Prawem wielkich liczb zatem, w granicach twierdzenia Bernoulli'ego, nazywa się ta własność zdarzeń losowych, według której stosunek liczby, wyrażającej ile razy zdarzenie oczekiwane zachodzi, do liczby wszystkich wykonanych doświadczeń, tem bardziej się zbliża do prawdopodobieństwa zdarzenia oczekiwanego, im więcej wykonywamy doświadczeń. Przy założeniu nieograniczenie wielkiej liczby doświadczeń, wzmiankowany stosunek staje się równy prawdopodobieństwu zdarzenia oczekiwanego.

Jeżeli prawdopodobieństwo zdarzenia oczekiwanego oznaczymy, jak zwykle, przez p, liczbę wykonanych doświadczeń przez n, a przez x liczbę, wyrażającą ile razy, podczas n doświadczeń, zajdzie zdarzenie oczekiwane, wtedy przy nieograniczenie wielkiem n.

$$(9) \qquad \frac{x}{n} = p, \text{ skąd } x = pn.$$

Np., prawdopodobieństwo wyrzucenia orła $= \frac{1}{2}$, reszki również $= \frac{1}{2}$; gdy więc wykonamy nieograniczenie wielką liczbę rzutów, powinniśmy, według prawa wielkich liczb, jednakową liczbę razy wyrzucić orła i reszkę, albo raczej różnica pomiędzy rezultatami powinna być nieograczenie małą w porównaniu do liczby wszystkich rzutów.

Gdy z urny, mieszczącej 2 gałki białe i 5 czarnych, wyciągniemy nieograniczenie wielką liczbę rázy po gałce, wrzucając za każdym razem wyciągniętą nazad do urny, to stosunek liczby pojawień się gałki białej do liczby pojawień się gałki czarnej $= 2:5$.

Prawo wielkich liczb posiada niepomierne dla rachunku prawdopodobieństwa znaczenie, albowiem ono dopiero wyjaśnia istotę stosunku nazwanego prawdopodobieństwem i dowodzi, jakie ma znaczenie stosowanie teoryi prawdopodobieństwa do celów praktycznych.

Teraz dopiero możemy zrozumieć znaczenie rezultatów, otrzymanych z rozwiązania zagadnień, pomieszczonych w art. 4 i dalszych.

Tak np., prawdopodobieństwo 0,5357, otrzymane w przykładzie III art. 4-go, oznacza, że gdy z urny nieograniczenie wielką liczbę razy wyciągać będziemy od razu po 5 gałek, przeciętiowo na każde 10000 ciągnień, pomiędzy 5-a wyciągniętemi gałkami, 5357 razy będzie po 3 białe i 2 czarne.

W przykładzie V, przy nieograniczenie wielkiej liczbie rozdań kart, na każdy milion rozdań, wypadnie średnio po 139 takich, w których 4 tuzy znajdą się w talonie partnera. W przykładzie VII, średnio na każde 10000 rzuceń monety na podłogę, 529 razy padnie moneta wewnątrz sześciokąta.

W ostatnim przykładzie art. 5-go, prawdopodobieństwo 0,0714 oznacza, że wykonawszy dostatecznie wielką liczbę poczwórnych ciągnień z urny, średnio na każde 10000 poczwórnych ciągnień, 714 razy wyciągniemy za 1-ym i 3-im razem po gałce białej, za 2-im i 4-ym — po czarnej.

Wreszcie, w przykładzie drugim do twierdzenia Bernoulli'ego, prawdopodobieństwo 0,9914725 oznacza, że przy wykonaniu nieograniczenie wielkiej liczby doświadczeń, średnio na każde 10000000 przypadków (licząc w każdym po 10000 ciągnień), 9914725 razy, liczba pojawień się białej gałki, w każdych 10000-ach ciągnień, zawierać się będzie w granicach od 3871 do 4129, w pozostałych zaś 85275-u przypadkach wyjdzie po za te granice.

Gdybyśmy w każdym z powyższych przykładów wykonali nie nieograniczenie wielką, lecz ograniczoną liczbę n doświadczeń, funkcya $\theta(\gamma)$ pozwoli nam oznaczyć prawdopodobieństwo, z jakiem rezultat doświadczeń różnić się będzie o daną ilość od np, gdzie p oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia oczekiwanego.

11. Prawdopodobieństwo à priori i à posteriori. Dotąd rozważaliśmy przypadki, w których można z góry ściśle oznaczyć prawdopodobieństwo, a więc np. gdy, mając na względzie wyjęcie białej gałki z urny, wiemy dokładnie, ile jest białych i czarnych gałek w naczyniu.

W praktyce jednak spotykamy się najczęściej z przypadkami, w których nie znamy szczegółów wpływających na unormowanie się prawdopodobieństwa, np. ile jest białych i czarnych gałek w urnie, a mimo to potrzebujemy oznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia oczekiwanego. Wtedy uciekać się trzeba do doświadczeń lub obserwacyj i na zasadzie otrzymanych rezultatów stawiać hipotezy o mogących działać przyczynach. Na podstawie tych hipotetycznych przyczyn, jesteśmy w stanie oznaczyć szukane prawdopodobieństwo, które będzie tem bardziej do rzeczywistego zbliżone, im więcej posiadamy szczegółów, resp. im więcej wykonamy doświadczeń lub poczynimy obserwacyj, pozwalających nam dokładniej określić przyczyny, mogące wpływać na pojawienie się zdarzenia oczekiwanego.

Pierwszego rodzaju prawdopodobieństwa, dające się z góry ściśle obrachować, noszą nazwę prawdopodobieństw (oznaczonych) à priori; prawdopodobieństwa drugiego rodzaju, t. j. obliczone na podstawie dokonanych doświadczeń, resp. poczynionych obserwacyj, bywają nazywane prawdopodobieństwami (oznaczonemi) à posteriori.

Weźmy kilka przykładów:

I. W urnie są trzy gałki – jedna biała i dwie czarne; prawdopodobieństwo wyjęcia białej gałki $= \frac{1}{3}$ jest oznaczone à priori.

II. W urnie są trzy gałki; wiemy, że mogą być białe i czarne, lecz ile jest białych, ile czarnych, a nawet, czy są pomiędzy niemi jednocześnie i białe i czarne — nie wiemy. Zachodzi pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo wyjęcia gałki białej? Oczywiście, ponieważ - oprócz ogólnej liczby gałek i okoliczności, że mogą być tylko białe i czarne — zresztą żadnych innych szczegółów nie znamy, uciec się więc trzeba do hipotez, których tu może być cztery:

1) albo wszystkie gałki są czarne,
2) albo 1 biała i 2 czarne,
3) albo 2 białe i 1 czarna,
4) albo wszystkie białe.

Wszystkie te hipotezy, przy obecnym stanie naszych wiadomości o układzie gałek w urnie, posiadają jednakowe prawdopodobieństwo, skutkiem czego prawdopodobieństwo każdej $= \frac{1}{4}$.

Jeżeli stan rzeczywisty odpowiada pierwszej hipotezie, prawdopodobieństwo wyjęcia białej gałki $= \frac{0}{3} = 0$; jeżeli odpowiada drugiej hipotezie, prawdopodobieństwo wyjęcia białej gałki $= \frac{1}{3}$; gdy trzeciej, prawdopodobieństwo $= \frac{2}{3}$; gdy czwartej, prawdopodobieństwo wyjęcia gałki białej $= \frac{3}{3} = 1$.

Prawdopodobieństwo zupełne wyjęcia białej gałki, według art. 6,

$$= \frac{0}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

i tak być powinno, skoro bowiem absolutnie żadnych nie znamy szczegółów o układzie białych i czarnych gałek w urnie, równe mamy prawo spodziewać się, że wyciągniemy białą jak czarną gałkę.

III. Jeżeli wiemy nadto, że pomiędzy gałkami w urnie są białe, lecz nie wiemy, ile ich jest wtedy, z czterech powyższych hipotez, pierwsza odpada, a pozostają tylko trzy następujące:

1) jedna biała i dwie czarne,
2) dwie białe i jedna czarna,
3) wszystkie trzy białe,

każda z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Prawdopodobieństwa wyjęcia białej gałki, przy istnieniu każdej z trzech powyższych hipotez, pozostają te same co i poprzednio, zatem prawdopodobieństwo zupełne wyjęcia białej gałki, przy teraźniejszym stanie naszych wiadomości o układzie gałek w urnie, równa się

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

IV. Wyjmujemy z urny jedną gałkę i ukazuje się biała; wrzucamy ją nazad do urny i zapytujemy, jakie jest teraz prawdopodobieństwo wyjęcia białej gałki za ponownem ciągnięniem? Hipotezy o układzie gałek w urnie pozostają widocznie te same co i w przykładzie III, skutkiem czego, według twierdzenia Bayes'a (art. 7), prawdopodobieństwo, że biała gałka wyszła pod wpływem układu gałek, przewidzianego przez pierwszą hipotezę, równa się

$$\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{3}\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{6}{9}}=\frac{1}{6};$$

że pod wpływem układu, odpowiadającego 2-ej hipotezie, $=\frac{2}{6}$; prawdopodobieństwo odpowiednie 3-ej hipotezie $=\frac{3}{6}$.

Suma tych trzech prawdopodobieństw $=1$ i tak być powinno, gdyż jedna z trzech hipotez koniecznie istotnemu stanowi rzeczy odpowiadać musi.

Otóż, ponieważ przy układzie gałek, odpowiadającym pierwszej z trzech hipotez, gałka biała wychodzi z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, a układ taki istnieje z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$, zatem biała gałka, w następnem ciągnieniu, pod wpływem pierwszej hipotezy, wyjdzie z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}$; pod wpływem drugiej hipotezy, z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}\times\frac{2}{6}$; pod wpływem trzeciej hipotezy — z prawdopodobieństwem $\frac{3}{3}\times\frac{3}{6}$, czyli prawdopodobieństwo zupełne, oznaczone à posteriori, że w ogóle w drugiem ciągnieniu wyjdzie gałka biała, równa się

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{6}+\frac{3}{3}\times\frac{3}{6}=\frac{14}{18}=\frac{7}{9}.$$

To ostatnie prawdopodobieństwo $\left(\frac{7}{9}\right)$ jest większe od poprzedniego $\left(\frac{2}{3}\right)$, albowiem wyjście w pierwszem ciągnieniu białej (a nie czarnej) gałki daje przewagę hipotezom, przypuszczającym w urnie więcej białych niż czarnych gałek. I rzeczywiście, przed wyciągnięciem białej gałki, każda hipoteza posiada prawdopodobieństwo $\frac{1}{3}$, po wyjęciu białej gałki — prawdopodobieństwo pierwszej hipotezy $=\frac{1}{6}<\frac{1}{3}$, prawdopodobieństwo drugiej hipotezy $=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, prawdopodobieństwo trzeciej hipotezy $=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$.

Powyżej użyta metoda na oznaczenie prawdopodobieństwa à posteriori jest ogólną i wypływa z twierdzenia Bayes'a jako następujący

Wniosek. Gdy ω_1, $\omega_2, \dots, \omega_i, \dots$ są, według twierdzenia Bayes'a, oznaczonemi prawdopodobieństwami, z jakiemi zaobserwowane zdarzenie A zostało wywołane przez przyczyny C_1, $C_2, \dots$, $C_i, \dots$; to prawdopodobieństwo, z jakiem zdarzenie A' zajść może, po zaobserwowaniu zdarzenia A, oblicza się ze wzoru

$$(10) \qquad p_1' \omega_1 + p_2' \omega_2 + \dots + p_i' \omega_i + \dots,$$

gdzie $p_1', p_2', \dots, p_i', \dots$ oznaczają prawdopodobieństwa, z jakiemi zdarzenie A' zachodzi pod wpływem przyczyn C_1, $C_2, \dots, C_i, \dots$

Gdy za ω_1, $\omega_2, \dots$, $\omega_i, \dots$ podstawimy odpowiednie wartości z twierdzenia Baye'sa, otrzymamy, w miejsce poprzedniego, wyrażenie

$$(10') \qquad \frac{p_1 p_1' q_1 + p_2 p_2' q_2 + \dots + p_i p_i' q_i + \dots}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_i q_i + \dots}$$

Jakkolwiek w przykładach II, III i IV nie mamy określonego układu gałek w urnie do tego stopnia, aby można było oznaczyć à priori prawdopodobieństwo wyjęcia gałki białej, niemniej jednak mamy daną ogólną liczbę gałek, co bardzo ułatwia obliczenie szukanego prawdopodobieństwa à posteriori. W przyrodzie jednak zachodzące zdarzenia nie dostarczają nam nawet takich danych i dla tego poprzestawać musimy tylko na rezultatach otrzymanych z obserwacyj.

Przypuśćmy, że wśród $\alpha + \beta$ zaobserwowanych zdarzeń, zauważyliśmy α zdarzeń A i β jemu przeciwnych zdarzeń B; chodzi o prawdopodobieństwo, z jakiem za następnym razem zajdzie zdarzenie A.

Oznaczywszy szukane prawdopodobieństwo zdarzenia A przez x, prawdopodobieństwem zdarzenia przeciwnego B będzie $1 - x$. Prawdopodobieństwo, z jakiem zdarzenie A zachodzi razy α, a zdarzenie B razy β, równa się

$$\frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \, \beta!} x^\alpha (1 - x)^\beta.$$

Ponieważ o wielkości x nie posiadamy żadnych à priori wiadomości, zatem z równem prawdopodobieństwem może ono przybierać wszystkie wielkości od 0 do 1. Każda wielkość x może być uważaną za jedną z przyczyn, wywołujących zdarzenie złożone z α zdarzeń A i β zdarzeń B, skutkiem czego prawdopodobieństwo, że uważane zdarzenie złożone zostało wywołane przez przyczynę nadającą zdarzeniu A prawdopodobieństwo x, według twierdzenia Bayes'a,

$$(11) \qquad = \frac{\dfrac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \, \beta!} x^\alpha (1 - x)^\beta}{\dfrac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \, \beta!} \Sigma x^\alpha (1 - x)^\beta} = \frac{x^\alpha (1 - x)^\beta}{\Sigma x^\alpha (1 - x)^\beta},$$

gdzie, dla otrzymania mianownika, należy za x podstawić wszelkie możliwe wielkości od 0 do 1 i wziąć sumę stąd otrzymanych wartości wyrażenia $x^\alpha (1 - x)^\beta$.

Skoro (11) oznacza prawdopodobieństwo, z jakiem działa przyczyna, nadająca zdarzeniu A prawdopodobieństwo x, więc

$$\frac{x^\alpha (1-x)^\beta x}{\Sigma x^\alpha (1-x)^\beta} = \frac{x^{\alpha+1} (1-x)^\beta}{\Sigma x^\alpha (1-x)^\beta} \tag{12}$$

jest prawdopodobieństwem, z jakiem za następnym razem zajdzie zdarzenie A pod wpływem przyczyny, nadającej zdarzeniu A prawdopodobieństwo x; a prawdopodobieństwo zupełne, że za następnym razem zajdzie zdarzenie A, bez względu na przyczynę, jaka je wywoła, według wniosku do twierdzenia Bayes'a, równa się

$$\frac{\Sigma x^{\alpha+1} (1-x)^\beta}{\Sigma x^\alpha (1-x)^\beta}, \tag{13}$$

gdzie zarówno w liczniku jak i w mianowniku należy za x, w odpowiednie wyrażenia, podstawić wszystkie możliwe wielkości od 0 do 1 i wziąć sumy stąd otrzymanych wartości wyrażeń z pod znaków Σ.

Prawdopodobieństwo x przybierać może wszystkie możliwe wielkości od 0 do 1; wielkości takich, oczywiście, jest nieograniczenie wiele, zatem obliczenie wartości wyrażenia (13) wkracza w granice rachunku wyższego. Nie zapuszczając się tedy w dalsze w tym kierunku badania, nadmienimy tylko, że największem czyli najprawdopodobniejszem prawdopodobieństwem jest

$$x = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

t. j. stosunek liczby zaszłych zdarzeń pomyślnych do wszystkich wykonanych doświadczeń lub do poczynionych obserwacyj.

Rezultat taki nasuwa przypuszczenie, iż przy dostatecznie wielkiej liczbie doświadczeń, resp. spostrzeżeń, prawdopodobieństwo zdarzenia oczekiwanego równa się stosunkowi liczby zaszłych zdarzeń pomyślnych do liczby wykonanych doświadczeń, resp. poczynionych obserwacyj. Tak jest istotnie, a ścisłego na to dowodu dostarcza nam

12. TWIERDZENIE ODWROTNE TWIERDZENIU BERNOULLI'EGO. Niech p oznacza stałe, lecz nie znane nam, prawdopodobieństwo pewnego zdarzenia A, które podczas $\alpha + \beta = n$ doświadczeń powtórzyło się α razy. Wtedy zawsze można pomyśleć tak wielką liczbę n doświadczeń, że przy niej prawd. P, z jakiem rzeczywiste prawdopodobieństwo p różni się od najprawdopodobniejszego prawdopodobieństwa $\frac{\alpha}{n}$ o ilość bezwzględnie mniejszą od ε, będzie mniejsze od jedności o ilość dowolnie małą.

Tutaj P, podobnie jak i w art. 9, jest funkcyą θ, t. j.

$$P = \theta(\gamma), \text{ lecz } \gamma = \varepsilon \sqrt{\frac{n^3}{2\alpha\beta}} \tag{14}$$

i oblicza się również z tablicy I.

Otóż, przy $\gamma = \infty$, $\theta(\gamma) = \theta(\infty) = 1$; że zaś, przy $\frac{\alpha}{n}$ i $\frac{\beta}{n}$ skończonych, $\gamma = \varepsilon \sqrt{\frac{n^3}{2\alpha\beta}} = \infty$ może mieć miejsce, gdy $n = \infty$, nawet jeżeli ε staje się bardzo małą ilością, zatem powyższe twierdzenie okazuje się prawdziwem, czyli nieznane prawdopodobieństwo obserwowanego zdarzenia tem bardziej się zbliża ku stosunkowi liczby zaobserwowanych zdarzeń pomyślnych do liczby wszystkich wykonanych doświadczeń, resp. dokonanych spostrzeżeń, im więcej tych ostatnich dopełniamy. Gdy wykonamy doświadczeń nieograniczenie wiele, szukane prawdopodobieństwo staje się zupełnie równem powyżej opisanemu stosunkowi.

Funkcya θ pozwala nadto oznaczyć przybliżenie prawdopodobieństwo, z jakiem, przy ograniczonej liczbie doświadczeń, szukane prawdopodobieństwo zawiera się w danych granicach i na odwrót.

Np., w ciągu 7-u lat, od 1885 r. do 1891 r. włącznie, urodziło się w Warszawie 131 976 dzieci, mianowicie: 67 409 chłopców i 64 567 dziewcząt.

Najprawdopodobniejsze prawdopodobieństwo urodzenia się chłopca =

$$\frac{67\,409}{131\,976} = 0{,}5108;$$

w jakich granicach zawiera się rzeczywiste prawdopodobieństwo urodzenia się chłopca z prawdopodobieństwem P = 0,999?

Według tablicy I, prawdopodobieństwu $\theta(\gamma) = 0{,}999$ odpowiada $\gamma = 2{,}3268$, t. j.

$$\varepsilon \sqrt{\frac{(131\,976)^3}{2 \times 67409 \times 64567}} = 2{,}3268,$$

skąd $\varepsilon = 0{,}0045$, czyli szukane prawdopodobieństwo zawiera się w granicach $0{,}5108 \pm 0{,}0045$, t. j. od 0,5153 do 0,5063 z prawdopodobieństwem 0,999.

Pomiędzy temi 131 976 urodzeniami było żywych 126 145 i martwych 5 831. Najprawdopodobniejszem prawdopodobieństwem przyjścia na świat dziecka martwego jest

$$\frac{5\,831}{131976} = 0{,}044;$$

z jakiem prawdopodobieństwem szukane prawdopodobieństwo przyjścia na świat martwego dziecka zawiera się w granicach $0{,}044 \pm 0{,}001$, t. j. od 0,045 do 0,043?

Tutaj $\varepsilon = 0{,}001$, więc

$$\gamma = 0{,}001 \sqrt{\frac{(131\,976)^3}{2 \times 5\,831 \times 126\,145}} = 1{,}25,$$

zaś wartości $\gamma = 1{,}25$ odpowiada $P = \theta(1{,}25) = 0{,}9\,229$.

13. NADZIEJA MATEMATYCZNA I WARTOŚĆ MATEMATYCZNA. Kapitał, którego wypłata zależy od zajścia pewnego zdarzenia losowego, nazywać będziemy kapitałem spodziewanym. Iloczyn z kapitału spodziewanego przez prawdopodobieństwo zdarzenia pomyślnego, od zajścia którego wypłata kapitału zależy, nosi miano *nadziei matematycznej*. Przez przeciwstawienie, iloczyn z kapitału spodziewanego przez prawdopodobieństwo zdarzenia niepomyślnego, czyli przeciwnego zdarzeniu, od zajścia którego zależy wypłata kapitału, nazwaćby można *obawą matematyczną*.

Np., w urnie znajdują się białe i czarne gałki; prawdopodobieństwo wyjęcia gałki białej $= p$. Za wyjęcie gałki białej otrzymujemy sumę K franków, ta suma K franków jest kapitałem spodziewanym, iloczyn $K.\,p$ nadzieją, a $K.\,(1 - p)$ obawą matematyczną.

Czynność, powodującą zajście zdarzenia, decydującego czy kapitał ma być lub nie ma być wypłaconym, nazwijmy, jak i dawniej (art. 8), *doświadczeniem* lub *próbą* (losu).

Ponieważ wykonanie próby może nam przynieść korzyść materyalną, przeto prawo do jej wykonania posiada wartość realną, zachodzi pytanie — jaką?

Przypuśćmy, żeśmy wykonali n prób, pomiędzy któremi okazało się α pomyślnych i $\beta = n - \alpha$ niepomyślnych. W takim razie otrzymamy sumę $K.\,\alpha$, skutkiem czego na wartość jednego doświadczenia wypada średnio $\frac{K.\,\alpha}{n}$. Jeżeli n uczynimy nieograniczenie wielkiem, będzie, według twierdzenia Bernoulli'ego, $\frac{\alpha}{n} = p$, czyli szukana wartość $= K.\,p$.

Tak obliczoną wartość prawa na wykonanie jednej próby, mogącej nam przynieść pewną korzyść, dla odróżnienia od zwykłego znaczenia tego wyrazu, nazywać będziemy *wartością matematyczną*; oznaczmy ją przez s.

Gdyby kto chciał od nas nabyć prawo do wykonania podobnej próby, zapłacić powinien $K.\,p$; płacąc więcej lub mniej, po wykonaniu nieograniczenie wielkiej liczby prób, poniesie stratę lub osiągnie zysk.

Istotnie — oznaczywszy, jak zwykle, przez $q = 1 - p$ prawdopodobieństwo zdarzenia niepomyślnego, funkcya $\theta\,(\gamma)$, przy $\gamma = \frac{l}{\sqrt{2\,p\,q\,n}}$, oznacza, według twierdzenia Bernoulli'ego, prawdopodobieństwo z jakiem zdarzenie pomyślne, podczas n prób, zajdzie od $\alpha - l$ do $\alpha + l$ razy, gdzie $\alpha = p \times n$, a tem samem oczekiwana z n prób korzyść zawiera się w granicach od $K.\,(\alpha - l)$ do $K.\,(\alpha + l)$. Jeżeli więc za każdą próbę płacić będziemy nie po $K.\,p$, lecz po $K.\,p \pm \delta$, za n doświadczeń zapłacimy $K.\,pn \pm \delta n = K.\,\alpha \pm \delta n$ i nasz zysk lub strata zawierać się będą, z prawdopodobieństwem $\theta\,(\gamma)$, w granicach od $K.\,l \pm \delta n$ do $-K.\,l \pm \delta n$. Gdy l, przy nieograniczenie wielkiem n, jest nie wielkie w stosunku do n, $K.\,l$ staje się bardzo małe w porównaniu do δn i jednocześnie $\theta\,(\gamma)$ staje się prawie równe jedności, czyli płacąc za każdą próbę, nie po $K.\,p$, lecz po $K.\,p \pm \delta$, poniesiemy bardzo prawdopodobnie, po wykonaniu nieograniczenie wielkiej liczby prób, zysk lub stratę w wysokości

δn. Wynika stąd, że, aby nie było zysku, ani straty, powinno być $\delta = 0$, t. j. istotna wartość kapitału spodziewanego.

(15) $$s = K.\,p.$$

Z drugiej jednak strony, iloczyn $K.\,p$ nazwaliśmy nadzieją matematyczną, mamy więc

Twierdzenie I. Wartość matematyczna kapitału spodziewanego równa się jego nadziei matematycznej.

Niech teraz zajście zdarzenia A_1 nadaje prawo do pozyskania kapitału K_1, zajście zdarzenia A_2 — do kapitału K_2, zdarzenia A_3 — do kapitału K_3, i t. d. Niech będzie p_1 prawdopodobieństwem zdarzenia A_1, p_2 prawd. zdarzenia A_2, p_3 prawd. zdarzenia A_3, i t. d. Wtedy $K_1 p_1$ jest wartością matematyczną kapitału K_1, $K_2 p_2$ wartością matematyczną kapitału K_2, i t. d., zaś całkowita wartość powyżej określonych praw

(16) $$s = K_1 p_1 + K_2 p_2 + K_3 p_3 + \ldots,$$ t. j. mamy

Twierdzenie II. Gdy wysokość kapitału spodziewanego zmienia się z rodzajem zdarzenia losowego, wartość matematyczna tak zmieniających się kapitałów równa się sumie ich nadziei matematycznych.

Przykład I. Za wyrzucenie kością do gry asa, otrzymujemy 12 franków. Wartość matematyczna prawa do rzucenia kości$=12$ fr.$\times \frac{1}{6} = 2$ fr.

Przykład II. Za wyrzucenie kością do gry asa, otrzymujemy franka, za wyrzucenie dwójki — 2 franki i t. d., za wyrzucenie szóstki — 6 franków. Wartość matematyczna prawa do rzucenia kości równa się

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3^1/_2 \text{ fr.}$$

14. Prawa zakładów i gier losowych. Grą losową nazywa się operacya, z której, biorące w niej udział osoby, mogą odnieść pewną korzyść lub stratę, zależnie od ułożenia się zdarzeń losowych, na jakich gra jest opartą. Każdorazowe wywołanie zdarzenia, decydującego kto odnosi korzyść, a kto stratę, nazywać będziemy partyą; osoby, biorące udział w grze, graczami lub partnerami; sumę, jaką gracz w jednej partyi może stracić, nazwijmy stawką; sumę, jaką może zyskać nazywajmy wygraną.

Gry losowe w dwojaki sposób można urządzić: albo gracze przegrywający płacą stawki, komu należy, dopiero po rozegraniu partyi, podczas gdy wygrywający biorą wygrane bez opłacenia stawek; albo wszyscy płacą stawki bankierowi z góry, a ten — po rozegraniu partyi — rozpłaca wygrywającym co się każdemu należy.

Pierwszy rodzaj zwać będziemy grą zakładową lub po prostu zakładem, drugi — grą bankową.

Zakład lub gra bankowa jest równoważną albo sprawiedliwą, jeżeli, po rozegraniu nieograniczenie wielkiej liczby partyj, nikt z grających nie odnosi zysku, ani straty.

Wyobraźmy sobie dwie osoby A i B, czyniące następujący zakład: jeżeli zajdzie zdarzenie o prawdopodobieństwie p, osoba B płaci osobie A kwotę s_b; gdy zajdzie zdarzenie o prawdopodobieństwie q, osoba A zapłaci osobie B kwotę s_a. Zachodzi pytanie, w jakim związku pozostawać ze sobą winny stawki s_a i s_b aby zakład był równoważny, czyli sprawiedliwy?

Wartość spodziewanej przez osobę A sumy s_b równa się $s_b p$, wartość spodziewanej przez osobę B sumy s_a równa się $s_a q$. Żeby zakład był równoważny, obie te wartości powinny być sobie równe, t. j. winno być

$$s_b p = s_a q, \text{ stąd } \frac{s_a}{s_b} = \frac{p}{q} \text{ lub } \frac{s_a}{p} = \frac{s_b}{q}, \tag{17}$$

czyli: W zakładach równoważnych, stawki zakładających się osób powinny być wprost proporcyonalne do prawdopodobieństw zdarzeń, za jakiemi każda osoba trzyma.

Jeżeli $p + q = 1$, jest

$$\frac{s_a}{p} = \frac{s_b}{q} = \frac{s_a + s_b}{p + q} = s_a + s_b, \text{ skąd}$$

$$s_a = (s_a + s_b) p, \; s_b = (s_a + s_b) q.$$

W urnie mamy dwie gałki białe i trzy czarne, prawdopodobieństwo wyjęcia gałki białej $= \frac{2}{5} = 0{,}4$, prawdopodobieństwo wyjęcia gałki czarnej $= \frac{3}{5} = 0{,}6$. Osoba A trzyma za wyjściem gałki białej, osoba B — za wyjściem gałki czarnej; stawka osoby A powinna się tak mieć do stawki osoby B jak $\frac{2}{5} : \frac{3}{5} = 2:3 = 4:6 =$ i t. d. Gdy np. stawka osoby A $= 10$ frankom, stawka osoby B wynosić powinna 15 franków.

Podane wyżej prawo stawek objaśnia nam używany czasami sposób wyrażania prawdopodobieństw. W poprzednim np. przypadku, zamiast mówić, że prawdopodobieństwo wyjęcia gałki białej $= \frac{2}{5} = 0{,}4$, prawdopodobieństwo wyjęcia gałki czarnej $= \frac{3}{5} = 0{,}6$, mówi się czasami: można stawić 2 przeciwko 3 lub 4 przeciwko 6, że wyjdzie gałka biała.

W przykładzie V-ym art. 4-go: można stawić 999861 przeciwko 139, że w talonie partnera nie ma czterech tuzów; w przykładzie VII-ym: można stawić 9471 przeciwko 529, że moneta nie padnie wewnątrz sześciokąta posadzki, i t. d.

W grach bankowych, gracze płacą stawki z góry, bez względu na to kto z nich wygra; w zamian za to, wygrywający otrzymują od bankiera odpowiednie wygrane bez zwrotu wniesionych stawek.

Bankier obowiązuje się wypłacić graczowi sumę S, jeżeli zajdzie zdarzenie, którego prawdopodobieństwo $= p$; jaką stawkę s powinien zapłacić gracz bankierowi, bezpowrotnie z góry, jeżeli gra ma być równoważną?

Umowa powyższa staje się oczywiście zakładem, gdy przyjmiemy, że gracz, nie płacąc z góry stawki, otrzyma tylko sumę S—s, jeżeli zajdzie pomyślne dla niego zdarzenie, a zapłaci bankierowi stawkę s dopiero gdy zajdzie zdarzenie niepomyślne.

Według prawa zakładów równoważnych, powinno być

$$\frac{s}{p} = \frac{\mathrm{S} - s}{1 - p}, \text{ stąd } s = \mathrm{S}.\, p. \tag{18}$$

Ponieważ iloczyn S. p nazwaliśmy nadzieją matematyczną (art. 13), zatem: Stawka w równoważnej grze bankowej równa się nadziei matematycznej gracza.

Jeżeli stawka jest wyższą od nadziei matematycznej gracza, gra przestaje być równoważną, a staje się hazardowną; bankier posiada przewagę nad graczem, skutkiem czego, przy bardzo wielkiej liczbie partyj, ostatecznie wygra, czyli odniesie zysk.

Rzecz się ma wprost przeciwnie gdy stawka jest niższą od nadziei matematycznej gracza.

Brak równowagi w grze losowej, na niekorzyść gracza, stanowi podstawę powodzenia wszelkiego rodzaju domów gry, jak rulety, loteryi i t. p. Zyski takich zakładów dadzą się z góry prawie ściśle obliczyć, przy danej liczbie partyj i wysokości stawek.

Ruleta np., w swej najprostszej formie, składa się z kołowego żłobka, podzielonego na 38 równych części, czyli pól. Z tych tylko 36 jest zaopatrzonych w numera od 1 do 36; z dwóch pozostałych, sobie przeciwległych, jedno ma 0, drugie 00.

Gracze mogą stawiać ilekolwiek na jakikolwiek numer lub zera. Jeżeli puszczona w ruch po żłobku gałka zatrzyma się na numerze, na który gracz postawił, bankier wypłaca graczowi 36 razy wziętą jego stawkę (35 z banku + stawka gracza), w przeciwnym razie gracz traci stawkę.

Wprowadzenie do rulety dwóch pól z zerami maskuje istotne prawdopodobieństwo wygrania. Z pozoru, ponieważ jest 36 numerów, zdaje się, że prawdopodobieństwo trafienia na pole, na którem zatrzyma się gałka, jest równe $\frac{1}{36}$, skutkiem czego, niby sprawiedliwie, wypłaca bankier graczowi 36 razy wziętą stawkę. Tymczasem, skoro w rulecie jest 38 pól, właściwe prawdopodobieństwo wygrania na dany numer $= \frac{1}{38}$ i bankier powinien wypłacić wygrywającemu nie 36, lecz 38 razy wziętą jego stawkę, gdyż

$$s = \mathrm{S}.\, \frac{1}{38}, \text{ stąd } \mathrm{S} = 38s;$$

płacąc $36s$, zyskuje średnio na każdych 38 partyach $2s$, na jednej przeciętnie $\frac{2s}{38} = \frac{s}{19}$, na n partyach zyskuje $\frac{sn}{19}$.

Założywszy, jak to czyni Folkierski (*), $s = 950$ franków, $n = 150000$ na rok, co wcale nie jest za wiele, otrzymamy na roczny zysk bankiera średnio 7500000 franków; ściślej — można stawić 999 przeciwko 1, że zysk roczny bankiera zawierać się będzie w granicach od 508440 do 14489400 franków! Ile zrujnowanych majątków, ile zburzonego szczęścia składa się na dostarczenie tych olbrzymich dochodów nieuczciwym przedsiębiorcom szalonej gry, tego chyba nie potrzebujemy tu powtarzać, są to bowiem fakta, dobrze każdemu, z dzienników, znane.

Lecz nie tylko gra hazardowna, ale i równoważna, gdy jest uprawiana długo przez partnerów nierównie zamożnych, prowadzi do ruiny uboższego. Albowiem, oznaczywszy przez M majątek gracza A — bogatszego, przez m majątek gracza B — uboższego; przez P prawdopodobieństwo wygrania majątku m przez gracza A, przez p prawdopodobieństwo wygrania majątku M przez gracza B, to, ponieważ tu stawkami graczów są ich majątki, powinno być

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}} = \frac{m}{p}, \text{ czyli } \mathrm{M}p = m\mathrm{P}.$$

Że zaś $p + \mathrm{P} = 1$, otrzymujemy przeto

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M} + m}, \; p = \frac{m}{m + \mathrm{M}}.$$

Im majątek M gracza A jest większy od majątku m gracza B, tem P jest bliższe jedności, a p zera, t. j. tem prawdopodobniej gracz A zrujnuje gracza B.

Gracz zawodowy gra przeciwko całemu ogółowi; ogół jest nieskończenie bogatszy od jednostki, zatem gracz zawodowy (o ile nie jest oszustem) prędzej lub później zrujnować się musi.

Dotąd braliśmy pod uwagę tylko dwóch graczów, resp. gracza i bankiera, te same prawa wszakże stosują się również do ilukolwiek.

Niech w grze równoważnej o jedną i tę samą wygraną S bierze udział pewna liczba osób, z których jedna trzyma za zdarzeniem o prawdopodobieństwie p_1, druga za zdarzeniem o prawdopodobieństwie p_2, i t. d. -- przyczem jedno z tych zdarzeń koniecznie zajść musi, t. j.

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = \Sigma p = 1,$$

skutkiem czego, jeden z graczów niezawodnie wygra.

Wtedy, oznaczywszy stawki przez s_1, s_2, s_3, i t. d., mamy

$$s_1 = \mathrm{S}p_1, \; s_2 = \mathrm{S}p_2, \; s_3 = \mathrm{S}p_3 \ldots, \text{ stąd}$$

$$\mathrm{S} = \frac{s_1}{p_1} = \frac{s_2}{p_2} = \frac{s_3}{p_3} = \ldots = \frac{\Sigma s}{\Sigma p} = \Sigma s, \text{ t. j.} \tag{19}$$

stawki powinny być proporcyonalne do prawdopodobieństw zdarzeń, za jakiemi gracze trzymają, a wygrana równa sumie wszystkich stawek.

(*) „Zasady rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami". Tom II, str. 652.

15. Zboczenie średnie. Weźmy pod uwagę zdarzenie A, zachodzące z prawdopodobieństwem p. Przy wykonaniu n prób, liczba razy, jaką zdarzenie A się pojawi, może być rozmaitą; najwięcej szans posiada liczba pn, albo raczej liczba równa największej całkowitej, zawartej w iloczynie $p(n+1)$ (art. 8) (*). Ponieważ jednak prawdopodobieństwo, z jakiem zdarzenie A zachodzi pn razy, jest stosunkowo małe, najczęściej więc zachodzi nie pn, lecz więcej lub mniej razy, a twierdzenie Bernoulli'ego pozwala nam oznaczyć prawdopodobieństwo, z jakiem rzeczywista liczba razy pojawienia się zdarzenia A zbacza od pn o daną ilość l w jedną lub drugą stronę.

Można przypuścić, że każda próba stanowi przedmiot zakładu za i przeciw zajściu zdarzenia A. Żeby zakład był równoważny, stawki powinny być proporcyonalne do prawdopodobieństw, z jakiemi zdarzenie A zachodzi i nie zachodzi, t. j. jeżeli za każde nie zajście zdarzenia A płacić będziemy np. p, za każde jego pojawienie się otrzymać powinniśmy $q = 1 - p$.

Gdy, po wykonaniu n prób, zdarzenie A zajdzie pn razy, otrzymamy i zapłacimy pqn, t. j. ostatecznie nie odniesiemy ani zysku, ani straty.

Gdy, po wykonaniu n prób, zdarzenie A zajdzie $pn + l$ razy, a tem samem zdarzenie B powtórzy się $n - pn - l = qn - l$ razy, otrzymamy wówczas $q(pn + l)$, a zapłacimy $p(qn - l)$, czyli zyskamy

$$q(pn + l) - p(qn - l) = l. \tag{a}$$

Jeżeli przez P_l oznaczymy prawdopodobieństwo, z jakiem osiągamy zysk l, będzie to zarazem prawdopodobieństwo powtórzenia się w n próbach zdarzenia A razy $pn + l$, a zdarzenia B razy $qn - l$, zatem

$$P_l = \frac{n!}{(pn+l)!(qn-l)!} p^{pn+l} q^{qn-l}; \tag{b}$$

zaś iloczyn lP_l wyobrażać wtedy będzie nadzieję matematyczną spodziewanego zysku l, czyli jego wartość matematyczną.

Skoro to jest zysk prawdziwy, l powinno się zawierać między o i qn; gdybyśmy więc chcieli nasze widoki zysku sprzedać, otrzymać za nie powinniśmy

$$\delta = \sum_{l=o}^{l=qn} lP_l. \tag{c}$$

Owóż δ nazywa się zboczeniem średniem.

Aby obliczyć δ ze wzoru (c), zastąpmy l jego wyrażeniem (a); będzie wtedy

$$\delta = \sum_{l=0}^{l=qn} q(pn+l)\, P_l - \sum_{l=0}^{l=qn-1} p(qn - l)P_l, \tag{d}$$

albowiem wyraz sumy drugiej. odpowiadający podstawieniu $l = qn$, opuściliśmy, jako równy zeru.

(*) W dalszym więc ciągu, podobnie jak dotąd, przez pn i qn rozumieć należy, odpowiedniej wysokości, liczby całkowite.

Wyłączając teraz wyraz pierwszy od wyrazów pozostałych w sumie pierwszej, otrzymamy widocznie

$$\sum_{l=0}^{l=qn} q(pn+l)P_l = npq\,P_0 + \sum_{l=1}^{l=qn} q\,(pn+l)\,P_l,$$

lub, co na jedno wychodzi,

$$\sum_{l=0}^{l=qn} q(pn+l)P_l = npqP_0 + \sum_{l=0}^{l=qn-1} q(pn+l+1)P_{l+1}.$$

Na tej zasadzie wzór (d) daje

(20) $$\delta = npqP_0 + \sum_{l=0}^{l=qn-1} q(pn+l+1)P_{l+1} - \sum_{l=0}^{l=qn-1} p(qn-l)P_l.$$

Ale ze wzoru (b) wynika

$$q(pn+l+1)P_{l+1} = p(qn-l)P_l,$$

zatem, w ostatnim wzorze na δ, obie sumy wzajemnie się znoszą i mamy tylko

(21) $$\delta = npqP_0 = npq \cdot \frac{n!}{(pn)!\,(qn)!}\, p^{pn} q^{qn}.$$

Symetrya między głoskami p i q wskazuje, że takie samo wyrażenie na δ otrzymalibyśmy również ze wzoru

$$\delta = -\sum_{l=-pn}^{l=0} lP_l = \sum_{l=0}^{l=pn} lP_{-l},$$

w którym l zawiera się między $-pn$ i 0 i który przeto wyobraża kwotę, jakąbyśmy okupić się mogli od poniesienia spodziewanej straty.

Tak więc suma, za którą sprzedać można spodziewany w tym razie zysk, jak i suma, którą okupić można spodziewaną stratę, są sobie równe, jak to w grach równoważnych być powinno (*).

W matematyce wyższej znany jest wzór

$$m! = m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m} \cdot (1+\varepsilon),$$

zwany wzorem Stirling'a, w którym, przy dostatecznie wielkiem m, można ε opuścić.

Stosując ten wzór do $n!$, $(pn)!$ i $(qn)!$, w miejsce (21) otrzymamy

(22) $$\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{pqn},$$

albo, z dostatecznem dla praktyki przybliżeniem,

(23) $$\delta = 0{,}40 \sqrt{pqn}.$$

Do wyprowadzenia wzoru (23) posłużyło nam założenie, iż za każde zajście zdarzenia A otrzymujemy q, a za każde nie zajście płacimy p. Nic się w rezultacie nie zmieni, gdy założymy, że za każdą próbę płacimy p, skutkiem czego, za wszystkie n doświadczeń zapłacimy pn, a za każde zajście zdarzenia A otrzymujemy 1. Lecz wtedy, gdyby A zaszło istotnie pn razy, otrzymalibyśmy pn jedności, t. j. tyle, ile zapłaciliśmy za wszystkie n doświadczeń; jeżeli zaś

(*) Powyższe dowodzenie zawdzięczam uprzejmości p. Władysława Gosiewskiego.

zdarzenie A zajdzie więcej niż *pn* razy, otrzymamy tyle jedności więcej, ile razy więcej ponad *pn* zaszło zdarzenie A.

Średnią wartość tej przewyżki podaje wzór (23), który więc wyraża zarazem, ile razy więcej, średnio biorąc, powtórzy się zdarzenie uważane ponad lub poniżej *pn*.

Z tego powodu wzór (23), oczywiście, służyć może do obliczania nietylko średniej wartości zboczenia, ale i do obrachowania średniej wielkości (obszerności) samego zboczenia, zarówno w jednym jak i w drugim kierunku od najwięcej szans mającej liczby *pn*.

Gdyby chodziło o zboczenie średnie, bez względu na kierunek, czyli o średnią różnicę pomiędzy największą i najmniejszą liczbą powtórzeń się zdarzenia, to jest ona widocznie dwa razy większą od zboczenia średniego w jednym kierunku, czyli równa się

$$2\delta = 0{,}80\sqrt{pqn}. \tag{24}$$

Jeżeli np. prawdopodobieństwo zdarzenia oczekiwanego = 0,02, zdarzenia przeciwnego = 0,98, wtedy:

Przy $n = 1000$, $\delta = 1{,}77$;$2\delta = 3{,}54$, t. j. podczas 1000 doświadczeń, zdarzenie spodziewane zajdzie średnio o 1,77 więcej lub mniej niż $0{,}02 \times 1000 = 20$ razy; średnia zaś liczba zajść oscylować będzie od $20 - 1{,}77 = 18{,}23$ do $20 + 1{,}77 = 21{,}77$, czyli obszerność wahań wyniesie średnio $2\delta = 21{,}77 - 18{,}23 = 3{,}54$.

Przy $n = 10000$, $\delta = 5{,}60$; $2\delta = 11{,}20$.

Przy $n = 100000$, $\delta = 17{,}70$; $2\delta = 35{,}40$, i t. d.

Znaczenie zboczenia średniego jest następujące: Gdy zdarzenie A o prawdopodobieństwie *p* poddamy *n* próbom, najwięcej szans posiada przypuszczenie, że uważane zdarzenie powtórzy się *pn* razy. Pomimo to, zdarzenie A w rzeczywistości zajdzie inną liczbę razy, czyli zboczy od liczby *pn*. Kierunku zboczenia przewidzieć nie możemy, ale jego bezwzględna wielkość, obliczona z góry, wynosi δ. Jeżeli *n* prób powtórzymy pewną liczbę razy i weźmiemy średnią z bezwzględnej wielkości zboczeń rzeczywistych każdego szeregu *n* doświadczeń, znajdziemy, że ta średnia, o ile zdarzenia są czysto przypadkowe, równa się tej samej ilości δ, a przynajmniej bardzo nie wiele się od niej różni i to tem mniej, im więcej szeregów *n* doświadczeń wykonamy. I byłoby przeciwne istocie przypadkowości, gdyby rzeczywiste zboczenie średnie albo o wiele przekraczało δ, albo też zredukowało się do zera, lub nie wiele się od niego różniło. Rzecz się tu ma podobnie jak w mechanice – liczba *pn* stanowi jakby oś, około której rzeczywista liczba pojawień się zdarzenia A oscyluje; oscylacye te odbywają się w dwu kierunkach o średniej amplitudzie δ. Jest to przedziwne prawo, powtarzające się na każdym kroku w przyrodzie i w stosunkach socyalnych: brak wszelkiej oscylacyi — to śmierć, przekroczenie pewnych jej granic — to rozprzężenie, we właściwych granicach trzymana rozmaitość — to harmonia, porządek.

Zboczenie średnie posiada wielkie znaczenie w badaniach statystycznych, może bowiem rzucić pewne światło na naturę przyczyn, wywołujących obserwowane zdarzenia.

Gdy obserwowane zdarzenia są rezultatem czystego przypadku, t. j. gdy przyczyny wpływające na zajście zdarzenia w różnych doświadczeniach nie oddziaływają na siebie, lecz działają niezależnie, samodzielnie, zboczenia odznaczą się pewną regularnością, nie oddalą się zanadto od dającej się z góry obliczyć wielkości.

Naodwrót—gdy nie wiemy, czy przyczyny, wywołujące obserwowane zdarzenia w różnych doświadczeniach, oddziaływają czy nie oddziaływają na siebie, a chcemy to poznać, wykonajmy odpowiedni szereg doświadczeń i porównajmy rzeczywiste zboczenie średnie z teoretycznie obliczonem. Jeżeli rzeczywiste zboczenie średnie jest prawie równe obliczonemu ze wzoru (23), możemy być pewni, iż zjawiska są czysto przypadkowe, że wywołujące je przyczyny w różnych doświadczeniach są od siebie niezależne i jedne nie oddziaływają na drugie. Jeżeli przeciwnie rzeczywiste zboczenie średnie bardzo się od obliczonego różni, możemy twierdzić, iż powodem tego jest wzajemne oddziaływanie przyczyn na siebie, a wielkość różnicy daje nam wyobrażenie o naturze i sile tego wzajemnego oddziaływania na siebie przyczyn działających.

Przy stosowaniu wzoru (23) do badań nad zboczeniami zjawisk naturalnych, dobrze jest nadać mu nieco inną postać.

Dajmy na to, że pewne zdarzenie zachodzi z nieznanem nam prawdopodobieństwem p, stałem przy każdem doświadczeniu lub obserwacyi. Wykonajmy wielką liczbę obserwacyj N i podzielmy je na h szeregów, zawierających po $n_1, n_2, \ldots, n_c, \ldots, n_h$ obserwacyj,

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_c + \ldots + n_h = \mathrm{N}.$$

Oczekiwane zdarzenie zachodzi pewną liczbę razy w każdym szeregu obserwacyj, np. $m_1, m_2, \ldots, m_c, \ldots, m_h$, razem M,

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_c + \ldots + m_h = \mathrm{M}.$$

Najprawdopodobniejszą wartością dla p jest $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$, stąd $q = 1 - p = \frac{\mathrm{N}-\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$; najprawdopodobniejszą wartością dla m_c jest $pm_c = \frac{\mathrm{M}n_c}{\mathrm{N}}$, skutkiem czego

$$\delta_c = 0{,}40 \sqrt{pqn_c} = 0{,}40 \,.\, \frac{\sqrt{\mathrm{M(N-M)}}}{\mathrm{N}} \cdot \sqrt{n_c}.$$

W rzeczywistości szeregi obserwacyj nie są dowolne, najczęściej każdy szereg zawiera prawie jednakową liczbę obserwacyj, obejmujących spostrzeżenia, np. roczne, miesięczne lub t. p. Z tego powodu można przyjąć $\mathrm{N} = n_c h$, skąd $n_c = \frac{\mathrm{N}}{h}$. W takim razie, dla każdego szeregu doświadczeń lub obserwacyj mamy

$$\delta = 0{,}40 \sqrt{\frac{\mathrm{M(N-M)}}{h\mathrm{N}}}.$$

Gdy rezultaty owych h szeregów obserwacyj zbierzemy w jedną całość i otrzymane zboczenia, bez względu na znak, dodamy, trzeba, dla porównania, wziąć średnie zboczenie, obliczone dla każdego szeregu oddzielnie, h razy dla zboczeń dodatnych i h razy dla zboczeń ujemnych, razem

$$2h \text{ razy po } 0{,}40 \sqrt{\frac{M(N-M)}{hN}} = 0{,}80 \sqrt{\frac{hM(N-M)}{N}}.$$

Oznaczywszy to zebranie średnich zboczeń przez Δ, otrzymujemy

$$\Delta = 0{,}80 \sqrt{\frac{hM(N-M)}{N}}, \tag{25}$$

z którem porównać należy sumę bezwzględnych zboczeń, rzeczywiście wypadłych po wykonaniu N obserwacyj, podzielonych na h szeregów. Zgodność lub niezgodność rezultatu rzeczywistego z obliczonym prowadzi nas do takiego lub innego wniosku o działających przyczynach.

Najprościej dokonywa się porównanie za pomocą oznaczenia stosunku zboczenia zaobserwowanego do zboczenia teoretycznie obliczonego; stosunek ten nazwijmy spółczynnikiem zboczeń.

Przypuśćmy, że wykonywamy szeregi doświadczeń lub obserwacyj, dla których przewidujemy z góry najprawdopodobniejszy rezultat. Jeżeli doświadczenia już dokonane wcale nie wpływają na mające się jeszcze dokonać, to po wykonaniu dalszych doświadczeń trzeba się spodziewać rezultatu mniej więcej zgodnego z przewidywanym, skutkiem czego spółczynnik zboczeń, obliczony po wykonaniu wszystkich doświadczeń, będzie bardzo zbliżony do 1. Jeżeli doświadczenia już wykonane wpływają na mające się dopiero wykonać w ten sposób, że czynią rezultat bardziej zbliżonym do przewidywanego, aniżeli się tego spodziewać można, wtedy objawia się dążność do prawidłowości większej od tej jaka leży w naturze zdarzeń niezależnych i wówczas otrzymujemy spółczynnik mniejszy od 1. Jeżeli przeciwnie doświadczenia wpływają na siebie w sposób, czyniący rezultat bardziej oddalonym od przewidywanego, niż się tego spodziewać można, wtedy istnieje dążność do nieprawidłości przeciwnej naturze zdarzeń od siebie niezależnych i spółczynnik zboczeń staje się większy od 1.

Stąd można wywnioskować naodwrót, że spółczynnik zboczeń = 1 oznacza zdarzenia od siebie niezależne, czyli czysto przypadkowe; spółczynnik mniejszy od 1 — zdarzenia bardziej prawidłowe, wywołane przez przyczyny sprzyjające skupieniu; wreszcie spółczynnik większy od 1 każe się domyślać zdarzeń bardziej nieprawidłowych, wywołanych przez przyczyny dążące do rozpraszania, do rozstroju.

W ciągu 8-u lat, od 1885 do 1892 r., urodziło się w Warszawie 148224 dzieci, pomiędzy któremi było 75251 chłopców i 72973 dziewcząt; 126831 ślubnych i 21 393 nieślubnych. Urodzenia te według lat rozkładają się w następujący sposób:

W roku	Urodziło się		Było urodzeń	
	Chłopców	Dziewcząt	Ślubnych	Nieślubnych
1885	7436	7134	12559	2011
1886	8187	7817	13655	2349
1887	8450	8141	14157	2434
1888	8520	8157	14292	2385
1889	11072	11053	19040	3085
1890	10685	10092	17505	3272
1891	9802	9599	16273	3128
1892	11099	10980	19350	2729
Razem	75251	72973	126831	21393

Prawdopodobieństwo urodzenia się chłopca $= \frac{75251}{148224} = 0{,}507684$; prawdopodobieństwo urodzenia się dziecka nieślubnego $= \frac{21393}{148224} = 0{,}144329$.

Stosując te prawdopodobieństwa do ogólnej liczby urodzeń w każdym poszczególe roku, otrzymujemy:

W roku	Urodzenia chłopców			Urodzenia nieślubne		
	Urodziło się rzeczywiście	Według pr. 0,507684 urodzić się powinno	Zboczenie	Urodziło się rzeczywiście	Według pr. 0,144329 urodzić się powinno	Zboczenie
1885	7436	7397	+ 39	2011	2103	− 92
1886	8187	8125	+ 62	2349	2310	+ 39
1887	8450	8423	+ 27	2434	2395	+ 39
1888	8520	8467	+ 53	2385	2407	− 22
1889	11072	11233	−161	3085	3193	−108
1890	10685	10548	+137	3272	2999	+273
1891	9802	9860	− 58	3128	2803	+325
1892	11099	11209	− 110	2729	3187	−458
Razem	75251	75262	647	21393	21397	1356

Bezwzględne zatem zboczenie, w ciągu lat 8, wynosi dla urodzeń z rozróżnieniem płci 647, dla urodzeń z rozróżnieniem stosunku rodziców 1356.

Podstawiając odpowiednie liczby we wzór (25) wypada na zboczenie teoretyczne:
w pierwszym razie

$$\Delta = 0{,}80\sqrt{\frac{8 \times 75251 \times 72973}{148224}}=436;$$

w drugim razie

$$\Delta = 0{,}80\sqrt{\frac{8 \times 21393 \times 126831}{148224}}=306.$$

Spółczynnik zboczeń:

w pierwszym razie $\frac{647}{436}=1{,}5$;

w drugim „ $\frac{1356}{306}=4{,}4$.

Spółczynnik 1,5 jest blizki jedności, skąd można wnosić, że fakt urodzenia się chłopca lub dziewczęcia stanowi zdarzenie przypadkowe. Podobnie przedstawia się sprawa i w innych miejscowościach. W Paryżu np., za czas od 1856 do 1866 r., spółczynnik zboczeń = 0,98; w różnych epokach i różnych prowincyach Francyi zmienia się od 1,98 do 0,55, czyli oscyluje około jedności.

Spółczynnik 4,4 już więcej oddala się od jedności, a we Francyi jeszcze bardziej. W czasie od 1817 do 1868 r. zmieniał się od 5 do 15. Dowodzi to, że urodzenia nieślubne nie są zdarzeniami czysto przypadkowemi, że działają tu jakieś przyczyny psujące prawo przypadkowości. Za najważniejszą przyczynę uważają oddziaływanie złych przykładów na ogólny stan obyczajów.

ROZDZIAŁ II.

TABLICE ŚMIERTELNOŚCI.

16. Prawdopodobieństwo śmierci w grupie jednorodnej. Wyobraźmy sobie pewną bardzo znaczną liczbę osób w równym wieku. Wszystkie niech będą jednej płci, jednakowo zdrowe, niech żyją w równych warunkach bytu, mają podobne zajęcia, temperament, zamiłowania – słowem, niech stanowią zupełnie jednorodną, pod względem życiowym, grupę osób.

Po upływie pewnego, dostatecznie długiego czasu, wszystkie te osoby żyć przestaną; wszakże, pomimo rzeczonej jednorodności, żyć przestaną nie jednocześnie, lecz stopniowo wymierać będą. Po upływie względnie nawet krótkiego okresu czasu, np. po roku, nie wszystkie żyć będą, ani nie wszystkie wymrą; umrze z nich pewna tylko liczba, ale umrze z pewnością, zwłaszcza jeżeli uważana liczba osób jest dostatecznie wielką. Przyczyny śmierci mogą być rozmaite: jedna osoba się przeziębi, inna popadnie w niestrawność, inna ulegnie nieszczęśliwemu wypadkowi, inną jeszcze dotknie jaka choroba zakaźna; z góry wszakże przesądzać niepodobna, którą, kiedy i jaka przyczyna zapędzi do grobu.

Położenie zatem takiej jednorodnej grupy osób, w ciągu oznaczonego okresu czasu, jest podobne do takiej samej liczby gałek złożonych w urnie: pewna ich liczba zostanie wyciągniętą, lecz które mianowicie — nie wiemy, los o tem zadecyduje. Innemi słowy, śmierć ludzka, co do czasu w jakim nastąpi, jest zdarzeniem losowem, a jako taka wchodzi w zakres rachunku prawdopodobieństwa.

Skoro tak jest, więc, trzymając się określenia, stosunek liczby osób zmarłych, w przeciągu pewnego okresu czasu, do liczby osób żyjących na początku tegoż okresu, przyjąć można za prawdopodobieństwo śmierci w ciągu uważanego okresu czasu. Jeżeli np. z pomiędzy L_x osób w wieku x lat, żyjących na początku roku, umiera w przeciągu roku osób T_x, rocznem prawdopodobieństwem śmierci dla osoby x letniej jest

$$q_x = \frac{T_x}{L_x}.$$

Oznaczywszy pozostałą $L_x - T_x$ liczbę osób żyjących, mających po upływie roku $x + 1$ lat, przez L_{x+1}, prawdopodobieństwo przeżycia roku

$$p_x = \frac{L_{x+1}}{L_x}. \tag{26}$$

Wtedy liczba zmarłych T_x równa się $L_x - L_{x+1}$, a prawd. śmierci

$$q_x = \frac{T_x}{L_x} = \frac{L_x - L_{x+1}}{L_x} = 1 - p_x. \tag{27}$$

Stąd $p_x + q_x = 1$, jak rzeczywiście być powinno, albowiem dana osoba w ciągu roku albo umrze, albo pozostanie przy życiu.

Prawdopodobieństwo śmierci, oczywiście, nie może być à priori oznaczone; potrzebną jest do tego celu obserwacya, z której się dowiadujemy, ile osób, z pośród pewnej liczby żyjących, w ciągu roku umiera.

Tą drogą, czyli à posteriori oznaczone prawdopodobieństwo nie jest, naturalnie, zupełnie ścisłe — rzeczywiste, posiada tylko najwięcej szans za sobą, jest najprawdopodobniejsze dla danej grupy osób i tem bardziej zbliża się do rzeczywistego, im z większej liczby osób zostaje obliczone. Zapomocą twierdzenia odwrotnego twierdzeniu Bernoulli'ego (art. 12) możemy oznaczyć stopień ścisłości znalezionego prawdopodobieństwa, t. j. możemy się przekonać, z jakiem prawdopodobieństwem szukane prawdopodobieństwo śmierci zawiera się w pewnych granicach.

$$P = \theta(\gamma), \text{ gdzie } \gamma = \varepsilon \sqrt{\frac{L_x^3}{2\,T_x\,(L_x - T_x)}}. \tag{28}$$

Jeżeli np. z pośród 10000 osób 30-letnich umiera w ciągu roku 84, t. j. gdy $x = 30$, $L_{30} = 10000$, $T_{30} = 84$, najprawdopodobniejszem rocznem prawdopodobieństwem śmierci dla 30-letniej osoby jest 0,0084, a prawdopodobieństwo rzeczywiste zawiera się w granicach 0,0084 ± 0,0015 z prawd. 0,9; w granicach 0,0084 ± 0,0030 z prawdopodobieństwem 0,999.

Gdyby obserwacya wykazała 168 wypadków śmierci na 20000 osób, najprawdopodobniejsze prawdopodobieństwo śmierci pozostałoby 0,0084, ale prawdopodobieństwo rzeczywiste byłoby zawarte w granicach 0,0084 ± 0,0011 z prawd. 0,9; w granicach 0,0084 ± 0,0021 z prawdopodobieństwem 0,999.

17. ROCZNE I ŚREDNIE PRAWDOPODOBIEŃSTWO ŚMIERCI. — NATĘŻENIE ŚMIERTELNOŚCI. Badając choćby tylko powierzchownie śmiertelność ludzką, nietrudno zauważyć, że pomiędzy dziećmi, w pierwszym roku życia, śmiertelność jest bardzo silna, następnie z każdym rokiem szybko maleje — tak, że w okresie od 5 do 15 lat dochodzi do minimum. Następnie zaczyna rosnąć, z początku bardzo powoli, później szybciej, w końcu bardzo szybko; w bardzo późnym wieku śmiertelność staje się nadzwyczaj wysoką, bywa nawet wyższą od śmiertelności w pierwszym roku życia. Porządek ten wyraźnie rzuca się w oczy w każdem sprawozdaniu statystycznem wszystkich miast, prowincyj i krajów.

Dowodzi to, że najgłówniejszą, gdyż od razu dającą się dostrzedz, przyczyną różnego stopnia śmiertelności jest wiek, czyli, że prawdopodobieństwo śmierci przedewszystkiem zależy od wieku. Chcąc zatem bliżej zbadać śmiertelność ludzką, należy zacząć od wpływu jaki wiek na nią wywiera, t. j. trzeba obserwować oddzielnie osoby tego samego wieku.

Za okres, dla jakiego oznacza się prawdopodobieństwo śmierci, można przyjąć dowolny przeciąg czasu; można przyjąć rok, tydzień, dzień, a nawet — w badaniach teoretycznych — chwilę, i oznaczać tym sposobem prawdopodobieństwo śmierci roczne, tygodniowe, dzienne lub, w teoryi, momentalne.

Za jednostkę do mierzenia wieku i okresu śmiertelności zazwyczaj przyjmuje się rok; okresy krótsze wyrażają się przez ułamek roku.

Stosunek prawdopodobieństwa śmierci do długości okresu, dla którego rzeczone prawdopodobieństwo zostało oznaczone, nazywa się średniem prawdopodobieństwem śmierci. Granica, do jakiej dąży średnie prawdopodobieństwo śmierci, gdy długość okresu, z którego prawdopodobieństwo zostaje oznaczone, skracamy aż do nieskończoności, nosi w nauce miano siły lub natężenia śmiertelności (Force of mortality, — Taux instantané de mortalité, — Sterbe - Intensität).

My w dalszym ciągu, mówiąc o prawdopodobieństwie śmierci, zawsze na myśli mieć będziemy prawdopodobieństwo roczne, przynajmniej o tyle, o ile wyraźnie nie zaznaczymy, że jest mowa o prawdopodobieństwie innego okresu.

18. POSTACIE TABLIC ŚMIERTELNOŚCI. Przypuśćmy, że dla każdego wieku posiadamy, podobnie jak w art. 16, jednorodną grupę, złożoną z dostatecznie wielkiej liczby osób; że każdą grupę obserwujemy przez rok i dla każdej oznaczyliśmy najprawdopodobniejsze prawdopodobieństwo śmierci q_x, a tem samem i najprawdopodobniejsze prawdopodobieństwo przeżycia roku p_x.

Ułożywszy otrzymane rezultaty w ten sposób, aby obok liczb wyrażających wiek znajdowały się odpowiednie najprawdopodobniejsze prawdopodobieństwa śmierci w ciągu roku, mieć będziemy to, co właściwie nazywać się powinno tablicą śmiertelności. Jeżeli obok liczb wyrażających wiek postawimy odpowiednie najprawdopodobniejsze prawdopodobieństwa przeżycia roku, mieć będziemy tablicę dożycia.

Aby dać pojęcie o ścisłości, z jaką prawdopodobieństwo śmierci, resp. dożycia zostały obliczone, w jednej i drugiej tablicy, obok najprawdopodobniejszych prawdopodobieństw, postawićby należało albo bezwzględne liczby, z jakich pomienione prawdopodobieństwa oznaczono, albo lepiej granice, w jakich, z danem prawdopodobieństwem, zawiera się rzeczywiste prawdopodobieństwo śmierci lub dożycia (*).

(*) Najprawdopodobniejsze prawdopodobieństwo śmierci lub przeżycia roku, dla krótkości, nazywać będziemy, w dalszym ciągu, wprost prawdopodobieństwem śmierci, resp. dożycia.

Postać tak ułożonych tablic jest zatem następująca:

Postać I.

Wiek lat	Liczba osób żyjących na początku roku	Liczba osób zmarłych w ciągu roku	Tablica śmiertelności		Tablica dożycia	
			Prawdopodobieństwa śmierci w ciągu roku	Granice, w jakich się prawd. śmierci zawierają z prawd. 0,9...	Prawdopodobieństwa przeżycia roku	Granice, w jakich się prawd. dożycia zawierają z prawd. 0,9...
0	L_0	T_0	$\frac{T_0}{L_0} = q_0$	$q_0 \pm \varepsilon_0$	$\frac{L_0 - T_0}{L_0} = p_0$	$p_0 \mp \varepsilon_0$
1	L_1	T_1	$\frac{T_1}{L_1} = q_1$	$q_1 \pm \varepsilon_1$	$\frac{L_1 - T_1}{L_1} = p_1$	$p_1 \mp \varepsilon_1$
2	L_2	T_2	$\frac{T_2}{L_2} = q_2$	$q_2 \pm \varepsilon_2$	$\frac{L_2 - T_2}{L_2} = p_2$	$p_2 \mp \varepsilon_2$
3	L_3	T_3	$\frac{T_3}{L_3} = q_3$	$q_3 \pm \varepsilon_3$	$\frac{L_3 - T_3}{L_3} = p_3$	$p_3 \mp \varepsilon_3$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
x	L_x	T_x	$\frac{T_x}{L_x} = q_x$	$q_x \pm \varepsilon_x$	$\frac{L_x - T_x}{L_x} = p_x$	$p_x \mp \varepsilon_x$

Znając prawdopodobieństwa przeżycia roku przez osoby każdego wieku, łatwo, za pomocą prawdopodobieństw złożonych (art. 5), oznaczyć można prawdopodobieństwa przeżycia lat 2-ch, 3-ch, 4-ch, i t. d. Tak np., prawdopodobieństwem, że nowonarodzone dziecko przeżyje rok jest p_0, stąd prawdopodobieństwo, że przeżyje 2 lata$=p_0 . p_1$, że przeżyje 3 lata$=p_0 . p_1 . p_2$, i t. d. Postępując w podobny sposób aż do granicy życia ludzkiego, otrzymamy

Postać II.

Lat	Nowonarodzone dziecko dożyje z prawdopodobieństwem
1	p_0
2	$p_0 p_1$
3	$p_0 p_1 p_2$
4	$p_0 p_1 p_2 p_3$
5	$p_0 p_1 p_2 p_3 p_4$
.	.
.	.
.	.
x	$p_0 p_1 p_2 \cdots p_{x-1}$

Gdy dalej dowolną liczbę nowonarodzonych, np. 1000, 10000, 100000, 1000000 — w ogóle liczbę λ_0 nowonarodzonych pomnożymy kolejno przez liczby, znajdujące się w kolumnie 2-ej postaci II, otrzymamy, ile osób z pośród λ_0 nowonarodzonych dożyje 1-go, 2-ch, 3-ch, i t. d., w ogóle x lat. Liczby te stale oznaczać będziemy przez $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_x$, pozostawiając znaki L_0, L_1, $L_2, \ldots, L_x$ na oznaczanie istotnie obserwowanej liczby osób. Znaczki 0, 1, 2, 3, . . . , x wyobrażają wiek, do jakiego λ, resp. L się odnosi.

Postawiwszy znalezione liczby λ obok odpowiedniego wieku, powstanie

Postać III (*).

Wiek	Liczba osób żyjących
0	λ_0
1	λ_1
2	λ_2
3	λ_3
.	.
.	.
.	.
x	λ_x

która przedstawia postać typową, pod jaką powszechnie prawo śmiertelności bywa przedstawiane. Tak ułożona tablica powinnaby nosić nazwę tablicy dożywających, lecz nadano jej miano tablicy śmiertelności, więc i my w podobny sposób, w dalszym ciągu, nazywać ją będziemy.

Niewłaściwa ta nazwa daje się usprawiedliwić okolicznością, że z tablicy ułożonej według postaci III bardzo się łatwo oznacza prawdopodobieństwo śmierci w ciągu roku, t. j. to, co się we właściwej tablicy śmiertelności mieścić powinno. Istotnie, z obserwacyi oznaczonem prawdopodobieństwem śmierci dla osoby x letniej jest

$$q_x = \frac{T_x}{L_x}. \tag{a}$$

(*) Tę postać tablicy śmiertelności można otrzymać także wprost z prawdopodobieństw śmierci; albowiem, gdy λ_0 nowonarodzonych pomnożymy przez q_0, otrzymamy na liczbę zmarłych w pierwszym roku życia $\lambda_0 . q_0$, a tem samem liczba żyjących 1-o letnich równa się $\lambda_0 - \lambda_0 . q_0 = \lambda_1$. Mnożąc λ_1 przez q_1 wypadnie na liczbę zmarłych w wieku od 1 do 2 ch lat $\lambda_1 . q_1$, stąd liczba żyjących w wieku lat 2 równa się $\lambda_1 - \lambda_1 . q_1 = \lambda_2$, i t. d. aż do końca tablicy.

Lecz

(b) $$\lambda_x = \lambda_0 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_{x-1} = \lambda_0 \cdot \frac{L_0-T_0}{L_0} \cdot \frac{L_1-T_1}{L_1} \ldots \frac{L_{x-1}-T_{x-1}}{L_{x-1}},$$

(c) $$\lambda_{x+1} = \lambda_0 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_{x-1} \cdot p_x = \lambda_0 \cdot \frac{L_0-T_0}{L_0} \cdot \frac{L_1-T_1}{L_1} \ldots$$
$$\ldots \frac{L_{x-1}-T_{x-1}}{L_{x-1}} \cdot \frac{L_x-T_x}{L_x};$$

$$\lambda_x - \lambda_{x+1} = \lambda_0 \cdot \frac{L_0-T_0}{L_0} \cdot \frac{L_1-T_1}{L_1} \ldots \frac{L_{x-1}-T_{x-1}}{L_{x-1}} \cdot \left(1 - \frac{L_x-T_x}{L_x}\right) =$$
$$= \lambda_0 \cdot \frac{L_0-T_0}{L_0} \cdot \frac{L_1-T_1}{L_1} \ldots \frac{L_{x-1}-T_{x-1}}{L_{x-1}} \cdot \frac{T_x}{L_x},$$

co dzieląc odpowiedniemi stronami przez (b), wypada $\frac{\lambda_x-\lambda_{x+1}}{\lambda_x} = \frac{T_x}{L_x} = q_x$, czyli

(29) $$q_x = \frac{\lambda_x-\lambda_{x+1}}{\lambda_x},$$

t. j. do oznaczenia q_x wystarczają liczby wyjęte z postaci III.

Tak samo, dzieląc (c) przez (b), dowieść można, że prawdopodobieństwem przeżycia roku jest

(30) $$p_x = \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x}.$$

Skoro λ_x w postaci III oznacza liczbę żyjących w wieku x lat, z pośród λ_0 nowonarodzonych, przeto różnica $\lambda_x-\lambda_{x+1}$ przedstawiać musi liczbę zmarłych w ciągu roku z pośród λ_x osób x letnich. Tę liczbę zmarłych stale oznaczać będziemy przez τ_x pozostawiając symbol T_x, podobnie jak uczyniliśmy z L_x, na oznaczenie liczby osób zmarłych, otrzymanej wprost z obserwacyi.

Mamy więc

$$\tau_x = \lambda_x - \lambda_{x+1},$$

skutkiem czego w miejsce (29) pisać można

(29') $$q_x = \frac{\tau_x}{\lambda_x}.$$

Liczby zmarłych τ_x bardo się łatwo otrzymują z postaci III, lecz mimo to często bywają w tablicy śmiertelności podawane. Również zamieszczają się często i prawdopodobieństwa śmierci w ciągu roku dla każdego wieku.

Prawdopodobieństwa przeżycia roku zazwyczaj bywają pomijane, łatwo bowiem mogą być otrzymane z prawdopodobieństw śmierci przez ich odjęcie od jedności.

Do prawdopodobieństw śmierci winno się jeszcze dołączać granice, w jakich prawdopodobieństwa rzeczywiste się zawierają, ale dotąd w zwyczaj to nie weszło.

Tak więc, kompletny obraz tablicy śmiertelności daje nam następująca

Postać IV.

Wiek	Liczba żyjących	Liczba zmarłych (w ciągu roku)	Prawd. śmierci (w ciągu roku)
0	λ_0	$\tau_0=\lambda_0-\lambda_1$	$q_0=\frac{\tau_0}{\lambda_0}$
1	λ_1	$\tau_1=\lambda_1-\lambda_2$	$q_1=\frac{\tau_1}{\lambda_1}$
2	λ_2	$\tau_2=\lambda_2-\lambda_3$	$q_2=\frac{\tau_2}{\lambda_2}$
3	λ_3	$\tau_3=\lambda_3-\lambda_4$	$q_3=\frac{\tau_3}{\lambda_3}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
x	λ_x	$\tau_x=\lambda_x-\lambda_{x+1}$	$q_x=\frac{\tau_x}{\lambda_x}$

Najczęściej używanym kształtem dla tablic śmiertelności jest postać III, z której łatwo pozostałe dwie kolumny postaci IV się obliczają, słusznie zatem za zbyteczne uważanemi być mogą. Według takiej postaci ułożona tablica śmiertelności przedstawia porządek, w jakim podana w tablicy liczba osób danego wieku wymiera; w końcu wszystkie osoby wymrzeć muszą, czyli gdy wiek, stanowiący granicę życia ludzkiego, oznaczymy przez g, $\lambda_g=0$. Skutkiem tego, jeśli tablicę ułożoną według postaci IV rozciągniemy aż do granicy życia ludzkiego, suma wszystkich zmarłych, podana w kolumnie 3-ej, musi być równą λ_0. Istotnie

$$\left\{\begin{aligned} &\tau_0+\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_{g-1}= \\ &=(\lambda_0-\lambda_1)+(\lambda_1-\lambda_2)+(\lambda_2-\lambda_3)+\ldots+(\lambda_{g-2}-\lambda_{g-1})+ \\ &\qquad+(\lambda_{g-1}-\lambda_g)=\lambda_0. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Używając, znanego nam już (z przypisku w art. 8), skróconego sposobu oznaczania sum, wyrażenie (31) można napisać w kształcie

$$\sum_{x=0}^{x=g-1}\tau_x=\sum_{x=0}^{x=g-1}(\lambda_x-\lambda_{x+1})=\lambda_0. \tag{31'}$$

Jeżeli suma rozciąga się od wieku wskazanego przez znaczek wyrażenia objętego symbolem sumowania Σ, jak obecnie od wieku 0, do granicy życia ludzkiego, to granic sumowania, dla krótkości, wcale wypisywać nie potrzeba. Stosując to skrócenie do obecnego przypadku, w miejsce (31') można napisać wprost

$$\Sigma\tau_0 = \Sigma(\lambda_0 - \lambda_1) = \Sigma\lambda_0 - \Sigma\lambda_1 = \lambda_0. \tag{31''}$$

W ogóle dla wieku x

$$\Sigma\tau_x = \Sigma(\lambda_x - \lambda_{x+1}) = \Sigma\lambda_x - \Sigma\lambda_{x+1} = \lambda_x. \tag{32}$$

19. ŚREDNIA I PRAWDOPODOBNA DŁUGOŚĆ ŻYCIA. Czasami do tablic śmiertelności bywają dołączane kolumny z t. z. średnią i prawdopodobną długością życia.

Niech λ_x oznacza liczbę osób żyjących w wieku lat x, podaną w tablicy śmiertelności. Z tych λ_x osób umiera w 1-ym roku τ_x, w 2-im τ_{x+1}, i t. d. aż do wymarcia wszystkich.

Osoby, umierające w ciągu roku, nie umierają jednocześnie, lecz w różnych chwilach roku—jedne zaraz na początku, inne w różnych dniach różnych miesięcy, inne dopiero przy końcu roku. Gdybyśmy, wziąwszy pod uwagę bardzo wielką liczbę osób zmarłych, zsumowali liczby dni, przeżyte — w ciągu roku, w którym śmierć nastąpiła—przez każdą osobę zmarłą i otrzymaną sumę podzielili przez liczbę osób zmarłych, otrzymalibyśmy na iloraz około 180 dni, czyli około pół roku, co dowodzi, że wszystkie zmarłe w danym roku osoby przybliżenie przeżyły, średnio biorąc, po pół roku.

Można więc, bez wielkiego błędu, przyjąć iż osoby zmarłe w pierwszym roku przeżyły średnio $\frac{1}{2}\tau_x$ lat, zmarłe w 2-im roku przeżyły średnio $\left(1+\frac{1}{2}\right)\tau_{x+1}$ i t. d., czyli wszystkie λ_x osób, aż do chwili wymarcia, przeżyją średnio lat

$$\frac{1}{2}\tau_x + \left(1+\frac{1}{2}\right)\tau_{x+1} + \left(2+\frac{1}{2}\right)\tau_{x+2} + \ldots \text{ aż do końca tablicy} = \frac{1}{2}\Sigma\tau_x +$$
$$+\left(\tau_{x+1} + 2\tau_{x+2} + \ldots\right) = \frac{1}{2}\Sigma\tau_x + (\lambda_{x+1} - \lambda_{x+2}) + 2(\lambda_{x+2} - \lambda_{x+3}) +$$
$$+ 3(\lambda_{x+3} - \lambda_{x+4}) + \ldots = \frac{1}{2}\lambda_x + \Sigma\lambda_{x+1} = \Sigma\lambda_x - \frac{1}{2}\lambda_x.$$

Skoro zaś λ_x osób przeżyją lat $\Sigma\lambda_x - \frac{\lambda_x}{2}$, zatem każda z nich, średnio biorąc, przeżyje

$$\frac{\Sigma\lambda_x - \frac{\lambda_x}{2}}{\lambda_x} = \frac{\Sigma\lambda_x}{\lambda_x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + p_{x,1} + p_{x,2} + p_{x,3} + \ldots \text{ do końca} \tag{33}$$

tablicy śmiertelności, gdzie $p_{x,1}; p_{x,2}; p_{x,3}; \ldots$ oznaczają prawdopodobieństwa, z jakiemi osoba x letnia przeżyje rok, dwa, trzy lata, i t. d.

Rezultat, otrzymany z powyższego wyrażenia, zowie się średnią długością życia osoby x letniej.

Z pośród tej samej liczby λ_x osób żyjących, po upływie pewnego czasu, pozostanie przy życiu tylko połowa, t. j. $\frac{1}{2}\lambda_x$. Liczba lat, po upływie których pozostanie przy życiu tylko połowa pierwotnie żyjących, nazywa się prawdopodobną długością życia rzeczonych osób.

Prawdopodobieństwo, z jakiem dana osoba przeżyje ową prawdopodobną długość życia $= \frac{{}^1/_2 \lambda_x}{\lambda_x} = \frac{1}{2}$, t. j. każda osoba ma równą szansę nie dożyć jak i przeżyć swoją prawdopodobną długość życia.

Wiele osób jest przekonania, że wszystkie rachunki ubezpieczeń życiowych opierają się na średniej długości życia człowieka. Pojęcie takie jest z gruntu fałszywe, gdyż średnia długość życia, przyjęta za podstawę do obliczeń, prowadzi do błędnych rezultatów, jak się o tem w rozdziale IX przekonamy. Ani średnie, ani prawdopodobne życie nie ma żadnego znaczenia dla ubezpieczeń życiowych; mają tylko pewne, acz ograniczone, znaczenie przy porównawczych badaniach statystycznych nad śmiertelnością.

20. Istotne znaczenie tablic śmiertelności. Rozważaną w art. 16 grupę osób przyjęliśmy za zupełnie jednorodną pod względem wieku, stanu zdrowia, warunków bytu i t. p. i na tej zasadzie, trafiające się pomiędzy niemi wypadki śmierci słusznie przyjęliśmy za zdarzenia przypadkowe. Oznaczywszy dla takiej grupy prawdopodobieństwo śmierci, można się spodziewać, iż, mając inną grupę, złożoną z osób żyjących w takich samych jak poprzednie warunkach, znalezione z pierwszej grupy prawdopodobieństwo śmierci stosować się będzie i do drugiej, a tem samem, że z góry — w granicach prawami rachunku prawdopodobieństwa określonych — przewidzieć można, ile osób z tej drugiej grupy umrze w ciągu roku, a ile rok przeżyje.

W praktyce jednak z tak jednorodnemi grupami ludzi się nie spotykamy, ani więc wypadków śmierci za zdarzenia czysto przypadkowe uważać, ani prawdopodobieństwa oznaczonego z jednej grupy, z matematyczną ścisłością, do innej stosować nie można.

Biorąc np. pod uwagę grupę ludzi, zamieszkujących jakiś kraj, prowincyę lub miasto, widzimy w niej osoby różnego wieku i płci, w różnym stanie zdrowia pozostające, różnego zajęcia, rozmaicie zamożne i t. d. Rozmaitość wieku, zamożności, stanu zdrowia, zajęcia, sprowadza różną podatność do rozmaitych chorób i za niemi idącej śmierci. Wynika stąd, że w takiem zbiorowisku osób różne jednostki rozmaite posiadają szanse życia lub śmierci, a tem samem, że zachodzą tu przyczyny niweczące do pewnego stopnia prawo przypadkowości.

Dalej, w różnych latach różne są warunki bytu i zdrowotności; raz trafi się nieurodzaj, innym razem rozwinie się jaka epidemia, nastąpi wojna lub jakie inne spadnie na ludzkość nieszczęście, t. j. zajdą przyczyny rozstrajające prawo czystej przypadkowości. Skutkiem tego, prawdopodobieństwo śmierci, wyprowadzone z obserwacyj dokonanych przez pewien szereg lat, może się nie sprawdzić w latach innych. Wszystko powyżej powiedziane stwierdza statystyka i rachunki na niej oparte.

Z badań moich, przeprowadzonych nad śmiertelnością mieszkańców miasta Warszawy, za lata od 1888 do 1891 r., drukowanych w różnych numerach czasopisma „Zdrowie", przyszedłem do następujących rezultatów:

w 1888 r., z 453 152 mieszkańców, umarło 11 042,
„ 1889 „ 458 605 „ „ 13 049,
„ 1890 „ 467 406 „ „ 11 357,
„ 1891 „ 475 854 „ „ 10 724.

Obliczając, zgodnie z art. 15, rzeczywiste i teoretyczne zboczenie, odnajdujemy spółczynnik zboczeń = 9,6, który, jako znacznie większy od 1, każe się domyślać jakichś przyczyn, rozstrajających prawo przypadkowości. Istotnie, różnorodność osób, panująca w 1889 r. pomiędzy dziećmi ospa i inne, w dalszych latach, choroby pomórkowe w zupełności potwierdzają wskazania rachunku.

Znaleziony spółczynnik względnie jest mały, bo i przyczyny nie były zbyt silne. Czasami wszakże spółczynnik zboczeń w śmiertelności ogólnej dochodzi do znaczniejszych rozmiarów. Dormoy oblicza dla Francyi za lata od 1849 do 1858 spółczynnik = 86, za lata od 1859 do 1868 spółczynnik = 63. Panujące od czasu do czasu w owych okresach epidemie, wojny i nieurodzaje usprawiedliwiają do pewnego stopnia tak znaczną wysokość spółczynnika zboczeń.

Biorąc grupę osób nie tak pod każdym względem różnolitą jak ogół ludności, lecz bardziej jednorodną np. więcej do siebie wiekiem zbliżone osoby, otrzymamy bardziej do jednostki przybliżony spółczynnik, zwłaszcza jeśli ludzie tego wieku nie są nazbyt wrażliwi na różne niebezpieczne wpływy, jak np. bardzo młode dzieci na choroby pomórkowe lub bardzo starzy ludzie na różne dolegliwości organów oddychania i trawienia, i jeżeli we wziętych pod uwagę latach nie było wojny, epidemii lub innych tym podobnych przyczyn zaburzających prawo przypadkowości.

W ogóle, im grupa jest jednorodniejszą i warunki, w jakich żyje, jednostajniejsze, tem bardziej śmiertelność trzymać się będzie prawa przypadkowości i, co za tem idzie, tem większe mieć będziemy prawo do przenoszenia z jednej grupy obliczonego prawdopodobieństwa śmierci na inne, w podobnych warunkach pozostające zbiorowisko ludzi.

To też dążnością badaczów jest możliwe specyalizowanie tablic śmiertelności. Przedewszystkiem grupuje się ludzi według wieku, gdyż wiek bardzo silnie i bardzo widocznie wpływa na śmiertelność. Obok wieku uwzględnia się często, stosownie do celu badań, i inne okoliczności. Obok więc tablic śmiertelności dla ogółu ludności, formowanych dla celów państwowych, społecznych, zdrowotnych i t. p., układa się dla celów specyalnych, praktycznych lub naukowych, oddzielne tablice dla mężczyzn i kobiet, oddzielne dla różnych zajęć, dla osób zbliżonych do siebie pod względem stanu zdrowia i t. p.

Towarzystwa ubezpieczeń życiowych, obok wieku, zwracają przedewszystkiem uwagę na zdrowie chcących się ubezpieczyć osób i dla tego poddają kandydatów pod ścisłą rewizyę lekarską, aby otrzymać grupy możliwie najbardziej pod względem zdrowia zbliżone do tych osób, z obserwacyi których obliczono używane przez towarzystwa tablice. Niektóre zwracają także uwagę i na płeć, a nawet rodzaj zajęcia często wywiera wpływ na przyjęcie lub nieprzyjęcie, albo na obostrzenie warunków ubezpieczenia.

Chociaż trudno pomyśleć, aby najstaranniej nawet dobrana grupa osób była ściśle jednorodną, niemniej jednak, przy wielkiej baczności, można się przynajmniej zbliżyć do tego, aby daną grupę za jednorodną uważać było można, a tem samem, żeby wypadek śmierci, średnio biorąc, dla każdej jednostki tej grupy za jednakowo prawdopodobny przyjąć było można. Możność takiego przyjęcia znajduje poparcie w okoliczności wzajemnego kompensowania się zachodzących pomiędzy osobami różnic. Nieuniknione pomiędzy składającemi grupę osobami różnice w przeciwnych sobie zazwyczaj idą kierunkach — jedne osoby są nieco zdrowsze, inne nieco słabsze od drugich. Otóż, jeżeli grupa jest dość liczna, różnice do pewnego stopnia wzajem się równoważyć mogą i grupa stanowi zbiór osób wprawdzie nie ściśle jednorodnych, ale przeciętnie odpowiadających temu stanowi, jaki ma na myśli lekarz dobierający jednostki, i który za przeciętny stan dla całej grupy, razem uważanej, przyjąć można.

W każdym razie nigdy zapominać nie trzeba, że jakkolwiek ostrożnie i umiejętnie postępowaćbyśmy mogli, zawsze zarówno oznaczenie prawdopodobieństwa śmierci jak i przenoszenie znalezionego prawdopodobieństwa z jednej grupy na inną tylko przybliżonem będzie, skutkiem czego instytucye, opierające swą działalność na tego rodzaju obliczeniach, zawsze na ewentualność pewnych różnic przygotowanemi być powinny. Wkońcu, opierając się na prawie wielkich liczb, pamiętać należy, iż prawdopodobieństwo śmierci tem dokładniej przedstawi istotną śmiertelność, im z liczniejszej grupy osób zostanie obliczone, i tem bliższy do rzeczywistego da rezultat, im do liczniejszej grupy następnie zastosowanem będzie. Dla pojedynczo wziętej osoby, prawdopodobieństwo śmierci lub dożycia żadnego nie ma znaczenia.

21. Najdawniejsze badania śmiertelności. Widzieliśmy w art. 16, że dla oznaczenia prawdopodobieństwa śmierci osób tego samego wieku potrzeba znać liczbę żyjących na początku roku i liczbę z pośród nich zmarłych w ciągu roku, iloraz bowiem otrzymany z podzielenia liczby drugiej przez pierwszą daje szukane prawdopodobieństwo. Sprawa więc oznaczenia prawdopodobieństwa śmierci dla każdego wieku, a tem samem ułożenia tablicy śmiertelności, sprowadza się do zebrania rzeczonych dat dla każdego wieku oddzielnie, czyli staje się przedmiotem statystyki zaludnienia i śmierci.

Statystyką ruchu ludności zajmowano się już w starożytności. W państwie rzymskiem, za panowania Serwiusza Tulliusza, na 578 lat przed Chrystusem, dokonywano już spisów ludności i notowano urodzenia oraz wypadki śmierci, w celach pobierania rozmaitego rodzaju podatków. Z takich to spisów zapewne sławny Ulpian, w 170 roku po Chrystusie, ułożył tablicę średniej długości życia ludzkiego, mającej wynosić: dla 20-o letnich — lat 30, dla

40-o letnich—19, dla 50-o letnich – 9, dla 60-o letnich—5. Wszystkie te cyfry są około 10-u lat niższe od liczb dziś za średnią długość życia przyjmowanych.

W wiekach średnich, duchowieństwo więcej lub mniej regularnie notowało urodzenia i zejścia. Wspominają o regularnie prowadzonych spisach w parafiach Augsburga i Wrocławia na początku wieku XVI-go; następnie, około 1538 roku w Anglii, na skutek rozporządzenia rządu.

W 1592 r., z powodu panującej w Londynie zarazy, zorganizowano statystykę pogrzebową, w której notowano wiek zmarłych; statystyka ta prowadzoną była dalej i po przejściu zarazy. Z tego tytułu zaczęto nawet wydawać pismo tygodniowe p. t. „Spis urodzeń i śmierci", które z początku zwróciło na siebie baczną uwagę ogółu.

W 1662 r. Sir William Petty wydał dzieło o arytmetyce politycznej i dołączył do niego niektóre szczegóły o ludności Londynu. Wkrótce potem John Graunt, radny miasta Londynu, opublikował małą książeczkę p. t. „Naturalne i polityczne obserwacye nad miejscowymi spisami urodzeń i śmierci". Wrażenie, jakie powyższe dziełko na spółczesnych wywarło, było bardzo silne, a skutki nadzwyczaj w następstwa płodne.

Król Karol II mianował Graunt'a członkiem Royal Society i kapitanem milicyi, a Ludwik XIV, któremu przez poselstwo rzeczona książeczka była przedstawioną, polecił francuskim parafiom prowadzić spisy według wzorów podanych przez Graunt'a.

Prawie jednocześnie holenderski statysta i matematyk de Witt (+1672), przekonany z jednej strony o zgubności kombinacyj ubezpieczeniowych na grze opartych, a z drugiej pobudzony przez prace Fermat'a i Pascal'a nad rachunkiem prawdopodobieństwa, polecił spisy urodzeń i śmierci z różnych miast holenderskich zgromadzić i na podstawie zdobytego materyału w miejsce tontin wprowadził ubezpieczenie rent. De Witt'a uważają niektórzy za twórcę nowożytnej statystyki śmiertelności.

Prace Petty'ego i Graunt'a, jak powiedzieliśmy, zainteresowały wielu, ale w sposób głębszy zajęły umysł William'a Assheton'a (+1711 r.). Przyszła mu mianowicie myśl, że jakkolwiek życie jednostki, bez wątpienia, jest sprawą niepewną, to jednak, gdy zbiorowe życie wszystkich za całość uważać będziemy, każde pojedyncze życie będzie oznaczoną częścią całości, a tem samem dla każdego pojedynczego życia również pewna przeciętna trwałość oznaczoną być może. Gdy jedno wcześniej zgaśnie, inne za to dłużej trwać będzie. Była to myśl trafna, dająca punkt wyjścia do racyonalnego pojmowania praw śmiertelności.

Wprawdzie zorganizowana, z inicyatywy Assheton'a, instytucya ubezpieczeniowa ostatecznie zbankrutowała, nie była temu jednak winna idea, lecz niedokładne cyfry statystyczne, na jakich Assheton się oparł.

22. Tablica śmiertelności i metoda Halley'a. Gdy na zachodzie Europy sprawa śmiertelności tak żywo pobudziła umysły do działalności, w bardziej na wschód położonym Wrocławiu, niejaki Dr. Caspar Neumann zagłębiał się w parafialnych listach zejść i urodzeń i w r. 1692 wydał dziełko, w którem pomieścił swe gruntowne poszukiwania nad śmiertelnością wrocławską za lata od 1687 do 1691 r. Zebrane przez siebie 5869 wypadków śmierci uporządkował według miesięcy, wieku i płci, porównał je z urodzeniami, skąd się pokazało, że liczba tych ostatnich przewyższa nieco liczbę wypadków śmierci.

Praca Neumann'a zwróciła na siebie uwagę ówczesnych uczonych. Królewskie Towarzystwo Nauk w Londynie oddało pracę Neumann'a do rozpatrzenia sławnemu matematykowi i astronomowi Halley'owi, który z podanych przez Neumann'a dat ułożył pierwszą tablicę śmiertelności, wydrukowaną w 1693 r., w tomie XVII „Philosophical Transactions" w numerze 196, za styczeń. Stanowi ona część składową pracy, pomieszczonej w tem piśmie p. t. „An Estimate of the Degrees of Mortality of Mankind, drawn from the curious Tables of the births and funerals at the City of Breslaw". Tablica składa się z czterech kolumn: z wieku, z liczby żyjących, liczby zmarłych i prawdopodobnej długości życia. Taka forma tablic śmiertelności została następnie przyjętą powszechnie i dla tego słusznie Halley'a za wynalazcę tablic śmiertelności uważają.

Przewodnią myślą Halley'a, przy układaniu wzmiankowanej tablicy, było następujące rozumowanie, w którem przez T_x oznaczać będziemy rzeczywiście zmarłą, przez L_x rzeczywiście żyjącą liczbę osób x letnich; przez τ_x w tablicy podaną liczbę zmarłych, przez λ_x w tablicy podaną liczbę żyjących osób x letnich.

Skoro 5869, ogólnie biorąc ΣT_0 osób, wynotowanych przez Neumann'a, przyszło w różnych czasach na świat i z tych urodzonych umarło: w wieku lat od 0 do 1, T_0 osób; od 1 do 2, T_1; od 2 do 3 lat, T_2 i t. d. aż do 90-u lat, w którym to roku życia wymarli wszyscy, to, gdy za liczbę urodzonych przyjmiemy np. 1000 osób, w 1-ym roku życia umrze z nich $\tau_0 = T_0 \times \frac{1000}{\Sigma T_0}$, w drugim $\tau_1 = T_1 \times \frac{1000}{\Sigma T_0}$ i t. d., w ogóle $\tau_x = T_x \times \frac{1000}{\Sigma T_0}$, gdzie $\frac{1000}{\Sigma T_0}$ jest stałym spółczynnikiem, który oznaczmy, dla krótkości, przez a. Tą drogą postępując, otrzymał Halley tablicę, podaną przez nas na str. 53.

Widzimy z powyższego, że Halley nie brał pod uwagę liczby jednocześnie ze zmarłymi żyjących, lecz poprzestał na samej tylko liczbie zmarłych; z nich dopiero wyprowadził liczbę żyjących każdego wieku. Metoda taka jest błędną i może dać prawidłowe rezultaty tylko przy bardzo szczególnych okolicznościach.

Racyonalnie obliczonem prawdopodobieństwem śmierci, dla osoby x letniej, jak wiemy, jest $\frac{T_x}{L_x}$; prawdopodobieństwo, obliczone z tablicy Halley'a

Wiek	Liczba żyjących	Liczba zmarłych	Prawdopodobna długość życia	Wiek	Liczba żyjących	Liczba zmarłych	Prawdopodobna długość życia	Wiek	Liczba żyjących	Liczba zmarłych	Prawdopodobna długość życia
x	λ_x	τ_x	—	x	λ_x	τ_x	—	x	λ_x	τ_x	—
0	1 000	145	32	30	523	8	27	60	232	10	11
1	855	57	39	31	515	8		61	222	10	
2	798	38	42	32	507	8		62	212	10	
3	760	28	41	33	499	9		63	202	10	
4	732	22	43	34	490	9		64	192	10	
5	710	18	43	35	481	9	24	65	182	10	9
6	692	12	43	36	472	9		66	172	10	
7	680	10		37	463	9		67	162	10	
8	670	9		38	454	9		68	152	10	
9	661	8		39	445	9		69	142	11	
10	653	7	41	40	436	9	21	70	131	11	6
11	646	6		41	427	10		71	120	11	
12	640	6		42	417	10		72	109	11	
13	634	6		43	407	10		73	98	10	
14	628	6		44	397	10		74	88	10	
15	622	6	37	45	387	10	19	75	78	10	4
16	616	6		46	377	10		76	68	10	
17	610	6		47	367	10		77	58	9	
18	604	6		48	357	11		78	49	8	
19	598	6		49	346	11		79	41	7	
20	592	6	34	50	335	11	17	80	34	6	3
21	586	7		51	324	11		81	28	5	
22	579	6		52	313	11		82	23	4	
23	573	6		53	302	10		83	19	4	
24	567	7		54	292	10		84	15	4	
25	560	7	30	55	282	10	14	85	11	3	2
26	553	7		56	272	10		86	8	3	
27	546	7		57	262	10		87	5	2	
28	539	8		58	252	10		88	3	2	
29	531	8		59	242	10		89	1	1	

równa się $\frac{\tau_x}{\lambda_x}$. Aby prawdopodobieństwo, obliczone z tablicy Halley'a, było prawidłowe, winno być

(34)
$$\frac{\tau_x}{\lambda_x} = \frac{T_x}{L_x}.$$

Lecz $\tau_x = a \,.\, T_x$, co podstawiwszy w (34), mamy

$$L_x = \frac{\lambda_x}{a}, \tag{35}$$

a ponieważ

$$\lambda_x = \Sigma\tau_0 - \sum_0^{x-1}\tau_y = a\Sigma T_0 - a\sum_0^{x-1} T_y = a(\Sigma T_0 - \sum_0^{x-1} T_y), \text{ zatem}$$

$$\lambda_x = a\sum_x^{g-1} T_y, \tag{36}$$

gdzie g oznacza granicę życia ludzkiego według danej obserwacyi określoną.

Podstawiwszy (36) w (35), wypada

$$L_x = \frac{a\sum\limits_x^{g-1} T_y}{a} = \sum_x^{g-1} T_y, \tag{37}$$

t. j. aby tablica Halley'a dawała właściwe rezultaty, liczba osób żyjących w wieku x lat powinna być równa sumie liczb zmarłych w wieku począwszy od x lat aż do granicy ludzkiego życia, czyli, rozwijając symboliczne oznaczenie, powinnno być:

$$\left\{\begin{array}{l} L_0 = T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + T_{g-2} + T_{g-1} \\ L_1 = \quad\;\; T_1 + T_2 + \ldots + T_{g-2} + T_{g-1} \\ L_2 = \qquad\quad\;\; T_2 + \ldots + T_{g-2} + T_{g-1} \\ \;.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ L_{g-2} = \qquad\qquad\qquad\;\; T_{g-2} + T_{g-1} \\ L_{g-1} = \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; T_{g-1} \end{array}\right. \tag{38}$$

Prawdopodobieństwo śmierci dla nowonarodzonego dziecka równa się, oczywiście, liczbie zmarłych w wieku od 0 do $1 = T_0$ podzielonej przez liczbę urodzonych. Gdy tę ostatnią liczbę oznaczymy przez U_0, szukane prawdopodobieństwo $= \frac{T_0}{U_0}$; według metody Halley'a $= \frac{T_0}{L_0} = \frac{T_0}{\Sigma T_0}$, skąd

$$U_0 = \Sigma T_0 = T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + T_{g-2} + T_{g-1},$$

t. j. liczba urodzonych w ciągu danego okresu, np. roku, powinna być równa liczbie zmarłych w ciągu tego samego czasu.

Niedość na tem, ale T_{g-1} są zmarłemi osobami z pośród urodzonych przed $g-1$ latami, których liczbę oznaczmy przez U_{g-1}; podobnie T_{g-2} oznacza liczbę zmarłych z pośród U_{g-2} urodzonych przed $g-2$ latami. Jeżeli przypuścimy, że – jak to zazwyczaj bywa – liczba urodzonych w pewnym okresie czasu nie równa się liczbie urodzonych w innym okresie, to trzeba założyć

$$U_{g-2} = \alpha \,.\, U_{g-1}.$$

Skutkiem tego, liczba osób $L'_{g-1}=T'_{g-1}$, jaka z pośród U_{g-2} urodzonych dosięga $g-1$ roku życia, będzie najprawdopodobniej α razy większa od liczby $L_{g-1}=T_{g-1}$ tych osób, które z pośród U_{g-1} urodzonych dożyją tegoż wieku, t. j.

$$T'_{g-1}=\alpha\,.\,T_{g-1},$$

zatem

$$L_{g-2}=T_{g-2}+T'_{g-1}=T_{g-2}+\alpha\,.\,T_{g-1};$$

a ponieważ, według metody Halley'a,

$$L_{g-2}=T_{g-2}+T_{g-1},$$

przeto być powinno $\alpha=1$, czyli liczby urodzonych przed $g-1$ i $g-2$ latami winny być sobie równe.

Podobnie rozumując dla innych lat wieku, przekonamy się, że aby tablica metodą Halley'a ułożona dawała dobre rezultaty, przez całe stulecie: 1-o powinna się corocznie rodzić jednakowa liczba dzieci, 2-o taka sama liczba osób corocznie umierać winna, 3-o prawo śmiertelności nie powinno ulegać zmianie i 4-o przychodźtwo (immigration) i wychodźtwo (émigration) nie powinny mieć miejsca lub dokładnie co do wieku i liczby osób wzajem się równoważyć winny, gdyż w przeciwnym razie oba te czynniki naruszą porządek pod poz. 1-ą i 2-ą zaznaczony.

Żadnemu z powyższych warunków, jak tego dowodzą sprawozdania z ruchu ludności u wszystkich ludów ucywilizowanych, nie czyni się zadość, metoda Halley'a zatem nie może dać właściwych rezultatów i dla tego dziś posiada już tylko historyczne znaczenie.

W swoim czasie jednak praca Halley'a pobudziła wielu do naśladowania; powstało wiele tablic jego metodą ułożonych, jak np. Simpson'a, Süssmilch'a, ułożona w 1746 r., Northampton w 1787 r. i inne.

Niektórzy badacze, jak Euler, Gebhard, Heuschling, Tellkampf i inni starali się poprawić słabe strony metody Halley'a — które zresztą samemu twórcy, zdaje się, były znane — lecz wprowadzone przez nich ulepszenia okazały się złudnemi i żadna z ułożonych w ten sposób tablic nie zyskała poważniejszego znaczenia.

Metoda Halley'a z czasem ustąpić musiała miejsca metodom racyonalniejszym, w których obok liczby zmarłych uwzględnia się i liczbę żyjących.

23. RACYONALNIEJSZE METODY UKŁADANIA TABLIC ŚMIERTELNOŚCI. Chcąc wprost z obserwacyi, w sposób racyonalny, ułożyć tablicę śmiertelności według postaci III (art. 18), należałoby wybrać pewną dostatecznie liczną grupę nowonarodzonych dzieci, obserwować je aż do zupełnego wymarcia wszystkich, notując ile osób z uważanej grupy umiera w wieku od 0 do 1 roku, od 1 do 2-ch lat, od 2-ch do 3-ch i t. d., a tem samem, ile dożyje 1-go, 2-ch, 3-ch, i t. d. lat.

Sposób taki w teoryi przedstawia się bardzo prosto, ale w praktyce napotyka wiele trudności, z których największą stanowi trudność śledzenia każdej osoby przez całe życie, ażeby pochwycić chwilę jej śmierci.

Kosztem ścisłości można tę trudność złagodzić w następujący sposób. Dajmy na to, że w pewnym roku, np. w roku t_0 nowej ery, urodziło się, we wziętej pod obserwacyę miejscowości, U_0 dzieci, zaś w roku następnym, który oznaczmy przez t, urodziło się dzieci U_1.

W ciągu roku t-go umiera pewna liczba T_0 dzieci w wieku od 0 do 1-go roku; pochodzą one w części z liczby U_0, w części z liczby U_1 urodzonych. Jeżeli przypuścimy, że połowa zmarłych pochodzi z liczby U_0, a druga połowa z U_1, to wychodzi na jedno, jakby w ciągu roku zmarłe dzieci pochodziły z liczby $\frac{U_0 + U_1}{2} = L_0$, urodzonych jednocześnie w d. 1 stycznia t-go roku. Założenie takie nie jest, naturalnie, ścisłe i dla tego sposób ten jest tylko przybliżony.

Skoro z pośród L_0 urodzonych d. 1 stycznia t-go roku dzieci, umarło w ciągu roku T_0, to w d. 1 stycznia $(t + 1)$-go roku pozostało przy życiu $L_0 - T_0 = L_1$ dzieci 1-o letnich.

Dzieci zmarłe w ciągu $(t + 1)$-go roku, w wieku od 1-go do 2-ch lat, pochodzą z L_1 jednoletnich, żyjących na początku $(t + 1)$ go roku; gdy ich liczbę oznaczymy przez T_1, w dniu 1 stycznia $(t + 2)$-go roku pozostaje żyjących $L_1 - T_1 = L_2$ dwuletnich.

Postępując w podobny sposób dalej, aż do granicy życia ludzkiego, otrzymamy tablicę:

Dnia 1-go stycznia roku	W wieku lat	Żyje osób	Umarło			Prawdopodobieństwo śmierci w ciągu roku
			w ciągu roku	w wieku lat	osób	
t	0	L_0	t	od 0 do 1	T_0	$\frac{T_0}{L_0}$
$(t + 1)$	1	L_1	$(t + 1)$	„ 1 „ 2	T_1	$\frac{T_1}{L_1}$
$(t + 2)$	2	L_2	$(t + 2)$	„ 2 „ 3	T_2	$\frac{T_2}{L_2}$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.

która jest nie czem innem, jak tylko zwykłej postaci tablicą śmiertelności. Tą drogą ułożona tablica nazywa się tablicą rówieśników, ponieważ wszystkie, dla jej otrzymania, obserwowane osoby przyjmuje się za jednocześnie urodzone, więc w każdej chwili w równym będące wieku.

Opisana metoda, oprócz zaznaczonej z góry nieścisłości, posiada jeszcze inne bardzo słabe strony.

Najprzód, ponieważ za granicę życia ludzkiego można przyjąć 100 lat, zatem, chcąc tą drogą ułożyć tablicę kompletną. posiadać musimy 100-u letnią obserwacyę, co nie łatwo posiąść można.

Następnie, wielu urodzonych w danej miejscowości opuszcza z czasem swe strony rodzinne, a na ich miejsce napływają inne, z innych okolic, osoby — nie w tej samej liczbie, jaka wybyła. Te ostatnie umierając w obserwowanej miejscowości, zostają objęte księgami zejść, skutkiem czego liczba zmarłych nie jest taką, jakąby była, gdyby ani wychodźtwo, ani przychodźtwo nie miało miejsca.

Wreszcie, chociażby wszystkie powyższe trudności zostały usunięte, otrzymana tablica przedstawiałaby nam obraz śmiertelności grupy osób dawniej żyjących, t. j. dawałaby wyobrażenie nie o śmiertelności obecnej, lecz o tej, jaka dawniej miała miejsce: przed 100-u laty dla nowonarodzonych, przed 99-u laty, dla 1-o letnich, i t. d. Tymczasem z biegiem lat wzrasta cywilizacya, ze wzrostem cywilizacyi zmieniają się warunki bytu społeczeństw, a z nimi i śmiertelność. Chociaż więc w taki sposób ułożona tablica może mieć wielkie dla badań porównawczych znaczenie, to jednak służyć nie może za podstawę do praktycznych zastosowań w czasie obecnym, dla tych bowiem potrzeba tablicy dającej obraz również obecnej śmiertelności.

Tablicę uwydatniającą obecną śmiertelność, przy pomocy urodzonych w ciągu pewnego szeregu lat, możnaby otrzymać odwracając poprzedni sposób postępowania.

Przypuśćmy, że mamy liczby corocznie urodzonych w ciągu pewnego bardzo długiego okresu czasu, np. w ciągu 100-u lat; że mianowicie, w obserwowanej miejscowości, urodziło się:

w ciągu t-go roku U_0 dzieci,
,, $(t-1)$-go ,, U_1 ,, ,
,, $(t-2)$-go ,, U_2 ,, ,
,, $(t-3)$-go ,, U_3 ,, , i t. d.

Wtedy, na tej samej zasadzie jak poprzednio, można przybliżenie przyjąć, jakoby d. 1 stycznia t-go roku urodziło się $\frac{U_0+U_1}{2} = U_t$ dzieci,

,, $(t-1)$,, ,, $\frac{U_1+U_2}{2} = U_{t-1}$,,
,, $(t-2)$,, ,, $\frac{U_2+U_3}{2} = U_{t-2}$,, i t. d.

Przypuśćmy dalej, że w ciągu t-go roku umarło:

w wieku od 0 do 1 roku T_0 osób,
,, ,, 1 ,, 2 lat T_1 ,,
,, ,, 2 ,, 3 ,, T_2 ,, i t. d.

Zmarli w wieku od 0 do 1 roku pochodzą z pośród U_t urodzonych w d. 1 stycznia t-go roku; zmarli w wieku od 1 do 2-ch lat — z pośród U_{t-1};

urodzonych; zmarli w wieku od 2-ch do 3-ch lat—z pośród U_{t-2} urodzonych, i t. d.

Stosunki $\frac{T_0}{U_t}, \frac{T_1}{U_{t-1}}, \frac{T_2}{U_{t-2}}, \ldots$ stanowią prawdopodobieństwa, z jakiemi nowonarodzony umrze w wieku lat od 0 do 1, od 1 do 2, od 2 do 3, i t. d. Oznaczmy je przez $q_0^{(1)}$, $q_1^{(2)}$, $q_2^{(3)}, \ldots$

Suma $q_0^{(1)}+q_1^{(2)}=q_0^{(2)}$ przedstawia prawdopodobieństwo, z jakiem nowonarodzone dziecko umrze w wieku od 0 do 2-ch lat; $q_0^{(1)}+q_1^{(2)}+q_2^{(3)}=q_0^{(2)}+$ $+q_2^{(3)}=q_0^{(3)}$ prawdopodobieństwo, z jakiem umrze w wieku od 0 do 3-ch lat, i t. d.

Następnie, $1-q_0^{(1)}$ stanowi prawdopodobieństwo, z jakiem nowonarodzone dziecko dożyje roku; $1-q_0^{(2)}$ prawd., z jakiem dożyje 2-ch lat; $1-q_0^{(3)}$ prawd., z jakiem dożyje 3-ch lat, i t. d.

Że zaś te ostatnie prawdopodobieństwa wyrażają także iloczyny: p_0, $p_0\,p_1$; $p_0\,p_1\,p_2$; . . ., podane w art. 18, t. j.

$$
\begin{aligned}
&1-q_0^{(1)}=p_0\\
&1-q_0^{(2)}=p_0\cdot p_1\\
&1-q_0^{(3)}=p_0\cdot p_1\cdot p_2\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&1-q_0^{(x)}=p_0\cdot p_1\cdot p_2\cdots p_{x-1},
\end{aligned}
$$

przeto przyszliśmy do wielkości podanych w kolumnie 2-ej postaci II art. 18-go, za pomocą których z łatwością ułożyć się daje tablica śmiertelności tego roku, z którego użyjemy liczb zmarłych osób każdego wieku.

Ta metoda posiada nad poprzednią tę, dla praktycznych zastosowań, wyższość, że może dać obraz śmiertelności spółczesnej i nie wymaga dat, odnoszących się do liczby zmarłych w ciągu ubiegłego wieku, tylko do liczby rodzących się corocznie; zaś liczbom dawniej urodzonych bardziej ufać można, aniżeli liczbom zmarłych z podziałem na wiek. Nieścisłość jednak hipotezy, iż połowa liczby urodzonych w ciągu dwóch sąsiednich lat równoważy się z liczbą jednocześnie urodzonych w połowie owego dwuletniego okresu, osłabia wartość i tej metody, a wpływ przychodźtwa i wychodźtwa stanowi równie obfite jak w poprzedniej metodzie źródło błędów.

Tablicę spółczesnej śmiertelności najłatwiej ułożyć można za pomocą spisu ludności w połączeniu ze śmiertelnością roku bezpośrednio po spisie ludności następującego. Sposób ten nosi nazwę metody bezpośredniej (méthode directe).

Spis ludności daje liczbę osób żyjących w chwili dokonywania spisu z podziałem na wiek, statystyka śmiertelności dostarcza liczb zmarłych każdego wieku w ciągu roku bezpośrednio po spisie następującego; stosunek liczby zmarłych w danym wieku do liczby żyjących w tymże wieku, w chwili dokonywania spisu, stanowi prawdopodobieństwo śmierci, a zbiór rocznych prawdopodobieństw śmierci dla każdego wieku pozwala ułożyć tablicę śmiertelności.

Tablicę ułożoną przy pomocy metody bezpośredniej można nazwać tablicą śmiertelności spółczesnej, gdyż pochodzi z dat zebranych z osób jednocześnie żyjących.

Metoda bezpośrednia jest najlepszą z dotąd znanych: daje śmiertelność spółczesną, przychodźtwo i wychodźtwo, z powodu krótkiego okresu obserwacyjnego, mały wpływ na rezultat wywierają i dane statystyczne mogą być względnie bardzo ścisłe, ponieważ obecnie rozporządzamy takimi środkami, jakimi dawniejsi statystycy posiłkować się nie mogli. Słabszą stronę tej metody stanowią trudności określenia wieku żyjących i zmarłych, lecz i te, przy odpowiednio prowadzonej statystyce, dają się usunąć, jak to zobaczymy w następnym artykule.

Mimo wszystko, nie podobna przypuścić, aby i tu nie zakradły się błędy: i spis ludności może być nie zupełnie dokładnie wykonany i dane o śmiertelności nie zupełnie rzeczywistości odpowiadać mogą. Dla tego, do ogólnej reguły bywają czasami wprowadzane pewne modyfikacye, celem usunięcia, a przynajmniej zmniejszenia przewidywanych niedokładności.

Tak np. znany angielski statystyk Dr. Farr proponuje w IX tomie „Journal of the Institute of Actuaries" następujący sposób. Ponieważ zadeklarowany wiek osób żyjących i zmarłych może być niedokładny tylko o lat kilka na plus lub minus, zatem cyfry odnoszące się np. do wieku od 15 do 25 lat są dokładniejsze od cyfr podanych dla pojedynczych lat: 15, 16, 17, i t. d Gdy więc liczbę zmarłych w wieku od lat 15 do 25 podzielimy przez liczbę żyjących w tychże granicach wieku, to otrzymamy dokładniejsze prawdopodobieństwo śmierci dla przeciętnego wieku, dla lat 20, aniżeli gdybyśmy użyli liczb bezpośrednio przez spis i statystykę śmiertelności dla lat 20-u podanych. Takim samym sposobem można otrzymać prawdopodobieństwo śmierci dla lat 30, 40, 50, i t. d. Prawdopodobieństwa dla lat pośrednich 21, 22, i t. d. proponuje Farr obliczać za pomocą interpolacyi, opartej na hipotezie, że prawdopodobieństwo śmierci, począwszy od pewnego wieku, zwiększa się z roku na rok w stosunku geometrycznym. Metodę swoją zastosował Farr do Anglii i sporządził w 1860 r. tablicę, znaną pod jego imieniem.

Zamiast uciekać się do hipotezy, celem wykonania interpolacyi dla lat pośrednich: 21, 22, 23 i t. d., lepiej byłoby użyć tego samego sposobu co i dla 20-o, 30-o, 40-o, i t. d. letnich, gdyż np. wiek 21 lat jest tak samo średni dla 16 i 26, jak 20 dla 15 i 25. Tego ostatniego sposobu, rozumie się, można użyć o tyle tylko, o ile posiadamy dane dla każdego wieku oddzielnie.

Metoda bezpośrednia używa się stale we Francyi do formowania ogólnych tablic śmiertelności po każdym spisie ludności, które się tam co lat 5 uskuteczniają. Za liczbę żyjących w pewnym wieku przyjmuje się średnia z liczby żyjących w tym wieku podczas bezpośrednio po sobie następujących dwóch spisów; za liczbę zmarłych w tymże wieku, średnia z liczby zmarłych w przeciągu 5-u lat dzielących oba spisy od siebie.

Ostatnio użyto nawet do tego celu 9-u spisów. Odnośną tablicę, wyjętą z „Annuaire pour l'an 1893, publié par le Bureau des longitudes" podajemy w tablicy II (kol. 6 i 7), pomieszczonej przy końcu niniejszej książki. Zastanawia w niej ogromna śmiertelność dzieci w pierwszym roku życia—tak wielka, że mimo powagi źródła, z którego tablicę zaczerpnąłem, miałem wątpliwość, czy coś podobnego może mieć miejsce. Wątpliwość moją zwiększyła tablica z 1861 — 1865 r., podana przez Dormoy, według której z 1000 nowonarodzonych dożywa 1-go roku 801, a nie 401 resp. 416, jak podaje „Annuaire pour l'an 1893." — Chcąc kwestyę roztrzygnąć, odniosłem się listownie do p. Guieysse (Président de la Société des Actuaires français), który omawianą tablicę wydawcom ,,Annuaire'a" zakomunikował, z zapytaniem, czy nie zaszła tu jaka pomyłka. Odpowiedź brzmiała: ,,Quant à la mortalité des enfants, elle est malheureusement excessive!"

Użycie danych śmiertelności z więcej niż jednego roku jest konieczne, ponieważ śmiertelność jednego roku może być wyjątkowo korzystną lub niekorzystną, skutkiem czego ułożona na podstawie takich dat tablica również dawałaby za korzystne rezultaty lub naodwrót. Tymczasem w ciągu większej liczby lat, szczególne przypadki do pewnego stopnia wzajem się znoszą i ostatecznie wypada stan bardziej, aniżeli z jednego roku do rzeczywistego zbliżony. Z drugiej jednak strony trzeba także unikać użycia za wielu lat, albowiem wpaśćby można w drugą ostateczność, mianowicie możnaby otrzymać śmiertelność przestarzałą, nie odpowiadającą obecnemu położeniu.

Szczególniejszą także uwagę zwrócić wypada na śmiertelność dzieci, zwłaszcza w pierwszym roku ich życia. Śmiertelność pierwszego roku rozkłada się bardzo niejednostajnie. W pierwszym miesiącu życia jest nadzwyczaj wysoka, w drugim już mniejsza i dalej maleje szybko w miarę jak dzieci starszemi się stają. Dla dzieci zatem w pierwszym roku życia potrzeba oznaczać śmiertelność miesięczną, a gdyby to trudnem do wykonania było, przynajmniej kwartalną, albo chociaż półroczną.

24. Prace Knapp'a i Zeuner'a. Słabą stronę opisanych w poprzednim artykule metod formowania tablic śmiertelności rówieśników i spółczesnych stanowi trudność oznaczania wieku osób żyjących i zmarłych.

I tak—dla sformowania tablicy śmiertelności rówieśników, bierzemy liczbę zmarłych w ciągu roku t-go, w wieku np. od x do $x+1$ lat, lecz z jaką liczbą nowonarodzonych mamy tę liczbę zmarłych porównać?

Gdyby dzieci rodziły się tylko każdego 1-go styeznia, należałoby liczby zmarłych w ciągu t-go roku, w wieku od x do $x+1$ lat, porównać z liczbą urodzonych d. 1 stycznia $(t-x)$-go roku, gdyż—przy założeniu, że ani przychodźtwo, ani wychodźtwo nie ma miejsca—tylko z tej liczby urodzonych pochodzić one mogą. Skoro jednak dzieci nie rodzą się 1-go stycznia, lecz w różnych dniach roku, przeto osoby zmarłe w ciągu t-go roku, w wieku od x do $x+1$ lat, mogą pochodzić zarówno z pośród urodzonych w ciągu $(t-x)$-go jak i w ciągu $(t-x-1)$-go roku. W jaki więc sposób zdeterminować liczbę nowonarodzonych, z którą zaobserwowaną liczbę zmarłych porównać trzeba? W art. 23 za taką liczbę przyjęliśmy średnią z liczby urodzonych w ciągu $(t-x)$-go i $(t-x-1)$-go roku, ale było to tylko przybliżenie, niewystarczające gdy chodzi o ścisłość zupełną.

Podobnie rzecz się ma i przy formowaniu tablic śmiertelności spółczesnych metodą bezpośrednią. Spis ludności wykazać może, ile osób żyje w wieku od x do $x+1$, od $x+1$ do $x+2$, od $x+2$ do $x+3$ lat, i t. d.; statystyka śmiertelności obliczyć jest w stanie, ile osób w ciągu roku umarło w wieku od x do $x+1$ lat, od $x+1$ do $x+2$, od $x+2$ do $x+3$, i t. d. Ale osoby zmarłe, np. w wieku od $x+1$ do $x+2$ lat, nie pochodzą z samych tylko żyjących podczas spisu w podobnych granicach wieku; przeciwnie mogą one pochodzić zarówno z żyjących w wieku od $x+1$ do $x+2$ jak i z żyjących w wieku od x do $x+1$, gdyż osoba, której wiek, podczas spisu, jest blizki $x+1$ lat, może w roku bezpośrednio po spisie następującym umrzeć dopiero po skończeniu $x+1$ lat, czyli zostanie zaliczoną do grupy zmarłych w wieku od $x+1$ do $x+2$, chociaż podczas spisu zaliczoną została do grupy żyjących w wieku od x do $x+1$ lat.

Chodzi więc o to, w jaki sposób spisy ludności i statystykę śmiertelności prowadzić należy, aby można było otrzymać materyał podatny do odszukania takich cyfr, któreby pozwoliły ściśle powyżej opisane subtelności uwzględnić przy formowaniu tablic.

Zadanie to rozwiązali, drogą analizy matematycznej, Dr. G. F. Knapp w dziele: „Über die Ermittlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungs—Statistik” (Lipsk, 1868 r.) i Dr. Gustav Zeuner w dziele „Abhandlungen aus der Mathematischen Statistik” (Lipsk, 1869 r.). Oba powyższe dzieła stanowią, mojem zdaniem, epokę w dziejach teoryi statystyki śmiertelności.

Knapp w pracy swej ma głównie na uwadze tablicę rówieśników, Zeuner tablicę spółczesnych, układaną metodą bezpośrednią; że zaś dla ubezpieczeń życiowych drugiego rodzaju tablice mają większe znaczenie, zatem opiszemy tu, w sposób możliwie przystępny, metodę Zeuner’a.

Przypuśćmy, że spis ludności, odbyty d. 1-go stycznia t-go roku, wykazał ${}^{t-x-1}_{t}\mathrm{L}_x^{(x+1)}$ osób, żyjących w wieku od x do $x+1$ lat; osoby te pochodzą, oczywiście, z pośród urodzonych w $(t-x-1)$-ym roku, co oznaczyliśmy górnym znaczkiem po lewej stronie litery L. Przypuśćmy dalej, że statystyka śmiertelności wykazała ${}_{t-1}\mathrm{T}_x^{(x+1)}$ zmarłych w wieku od x do $x+1$ lat, w ciągu $(t-1)$-go roku, i ${}_{t}\mathrm{T}_x^{(x+1)}$ zmarłych w tymże wieku, w ciągu t-go roku. Zmarli w ciągu $(t-1)$-go roku, w wieku od x do $x+1$ lat, pochodzą z pośród urodzonych w ciągu $(t-x-2)$-go i $(t-x-1)$-go roku; zmarli w tymże wieku, w ciągu t-go roku, pochodzą z urodzonych w ciągu $(t-x-1)$-go i $(t-x)$-go roku. Odnośne liczby zmarłych oznaczmy przez

$$ {}^{t-x-2}_{t-1}\mathrm{T}_x^{(x+1)},\ {}^{t-x-1}_{t-1}\mathrm{T}_x^{(x+1)},\ {}^{t-x-1}_{t}\mathrm{T}_x^{(x+1)},\ {}^{t-x}_{t}\mathrm{T}_x^{(x+1)},\ \text{tak, że} $$

$$ {}_{t-1}\mathrm{T}_x^{(x+1)} = {}^{t-x-2}_{t-1}\mathrm{T}_x^{(x+1)} + {}^{t-x-1}_{t-1}\mathrm{T}_x^{(x+1)}, $$

$$ {}_{t}\mathrm{T}_x^{(x+1)} = {}^{t-x-1}_{t}\mathrm{T}_x^{(x+1)} + {}^{t-x}_{t}\mathrm{T}_x^{(x+1)}.\ (*) $$

(*) Znaczki po stronie prawej wskazują granice wieku, w jakim osoby umierają, resp. żyją; dolny znaczek po stronie lewej przedstawia rok, w którym śmierć nastąpiła, górny zaś oznacza rok, w którym osoba zmarła, resp. żyjąca się urodziła.

Otóż, gdy do ${}^{t-x-1}_{t}\mathrm{L}_x^{(x+1)}$ żyjących w d. 1 stycznia t-go roku, w wieku od x do $x+1$ lat, a więc urodzonych w ciągu ($t - x - 1$)-go roku, dodamy liczbę zmarłych w ciągu ($t - 1$)-go roku, w wieku od x do $x + 1$ lat i urodzonych w ciągu ($t - x - 1$)-go roku, to suma

$$ {}^{t-x-1}_{t}\mathrm{L}_x^{(x+1)} + {}^{t-x-1}_{t-1}\mathrm{T}_x^{(x+1)} $$

wyrażać będzie liczbę osób, jaka dożyła x lat z pośród urodzonych w ciągu ($t - x - 1$)-go roku.

Gdy od tej samej liczby ${}^{t-x-1}_{t}\mathrm{L}_x^{(x+1)}$, żyjących d. 1 stycznia t-go roku, w wieku od x do do $x + 1$ lat, odejmiemy liczbę zmarłych w ciągu t-go roku w wieku od x do $x+1$ lat i urodzonych w ciągu ($t - x - 1$)-go roku, to różnica

$$ {}^{t-x-1}_{t}\mathrm{L}_x^{(x+1)} - {}^{t-x-1}_{t}\mathrm{T}_x^{(x+1)} $$

wyrażać będzie liczbę osób, jaka dożyła $x + 1$ lat z pośród urodzonych w ciągu ($t - x - 1$)-go roku.

Wynika stąd oczywiście, że z pośród ${}^{t-x-1}_{t}\mathrm{L}_x^{(x+1)} + {}^{t-x-1}_{t-1}\mathrm{T}_x^{(x+1)}$ osób w wieku lat x dożyło $x + 1$ lat, czyli przeżyło rok, osób ${}^{t-x-1}_{t}\mathrm{L}_x^{(x+1)} - {}^{t-x-1}_{t}\mathrm{T}_x^{(x+1)}$, t. j. prawdopodobieństwo przeżycia roku przez osobę x letnią wynosi

$$ (39) \qquad p_x = \frac{{}^{t-x-1}_{t}\mathrm{L}_x^{(x+1)} - {}^{t-x-1}_{t}\mathrm{T}_x^{(x+1)}}{{}^{t-x-1}_{t}\mathrm{L}_x^{(x+1)} + {}^{t-x-1}_{t-1}\mathrm{T}_x^{(x+1)}}. $$

Prawdopodobieństwem śmierci w ciągu roku jest

$$ (40) \qquad q_x = 1 - p_x = \frac{{}^{t-x-1}_{t-1}\mathrm{T}_x^{(x+1)} + {}^{t-x-1}_{t}\mathrm{T}_x^{(x+1)}}{{}^{t-x-1}_{t}\mathrm{L}_x^{(x+1)} + {}^{t-x-1}_{t-1}\mathrm{T}_x^{(x+1)}}, $$

co zresztą i wprost, przez podobne rozumowanie, jak i przy wyprowadzaniu wzoru (39), łatwo wywieść się daje.

W ten sam sposób znaleźć można prawdopodobieństwo przeżycia roku i śmierci w ciągu roku dla każdego innego wieku, a posiadając rzeczone prawdopodobieństwa, bez trudności, sposobem wskazanym w art. 18, ułożyć potrafimy tablicę śmiertelności.

Pokazuje się więc, że dla pozyskania materyału, potrzebnego do ułożenia tablicy śmiertelności spółczesnych, metodą bezpośrednią, w sposób racyonalny i zupełnie ścisły, potrzeba znać: 1-o liczby żyjących w pewnej chwili (najlepiej — dla ułatwienia sobie pracy — d. 1 stycznia) w wieku lat od 0 do 1, od 1 do 2, od 2 do 3, i t. d. i 2-o liczby zmarłych, w tychże granicach wieku, w ciągu roku bezpośrednio poprzedzającego ową chwilę i bezpośrednio po niej następującego, z podziałem zmarłych na lata urodzenia. Liczby żyjących dać nam może spis ludności, liczby zmarłych dałaby statystyka śmiertelności, gdyby była prowadzoną według następujących wzorów, ułożonych w formie przykładu dla 1893-go i 1894-go roku:

WZÓR I.

Wyciąg ze statystyki śmiertelności 1893-go roku.

W wieku od lat do lat	0 — 1		1 — 2		2 — 3		—
Z pośród urodzonych w roku	1893	1892	1892	1891	1891	1890	d.
Zmarło w ciągu 1893-go roku	${}^{1893}_{1893}T^{(1)}_{0}$	${}^{1892}_{1893}T^{(1)}_{0}$	${}^{1892}_{1893}T^{(2)}_{1}$	${}^{1891}_{1893}T^{(2)}_{1}$	${}^{1891}_{1893}T^{(3)}_{2}$	${}^{1890}_{1893}T^{(3)}_{2}$	i t.

WZÓR II.

Wyciąg ze statystyki śmiertelności 1894-go roku.

W wieku od lat do lat	0 — 1		1 — 2		2 — 3		—
Z pośród urodzonych w roku	1894	1893	1893	1892	1892	1891	d.
Zmarło w ciągu 1894-go roku	${}^{1894}_{1894}T^{(1)}_{0}$	${}^{1893}_{1894}T^{(1)}_{0}$	${}^{1893}_{1894}T^{(2)}_{1}$	${}^{1892}_{1894}T^{(2)}_{1}$	${}^{1892}_{1894}T^{(3)}_{2}$	${}^{1891}_{1894}T^{(3)}_{2}$	i t.

WZÓR III.

Wyciąg ze spisu ludności, odbytego w d. 1 stycznia 1894-go roku.

W wieku od lat do lat	0 — 1	1 — 2	2 — 3	—
Czyli, z pośród urodzonych w ciągu roku	1893	1892	1891	d.
Znaleziono żyjących w dniu 1 stycznia 1894 r.	${}^{1893}_{1894}L^{(1)}_{0}$	${}^{1892}_{1894}L^{(2)}_{1}$	${}^{1891}_{1894}L^{(3)}_{2}$	i t.

„Gdyby — powiada Zeuner — w jakiem większem państwie, księgi śmiertelności były corocznie prowadzone w powyżej podany sposób, t. j. z oznaczeniem nie tylko wieku, ale i roku urodzenia zmarłych, — wtedy każdy nowy spis ludności dostarczyłby nam nowego materyału, z którego otrzymalibyśmy z czasem obraz ruchu ludności, pozostawiający za sobą, pod względem prawdziwości, jasności i ścisłości matematycznej wszystko, co dotąd statystyka w tym kierunku uczyniła".

Dotąd jednak żadna jeszcze tablica śmiertelności, o ile mi wiadomo, według metody Zeuner'a ułożoną nie została. Pochodzi to stąd, że dla jej zastosowania potrzebne są metryki urodzenia przy spisie ludności i spisywaniu aktów zejścia; tymczasem nie wszyscy ludzie metryki posiadają, a wielu nawet nie pamięta roku swego urodzenia. — Oto powód, z przyczyny którego dotąd, przy układaniu tablic śmiertelności, na przybliżonych sposobach poprzestawać trzeba.

Jak wyjść z tej ostatniej trudności, orzec mogą nie matematycy, lecz statystycy z powołania; do matematyków bowiem należy tylko obowiązek wskazania, jakie dane są potrzebne do ułożenia ścisłych tablic śmiertelności i ułożenia takowych z dostarczonych im materyałów, zaś obmyślenie sposobów zebrania, zebranie i uporządkowanie potrzebnych matematykom materyałów stanowi zadanie statystyków.

25. Uwzględnienie przychodźtwa i wychodźtwa. Dotąd w grupach osób, z których układa się tablicę śmiertelności, nie uwzględnialiśmy ani przychodźtwa, ani wychodźtwa, t. j. zakładaliśmy, że grupy osób, jakie bierzemy za przedmiot naszych badań, od chwili rozpoczęcia obserwacyi przez rok cały, nie ulegają żadnym innym, pod względem liczebnym, zmianom, jak tylko z przyczyny urodzeń i śmierci.

Ale w rzeczywistości tak nie jest — jedne osoby z danej grupy wydalają się, inne do niej przybywają. Niektóre wybywające osoby umierają po za obserwowaną grupą i naodwrót, w obserwowanej grupie umierają niektóre z nowoprzybyłych i zostają zaliczone do zmarłych z tej grupy, chociaż na początku roku do niej, jako osoby żyjące, nie zostały zaliczone.

Gdyby rzeczony ruch wzajem się równoważył, t. j. gdyby ściśle ta sama, w tym samym czasie i wieku liczba osób przybywała do danej grupy, jaka się z niej wydala, wpływ przychodźtwa i wychodźtwa nie oddziaływałby na rezultat naszych poszukiwań. Dzieje się jednak inaczej, ze wsi przybywają do miast ludzie zazwyczaj w latach młodszych, z miast do wsi — w latach późniejszych; z miejscowości gęściej zaludnionych więcej osób wybywa do miejsc mniej zaludnionych, aniżeli naodwrót.

Jeżeli brane pod uwagę grupy osób są bardzo liczne, a czas obserwacyi krótki, więc wychodźtwo i przychodźtwo, w stosunku do liczby mieszkańców, nieznaczne, ruch migracyjny ludności niewielki tylko wpływ na ostateczny rezultat wywiera i dla tego, w podobnych razach, bez wielkiego błędu, pominięty być może. Tak się też zazwyczaj czyni przy układaniu ogólnych tablic śmiertelności dla całych krajów. Jeżeli jednak obserwowane grupy względnie są nieliczne, a przychodźtwo i wychodźtwo stosunkowo znaczne, jak to np. we wszystkich instytucyach ubezpieczeń życiowych ma miejsce, wtedy bezwarunkowo w rachunkach oba te czynniki uwzględnić trzeba, gdyż w przeciwnym razie do bardzo fałszywych przyjśćby można rezultatów.

Stawiając różne hipotezy, niektórzy specyaliści wyprowadzili rozmaite wzory na prawdopodobieństwo śmierci lub przeżycia roku, z uwzględnieniem przychodźtwa i wychodźtwa; my tutaj zajmiemy się sposobem najprostszym, ale i najczęściej, jak dotąd, używanym.

Wyobraźmy sobie grupę L_x osób x letnich, pozostających w d. 1 stycznia t-go roku przy życiu, i załóżmy, że w ciągu t-go roku opuszcza rzeczoną grupę W_x, a przybywa do niej P_x osób, które w d. 1 stycznia były w tym samym wieku, jak wszystkie osoby grupy L_x. Przypuśćmy następnie, że w tej grupie osób, łącznie z przybyłemi, zaobserwowano, w ciągu t-go roku, T_x wypadków śmierci, nie licząc w to zmarłych z pośród W_x osób, które grupę opuściły, a tem samem wyszły z pod obserwacyi.

W pierwszej chwili sądzićby można, że najprostszym sposobem rozwiązania kwestyi byłoby opuścić z rachunku wszystkie wybyłe i przybyłe osoby.

Co się tyczy nowoprzybyłych istotnie takby uczynić było można, lecz wtedy opuścićby trzeba i z pośród nich zmarłe osoby, coby bardzo utrudniło pracę statystyczną. Zatrzymując zmarłych, a opuszczając przybyłych, otrzymalibyśmy za wielkie prawdopodobieństwo śmierci; dodając zaś do liczby żyjących na początku roku wszystkie nowoprzybyłe osoby, prawdopodobieństwo śmierci wypadłoby za małe, gdyż nowoprzybyłe nie przez cały rok zostawały pod obserwacyą. Wypada stąd, że, dla otrzymania właściwego rezultatu, należy do żyjących na początku roku dodać tylko pewną część nowoprzybyłych.

Wychodzących w ciągu roku z pierwotnej grupy w żadnym razie z rachunku opuścić nie można, pozostawały one bowiem przez czas pewien pod obserwacyą, a chociaż z nich żadna nie umarła, to jednak umrzeć mogła, co nie pozostaje bez wpływu na prawdopodobieństwo śmierci. Opuszczając z rachunku wszystkie osoby wybyłe, otrzymaliśmy prawdopodobieństwo śmierci za wysokie; pozostawiając wszystkie, jakoby żyjące w grupie przez rok cały, wypadłoby prawdopodobieństwo za małe, ponieważ z wybyłych osób mogły niektóre, przed upływem roku, umrzeć. Pokazuje się więc, że, dla otrzymania właściwego rezultatu, od liczby pierwotnie żyjących w danej grupie należy odjąć tylko pewną część wybyłych osób.

Wyniki te łatwo możnaby stwierdzić rachunkiem, jak to np. uczynił Dr. Ph. Fischer w „Grundzüge des auf menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens" (Oppenheim nad Renem, 1860, str. 109 i dalsze); lecz są one, mojem zdaniem, tak oczywiste, że zbytkiem jest, dla ich dowiedzenia, uciekać się do matematyki.

Gdybyśmy znali liczbę dni, jaką do końca roku przeżyła w danej grupie każda z P_x nowoprzybyłych osób, to dzieląc sumę dni, przeżytych przez wszystkie przybyłe osoby, przez liczbę dni w roku, t. j. przez 365, otrzymalibyśmy taką liczbę osób, jaką w miejsce rzeczywiście przybyłych podstawić trzeba, przy założeniu, że każda z nich przez cały rok pozostawała w grupie.

Gdybyśmy znali liczbę dni, jaką od początku roku każda z wybyłych osób w grupie przebyła, to dzieląc sumę tych dni przez 365, otrzymalibyśmy taką liczbę osób, jaką w miejsce rzeczywiście wybyłych podstawić należy, przy założeniu, że każda z nich przez cały rok w grupie pozostawała.

Jeżeli jednak nie znamy liczby dni przebytych w grupie przez każdą z przybyłych i wybyłych osób, rachunku podobnego ściśle wykonać nie można, ale można przybliżenie przyjąć, że ubytek i napływ osób jednostajnie się na cały rok rozkłada, albo, co na jedno wychodzi (*), że wszystkie osoby wychodzą z grupy i do niej przybywają tylko w połowie roku, albo jeszcze, że przybywa do grupy i ubywa z niej zaraz na początku roku połowa rzeczywiście przybyłych i wybyłych — inaczej, że na początku roku jest żyjących

$$L_x + \frac{P_x - W_x}{2}.$$

W takim zaś razie, prawdopodobieństwem śmierci będzie

$$q_x = \frac{T_x}{L_x + \dfrac{P_x - W_x}{2}} \tag{41}$$

i to jest właśnie wzór, o którym wzmiankowaliśmy. Orzeka on, że roczne prawdopodobieństwo śmierci osób danej grupy, posiadających na początku roku x lat, przy uwzględnieniu przychodźtwa i wychodźtwa, równa się stosunkowi zaobserwowanej liczby zmarłych, w ciągu roku, osób odpowiedniego wieku, do liczby żyjących na początku roku zwiększonej o połowę różnicy pomiędzy liczbą przybyłych i wybyłych, posiadających na początku roku x lat, t. j. będących w tym samym wieku, co i cała uważana grupa.

Chcąc teraz powyższy sposób zastosować do metody Zeunera, należy uwzględnić przybyłych i wybyłych w ciągu $(t-1)$-go i t-go roku i podzielić ich nie tylko według wieku ale i według dat urodzenia.

Gdy osoby przybyłe i wybyłe w ciągu $(t-1)$-go roku, w wieku od x do $x+1$ lat i urodzene w ciągu $(t-x-1)$-go roku, oznaczymy przez ${}^{t-x-1}_{t-1}P_x^{(x+1}$ i ${}^{t-x-1}_{t-1}W_x^{(x+1)}$, zaś przybyłe i wybyłe w ciągu t-go roku—przez ${}^{t-x-1}_{t}P_x^{(x+1)}$ i ${}^{t-x-1}_{t}W_x^{(x+1)}$, to dla wyprowadzenia wzoru na prawdopodobieństwo śmierci dla x letniej osoby, z uwzględnieniem przychodźtwa i wychodźtwa, przedewszystkiem od mianownika wzoru (40) odjąć trzeba ${}^{t-x-1}_{t-1}P_x^{(x+1)}$, a dodać ${}^{t-x-1}_{t-1}W_x^{(x+1)}$, żeby liczbę żyjących osób sprowadzić do tej, jaka ich była w chwili, gdy posiadały x lat, t. j. wziąć

$${}^{t-x-1}_{t}L_x^{(x+1)} + {}^{t-x-1}_{t-1}T_x^{(x+1)} - {}^{t-x-1}_{t-1}P_x^{(x+1)} + {}^{t-x-1}_{t-1}W_x^{(x+1)}$$

i następnie dopiero zastosować wzór (41), t. j. podstawić za mianownik we wzorze (40) wyrażenie

$$\begin{gathered}{}^{t-x-1}_{t}L_x^{(x+1)} + {}^{t-x-1}_{t-1}T_x^{(x+1)} - {}^{t-x-1}_{t-1}P_x^{(x+1)} + {}^{t-x-1}_{t-1}W_x^{(x+1)} + \\ + \frac{{}^{t-x-1}_{t-1}P_x^{(x+1)} + {}^{t-x-1}_{t}P_x^{(x+1)} - {}^{t-x-1}_{t-1}W_x^{(x+1)} - {}^{t-x-1}_{t}W_x^{(x+1)}}{2} = \\ = {}^{t-x-1}_{t}L_x^{(x+1)} + {}^{t-x-1}_{t-1}T_x^{(x+1)} + \\ + \frac{\left({}^{t-x-1}_{t}P_x^{(x+1)} - {}^{t-x-1}_{t-1}P_x^{(x+1)}\right) - \left({}^{t-x-1}_{t}W_x^{(x+1)} - {}^{t-x-1}_{t-1}W_x^{(x+1)}\right)}{2}.\end{gathered}$$

(*) Porównaj z art. 19.

Skutkiem tego, wzór (40) na prawdopodobieństwo śmierci osoby x letniej w ciągu roku przechodzi na

$$(42) \qquad q_x = \frac{{}^{t-x-1}_{t-1}\mathrm{T}^{(x+1)}_{x} + {}^{t-x-1}_{t}\mathrm{T}^{(x+1)}_{x}}{{}^{t-x-1}_{t}\mathrm{L}^{(x+1)}_{x} + {}^{t-x-1}_{t-1}\mathrm{T}^{(x+1)}_{x} + \frac{\left({}^{t-x-1}_{t}\mathrm{P}^{(x+1)}_{x} - {}^{t-x-1}_{t-1}\mathrm{P}^{(x+1)}_{x}\right) - \left({}^{t-x-1}_{t}\mathrm{W}^{(x+1)}_{x} - {}^{t-x-1}_{t-1}\mathrm{W}^{(x+1)}_{x}\right)}{2}}.$$

Nie trudno zauważyć, jak ciężkie byłoby zadanie statystyki, gdyby powyższy sposób miał być stosowany do układania tablicy śmiertelności dla ogółu mieszkańców danego kraju.

26. WYRÓWNANIE TABLIC ŚMIERTELNOŚCI. Prawdopodobieństwa śmierci, obliczone wprost z danych statystycznych oraz na ich podstawie, według postaci III art. 18-go, ułożona tablica śmiertelności, posiadają zwykle tę słabą stronę, że się nie odznaczają należytą prawidłowością.

Gdy na osi odciętych, układu prostokątnego, odetniemy długości, proporcyonalne do wieku x, $x+1$, $x+2$, i t d., i z otrzymanych w ten sposób punktów wystawimy prostopadłe do osi odciętych, gdy na tych ostatnich odetniemy długości proporcyonalne do prawdopodobieństw śmierci lub do liczby żyjących osób w odpowiednim wieku i punkty krańcowe rzędnych połączymy linią, wypadła stąd krzywa, dająca obraz śmiertelności, nie będzie zupełnie regularną, lecz posiadać będzie rozmaite zagięcia, uwydatniające właśnie owe nieprawidłowości, o jakich dopieroco wzmiankowaliśmy.

Nieprawidłowość taka jest przeciwną naturze normalnej śmiertelności, niepodobna bowiem przypuszczać, aby śmiertelność normalna nie zachowywała jakiejś prawidłowej ciągłości w swych zmianach, aby przy nieznacznej zmianie wieku wykonywała niczem nie dające się usprawiedliwić zwroty lub nagłe skoki.

Jeżeli więc coś podobnego ma miejsce w tablicy, musi to pochodzić z jakichś ubocznych, od natury śmiertelności niezależnych przyczyn: dane statystyczne mogą nie być dość dokładne, drogi prowadzące od danych statystycznych do samej tablicy—nie zupełnie ścisłe, liczba obserwowanych osób — niedostatecznie wielka, nie wszystkie obserwowane osoby pozostają w podobnych warunkach bytu i t. p.

Skutki tych przyczyn można do pewnego stopnia zmniejszyć przez poddanie rezultatów, otrzymanych wprost z dat statystycznych, pewnej operacyi rachunkowej, zwanej wyrównaniem lub wyregulowaniem tablicy śmiertelności (Graduation of mortality table,—Ajustement de la table,—Ausgleichung der Sterblichkeitstabelle).

Zadaniem wyrównania tedy jest nadanie zmianom śmiertelności możliwie największej regularności, przy zachowaniu tych wszystkich cech charakterystycznych, jakie wykazuje statystyka.

Wyrównywać można albo prawdopodobieństwa śmierci, albo liczby żyjących w kolejno po sobie idących latach wieku. Bezpośrednie wyrównanie prawdopodobieństw śmierci pociąga za sobą pośrednio wyrównanie liczby żyjących i naodwrót.

Metod wyrównania można obmyśleć bardzo wiele, z dotąd użytych najpierwotniejszą jest metoda graficzna (rysunkowa).

Gdy w sposób, podany na początku niniejszego artykułu, narysujemy krzywą, uwydatniającą prawdopodobieństwa śmierci w różnych latach życia lub stopniowe zmniejszanie się liczby żyjących, i krzywa ta nie posiada należytej regularności, gdy w przebiegu swym wygina się to w jedną to w drugą stronę, można ją od ręki lub za pomocą szablonów (*) uczynić regularną. W ten sposób otrzymana nowa, już teraz regularna, krzywa odetnie na rzędnych długości, które za prawdopodobieństwa śmierci, resp. za liczby żyjących wyrównanej tablicy przyjąć można. Aby rezultaty były łatwe do odczytania, rysunek musi być wykonany na dużą skalę, żeby były poprawne—rysujący powinien być zręczny i z wielką inteligencyą pracę swoją dokonywać musi. Wynika stąd, że dokładność wyrównania zależy tu od osobistych zalet pracującego; tablice tym sposobem przez dwie różne osoby wyrównane, pomimo jednakich dat statystycznych, mogą bardzo się od siebie różnić i to stanowi wadę metody graficznej. Dla tego zaniechano ją, przekładając metody rachunkowe, jako całkiem od subjektywności rachmistrza niezależne. (**)

Z metod rachunkowych najelementarniejszą jest metoda średnio arytmetycznych.

Niech a, b, c, d, e, f, i t. d. oznaczają prawdopodobieństwa śmierci lub liczby żyjących w każdym wieku osób, wprost z danych statystycznych obliczone.

Jeżeli nieregularne zmiany śmiertelności pochodzą z wadliwości cyfr statystycznych, to wadliwość owa zawiera się przedewszystkiem w tem, że wiek osób żyjących i zmarłych został niedokładnie podany, że np. niektórych 30-o letnich zaliczono do 29-o letnich, innych do 28-o, jeszcze innych do 31-o letnich i t. d.

Różnice wieku jednak nie mogą być znaczne, najczęściej dosięgają jednego lub dwóch lat w jedną lub drugą stronę, rzadziej trzech, jeszcze rzadziej 4-ch lat i t. d.

Przypuśćmy, iż różnice w zadeklarowanych latach wieku dochodzą z równą łatwością jednego i 2-ch lat w obu kierunkach; wtedy, w miejsce liczby środkowej, można wziąć średnio arytmetyczną z pięciu po sobie kolejno idących liczb tablicy pierwotnej, czyli

---

(*) Dr. Fischer zaleca do tego celu specyalny szablon, zwany po niemiecku „Schwunglineal". Jest to cienki, z giętkiego drzewa wyrobiony, na 2 do $2^1/_2$ stóp długi pręcik o przecięciu kwadratowem, który przez wyginanie bardzo prawidłowe daje krzywe.

(**) Metody graficznej używa się dziś tylko czasami do ostatecznego wyregulowania już, inną metodą, wyrównanych tablic oraz do wyrównania tablic w latach najmłodszych i najstarszych, gdzie inne metody nie dają się z dobrym skutkiem stosować.

$$(43)\quad \left\{\begin{array}{llll} \text{zamiast } c, & \text{można} & \text{przyjąć} & c'=\frac{a+b+c+d+e}{5}, \\ \quad\text{,,}\quad d & \text{,,} & \text{,,} & d'=\frac{b+c+d+e+f}{5}, \\ \quad\text{,,}\quad e & \text{,,} & \text{,,} & e'=\frac{c+d+e+f+g}{5}, \\ \quad\text{,,}\quad f & \text{,,} & \text{,,} & f'=\frac{d+e+f+g+h}{5}, \\ \quad\text{,,}\quad g & \text{,,} & \text{,,} & g'=\frac{e+f+g+h+i}{5}. \end{array}\right.$$

Jeżeli i teraz jeszcze tablica nie przedstawia dostatecznej prawidłowości, znaczy to, że przyczyna błędów sięga dalej, aniżeli do 2-ch lat w jedną i drugą stronę. Wówczas działanie można powtórzyć na nowootrzymanych liczbach, wtedy wypadnie np.

$$(44)\quad e''=\frac{c'+d'+e'+f'+g'}{5}=\frac{a+2b+3c+4d+5e+4f+3g+2h+i}{25}.$$

Jest to przeciętna z 9-u kolejno w pierwotnej tablicy idących po sobie liczb, lecz nie w jednakowym stopniu uwzględnionych; albowiem na nową średnią najmniejszy wpływ wywierają dwie skrajne liczby, najdalej, mianowicie o 4 miejsca od środkowej położone; nieco większy wpływ wywierają dwie liczby o trzy miejsca od środkowej odsunięte; jeszcze większy — dwie o dwa miejsca odsunięte, a największy wpływ wywiera liczba środkowa, t. j. ta, dla której odnajdujemy średnią. Odpowiada to dość dobrze naturze błędów statystycznych, ponieważ przy oznaczaniu wieku w większej liczbie przypadków mogliśmy się pomylić o rok, aniżeli o dwa, w większej liczbie przypadków o dwa niż o trzy lata i t. d.

Dla wyrównania czterech pierwszych i czterech ostatnich liczb tablicy pierwotnej, można użyć następującego sposobu:

$$a'=\frac{a+b+c}{3},\ b'=\frac{a+b+c+d}{4};$$

$$(45)\quad \left\{\begin{array}{l} a''=\frac{5a+4b+3c+2d+e}{15}, \\ b''=\frac{4a+5b+4c+3d+2e+f}{19}, \\ c''=\frac{3a+4b+5c+4d+3e+2f+g}{22}, \\ d''=\frac{2a+3b+4c+5d+4e+3f+2g+h}{24}. \end{array}\right.$$

Metoda średnio arytmetycznych daje niezłe rezultaty dla okresu wieku mniej więcej od 10 do 75 lat, w którym śmiertelność z roku na rok nie nazbyt nagle się zmienia. Lecz w latach najmłodszych śmiertelność bardzo szybko maleje, w latach późnych—bardzo szybko rośnie, tu więc metoda średnio arytmetycznych nie może dać dobrych rezultatów, skutkiem czego trzeba albo pierwotne liczby pozostawić bez zmiany, albo też użyć innego, najlepiej graficznego sposobu wyrównania.

Duże uznanie pozyskała sobie, wśród specyalistów, metoda Woolhouse'a, zastosowana przez tegoż po raz pierwszy do wyrównania tablic śmiertelności 20-u towarzystw angielskich (Tables deduced from the Mortality experience. Londyn, 1872).

Woolhouse wyrównywa nie prawdopodobieństwa śmierci, lecz liczby żyjących, podane przy każdym wieku przez tablicę, obliczoną wprost z danych statystycznych, którą nazywać będziemy tablicą pierwotną.

Liczby żyjących, podane w tablicy pierwotnej, oznaczać będziemy przez l, wyrównane—przez λ; wyrównane liczby zmarłych—przez τ. Załóżmy nadto, że tablica zaczyna się od wieku i, a kończy na wieku ω. Za liczbę żyjących w wieku i lat przyjmijmy λ_i osób; jest ona, oczywiście, tą samą zarówno dla tablicy pierwotnej jak i dla wyrównanej, t. j. $\lambda_i = l_i$.

Wyobraźmy sobie krzywą śmiertelności w znany nam już sposób narysowaną, odpowiadającą ściśle tablicy pierwotnej; jej przebieg, jak wiemy, jest nieregularny.

Przez punkty tej krzywej nieregularnej, odpowiadające liczbom żyjących $l_i, l_{i+5}, l_{i+10}, \dots$, czyli wiekom lat $i, i+5, i+10, \dots$, stale o lat 5 wzrastającym, przesuńmy krzywą regularną, zbliżoną możliwie najbardziej do krzywej pierwotnej (nieregularnej).

Ta nowa krzywa (regularna) odetnie na rzędnych, odpowiadających wiekom lat: $i+1, i+2, i+3, i+4, i+6, \dots$ pewne długości, które zastępować będą liczby żyjących: $l_{i+1}, l_{i+2}, l_{i+3}, l_{i+4}, l_{i+6}, \dots$ tablicy pierwotnej, lecz będą od nich różne. Gdybyśmy je przyjęli za liczby żyjących tablicy wyrównanej, wyrównanie byłoby niedokładne, ponieważ nie wpływałyby na nie liczby żyjących $l_{i+1}, l_{i+2}, l_{i+3}, l_{i+4}, l_{i+6}, \dots$

Przez punkty krzywej pierwotnej, odpowiadające liczbie żyjących: $l_{i+1}, l_{i+6}, l_{i+11}, \dots$, w wiekach lat: $i+1, i+6, i+11, \dots$, również stale o 5 lat wzrastających, przesuńmy drugą krzywą regularną, zbliżoną także możliwie najbardziej do krzywej pierwotnej (nieregularnej). Ta druga krzywa regularna uwzględnia liczby żyjących w wieku lat: $i+1, i+6, i+11, \dots$, ale nie uwzględnia liczby żyjących w pozostałych latach: $i, i+2, i+3, i+4, i+5, i+7, \dots$, a tem samem również niedokładnie wyrównywa tablicę pierwotną.

Postępując w podobny sposób dalej, otrzymamy 5 krzywych regularnych, z których:

1-a przechodzi przez punkty, odpowiadające liczbie żyjących $l_i, l_{i+5}, l_{i+10}, \dots$
2-a " " " " " " $l_{i+1}, l_{i+6}, l_{i+11}, \dots$
3-a " " " " " " $l_{i+2}, l_{i+7}, l_{i+12}, \dots$
4-a " " " " " " $l_{i+3}, l_{i+8}, l_{i+13}, \dots$
5-a " " " " " " $l_{i+4}, l_{i+9}, l_{i+14}, \dots$

Wszystkie te krzywe są możliwie zbliżone do krzywej pierwotnej, lecz są od siebie różne i każda z nich niedokładnie tylko wyrównywa krzywą nieregularną. Dają one dla każdego wieku (na każdej rzędnej) pięć wartości na liczbę żyjących, z których jedna równa się wyjętej z tablicy pierwotnej, a cztery pozostałe są od tej ostatniej mniej lub więcej różne.

Przeciętne z każdych 5-u tak otrzymanych wartości dla każdego wieku przyjął Woolhouse za ostatecznie wyrównane liczby żyjących tablicy, ze względu, że te przeciętne, obok nadania regularnego przebiegu śmiertelności, najlepiej odpowiadają normalnemu stanowi rzeczy, ponieważ stanowią wypadkową ze śmiertelności, jaką dla danego wieku wykazała statystyka, oraz tych śmiertelności, jakie dla tegoż wieku w sposób prawidłowy naznacza śmiertelność innych lat życia.

Cała więc rzecz sprowadza się do właściwego przeprowadzenia powyżej opisanych pięciu krzywych regularnych, które wprowadziliśmy tutaj jedynie dla uplastycznienia metody, w praktyce bowiem cała manipulacya odbywa się nie geometrycznie, lecz za pomocą wzorów interpolacyjnych.

Ze względu na zakres niniejszej książki, w bliższe szczegóły metody Woolhouse'a zagłębiać się nie możemy i dla tego, odsyłając pragnących je poznać do oryginalnych prac samego autora, lub do dzieła B. Maleszewskiego (Tom II, część 1-a, str. 288 i dalsze), ograniczymy się do podania samych tylko rezultatów.

Jeżeli oznaczymy

$$a_1 = l_{x-1} + l_{x+1}, \quad a_2 = l_{x-2} + l_{x+2},$$
$$a_3 = l_{x-3} + l_{x+3}, \quad a_4 = l_{x-4} + l_{x+4},$$
$$a_6 = l_{x-6} + l_{x+6}, \quad a_7 = l_{x-7} + l_{x+7},$$
$$f = a_1 - a_3, \quad g = a_2 - a_3,$$
$$h = a_6 - a_3, \quad k = a_7 - a_4,$$

wtedy wzorem na oznaczenie wyrównanej liczby żyjących, dla wieku lat x, jest

$$(46) \qquad 5\lambda_x = l_x + a_1 + a_2 - 0{,}04\,(f + 4g + 2h + 3k).$$

Ze wzoru (46) łatwo dostrzedz można, że gdy tablica pierwotna zaczyna się od wieku i lat (jak np. tablica 20 tow. angielskich od 10-u) i kończy się na wieku ω, powyższym sposobem można ją wyrównać dopiero począwszy od wieku lat $i + 7$ i skończywszy na wieku $\omega - 7$, gdyż dla wyrównania liczby żyjących w danym wieku trzeba posiadać liczby żyjących w 7-u latach poprzedzających dany wiek i w 7-u latach po nim następujących.

Do wyrównania liczby żyjących w siedmiu piewszych latach, służy wzór

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} & \lambda_{i+7-n} = \lambda_{i+7} + \frac{n(n+3)}{2}\tau_{i+7} - \frac{n(n+1)}{2}\tau_{i+8} + \\ & + \frac{1}{12} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3} \cdot \left(\frac{\lambda_i - \lambda_{i+7}}{7} - 5\tau_{i+7} + 4\tau_{i+8}\right), \end{aligned} \right.$$

gdzie τ_{i+7} i τ_{i+8} oznaczają wyrównane liczby zmarłych w wieku lat od $i + 7$ do $i + 8$ i od $i + 8$ do $i + 9$, zaś λ_i oznacza liczbę żyjących od jakiej tablicę rozpoczynamy.

Podstawiwszy w (47) kolejno: $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, znajdziemy wyrównane liczby żyjących: λ_{i+6}, λ_{i+5}, λ_{i+4}, λ_{i+3}, λ_{i+2} i λ_{i+1}, podczas gdy $\lambda_i = l_i$ pozostaje bez zmiany.

Ażeby wyrównać tablicę w jej siedmiu ostatnich latach wieku, Woolhouse, we wzorze (46), przyjmował liczby żyjących po za granicą tablicy za równe zeru, t. j. zakładał $\lambda_{\omega+1} = \lambda_{\omega+2} = \lambda_{\omega+3} = \ldots = \lambda_{\omega+7} = 0$.

Metoda Woolhouse'a daje doskonałe rezultaty, zwłaszcza przy dość wysokiej liczbie obserwowanych osób, dla pośrednich lat wieku, w których śmiertelność niezbyt gwałtownie się zmienia. Rezultaty dla lat skrajnych, t. j. dla starców i dzieci są mniej zadawalniające.

Granice niniejszej książki nie pozwalają nam opisać innych metod wyrównania, pomiędzy któremi wyróżnia się szczególniej metoda Sprague'a, polegająca na prowadzeniu różnego rzędu parabol.

27. WZORY GOMPERTZ'A I MAKEHAM'A. W pewnym związku z wyrównywaniem tablic śmiertelności pozostają wysoce naukowego charakteru usiłowania nad wyrażeniem prawa śmiertelności przez ogólny wzór algebraiczny. Usiłowania rzeczone wprawdzie nie wydały jeszcze dotąd zupełnie zadawalniających owoców, ale nie należy tracić nadziei, że z czasem mogą doprowadzić do nadzwyczaj ważnych rezultatów.

W pracach tych chodzi o ujęcie całej tablicy w jeden ogólny wzór, t. j. o wyrażenie prawdopodobieństwa śmierci lub liczby żyjących przez funkcyę zależną od wieku—tak, żeby liczebna wartość owej funkcyi, odpowiadająca pewnemu danemu wiekowi, dawała prawdopodobieństwo śmierci, resp. liczbę żyjących osób w tymże wieku.

Jeżeli np. oznaczymy wiek przez x, a liczbę żyjących osób w wieku x lat przez y, to

$$y = f(x), \tag{48}$$

gdzie f jest symbolem szukanego wyrażenia analitycznego. Gdy za x podstawimy np. 40 lat,

$$y = f(40)$$

będzie liczbą żyjących osób w wieku lat 40.

Najwięcej w swoim czasie rozgłosu zyskał wzór Gompertz'a, matematyka (actuary) angielskiego, podany w „Philosophical Transactions" z 1825 r. i powtórzony w „Journal of the Institute of Actuaries" (Tom IX z 1861 r.).

Gompertz wyszedł z założenia, że prawdopodobieństwo śmierci zmienia się według postępu geometrycznego, t. j. gdy prawdopodobieństwo śmierci dla pewnego wieku oznaczymy przez a, a dla następnego - przez aq, prawdopodobieństwo śmierci po x latach wyniesie aq^x, i drogą odpowiedniej analizy, przyszedł do wyrażenia liczby żyjących osób (y) w wieku lat x przez wzór

$$y = d.g^{q^x}, \tag{49}$$

gdzie d i g są stałemi, mającemi się dopiero oznaczyć, zaś q wykładnikiem postępu geometrycznego, według którego prawd. śmierci się zmienia.

Do oznaczenia trzech stałych d, g i q użyć potrzeba tablicy śmiertelności, otrzymanej z danych statystycznych. W tym celu we wzorze (49) za x i y podstawić trzeba trzy w większych odstępach po sobie idące ilości, z tablicy pierwotnej wyjęte, otrzymamy tym sposobem trzy równania, z których oznaczyć się dają trzy szukane stałe, a mając je, ze wzoru (49) obrachujemy z łatwością liczbę żyjących w każdym innym wieku, resp. ułożymy całą tablicę śmiertelności.

Im trafniej oznaczymy stałe, tem bardziej obliczona ze wzoru tablica odpowiadać będzie tablicy pierwotnej. Okazuje się stąd, że: 1-o dla różnych tablic śmiertelności, stałe wzoru Gompertz'a różne przybierają wartości i 2-o wzór Gompertz'a w zasadzie powinien dać tem bardziej do tablicy pierwotnej zbliżone rezultaty, im więcej liczb tablicy pierwotnej oddziaływać będzie na oznaczenie stałych.

Przy stosowaniu wzoru Gompertz'a do tablicy 20 towarzystw angielskich, dla mężczyzn (H^M) (*), przyjąwszy, do oznaczenia stałych, lata wieku 15, 30 i 45, otrzymamy

$$q = 1{,}03257,$$
$$d = 113444,$$
$$g = 0{,}91479,$$

skutkiem czego wzór (49), dla tablicy H^M, przybiera postać

$$y = 113444 \times (0{,}91479)^{(1{,}03257)^x} \tag{49'}$$

Dla dokładniejszego oznaczenia stałych, możnaby użyć powtórnie trzech innych wartości na x i y, np. wieku lat 25, 40, 55; stąd oznaczyć nowe wartości na q, d, g, odpowiednio połączyć poprzednie z nowootrzymanemi i rezultat podstawić w (49). Możnaby także użyć całej tablicy do oznaczenia q, d, g; wtedy zastosowaćby należało sposób, znany w nauce pod nazwą „metody najmniejszych kwadratów".

Jakimkolwiek sposobem oznaczymy stałe wzoru Gompertz'a, zawsze otrzymana z niego tablica śmiertelności nie będzie dobrze odpowiadała tablicy pierwotnej; w niektórych latach życia, rezultaty dość się do tablicy pierwotnej zbliżają, w innych jednak bardzo są od niej odległe. Pochodzi to stąd, że prawo, według jakiego śmiertelność się zmienia, nie bardzo odpowiada założeniu Gompertz'a, czyli, że prawdopodobieństwo śmierci w rzeczywistości nie zmienia się według postępu geometrycznego, a przynajmniej wykładnik postępu (q) przez cały ciąg życia ludzkiego nie pozostaje stałym.

Ażeby w części chociaż uwzględnić zmienność wykładnika postępu, Edmonds podzielił życie ludzkie na trzy okresy: na okres dziecięcy do 9-u

---

(*) Patrz art. 29.

lat życia, wtedy $q = \frac{1}{1{,}479108}$ (śmiertelność malejąca)); na okres młodzieńczy i dojrzały, od lat 9-u do 55, dla którego $q = 1{,}0297117$; wreszcie na okres starości, od 55 lat aż do granicy życia ludzkiego, i w tym okresie $q = 1{,}0796923$. Podział taki jest dowolny, dość zbliżony do rzeczywistości dla ogólnej śmiertelności Anglii, do której go Edmonds zastosował, lecz mało odpowiedni dla innych, np. dla tablic 20 towarzystw angielskich.

Hipoteza Gompertz'a opiera się na samych tylko fizyologicznych przyczynach śmierci: siła śmierci stopniowo lecz coraz bardziej ogarnia organizm człowieka, zwiększając się stale o nieskończenie małe ilości w ciągu nieskończenie krótkich chwil czasu. Lecz oprócz przyczyn fizyologicznych działają tu jeszcze i inne przyczyny — przypadkowe, które we wzorze Gompertz'a nie są uwzględnione.

Uwzględnił je Makeham i wyprowadził wzór

$$y = \frac{k}{a^x} \cdot g^{q^x}, \tag{50}$$

w którym mamy cztery stałe do oznaczenia. Z nich q jest, tak samo jak w (49), wykładnikiem postępu geometrycznego, według jakiego śmiertelność się zmienia skutkiem przyczyn fizyologicznych, zaś a zależy od przyczyn przypadkowych.

Stałe wzoru Makeham'a, zwanego także wzorem Gompertz — Makeham'a, oznaczają się zupełnie tak samo jak dla wzoru (49), tylko tu potrzeba użyć czterech liczb tablicy pierwotnej, aby do oznaczenia czterech stałych mieć cztery równania.

Dla tablicy 20 towarzystw angielskich (H^{MF}), używszy liczb żyjących osób w wieku lat 20, 40, 60 i 80, znaleziono

$$\log.q = 0{,}0402225.$$

Woolhouse, w tomie XV „Journal of the Institute of Actuaries", przyjąwszy za podstawę lata: 30, 50, 70 i 90, obliczył

$$\log.q = 0{,}0395573,$$

a łącząc oba rezultaty ze sobą, oznaczył

$$k = 109949,$$
$$a = 1{,}006615,$$
$$g = 0{,}999052,$$
$$q = 1{,}09648,$$

skutkiem czego wzór Makeham'a, dla tablicy H^{MF}, przybiera postać

$$y = \frac{109949}{(1{,}006615)^x} \times (0{,}999052)^{(1{,}09648)^x}. \tag{50'}$$

Wzór Makeham'a bywa uważany za przedstawiający zadawalniająco prawo śmiertelności aż do 70-u lat życia.

Odmienną drogą do tego samego celu, co poprzedni dwaj badacze, dążył Teodor Wittstein w „Das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit" (Hanower, 1883). Rezultatów pracy Wittsteina wszakże podawać tu nie będziemy, ponieważ tylko wzory Gompertz'a i Makeham'a w dalszym ciągu będą nam potrzebne.

Gdyby stałe, wyrażenia ogólnego na liczbę żyjących, dały się tak oznaczyć, aby otrzymana z niego krzywa dostatecznie była zbliżoną do krzywej pierwotnej, odnośny wzór mógłby służyć do wyrównania tablicy pierwotnej i dla tego, na początku niniejszego artykułu, powiedzieliśmy, że zawarty w nim przedmiot zostaje w związku z przedmiotem wyrównywania tablic śmiertelności.

28. Metoda 20 towarzystw angielskich i 23 towarzystw niemieckich. Opisując w art. 23 metody układania tablic śmiertelności, mieliśmy na myśli tablice dla ogółu ludności; z nich tylko metoda bezpośrednia może być zastosowaną do układania tablic, przeznaczonych specyalnie do użytku towarzystw ubezpieczeń życiowych.

Gdyby skład osób ubezpieczających się był podobny do składu ogółu ludności, t. j. gdyby pomiędzy osobami ubezpieczonemi zachodziły podobne stosunki, pod względem zdrowia, dobrobytu, zajęć i t. p., jakie istnieją wśród ogółu ludności, wtedy tablice śmiertelności, ułożone na podstawie statystyki ogólnej, możnaby stosować i do celów ubezpieczeniowych.

Ale ponieważ idea asekuracyi nie przeniknęła jeszcze w równym stopniu wszystkich kół społecznych, ponieważ przeważnie tylko inteligentniejsze i we względnie lepszym bycie żyjące jednostki korzystają dotąd z dobrodziejstwa ubezpieczeń życiowych, a z nich przeważnie tylko zdrowsze bywają przez towarzystwa przyjmowane, przeto osoby ubezpieczone stanowią do pewnego stopnia wyodrębnioną z pośród całego ogółu grupę osób, której śmiertelność bardzo się różnić może od śmiertelności ogólnej.

Dowodzi to, że tablice śmiertelności przeznaczone do użytku towarzystw ubezpieczeń życiowych, winny być układane na podstawie materyałów statystycznych nagromadzonych w tychże towarzystwach.

Materyały takie mogą być zebrane o wiele ściślej niż dla ogółu ludności. Największą trudnością, na jaką ogólna statystyka śmiertelności w praktyce napotyka, jest trudność ścisłego oznaczenia liczby i wieku osób żyjących oraz zmarłych. Trudność ta dla instytucyj ubezpieczeń życiowych sprowadza się do minimum, liczba bowiem ubezpieczonych zawsze jest dokładnie znaną, a obowiązek składania świadectw urodzenia z łatwością pozwala oznaczyć wiek osób obserwowanych.

Z drugiej jednak strony, wielką niedogodność, fatalnie na ścisłość rezultatów oddziaływającą, stanowi względnie mała liczba osób ubezpieczonych, z której przychodzi układać tablice. Dla zaradzenia temu, w drugiej ćwiartce stulecia bieżącego, powzięto w Anglii myśl połączenia materyałów statystycznych, posiadanych przez operujące tam towarzystwa, w jedną całość i ułożenia na ich podstawie tablicy śmiertelności, któraby zadość czynić mogła potrzebom ubezpieczeń życiowych.

Siedmnaście towarzystw angielskich (*) połączyło się wspólnym celem, a rezultatem ich usiłowań była tablica, ogłoszona w 1843 r. pod nazwą tablicy 17 towarzystw angielskich (Combined experience table of mortality). Dotąd jeszcze jest ona najbardziej rozpowszechnioną, zwłaszcza wśród angielskich i amerykańskich towarzystw.

Dobry przykład, dany w 1843 r. przez 17 towarzystw angielskich, z biegiem czasu znalazł naśladowców. W 1869 r. powstaje tablica 20 towarzystw angielskich, w 1881 roku 30-u towarzystw amerykańskich, w 1883 roku 23-ch towarzystw niemieckich, wreszcie w 1889 r. tablice śmiertelności czterech towarzystw francuskich.

Wszystkie te tablice zostały ułożone mniej więcej jednakim sposobem. Opiszemy tu metodę, użytą, przez „Istitute of Actuaries”, do ułożenia tablicy 20-u towarzystw angielskich, posiłkując się wskazówkami, podanemi przez Dormoy w jego „Théorie mathématique des assurances sur la vie” (Paryż, 1878 r.—Tom I, str. 74 i dalsze).

Wszystkie towarzystwa dostarczyły własnych materyałów statystycznych po 31 grudnia 1863 r., na której to dacie rachunek został zamknięty. Każdemu ubezpieczeniu, zarówno w biegu będącemu jak i ustałemu z przyczyny śmierci, wyekspirowania terminu lub zerwania umowy, poświęcono oddzielną kartkę statystyczną, wypełnioną według następującego wzoru

Polisy №..................

Nazwisko i Imię..................

Narodowość..................

Zdrowy lub niezdrowy..................

Rok wejścia..................

Rok wyjścia..................

Wiek przy wejściu..................

Wiek przy wyjściu..................

Sposób wyjścia..................

Przyczyna śmierci..................

....

(*) Patrz art. 29.

Jeżeli ten sam ubezpieczony posiadał kilka polis jednocześnie, uwzględniono tylko najdawniejszą; gdy jednak pierwsza polisa była unieważnioną, a później ta sama osoba powtórnie się ubezpieczyła, poświęcono nowej polisie oddzielną, na specyalnym wzorze wypisaną kartę i postępowano z nią tak samo, jak z nowem ubezpieczeniem.

W rubryce „Zdrowy lub niezdrowy" oznaczano stan zdrowia ubezpieczonego w chwili podpisania polisy; w Anglii bowiem ubezpieczają i niezupełnie zdrowe osoby, które muszą jednak opłacać wyższą premię, jako przedstawiające wyjątkowe ryzyka.

Za wiek „wejścia", czyli za wiek w chwili zawarcia umowy ubezpieczeniowej, przyjmowano pełną liczbę lat, jaką ubezpieczony kończył w najbliższą rocznicę swych urodzin po wystawieniu polisy.

Za wiek „wyjścia", t. j. posiadany w chwili ustania umowy, przyjmowano stale wiek wejścia zwiększony o różnicę pomiędzy rokiem wejścia i wyjścia.

Co do sposobu wyjścia: śmierć oznaczano głoską D (Death), ustanie umowy – głoską R (Resilience=odskok, odskoczenie, odbicie się); w biegu będące, d. 31 grudnia 1863 r., polisy oznaczano linijką poziomą (—).

Przyczynę śmierci dodano w schematach dla dostarczenia materyału statystyce lekarskiej.

Rubryki: „Nazwisko i Imię", „Narodowość", „Rok wejścia" i „Rok wyjścia" nie potrzebują objaśnień.

Po zgromadzeniu wszystkich kartek, podzielono takowe przedewszystkiem na cztery grupy:

I) mężczyźni, przyjęci w dobrym stanie zdrowia,
II) kobiety, przyjęte w dobrym stanie zdrowia,
III) mężczyźni i kobiety (łącznie), przyjęci w niedostatecznie dobrym stanie zdrowia,
IV) osoby, wystawione na wyjątkowe ryzyko z przyczyny klimatu w jakim przebywają, niebezpiecznych zajęć, i t. p.

Każda grupa była następnie rozpatrywaną oddzielnie. Kartki statystyczne układano według nazwisk, porządkiem alfabetycznym, aby raz jeden tylko uwzględnić te osoby, które jednocześnie w kilku towarzystwach były ubezpieczone (*).

Po wyłączeniu kartek, odnoszących się do tych samych osób jednocześnie w różnych towarzystwach ubezpieczonych, zburzono porządek alfabetyczny i ułożono kartki według sposobu wyjścia—tak, że ułożono oddzielnie kartki, odnoszące się do ubezpieczeń zakończonych śmiercią (D), oddzielnie kartki ubezpieczeń ustałych (R) i oddzielnie kartki odnoszące się do polis będących jeszcze w biegu (—).

(*) Szczegół ten został pominięty przy układaniu tablicy śmiertelności 17 towarzystw angielskich, dla tego ciąży na niej zarzut, że została ułożoną na podstawie polis, a nie osób, jak być powinno.

Każdą z powyższych grup rozklasyfikowano według wieku wejścia (w chwili zawarcia umowy), łącząc ze sobą kartki należące do osób tego samego wieku. Wreszcie te ostatnie grupy podzielono jeszcze na poddziały, według wieku w chwili wyjścia i w chwili trwania umowy w d. 31 grudnia 1863 r.

Takie pogrupowanie kartek z łatwością pozwoliło ułożyć tak nazwane „tablice obserwacyjne", z których jednej urywek, dla przykładu i ułatwienia sobie dalszych rozumowań, podajemy:

Tablica obserwacyjna.

Wiek wyjścia	Mężczyźni zdrowi. Wiek wejścia 30 lat. Zawarło umowę osób 5 791.		
	Dnia 31 grudnia 1863 r. było ubezpieczeń w biegu	Ubezpieczeń ustałych	Umarło osób
30	319	75	4
31	252	365	28
32	230	220	35
33	235	153	49
34	198	147	51
......	......	......	......
Wszystkich do 31 grudnia 1863 r.	3 677	1 491	623
Ogół zawartych ubezp.	5 791		

Tablice te obejmują zatem liczbę wszystkich zawartych ubezpieczeń, rozdzielonych: na będące w biegu dnia 31 grudnia 1863 r. i na ustałe, oddzielnie z przyczyny zerwania umowy lub wyekspirowania terminu i oddzielnie z przyczyny śmierci. Każda kategorya jest podzielona według wieku wejścia i wyjścia oraz według wieku osób, których polisy w d. 31 grudnia 1863 r. były jeszcze w biegu. Wszystkie zawarte w nich dane pochodzą z oryginalnych dokumentów, z których zostały zaczerpnięte, bez żadnych zmian ani poprawek, skutkiem czego właśnie nazwano je „tablicami obserwacyjnemi". Pozwalają one wszechstronnie badać prawo śmiertelności osób ubezpieczonych zarówno pod względem płci, wieku jak i okresów ubezpieczeniowych. Zostały opublikowane w całości jako oryginalne źródło, przystępne dla każdego, ktoby się chciał tym przedmiotem zająć.

Dla ułatwienia sobie dalszych rozumowań, rozróżnijmy trzy rodzaje okresów rocznych. Jeden, kalendarzowy, trwający od jednego 31-go grudnia do bezpośrednio następującego; rok taki nazwijmy rachunkowym. Drugi, od jednej do drugiej rocznicy zawarcia ubezpieczenia, i ten nazwijmy rkiemo ubezpieczeniowym. Wreszcie trzeci, od jednej do drugiej rocznicy urodzin ubezpieczonego, ten zwać będziemy rokiem urodzinowym (wiekowym).

Otóż w wieku od lat 29 do 30 zawarło umowę ubezpieczeniową 5791 osób, z tych zaraz w pierwszym roku rachunkowym zerwało umowę osób 75. Ponieważ były one pod obserwacyą bardzo krótko, można je całkiem z rachunku wyłączyć, czyli właściwie pod uwagę wziętych osób mamy tylko 5791 — — 75 = 5716.

Osoby te przystępowały do ubezpieczenia w różnych chwilach roku rachunkowego. Jeżeli więc przypuścimy, że przystępowanie osób do ubezpieczenia rozkłada się jednostajnie na cały rok rachunkowy, to można przyjąć, iż wszystkie zostały jednocześnie ubezpieczone, średnio biorąc, w połowie roku rachunkowego, czyli pozostawały pod obserwacyą przez pół roku, co na jedno wychodzi, jak gdyby połowa ich, t. j. $\frac{5716}{2} = 2858$ była pod obserwacyą przez cały rok, od jednego do drugiego 31-go grudnia.

Też same osoby przystępowały do ubezpieczenia w różnych chwilach roku urodzinowego; jeżeli zatem i tutaj przypuścimy, że wiek ubezpieczonych, w chwilach zawierania umowy, jednostajnie się rozłożył na cały rok urodzinowy, to można przyjąć, iż przeciętnie wszyscy zawarli umowy w połowie roku urodzinowego, mając lat $29^1/_2$ w chwili zawierania umowy, czyli lat 29 na początku roku rachunkowego.

Wreszcie, podobnie rozumując, przyjąć można, że dzień 31 grudnia, stanowiący koniec roku rachunkowego, jest przeciętnie połową roku ubezpieczeniowego dla wszystkich uważanych osób. Przez tę pierwszą połowę roku ubezpieczeniowego umarło osób 4. Można przypuścić, że przez drugie półrocze umarłyby również 4 osoby, t. j. z pośród 5716 osób, przez cały rok rachunkowy ubezpieczonych, umarłoby osób 8, więc z połowy $\frac{5716}{2} = 2858$ osób, ubezpieczonych również przez cały rok, umarłoby osób $\frac{8}{2} = 4$.

Łącząc powyższe trzy założenia, bardzo do rzeczywistego stanu rzeczy zbliżone, w jedną całość, wypada ostatecznie, że z pośród 2858 osób 29-o letnich umarły w ciągu roku rachunkowego 4, skąd na prawdopodobieństwo śmierci 29-o letniej osoby, w pierwszym roku ubezpieczeniowym, wypada $\frac{4}{2858}$.

W 2-im roku ubezpieczeniowym było osób 5791 mniej wybyłe w ciągu pierwszego roku (75), mniej trwające w ubezpieczeniu d. 31 grudnia 1863 r., lecz będące dopiero w 1-ym roku ubezpieczeniowym (319), mniej zmarłe w 1-ym roku (4), razem mniej (75+319+4)=398, t. j. było osób 5791—398=5393. Oprócz tego, w drugim roku ubezpieczeniowym wybyło za życia osób 365. Jeżeli przypuścimy, że daty ich wyjścia rozkładają się jednostajnie na cały rok, czyli że, średnio biorąc, każda z pomienionych osób była pod obserwacyą przez pół roku, co na jedno wychodzi, jak gdyby połowa wyszła zaraz na początku roku, a druga pozostawała przez rok cały, to od poprzedniej liczby trzeba jeszcze odjąć $\frac{365}{2} = 182,5$. Skutkiem tego, na liczbę osób, przez cały drugi rok ubezpieczeniowy obserwowanych, pozostaje $5393-182,5=5210,5$. Wiek tych osób, jak widzieliśmy, wynosił, w chwili zawierania umowy, czyli średnio w połowie roku rachunkowego, lat $29^1/_2$, na początku 1-go roku lat 29, zatem na początku 2-go roku wiek owych 5210,5 osób można oznaczyć na lat 30. Że zaś w drugim roku umarło osób 28, więc na prawdopodobieństwo śmierci 30-o letniej osoby, w 2-im roku ubezpieczeniowym, wypada $\frac{28}{5210,5}$.

Tak samo dla 3-go roku ubezpieczeniowego znajdujemy:

Z liczby		5393
ubywa: wybyłych w 2-im roku	365	
trwających w ubezp. dnia 31 grudnia 1863 r. w 2-im roku . . .	252	
zmarłych w 2-im roku	28	645
		4748
mniej połowa wybyłych w 3-im roku $\frac{220}{2} =$		110
		4638

Że zaś w 3-im roku umarło 35 osób, więc prawdopodobieństwo śmierci dla 31-o letniej osoby, w 3-im roku ubezpieczeniowym, równa się $\frac{35}{4638}$. I tak dalej.

W ogóle wiek osób, dla których obliczamy prawdopodobieństwo śmierci, oznacza się z tablicy obserwacyjnej, zmniejszając lata pierwszej kolumny o jedność.

Tym sposobem, z przytoczonej tablicy obserwacyjnej możemy ułożyć następującą

Wiek lat	W roku ubezpieczeniowym								i t. d.
	1		2		3		4		
	żyjących	zmarłych	żyjących	zmarłych	żyjących	zmarłych	żyjących	zmarłych	
......	....	....	....	....	....	....	....	....	i t. d.
28	—	—	—	—	—	—	—	—	
29	2858	4	—	—	—	—	—	—	
30	—	—	5210,5	28	—	—	—	—	
31	—	—	—	—	4638	35	—	—	
32	—	—	—	—	—	—	—	—	
......	....	....	....	....	....	....	....	....	

Inne tablice obserwacyjne (dla innego wieku wejścia) pozwolą wypełnić puste miejsca (oznaczone kreskami) w tablicy ostatniej; mając zaś ostatnią tablicę całkowicie wypełnioną, możemy wszechstronnie badać śmiertelność osób ubezpieczonych.

I tak, wiersze poziome dadzą nam wyobrażenie o zmianach śmiertelności osób tego samego wieku w różnych latach trwania ubezpieczeń; kolumny pionowe przedstawią śmiertelność różnych lat wieku w tych samych latach ubezpieczeniowych.

Sumy liczb wierszy poziomych dadzą nam możność obliczenia prawdopodobieństwa śmierci wszystkich ubezpieczonych z podziałem na wiek, bez względu na czas trwania ubezpieczeń, t. j. pozwolą ułożyć właściwą tablicę śmiertelności, o którą głównie chodzi. Pozostaje tylko z otrzymanych prawdopodobieństw śmierci obliczyć tablicę, obejmującą liczbę żyjących w każdym wieku, i takową wyrównać. Sposoby postępowania w obu tych operacyach są nam już znane z poprzednich artykułów.

Opis sposobu, użytego do ułożenia tablic 23 towarzystw niemieckich, znajduje się w wydawnictwie „Deutsche Sterblichkeits-Tafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungs-Gesellschaften, veröffentlicht im Auftrage des Collegiums für Lebensversicherungs - Wissenschaft zu Berlin". (Berlin, 1883).

Praca wykonaną została według planu ułożonego i zreferowanego, w sposób rozumowany, przez Wilhelma Lazarus'a. Metoda różni się od angielskiej tylko w szczegółach, zasady pozostają te same: „Unsere Methode lehnt sich an die englische an, ohne indess völlig mit derselben übereinzustimmen", powiada Lazarus na str. XIV.

Nie widzimy potrzeby wchodzenia w szczegóły metody niemieckiej; natomiast podniesiemy tu parę ważnych, dla sprawy ubezpieczeń życiowych, okoliczności, jakie się z prac angielskich wyłoniły.

Przy badaniu śmiertelności osób, przyjętych do ubezpieczenia z wyboru lekarskiego (sélection médicale) według taryfy normalnej, okazało się, że śmiertelność takich osób, przy równym wieku, rośnie w miarę im dłużej trwa ubezpieczenie. Jeżeli np. porównamy śmiertelność osób 35-o letnich, z których jedne są w pierwszym, drugie w 5-ym, 3-cie w 10-ym, i t. d. roku ubezpieczeniowym, śmiertelność pierwszych jest najmniejsza, drugich większa, trzecich jeszcze większa i t. d., pomimo, że wszystkie mają po lat 35, t. j. są równego wieku.

Dormoy przytacza następującą tabelkę, którą podajemy na str. 82.

Z tabelki tej pokazuje się, że przeciętna śmiertelność osób, w wieku od lat 35 do 39, wynosi 0,97 na 100, podczas kiedy śmiertelność osób w pierwszym roku ubezpieczeniowym wynosi tylko 0,43 na 100, w ciągu czterech następnych lat 0,83%, od 6 do 10 lat 1,06%, od 11 do 15 lat 1,45% i t. d. W pierwszych zatem latach ubezpieczenia, aż do 5-u włącznie, śmiertelność jest mniejsza od przeciętnej, później staje się już większą.

Śmiertelność na 100 osób (mężczyzn i kobiet) w wieku od lat 35 do 39									
Lata trwania ubezpieczeń								Według tablicy śmiertelności Carlisle'a	Ogólna śmiertelność ludności Francyi
1-y	od 1 do 5	od 6 do 10	od 11 do 15	od 16 do 20	5 i wyżej	10 i wyżej	bez względu na czas trwania ubezpieczeń		
0,43	0,83	1,06	1,12	1,45	1,10	1,17	0,97	1,09	0,924

W gruncie rzeczy, jest to objaw dość naturalny, a przynajmniej spodziewany, albowiem osoba np. 35-o letnia w 1-ym roku ubezpieczeniowym, jako dopieroco przez lekarza zbadana i przyjęta, może być zdrowszą od również 35-o letniej, lecz badanej przed kilku laty, gdyż ta ostatnia przez owe lat kilka, dzielące ją od rewizyi lekarskiej, mogła dużo stracić na zdrowiu — tak, że gdyby była badaną jednocześnie z osobą dopieroco przyjętą, mogłaby okazać się całkiem nieodpowiednią do przyjęcia według taryfy normalnej.

Dziwną jednak wydaje się być rzeczą okoliczność, iż śmiertelność osób od dawniejszego czasu ubezpieczonych okazuje się większą od śmiertelności ogółu ludności Francyi i angielskiego miasta Carlisle (hrabstwo Cumberland), t. j. od śmiertelności ludzi, którzy żadnemu doborowi lekarskiemu nie podlegają.

Przyczyną tego bardzo przykrego, dla towarzystw ubezpieczeń życiowych, zjawiska zdaje się być przeciw wybór naturalny (antisélection naturelle), tem spowodowany, że osoby czujące się, po zawarciu ubezpieczenia, przez czas dłuższy zdrowemi, zrywają ubezpieczenia, a pozostają osoby słabsze, niezupełnie pewne swego zdrowia, tak, iż po upływie jakiegoś czasu średni stan zdrowia pozostałych ubezpieczonych okazuje się gorszym od przeciętnego stanu zdrowia ogółu ludności. Przełom odbywa się mniej więcej w 6-ym roku ubezpieczeniowym, z czego wnosić wypada, że dobór lekarski wywiera swój korzystny wpływ tylko mniej więcej przez czas pierwszych lat 5-u.

Dalej, śmiertelność ubezpieczonych kobiet okazała się w młodszych latach znacznie wyższą od śmiertelności mężczyzn. W wieku od lat 15-u do 20-u wypadła prawie dwa razy większą. Różnica ze wzrostem wieku maleje, w 50-ym roku życia prawie zupełnie niknie (*), później zaś zachodzi stosunek wprost odwrotny. Wtedy śmiertelność mężczyzn staje się większą od śmiertelności kobiet i różnica rośnie jednocześnie z wiekiem. W skrajnej starości, od 90 do 96 lat, śmiertelność mężczyzn jest o połowę wyższą od śmiertelności kobiet.

Z przyczyny większej śmiertelności kobiet w latach młodszych i średnich, wiele towarzystw przyjmuje ubezpieczenia tychże według podwyższonej taryfy. Przeciwko temu, w ostatnich czasach, powstała opozycya, której najdobitniejszym wyrazem był odczyt, wygłoszony przez pewnego actuary'usza

---

(*) Według tablic 23 tow. niemieckich — wcześniej, około 41—42 roku życia.

jednego z kanadyjskich towarzystw ubezpieczeń życiowych, podczas kongresu, jaki miał miejsce w czasie wystawy chicago'skiej w 1893 r. (*).

Większa śmiertelność kobiet w wieku od 15 do 40—50 lat, bywa głównie przypisywaną niebezpiecznym chwilom dojrzewania dziewcząt i krytycznym przejściom w czasie okresu porodowego u kobiet dojrzałych. Otóż od owego czasu, do którego odnoszą się dane statystyczne, na podstawie których układane były obecnie posiadane tablice śmiertelności, medycyna w ogóle, a antiseptyczne środki w szczególności tak bardzo postąpiły i tak się ich stosowanie rozpowszechniło, że teraz śmierć z przyczyny połogu, szczególniej zaś z t. z. gorączki połogowej do rzadkich należy wypadków. Natomiast, jak dowodzi wyżej wzmiankowany specyalista, śmierć wypadkowa o wiele częściej spotyka mężczyzn (8% wszystkich wypadków śmierci wśród ubezpieczonych), aniżeli kobiety (1,56%), co nie tylko równoważy śmiertelność kobiet z przyczyn porodowych, ale nawet przechyla rezultaty na niekorzyść mężczyzn.

Te i tym podobne względy skłoniły ostatecznie niektóre towarzystwa, pomiędzy innemi i reprezentowane przez prelegenta, do przyjmowania kobiet według taryf normalnych i, jak dotąd przynajmniej, nie mają one powodu być niezadowolonemi z uczynionego kroku.

29. Opis niektórych tablic śmiertelności. Istnieje bardzo wiele tablic śmiertelności, posiadających rozmaitą wartość naukową i praktyczną. Eug. Pereire, w swoich: „Tables de l'intérêt composé, des annuités et des rentes viagères" (Paryż 1873), podaje 54 tablic śmiertelności, chociaż nie wyczerpuje wszystkich po datę wydania książki ułożonych i, naturalnie, nie pomieszcza tych, które od owej daty się pojawiły.

Również nie mało tablic bywa używanych przez różne towarzystwa ubezpieczeń życiowych. W samych Niemczech, według Gustawa Berner'a, są używane następujące: 17-u towarzystw angielskich, 23 towarzystw niemieckich, tablica Babbage'a, Towarzystwa Gotajskiego, Brune'a i Brune - Fischer'a, tablica saska Heym'a, True Northampton Life Table, D-ra Neison'a, Deparcieux'a i pruska.

Wszystkich podawać tu, oczywiście, niepodobna, poprzestaniemy więc na ważniejszych.

Chociaż tablice ogółu ludności mniej nas obchodzą, wszakże podajemy z nich kilka:

a) Tablica Duvillard'a (Tabl. II, kol. 1), ogłoszona w 1806 r. (**), ułożoną została na podstawie 2920672 osób żyjących i 101542 zmarłych, zaobserwowanych, przed rewolucyą, w różnych okolicach Francyi. Do ostatnich czasów była używaną przez towarzystwa francuskie.

(*) „Deutsche Versicherungs-Zeitung". Berlin, 1893, N. 83.

(**) E. Duvillard. „Analyse et tableaux de l'influence de la petite vérole sur la mortalité etc."

b) Tablica Quetelet'a (Tabl. II, kol. 2 i 3). Sławny belgijski statystyk Quetelet ułożył kilka tablic śmiertelności dla ludności Belgii (*), opierając się na spisach ludności i wykazach osób zmarłych. Oprócz tablic, obejmujących całą ludność bez i z podziałem na mężczyzn i kobiety, ułożył jeszcze oddzielne tablice dla zamieszkałych na wsi i w miastach. Pierwsza serya odnosi się do r. 1853, ułożona na podstawie spisu, odbytego w 1846 r., i zmarłych w latach od 1841 do 1850 r.; druga, na podstawie spisu, odbytego w 1856 r. (4529560 żyjących). Podane przez nas tablice Quetelet'a należą właśnie do tej drugiej seryi.

c) Tablice Farr'a (Tab. II, kol. 4 i 5). Naczelnik biura statystycznego w Londynie, William Farr, ogłosił w 1860 r. (**) ogólne tablice śmiertelności dla ludności Anglii i Wallii. Pracę swoją oparł na spisach ludności, odbytych w latach 1841 i 1851, oraz na zmarłych w czasie od 1838 do 1854 r. (6470720 wypadków śmierci). Niektóre szczegóły o tych tablicach podaliśmy w art. 23. Podane przez nas tablice zaczerpnęliśmy z W. Karup'a „Theoretisches Handbuch der Lebensversicherung" (Lipsk, 1871).

d) Tablice śmiertelności Francyi (Tabl. II, kol 6 i 7), ułożona na podstawie ostatnich 9-u spisów ludności. Szczegóły o tej tablicy znajdują się również w art. 23.

Z tablic, ułożonych na podstawie obserwacyj, dokonanych na więcej lub mniej zamkniętych grupach osób, ograniczamy się do następujących:

α) Tablica Deparcieux'a (Tabl. III, kol. 1 i 2). W 1746 r. Deparcieux ogłosił sześć tablic śmiertelności (***), z których szczególniej jedna, przez nas podana, znalazła obszerne w praktyce zastosowanie. Za materyał posłużyły autorowi obserwacye nad osobami, należącemi do trzech tontin (założonych w latach: 1689, 1696 i 1734), od czasu ich założenia aż po rok 1742; liczba obserwowanych osób dochodziła do 10000 (9320). Inne tablice ułożył Deparcieux na podstawie obserwacyj, dokonanych nad 10219 mnichami.

Tablica Deparcieux'a zaczyna się dopiero od 3-go roku życia; Maas, na podstawie tablicy Kerseboom'a, dopełnił ją dla pozostałych 3-ch lat dziecięctwa, mianowicie:

dla 0 lat oznaczył liczbę żyjących 1359
„ 1 roku „ „ „ 1092
„ 2 lat „ „ „ 1043
„ 3 „ „ „ „ 1000 i t. d.,

jak w podanej przez nas tablicy III, kol. 1 i 2.

Tablica Deparcieux'a znalazła zastosowanie w praktyce ubezpieczeń życiowych, zwłaszcza we Francyi, gdzie jej używano do ubezpieczeń rent i kapi-

---

(*) „Bulletins de l'Académie Royale de Belgique" (Tom IX, N.10), oraz „Journal of the Institute of Actuaries", tom IV.

(**) „Journal of the Institute of Actuaries", tom IX oraz „Life Tables", wydane w 1864 r.

(***) Deparcieux. „Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine". Paryż, 1746.

tałów na dożycie, podczas gdy do ubezpieczania kapitałów pośmiertnych stosowano tablicę Duvillard'a.

β) Tablica Deparcieux-Florencourt'a (Tabl. III, kol. 3 i 4), ułożona na podstawie tychże samych materyałów co i tablica Deparcieux'a (*), służy dziś jeszcze za podstawę dla matematycznych obliczeń w niektórych towarzystwach ubezpieczeń życiowych.

γ) Tablice Brune-Fischer'a (Tabl. III, kol. 5, 6, 7 i 8). W 1837 r. w Crelle'a „Journal für reine und angewandte Mathematik", ogłoszono po raz pierwszy tablice Brune'a, ułożone na podstawie materyałów, zebranych w ciągu 58 lat istnienia „Pruskiej kasy wdów" (Königlich preussische allgemeine Witwen-Verpflegungsanstalt). W 1847 r. tablice te zostały poprawione przez wprowadzenie materyału za lat 69. W 1854 r., Dr. Heym, w tomie IV „Masius' Rundschau der Versicherungen", podał nowe tablice, ułożone z tegoż materyału za lata od 1776 do 1852 r. Wreszcie Dr. Ph. Fischer w swem dziele „Grundzüge des auf menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens" (Oppenheim am Rhein, 1860), oparłszy się na tym samym materyale, z wielką starannością opracował tablice, które są znane pod nazwą tablic Brune-Fischer'a. Tablica dla mężczyzn jest używaną dotąd przez niektóre towarzystwa niemieckie, pomiędzy innemi i przez Wiener Theilungs-Verein.

Tablice Brune-Fischer'a kończą się: dla mężczyzn na 85-ym, dla kobiet na 86-ym roku życia; doprowadził je, na podstawie tablicy Heym'a, do końca Simon Spitzer w swem „Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften etc." (Wieden, 1881). Te właśnie tablice podajemy w naszym zbiorze.

δ) Tablica 17-u towarzystw angielskich (Combined experience, or actuaries' table of mortality. Tabl. III, kol. 9 i 10). Tablica ta, ogłoszona przez „Institute of Actuaries" w 1843 r. (**), ułożoną została przez Woolhouse'a, vice-prezesa rzeczonego Instytutu, na podstawie danych statystycznych, dostarczonych mu przez 17 towarzystw angielskich (***), obejmujących 83905 polis, z których ustało: 13781 skutkiem śmierci, 25247 skutkiem wyjścia za życia i 44877 było ważnych w dniu 31 grudnia 1837 r., t. j. w dacie zamknięcia rachunku.

Chociaż tablicy tej czynią zarzut, że została ułożoną na podstawie polis, a nie osób, jak być powinno, to jednak zyskała ona wielkie uznanie i przez bardzo wiele towarzystw dotąd jeszcze jest używaną.

(*) Florencourt. „Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst", 1781.

(**) Tables exhibiting the law of mortality from the compound experience of seventeen life assurance offices.

(***) Amicable, Alliance, British Commercial, Crown, Economic, Equitable, Guardian, Imperial, Law Life, London Life, Norwich Union, Promoter, Scottish Widows' Fund, Sun, Universal and University.

Rozpoczyna się od 10-go roku życia, lecz w 1863 r. zmienił ją Dr. Heym, w „Masius' Rundschau der Versicherungen", w ten sposób, że opuścił pierwsze 5 liczb, a w to miejsce, począwszy od 0 lat, podstawił następujące:

dla 0 lat	144218	dla 9 lat	100996
„ 1 „	122692	„ 10 „	100179
„ 2 „	114339	„ 11 „	99416
„ 3 „	110050	„ 12 „	98691
„ 4 „	107344	„ 13 „	97992
„ 5 „	105471	„ 14 „	97310
„ 6 „	104052	„ 15 „	96636 i t. d.,
„ 7 „	102890	jak w tablicy III, kol. 9.	
„ 8 „	101889		

Tej właśnie tablicy, dopełnionej przez Heym'a, używać będziemy przy dawaniu, w dalszym ciągu, przykładów liczebnych. Wprawdzie możnaby użyć do tego celu późniejszej, jak na dziś odpowiedniejszej, np. tablicy 23 towarzystw niemieckich; wybraliśmy jednak tabl. 17 towarzystw angielskich, ponieważ posiadamy najwięcej materyału przygotowanego według tej tablicy. Oszczędziło nam to wiele czasu, a wykładowi nic nie szkodzi, gdyż wartość tablicy dla wykładu stanowi wzgląd całkiem obojętny.

ε) Tablice 20 towarzystw angielskich (Tabl. III, kol. 11 i 12), ogłoszone w 1869 r. (*), ułożone zostały na podstawie materyałów, dostarczonych przez 20 towarzystw angielskich (**). Szczegóły o metodzie ułożenia tych tablic podaliśmy w art. 28. Materyał składał się z następujących danych

Kategorye osób obserwowanych	Weszło pod obserwacyę osób	Z nich		
		Umarło	Wybyło żyjących	Było ubezpieczonych w d. 31 grudnia 1863 r.
I. Mężczyźni, przyjęci w dobrym stanie zdrowia	130 243	20 521	35 024	74 698
II. Kobiety, przyjęte w dobrym stanie zdrowia	16 604	3 335	5 507	7 762
III. Mężczyźni i kobiety (łącznie), przyjęci w niedostatecznie dobrym stanie zdrowia . . .	11 146	2 456	3 365	5 325
IV. Osoby, pozostające w wyjątkowym stanie ryzyka.	2 433	409	1 480	544
Razem . .	160 426	26 721	45 376	88 329

(*) „The mortality experience of life assurances Companies collected by the Institute of Actuaries". Londyn, 1869.

(**) City of Glasgow, Clerical-Medical and General, Edinburgh, Equity and Law, Guardian, Life Association of Scotland, London Assurance, London and Provincial Law, Metropolitan, North British, Northern, Palladium, Pelican, Scottish Equitable, Scottish National, Scottish Provident, Scottish Union, Scottish Widows Fund, Standard and Union.

Na podstawie powyższego materyału, sformowano rozmaite tablice, z których najważniejszemi są ułożone dla osób, przyjętych w normalnym stanie zdrowia; jest ich trzy:

oddzielna dla mężczyzn, oznaczona symbolem H^M (Healthy male lives),

oddzielna dla kobiet, oznaczona symbolem H^F (Healthy female lives) i

łączna dla obu płci, oznaczona symbolem H^{MF} (Healthy male and female lives).

Z pośród nich, podajemy, w naszym zbiorze, tablicę dla mężczyzn i kobiet w połączeniu (H^{MF}), zaczerpniętą z „Le Moniteur des assurances" N. 257, z d. 15 lutego 1890 r.

Obecnie powstała myśl ułożenia dla Anglii nowych tablic, w którychby silniej niż poprzednio uwzględnioną być mogła spółczesna śmiertelność (*).

ς) Tablice 30 towarzystw amerykańskich (Tabl. III, kol. 13 i 14), ogłoszone przez Meech'a w 1881 r. (**), ułożone zostały na podstawie materyałów, zebranych przez 30 towarzystw Stanów Zjednoczonych Ameryki Północnej. Materyał składał się z następujących danych

Osoby	Liczba osób obserwowanych	Z nich		
		Umarło	Ubyło za życia	Było ubezpieczonych w chwili zamknięcia rachunku
Mężczyźni	982 734	44 485	411 092	527 157
Kobiety	44 795	2 058	20 476	22 261
Razem . .	1 027 529	46 543	431 568	549 418

Podaną przez nas tablicę, dla mężczyzn, zaczerpnęliśmy z "Annuaire pour l'an 1893, publié par le Bureau des longitudes".

η) Tablice 23 towarzystw niemieckich (Tabl. III, kol. 15, 16, 17, 18, 19 i 20). Dnia 21 stycznia 1868 r. odbyło się w Berlinie pierwsze posiedzenie grona specyalistów, złożonego z D-ra Heym'a, Hopf'a, Wilhelma Lazarus'a, D-ra Wiegand'a, R. Buffe'a, D-ra Kanner'a i D-ra Zillmer'a, którzy, na skutek pobudki danej przez Zillmer'a, utworzyli „Collegium für Lebensversicherungs-Wissenschaft zu Berlin".

Najbliższym, zaraz na następnem posiedzeniu zatwierdzonym celem dla „Collegium" było ułożenie tablic śmiertelności na podstawie obserwacyj, nagromadzonych przez niemieckie towarzystwa ubezpieczeń życiowych. Do komisyi ad hoc wysadzonej weszli: Dr. Zillmer jako przewodniczący, W. Lazarus, Dr. Kanner i Dr. Heym jako referenci.

(*) „Annalen des gesammten Versicherungswesens". 1893, N. 52.

(**) Meech. „System and tables of life Insurance". Norwich, Conn., 1881.

W. Lazarus wypracował projekt postępowania (*) i niebawem przystąpiono do pracy.—23 towarzystw niemieckich (**) nadesłało materyały statystyczne, zebrane za czas od początku istnienia towarzystw po 31 grudnia 1875 r. dla ubezpieczeń pośmiertnych, po 31 grudnia 1870 r. dla innych rodzajów ubezpieczeń.

Komisya otrzymała 982 520 kartek statystycznych, z których wszakże odrzucono, z przyczyny:

niedokładnych danych	5 536
kilkakrotnego ubezpieczenia się tych samych osób . . .	115 825
zamieszkania za granicą	2 659
razem . .	124 020,

tak, że do dalszego rachunku przyjęto tylko kartek 858 500.

Podzielono je na 8 grup, na

M I. Mężczyzn (Männer) ze ścisłą rewizyą lekarską, o normalnej premii.
W I. Kobiety (Weiber) ze ścisłą rewizyą lekarską, o normalnej premii.
M II. Mężczyźni ze ścisłą rewizyą lekarską, o podwyższonej premii.
W II. Kobiety ze ścisłą rewizyą lekarską, o podwyższonej premii.
M III. Mężczyźni z nieścisłą rewizyą lekarską.
W III. Kobiety z nieścisłą rewizyą lekarską.
M IV. Mężczyźni bez rewizyi lekarskiej.
W IV. Kobiety bez rewizyi lekarskiej.

(*) „Ueber die Ermittelung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Lebensversicherungs-Anstalten" w „Journal des Collegiums für Lebensversicherungs-Wissenschaft zu Berlin". Berlin, 1870, tom I.

(**) Deutsche Lebens-Versicherungs-Gesellschaft zu Lübeck (1828). Hannoversche Lebens-Versicherungs-Anstalt in Hannover (1831). Berlinische Lebens-Versicherungs-Gesellschaft in Berlin (1836). Lebens - Versicherungs-Anstalt der Bayerischen Hypotheken-und Wechsel-Bank in München (1836) Braunschweigische Lebens-Versicherungs-Anstalt in Braunschweig (1842). Frankfurter Lebens-Versicherungs-Gesellschaft in Frankfurt a. M. (1844). Allgemeine Renten-,Capital-und Lebens-Versicherungs-Bank „Teutonia" in Leipzig (1852). Mecklenburgische Lebens-Versicherungs-und Spar-Bank in Schwerin (1853). Lebens-Versicherungs-und Ersparniss-Bank in Stuttgart (1854). Lebens-,Pensions-und Leibrenten-Versicherungs-Gesellschaft „Induna" in Halle a. S. (1854). Magdeburger Lebens-Versicherungs-Gesellschaft in Magdeburg (1855). Renten-und Lebens-Versicherungs-Anstalt in Darmstadt (1855). „Thuringia", Lebens-Versicherungs-Gesellschaft in Erfurt (1856). „Providentia", Frankfurter Versicherungs-Gesellschaft in Frankfurt a. M. (1856). „Germania", Lebens-Versicherungs-Actien-Gesellschaft in Stettin (1857). Allgemeine Renten-Anstalt in Stuttgart (1861). Leipziger Kranken-,Invaliden-und Lebens-Versicherungs-Gesellschaft „Gegenseitigkeit" in Leipzig (1861) „Victoria zu Berlin", Allgemeine Versicherungs-Actien Gesellschaft (1861). Basler Lebens-Versicherungs-Gesellschaft in Basel (1864). Preussische Lebens-Versicherungs-Actien-Gesellschaft in Berlin (1865). „Friedrich Wilhelm", Preussische Lebens-und Garantie-Versicherungs-Actien-Gesellschaft in Berlin (1866). „Nordstern", Lebens-Versicherungs-Actien-Gesellschaft in Berlin (1867). Oesterreichische Versicherungs-Gesellschaft „Donau" in Wien (1867). Liczby w nawiasie pomieszczone oznaczają rok założenia towarzystwa.

Wzmiankowane 858 500 kartek rozdzieliły się w następujący sposób pomiędzy powyższe grupy:

Kategorye i grupy		Liczba osób obserwowanych	Z nich		
			Umarło	Wyszło za życia	Było ubezpieczonych w chwili zamknięcia rachunku
I. Ze ścisłą rewizyą lekarską, o normalnej premii	Mężczyźni . . . . . . M I.	341 744	36 944	94 520	210 280
	Kobiety . . . . W I.	121 606	10 594	44 625	66 387
	Razem . . M u. W I.	463 350	47 538	139 145	276 667
II. Ze ścisłą rewizyą lekarską, o podwyższonej premii	Mężczyźni . . . . . M II.	90 311	7 388	29 466	53 457
	Kobiety . . . . . . W II.	30 938	2 267	11 564	17 107
	Razem . . M u. W II.	121 249	9 655	41 030	70 564
III. Z nieścisłą rewizyą lekarską	Mężczyźni . . . . . M III.	114 894	18 152	33 649	63 093
	Kobiety . . . . . . W III.	122 558	16 586	34 189	71 783
	Razem . M u. W III.	237 452	34 738	67 838	134 876
IV. Bez rewizyi lekarskiej	Mężczyźni . . . . . M IV.	15 274	1 693	3 535	10 046
	Kobiety . . . . . . W IV.	21 175	2 902	4 049	14 224
	Razem . . M u. W IV.	36 449	4 595	7 584	24 270
	W ogóle . .	858 500	96 526	255 597	506 377

Na podstawie tego materyału ułożono odpowiednie tablice śmiertelności, z których 9 znajdujemy w wydawnictwie: „Deutsche Sterblichkeits-Tafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungs-Gesellschaften, veröffentlicht im Auftrage des Collegiums für Lebensversicherungs-Wissenschaft zu Berlin". (Berlin, 1883). Tablice zostały wyrównane przez D-ra Zillmer'a.

Ze względu na obfitość materyału i wielką precyzyę, z jaką praca przeprowadzoną została, oraz na ważność samych tablic, podajemy w naszym zbiorze aż trzy z nich: MI, WI i M u. WI, t. j. dające śmiertelność osób, przyjętych, ze ścisłą rewizyą lekarską, według taryf normalnych. Tablica M u.WI odnosi się do mężczyzn i kobiet w połączeniu. Niezależnie od tych tablic, robią się usiłowania w Niemczech nad ułożeniem zjednoczonemi siłami tablicy śmiertelności dla rentierów. Uczyniono już nawet w tym kierunku bardzo poważne kroki, ale ponieważ kroki te nie wydały jeszcze pożądanych rezultatów (*) i usiłowania trwają dalej, przeto pomijamy je tutaj milczeniem, odsyłając życzących się z tym przedmiotem bliżej zapoznać do broszury D-ra B. Schmerler'a p. t. „Die Sterblichkeits-Erfahrungen unter den Renten-Versicherten, etc.” (Berlin, 1893).

ϑ) Tablice towarzystw francuskich (Tabl. III, kol. 21, 22, 23 i 24). W 1889 r. na wystawie paryskiej, w oddziale „Économie sociale”, przedstawiono dwie tablice śmiertelności, ułożone staraniem czterech towarzystw komitetu: Assurances Générales, Union, Nationale i Phénix (**).

Jedna z tych tablic, oznaczona literami AF (Assurés Français), ułożoną została na podstawie obserwacyj, dostarczonych przez powyżej wymienione cztery towarzystwa i dokonanych nad osobami, ubezpieczonemi na przypadek śmierci w czasie od 1819 do 1888 r.

Drugą, oznaczoną literami RF (Rentiers Français), ułożono na podstawie obserwacyj, dostarczonych przez te same cztery towarzystwa oraz przez trzy inne: Caisse Paternelle, Urbaine i Monde, za czas od 1819 do 1878 r., dokonanych nad osobami, ubezpieczonemi na rentę dożywotnią.

Materyał przedstawia się, jak następuje:

Osoby	Dla tablicy AF			Dla tablicy RF		
	Liczba osób obserwowanych	Liczba przeżytych w ubezpieczeniu lat	Liczba zmarłych	Liczba osób obserwowanych	Liczba przeżytych w ubezpieczeniu lat	Liczba zmarłych
Mężczyźni .	179 925	1 408 435,25	18 931	16 927	149 377,00	9 824
Kobiety . .	49 218	382 347,50	3 690	23 401	227 370,25	11 643
Razem .	229 143	1 790 782,75	22 621	40 328	376 747,25	21 467
Polis .	284 775	—	—	76 350	—	—

Wyrównania dokonano przy pomocy dwukrotnego zastosowania metody Woolhouse'a.

(*) „Annalen des gesammten Versicheruugswesens”. 1893, N. 52.

(**) Exposition Universelle de 1889. Économie sociale.—Section VII.—Tables de mortalité exposées par les quatre Compagnies du Comité Assurances Générales, Union, Nationale et Phénix. („Le Moniteur”, N. 257 z 15 lutego 1890 r.).

Po wystawie paryskiej tablice AF i RF zostały poddane jeszcze dalszemu opracowaniu, z dodaniem materyałów zebranych do końca 1890 r. oraz wyrównaniem według metody Makeham'a i wyszły ostatecznie w formie, w jakiej je wydrukowano w „Annuaire pour l'an 1893, publié par le Bureau des longitudes". Z tego właśnie źródła zaczerpnęliśmy tablice podane w naszym zbiorze. Prawdopodobieństwa śmierci przez nas zostały obliczone.

λ) Tablica Maleszewskiego (Tabl. III. kol. 25 i 26). Kilka amerykańskich towarzystw, a między niemi i operujące u nas, połączyły właściwe ubezpieczenia życiowe z t. z. akumulacyą zysków o charakterze tontinowym, pozyskując za pośrednictwem tej manipulacyi wielką liczbę klientów.

W szczegóły dotyczące akumulacyi zysków wchodzić tu nie będziemy, gdyż dokładniejszą o nich wzmiankę znajdzie czytelnik później; natomiast nadmienimy, że przeciwko postępowaniu towarzystw amerykańskich, jako przeciwnemu czystej idei ubezpieczeń życiowych, oddawna walczono na zachodzie Europy, a nawet i w samej Ameryce. Na okoliczność tę zwróciło także uwagę Ministeryum Finansów w Petersburgu; chcąc zaś gruntownie rzecz rozpoznać, poleciło p. Maleszewskiemu, zasłużonemu autorowi dzieła p. t., „Teorya i praktyka kas emerytalnych" (*), sprawę tontin amerykańskich zbadać. Odnośny referat, potępiający tontiny i półtontiny, został p. Ministrowi Finansów przedstawiony, lecz Towarzystwo „Equitable" przeciwko wnioskom autora zaoponowało, czyniąc referatowi rozmaite zarzuty. Zarzuty te p. Maleszewski w d. 19 września 1893 r. stanowczo odparł, skutkiem czego d. 25 marca 1894 r. zapadła w łonie Komitetu Ministrów decyzya, wzbraniająca towarzystwom, w granicach państwa działającym, uprawiać tontiny i półtontiny, resp. akumulacyę zysków. Wszelkie zyski mają być od tej pory rozdzielane każdorocznie.

Otóż w tym to referacie, z d. 19 września 1893 r., znajdujemy tablicę śmiertelności, którą, od nazwiska szanownego autora, zwać będziemy tablicą Maleszewskiego.

Za materyał do ułożenia rzeczonej tablicy posłużyły p. Maleszewskiemu dane, nadesłane mu przez trzy towarzystwa: „Rosyjskie z 1835 r.", „Petersburgskie" i „Rosyę". Towarzystwo „Rosyjskie" i „Rosya" nadesłały dane za czas od początku swego istnienia po 1 styczeń 1893 r., „Petersburgskie" — od r. 1881 do 1 stycznia 1893 r. Liczba zmarłych wynosiła 5145 i pochodziła z osób, ubezpieczonych na przypadek śmierci łącznie z t. z. ubezpieczeniami mieszanemi. Do wyrównania użył autor metody Sprague'a.

Z tablicą Maleszewskiego wyczerpaliśmy wszystkie, naszem zdaniem, najważniejsze do dziś tablice śmiertelności. Pozostaje nam tylko jeszcze słów kilka nadmienić o jednej, która wprawdzie posiada tylko historyczne znaczenie, lecz nas o tyle interesować powinna, że jest niemal jedynym dotąd w tym dzia-

---

(*) „Теорія и практика пенсіонныхъ кассъ". Petersburg, 1889—1890.

le wiedzy zabytkiem, jakim my poszczycić się możemy (*); tymczasem mało kto wie o niej, ponieważ dotąd nigdzie jeszcze drukowaną nie była.

Rada Administracyjna Królestwa Polskiego, na zasadzie Ukazu z d. 10 stycznia 1843 r., decyzyą swą z d. 30 lipca 1844 r. upoważniła b. Dyrekcyę Ubezpieczeń do przyjmowania „Zabezpieczenia na życie od wszelkich mieszkańców Królestwa, bez różnicy stanu, płci i wyznania" (**). Za podstawę do obliczania premij, b. Dyrekcya Ubezpieczeń użyła „Tablicy śmiertelności Królestwa Polskiego". Z jakich materyałów i skąd zaczerpniętych owa tablica ułożoną została, wszelki ślad zaginął; my przynajmniej do źródła dotrzeć nie mogliśmy. Ale fakt istnienia tablicy śmiertelności Królestwa Polskiego w 1843 r. jest niezaprzeczony, gdyż mieliśmy osobiście sposobność widzieć w rękopisie książkę p. t. „N°4-y. Rachunek Taryf Obowiązujących", w której pomieniona tablica się znajduje. Podajemy ją tutaj w całości (***).

Wiek	Liczba żyjących	Prawdopodob. śmierci	Wiek	Liczba żyjących	Prawdopodob. śmierci	Wiek	Liczba żyjących	Prawdopodob. śmierci
0	1 000	0,224 00	12	591	0,006 77	24	531	0,011 30
1	776	0,088 92	13	587	0,008 52	25	525	0,011 43
2	707	0,046 68	14	582	0,005 15	26	519	0,009 63
3	674	0,029 67	15	579	0,006 91	27	514	0,013 62
4	654	0,024 46	16	575	0,005 22	28	507	0,011 83
5	638	0,018 81	17	572	0,008 74	29	501	0,013 97
6	626	0,015 97	18	567	0,012 35	30	494	0,016 19
7	616	0,009 74	19	560	0,010 71	31	486	0,014 40
8	610	0,008 20	20	554	0,009 03	32	479	0,012 53
9	605	0,008 26	21	549	0,010 93	33	473	0,012 68
10	600	0,008 33	22	543	0,009 21	34	467	0,017 13
11	595	0,006 72	23	538	0,013 01	35	459	0,017 43

(*) Autor niniejszej książki ułożył dwie tablice śmiertelności dla miasta Warszawy: jedną, ogłoszoną w „Ekonomiście" (1879 r., N. 5), według metody Halley'a; drugą, drukowaną w „Ateneum" (zeszyt majowy 1885 r.), na podstawie spisu jednodniowego, uskutecznionego w d. 9 lutego 1882 roku.

(**) „Zbiór urządzeń i wiadomości tyczących się zabezpieczeń na życie". Warszawa, 1853. W drukarni Stanisława Strąbskiego.

(***) Prawdopodobieństwa śmierci zostały przez nas obliczone; tablica oryginalna posiada tylko liczby żyjących.

Wiek	Liczba żyjących	Prawdopodob. śmierci	Wiek	Liczba żyjących	Prawdopodob. śmierci	Wiek	Liczba żyjących	Prawdopodob. śmierci
36	451	0,017 74	58	248	0,040 32	80	55	0,109 09
37	443	0,018 06	59	238	0,046 22	81	49	0,102 04
38	435	0,020 69	60	227	0,048 45	82	44	0,090 91
39	426	0,025 82	61	216	0,046 30	83	40	0,100 00
40	415	0,024 10	62	206	0,048 54	84	36	0,083 33
41	405	0,022 22	63	196	0,040 82	85	33	0,090 91
42	396	0,017 68	64	188	0,047 87	86	30	0,100 00
43	389	0,023 14	65	179	0,050 28	87	27	0,111 11
44	380	0,015 79	66	170	0,052 94	88	24	0,125 00
45	374	0,021 39	67	161	0,068 32	89	21	0,142 86
46	366	0,024 59	68	150	0,066 67	90	18	0,111 11
47	357	0,028 01	69	140	0,078 57	91	16	0,125 00
48	347	0,031 70	70	129	0,077 52	92	14	0,142 86
49	336	0,038 69	71	119	0,075 63	93	12	0,166 67
50	323	0,030 96	72	110	0,063 64	94	10	0,200 00
51	313	0,025 56	73	103	0,067 96	95	8	0,375 00
52	305	0,026 23	74	96	0,072 92	96	5	0,400 00
53	297	0,033 67	75	89	0,078 65	97	3	0,333 33
54	287	0,034 84	76	82	0,073 17	98	2	0,500 00
55	277	0,032 49	77	76	0,092 10	99	1	—
56	268	0,033 58	78	69	0,101 45	—	—	—
57	259	0,042 47	79	62	0,112 90	—	—	—

Tablica ta, widocznie niewyrównana, łącznie z zagranicznemi, użytemi do porównania, jest podpisaną przez A. Stępnickiego i A. Zagrzejewskiego, a cała książka przez Słomińskiego, z datą 27 sierpnia 1843 r. Zdaje się, że przy jej układaniu, oprócz Słomińskiego, brali jeszcze udział Julian Bayer i Stanisław Janicki. (Patrz artykuł p. S. Dicksteina, pomieszczony w t. VII „Wielkiej Encyklopedyi powszechnej ilustrowanej", odnoszący się do życia i prac Jul. Bayer'a).

Ażeby dać pojęcie o ile podane przez nas tablice różnią się pomiędzy sobą, załączamy następujące zestawienie

Według tablicy	Z 1000 osób, żyjących w każdym wieku, umiera w ciągu roku osób, mając lat:											
	15	20	30	35	40	45	50	55	60	65	70	80	85
Deparcieux'a .	7,08	9,83	10,90	11,53	10,65	11,25	17,21	22,81	28,08	37,97	61,29	144,07	208,33
Deparcieux-Florencourt'a	6,58	9,36	10,79	10,97	10,91	12,50	14,88	22,31	31,03	41,21	55,00	141,63	201,84
Brune-Fischer'a dla mężcz.	—	—	7,60	9,30	11,50	14,30	18,41	25,20	35,70	52,71	78,71	162,30	239,65
„ kobiet	—	14,01	11,81	11,94	11,79	12,40	14,49	19,60	29,10	45,11	69,32	146,36	202,54
17-tu tow. ang.	6,94	7,29	8,43	9,29	10,36	12,21	15,94	21,66	30,34	44,08	64,93	140,41	205,10
20-tu tow. ang. H^{MF}	4,04	6,50	8,06	9,00	10,50	12,32	15,78	20,66	28,73	42,33	60,96	138,68	202,67
30-tu tow. ame. dla mężczyzn	6,59	6,76	7,49	8,21	9,36	11,20	14,17	18,93	26,53	38,64	57,78	134,07	203,63
23-ch tow. niemiec. M I.	—	6,25	7,70	9,32	11,58	14,74	18,84	26,34	36,89	50,83	73,40	156,00	223,15
W I.	9,22	11,46	11,51	12,07	12,47	12,83	15,38	20,13	30,15	44,26	70,30	151,71	221,42
M u. W I.	—	9,20	8,83	9,98	11,77	14.37	18,14	25,05	35,36	49,43	72,76	155,14	222,00
Tow. francuskich A F	5,15	6,90	6,98	8,07	9,75	12,36	16,38	22,59	32,13	46,72	68,97	151,90	223,30
R F	5,15	6,90	6,64	7,29	8,34	10,03	12,75	17,12	24,11	35,27	52,98	124,03	189,06
Maleszewskiego	—	11,35	7,17	8,14	10,84	15,29	19,50	26,40	40,25	56,94	76,29	151.64	197,07

W szczegóły powyższego zestawienia wchodzić tu nie będziemy, jest ono bowiem tak jasne, że każdy z czytelników z łatwością sam odpowiednie wnioski wyprowadzić sobie z niego potrafi.

30. Stosunki obliczane z tablic śmiertelności. Gdy posiadamy tablicę śmiertelności, możemy z łatwością odpowiadać na różne nastręczające się nam pytania w przedmiocie życia ludzkiego (*).

I tak, jeżeli przez p_x oznaczymy prawdopodobieństwo, z jakiem osoba x letnia przeżyje rok, to

$$p_x = \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x}. \tag{51}$$

Prawdopodobieństwem, z jakiem osoba x letnia przeżyje n lat, jest

$$_np_x = \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x}. \tag{52}$$

(*) Zgodnie z art. 18, liczbę osób żyjących w wieku lat x, podaną w tablicy śmiertelności, oznaczać będziemy przez λ_x; liczbę zmarłych w ciągu roku przez τ_x.

Prawdopodobieństwo śmierci w ciągu roku jest dopełnieniem do 1-ści prawdopodobieństwa przeżycia roku, t. j.

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x} = \frac{\lambda_x - \lambda_{x+1}}{\lambda_x} = \frac{\tau_x}{\lambda_x}. \tag{53}$$

Prawdopodobieństwem śmierci w ciągu n lat jest

$$_nq_x = 1 - {}_np_x = 1 - \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x} = \frac{\lambda_x - \lambda_{x+n}}{\lambda_x}. \tag{54}$$

Biorąc np. za podstawę tablicę śmiertelności 17-u towarzystw angielskich (Tabl. III, kol. 9), znajdujemy

$$p_{30} = \frac{85\,565}{86\,292} = 0{,}991\,57,$$

$$q_{30} = \frac{86\,292 - 85\,565}{86\,292} = \frac{727}{86\,292} = 0{,}008\,43 = 1 - p_{30},$$

$$_{10}p_{30} = \frac{78\,653}{86\,292} = 0{,}911\,47,$$

$$_{10}q_{30} = \frac{86\,292 - 78\,653}{86\,292} = \frac{7\,639}{86\,292} = 0{,}088\,53 = 1 - {}_{10}p_{30}.$$

Dla oznaczenia prawdopodobieństw różnych stosunków, jakie pomiędzy dwu osobami zajść mogą, użyć należy znanych nam twierdzeń o prawdopodobieństwie złożonem i zupełnem (art. 5 i 6).

Weźmy np. pod uwagę dwie osoby A i B, pierwsza w wieku lat x, druga w wieku lat y, dla których pomyśleć można sześć następujących przypadków:

I. Prawdopodobieństwo, z jakiem obie osoby A i B po upływie n lat żyć będą.

Prawdopodobieństwo, że osoba A po n latach żyć będzie równa się $\frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x}$, że osoba B po n latach żyć będzie równa się $\frac{\lambda_{y+n}}{\lambda_y}$; zatem prawdopodobieństwo, z jakiem obie te osoby przeżyją n lat, jest oczywiście prawdopodobieństwem złożonem z 2-ch poprzednich, t. j.

$$_np_{x,y} = {}_np_x \cdot {}_np_y = \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x} \times \frac{\lambda_{y+n}}{\lambda_y} = \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}}{\lambda_x\lambda_y}. \tag{55}$$

II. Prawdopodobieństwo, z jakiem jedna lub dwie osoby A i B po n latach żyć nie będą, jest dopełnieniem poprzedniego do 1-ści:

$$_nq_{x,y} = 1 - {}_np_{x,y} = 1 - \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}}{\lambda_x\lambda_y} = \frac{\lambda_x\lambda_y - \lambda_{x+n}\lambda_{y+n}}{\lambda_x\lambda_y}. \tag{56}$$

III. Prawdopodobieństwo, z jakiem obie osoby po n latach żyć nie będą, równa się iloczynowi z prawdopodobieństwa śmierci jednej osoby przez prawdopodobieństwo śmierci drugiej, czyli

$$(57)\qquad {}_{n}q_{\overline{x,y}} = {}_{n}q_{x} \cdot {}_{n}q_{y} = \frac{\lambda_x - \lambda_{x+n}}{\lambda_x} \times \frac{\lambda_y - \lambda_{y+n}}{\lambda_y} = 1 - \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x} - \frac{\lambda_{y+n}}{\lambda_y} +$$

$$+ \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}}{\lambda_x \lambda_y} = 1 - {}_{n}p_{x} - {}_{n}p_{y} + {}_{n}p_{x,y}.$$

IV. Prawdopodobieństwo, z jakiem obie lub przynajmniej jedna z obu osób A i B po n latach żyć będzie, jest dopełnieniem poprzedniego do 1-ści, t. j.

$$(58)\qquad {}_{n}p_{\overline{x,y}} = 1 - {}_{n}q_{\overline{x,y}} = \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x} + \frac{\lambda_{y+n}}{\lambda_y} - \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}}{\lambda_x \lambda_y} = {}_{n}p_{x} + {}_{n}p_{y} - {}_{n}p_{x,y}.$$

V. Prawdopodobieństwo, z jakiem osoba A po n latach żyć będzie, a osoba B umrze w ciągu tych n lat, wynosi

$$(59)\qquad {}_{n}p_{\frac{x}{y}} = \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x} \times \frac{\lambda_y - \lambda_{y+n}}{\lambda_y} = \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x} - \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}}{\lambda_x \lambda_y} = {}_{n}p_{x} - {}_{n}p_{x,y}.$$

I naodwrót, prawdopodobieństwem, że osoba A umrze, a osoba B żyć będzie, jest

$$(59')\qquad {}_{n}p_{\frac{y}{x}} = \frac{\lambda_{y+n}}{\lambda_y} - \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}}{\lambda_x \lambda_y} = {}_{n}p_{y} - {}_{n}p_{x,y}.$$

VI. Prawdopodobieństwo, że w ogóle jedna, którakolwiek osoba umrze, a druga żyć będzie, jest sumą prawdopodobieństw (59) i (59'), czyli

$$(60)\qquad {}_{n}p_{\frac{x}{y},\frac{y}{x}} = \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x} + \frac{\lambda_{y+n}}{\lambda_y} - 2\frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}}{\lambda_x \lambda_y} = {}_{n}p_{x} + {}_{n}p_{y} - 2{}_{n}p_{x,y}.$$

Według tablicy 17-u towarzystw angielskich, sześć powyższych prawdopodobieństw, dla dwóch osób: 30-o i 50-o letniej, przy $n=10$, będą następujące:

I. $${}_{10}p_{30,50} = \frac{78\,653 \times 55\,973}{86\,292 \times 69\,517} = 0{,}733\,89$$

II. $${}_{10}q_{30,50} = 1 - {}_{10}p_{30,50} = 0{,}266\,11.$$

III. $${}_{10}q_{\overline{30,50}} = 1 - \frac{78\,653}{86\,292} - \frac{55\,973}{69\,517} + \frac{78\,653 \times 55\,973}{86\,292 \times 69\,517} = 0{,}017\,25.$$

IV. $${}_{10}p_{\overline{30,50}} = 1 - {}_{10}q_{\overline{30,50}} = 0{,}982\,75.$$

V. $${}_{10}p_{\frac{30}{50}} = \frac{78\,653}{86\,292} - \frac{78\,653 \times 55\,973}{86\,292 \times 69\,517} = 0{,}177\,58,$$

$${}_{10}p_{\frac{50}{30}} = \frac{55\,973}{69\,517} - \frac{78\,653 \times 55\,973}{86\,292 \times 69\,517} = 0{,}071\,28.$$

VI. $${}_{10}p_{\frac{30}{50},\frac{50}{30}} = {}_{10}p_{\frac{30}{50}} + {}_{10}p_{\frac{50}{30}} = 0{,}248\,86.$$

Trzy osoby A, B i C, w wieku lat x, y i z, mogą dać powód do oznaczenia następujących dziewięciu prawdopodobieństw:

I. Prawdopodobieństwo, z jakiem wszystkie trzy osoby po *n* latach żyć będą, równa się

$$(61) \qquad {}_np_{x,y,z} = \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}.$$

II. Prawdopodobieństwo, z jakiem nie wszystkie trzy osoby przeżyją *n* lat, czyli jedna lub więcej z nich umrze, jest dopełnieniem do 1-ści prawdopodobieństwa poprzedniego

$$(62) \qquad {}_nq_{x,y,z} = 1 - \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}.$$

III. Prawdopodobieństwo, z jakiem wszystkie trzy osoby po *n* latach nie będą żyły, jest iloczynem z prawdopodobieństw śmierci każdej z nich w ciągu *n* lat, t. j.

$$(63) \qquad {}_nq_{\overline{x,y,z}} = \left(1 - \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x}\right)\cdot\left(1 - \frac{\lambda_{y+n}}{\lambda_y}\right)\cdot\left(1 - \frac{\lambda_{z+n}}{\lambda_z}\right) =$$

$$= 1 - \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x} - \frac{\lambda_{y+n}}{\lambda_y} - \frac{\lambda_{z+n}}{\lambda_z} + \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}}{\lambda_x\lambda_y} + \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_z} + \frac{\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_y\lambda_z} - \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}.$$

IV. Prawdopodobieństwo, z jakiem nie wszystkie trzy osoby umrą, czyli z jakiem jedna albo więcej osób pozostanie przy życiu, jest dopełnieniem do jedności prawd. poprzedniego

$$(64) \qquad {}_np_{\overline{x,y,z}} = \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x} + \frac{\lambda_{y+n}}{\lambda_y} + \frac{\lambda_{z+n}}{\lambda_z} - \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}}{\lambda_x\lambda_y} - \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_z} - \frac{\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_y\lambda_z} +$$

$$+ \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}.$$

V. Prawdopodobieństwo, z jakiem osoba A po *n* latach żyć będzie, a osoby B i C do tego czasu umrą, wynosi

$$(65) \qquad {}_np_{\frac{x}{y,z}} = \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x}\cdot\left(1 - \frac{\lambda_{y+n}}{\lambda_y}\right)\cdot\left(1 - \frac{\lambda_{z+n}}{\lambda_z}\right) =$$

$$= \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x} - \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}}{\lambda_x\lambda_y} - \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_z} + \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}.$$

Podobnie

$$(65') \qquad {}_np_{\frac{y}{x,z}} = \frac{\lambda_{y+n}}{\lambda_y} - \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}}{\lambda_x\lambda_y} - \frac{\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_y\lambda_z} + \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z},$$

$$(65'') \qquad {}_np_{\frac{z}{x,y}} = \frac{\lambda_{z+n}}{\lambda_z} - \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_z} - \frac{\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_y\lambda_z} + \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}.$$

VI. Prawdopodobieństwo, z jakiem jedna, którakolwiek z trzech osób A, B, C, po *n* latach żyć będzie, a dwie inne do tego czasu umrą, jest sumą prawdopodobieństw (65) 65') i 65")

$$(66)\quad {}_np_{\frac{x;y;z}{y,z;x,z;x,y}} = \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x} + \frac{\lambda_{y+n}}{\lambda_y} + \frac{\lambda_{z+n}}{\lambda_z} - 2\left(\frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}}{\lambda_x\lambda_y} + \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_z} + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_y\lambda_z}\right) + 3\frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}$$

VII. Prawdopodobieństwo, z jakiem osoby A i B po n latach żyć będą, a osoba C do tego czasu umrze, równa się

$$(67)\qquad {}_np_{\frac{x,y}{z}} = \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x}\cdot\frac{\lambda_{y+n}}{\lambda_y}\cdot\left(1 - \frac{\lambda_{z+n}}{\lambda_z}\right) = \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}}{\lambda_x\lambda_y} - \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}.$$

Podobnie

$$(67')\qquad {}_np_{\frac{x,z}{y}} = \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_z} - \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z},$$

$$(67'')\qquad {}_np_{\frac{y,z}{x}} = \frac{\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_y\lambda_z} - \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}.$$

VIII. Prawdopodobieństwo, z jakiem dwie którekolwiek z trzech osób **A**, **B**, **C** po n latach żyć będą, a trzecia do tego czasu umrze, jest sumą prawdopodobieństw (67), (67') i (67'')

$$(68)\qquad {}_np_{\frac{x,y;x,z;y,z}{z,y,x}} = \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}}{\lambda_x\lambda_y} + \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_z} + \frac{\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_y\lambda_z} - 3\frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}.$$

IX. Prawdopodobieństwo, z jakiem przynajmniej dwie którekolwiek osoby po n latach żyć będą, różni się od poprzedniego tem tylko, że obejmuje jeszcze przypadek dożycia wszystkich trzech osób, jest więc sumą prawdopodobieństw (68) i (61), t. j.

$$(69)\qquad {}_np_{x,y;x,z;y,z;x,y,z} = \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}}{\lambda_x\lambda_y} + \frac{\lambda_{x+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_z} + \frac{\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_y\lambda_z} - 2\frac{\lambda_{x+n}\lambda_{y+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z}.$$

Ażeby ze wszystkich podanych wyżej prawdopodobieństw przejść do prawdopodobieństw rocznych, wystarczy w wyprowadzonych wzorach założyć $n=1$.

W podobny sposób wyprowadzić można wzory na prawdopodobieństwa, odnoszące się do czterech i więcej osób.

ROZDZIAŁ III.

TEORYA PROCENTÓW I SPŁAT. — TABLICE POMOCNICZE.

31. Procent i stopa procentowa. Dochód od wypożyczonego kapitału nazywają procentem, procentami lub odsetkami. My nazywać go będziemy procentem.

Dla ułatwienia rachunków i porównań, zgodzono się na stałą formę przy oznaczaniu procentów; za normę przyjęto mianowicie dochód roczny od 100 jednostek monetarnych kapitału. Normę tę nazwano stopą procentową i zgodzono się oznaczać ją symbolem $^0/_0$. Np. $4^0/_0$ oznacza, że kapitał w wysokości 100 jednostek monetarnych przynosi rocznie 4 takichże jednostek; $6^1/_2{}^0/_0$, że 100 jednostek przynosi rocznie $6^1/_2$ i t. d. (*).

Właśnie od owej podstawy „100" uformowany został termin „procent" (z łacińskiego „pro cento" = od sta), który bywa czasami u nas zastępowany przez wyraz polski „odsetki", wyprowadzony od tej samej podstawy „100". My jednak przyjęliśmy termin poprzedni, ponieważ jest on częściej, zwłaszcza w życiu potocznem, używany (**).

Wysokość procentu zależy od umowy, której znów warunki zależą od różnych okoliczności, jak np. od ilości posiadanych przez społeczeństwo kapitałów w stanie swobodnym, od popytu i podaży, większej lub mniejszej pewności odzyskania wypożyczonego kapitału i t. p.

Również od umowy zależy sposób płacenia procentu. Może być zapłacony albo z góry za cały czas, na jaki kapitał został wypożyczony; albo przy końcu, t. j. razem ze zwrotem kapitału; albo wreszcie peryodycznie, co czas pewien, i wtedy daty, w jakich procent ma być wypłacany, noszą nazwę termi-

---

(*) W niektórych razach, jak np. przy oznaczaniu premij, w miejsce 100 przyjmuje się za podstawę 1 000; wtedy symbol $^0/_0$ zmienia się na $^0/_{00}$. Jeżeli np. za ubezpieczenie 1 000 fr. kapitału płaci się rocznie 36 fr., można powiedzieć, że premia roczna wynosi 36 $^0/_{00}$, co znaczy: 36 „od tysiąca" ubezpieczonego kapitału.

(**) Prof. M. A. Baraniecki w swojej „Arytmetyce" stopę procentową nazywa „procentem", zaś procent (w naszem rozumieniu) „odsetkami".

nów płatności procentu, podobnie jak data obowiązkowego zwrotu kapitału nazywa się terminem jego płatności.

Właściciel wypożyczonego kapitału zowie się wierzycielem; ten, kto wypożyczył kapitał od właściciela nazywa się dłużnikiem.

32. Procent zwyczajny. Jeżeli procent jest przez wierzyciela w umówionych terminach odbierany, a tem samem wysokość kapitału, przez cały czas trwania pożyczki, nie ulega zmianie, to procent taki nazywa się zwyczajnym, albo prostym.

Jakkolwiek w zasadzie za normę oznaczania procentu przyjęto stopę od 100, to jednak dla teoryi, a często i dla praktyki, dogodniej jest używać stopy od jednostki kapitału, która zresztą łatwo się z pierwszej wyprowadza, stanowi bowiem jej setną część i naodwrót.

Tak np., gdy stopę od 100 oznaczymy, raz na zawsze, przez s, od 1-ki przez i, będzie

$$i = \frac{s}{100}, \quad s = 100i. \tag{70}$$

Oznaczmy przez k kapitał wypożyczony, przez K tenże kapitał zwiększony o procent za n lat, gdzie n może oznaczać liczbę całkowitą lub ułamkową; przez o procent (odsetki)—tak, że

$$\mathrm{K} = k + o; \; o = \mathrm{K} - k. \tag{71}$$

Wtedy oczywiście

$$\mathrm{K} = k + o = k.(1 + ni). \tag{72}$$

Stąd

$$o = kni, \tag{73}$$

$$k = \frac{\mathrm{K}}{1 + ni} = \frac{o}{ni}, \tag{74}$$

$$i = \frac{\mathrm{K} - k}{nk} = \frac{o}{nk}; \quad s = \frac{100o}{nk} \tag{75} \quad (75')$$

$$n = \frac{\mathrm{K} - k}{ik} = \frac{o}{ik}. \tag{76}$$

Np., kapitał 3000 fr., po $3\frac{1}{2}$ latach przy stopie 5%, daje procentu, według (73),

$$o = 3000 \times 3{,}5 \times 0{,}05 = 525 \text{ fr.}$$

Wstawiając odpowiednie liczby w dalsze wzory, znajdujemy

$$k = \frac{525}{3{,}5 \times 0{,}05} = 3000 \text{ fr.};$$

$$i = \frac{525}{3{,}5 \times 3000} = 0{,}05, \text{ skąd } s = 0{,}05 \times 100 = 5\%;$$

$$n = \frac{525}{0{,}05 \times 3000} = 3{,}5 \text{ lat.}$$

Do teoryi procentów zwyczajnych włączyć można rozmaite zagadnienia; my tutaj rozwiążemy z nich jedno, posiadające ważne w praktyce ubezpieczeń życiowych zastosowanie.

Zdarza się często, że ubezpieczeni, zamiast wnosić premie rocznie, życzą sobie opłacać je ratami półrocznemi, kwartalnemi lub miesięcznemi. Gdyby ubezpieczony wniósł premię z góry za rok cały, w takim razie pieniądze te przyniosłyby towarzystwu zaraz w pierwszym roku pewien procent, przy obliczaniu premii uwzględniony, którego część towarzystwo traci, jeżeli ubezpieczony wnosi premię roczną częściowo. Stratę tę ubezpieczony wynagrodzić powinien.

Załóżmy, że kwota k, zamiast być wniesioną na początku roku w całości, zostaje opłacaną w m równych sobie ratach, t. j. po $\frac{k}{m}$ co m-a część roku. Zachodzi pytanie, ile każdorazowo wnosić powinien ubezpieczony, aby pokrył stratę przez towarzystwo poniesioną skutkiem rozłożenia rocznej należności k na m rat?

Niech stopą procentową będzie $s^0/_0$, $i = \frac{s}{100}\cdot$ Na początku roku wnosi ubezpieczony $\frac{k}{m}$; od tej raty żadnego procentu płacić nie potrzebuje. Po upływie $\frac{1}{m}$ roku wnosi drugie $\frac{k}{m}$, od czego powinien zapłacić procent za m-ą część roku, t. j. winien wnieść razem $\frac{k}{m}\left(1+\frac{i}{m}\right)$; po upływie $\frac{2}{m}$ roku wnieść powinien $\frac{k}{m}\left(1+\frac{2i}{m}\right)$ i t. d.; po $\frac{m-1}{m}$ roku, $\frac{k}{m}\left(1+\frac{(m-1).i}{m}\right)$. Ogółem wnieść powinien

$$(77)\qquad \frac{k}{m}+\frac{k}{m}\left(1+\frac{i}{m}\right)+\frac{k}{m}\left(1+\frac{2i}{m}\right)+\ldots+\frac{k}{m}\left(1+\frac{(m-1).i}{m}\right)=k\left(1+\frac{(m-1).i}{2m}\right).$$

W takim jednak razie raty byłyby nierówne, co stanowi duże w praktyce utrudnienie. Chodzi więc o to, jakie powinny być raty, które, będąc sobie równemi, dałyby jednak w rezultacie to samo co i wzór (77).

Suma pieniędzy, wniesiona równemi ratami, może być określona przez premię roczną, oprocentowaną według pewnej stopy, którą znaleźć potrzeba. Oznaczmy ją przez $s_m{}^0/_0$, skutkiem czego $i_m = \frac{s_m}{100}\cdot$

Tym drugim sposobem ubezpieczony wniesie w ciągu roku

$$(78)\qquad k(1+i_m)$$

w m ratach po $\frac{k(1+i_m)}{m}$ każda, co powinno być równe (77), czyli

$$k(1+i_m) = k\left(1+\frac{(m-1).i}{2m}\right),\ \text{stąd}$$

$$i_m = \frac{(m-1)i}{2m}; \quad i = \frac{2mi_m}{m-1}, \tag{79, 79'}$$

a tem samem

$$s_m = \frac{(m-1)s}{2m}; \quad s = \frac{2ms_m}{m-1}. \tag{80, 80'}$$

Przypuśćmy np., że ubezpieczony ma wnosić rocznie z góry po 1200 fr., lecz pragnie tę premię opłacać kwartalnie w równych częściach. Towarzystwo od swych kapitałów otrzymuje 4%; gdyby więc ubezpieczony wniósł na początku roku całe 1200 franków, towarzystwo posiadałoby w końcu roku 1200 × 1,04 = 1248 fr. Po ile ubezpieczony wnosić powinien kwartalnie, aby towarzystwo przy końcu roku posiadało tę samą kwotą 1248 fr.?

Podstawiając w (80): $m = 4, s = 4$, wypada

$$s_4 = \frac{3 \times 4}{8} = 1{,}5\%, \quad i_4 = 0{,}015;$$

$$k(1 + i_4) = 1200 \times 1{,}015 = 1218 \text{ fr.},$$

a więc rata kwartalna wynosi $\frac{1218}{4} = 304{,}50$ fr., w czem 300 fr. premii i 4,50 fr. procentu.

Wtedy towarzystwo posiadać będzie przy końcu roku:

procentu, zapłaconego przez ubezpieczonego . . .	18 fr.
z 1-ej raty 300 × 1,04 = ...	312 „
„ 2-ej „ 300 × 1,03 = ...	309 „
„ 3-ej „ 300 × 1,02 = ...	306 „
„ 4-ej „ 300 × 1,01 = ...	303 „
razem, jak być powinno, ...	1248 fr.

Naodwrót, gdyby towarzystwo, za rozłożenie premii rocznej na raty półroczne, pobierało od premii rocznej 2%, zachodzi pytanie, jaką to stanowi dla towarzystwa stopę procentową? — Podstawiając w (80') : $m = 2$, $s_2 = 2$, otrzymujemy

$$s = \frac{2 \times 2 \times 2}{1} = 8\%.$$

Istotnie, ubezpieczony od 1200 fr. wniesie 1200 × 0,02 = 24 fr., którą to kwotę pobiera towarzystwo tytułem procentu za 600 fr., zapłacone na początku drugiego półrocza, t. j. od 600 fr. za pół roku otrzymuje 24 fr., czyli według wzoru (75')

$$s = \frac{100 \times 24}{0{,}5 \times 600} = 8\%.$$

33. PROCENT SKŁADANY OKRESAMI ROCZNYMI. Jeżeli procent nie jest przez wierzyciela odbierany, lecz co czas pewien, np. co rok, bywa włączony do kapitału, przynosząc następnie procent narówni z kapitałem pierwotnym, tak, że kapitał stopniowo rośnie, to taki procent nazywa się składanym, a cała manipulacya kapitalizowaniem procentu.

Najczęściej za jednostkę czasu, po upływie której narosły procent bywa włączany do kapitału, przyjmuje się rok; chociaż mogą być do tego użyte i mniejsze okresy, jak półrocza, kwartały lub t. p.

Zajmiemy się najprzód okresami rocznymi.

Niech kapitał k, oddany na procent składany przy stopie $s^0/_0$ $\left(i = \frac{s}{100}\right)$, zamienia się na K_n po upływie lat n, gdzie n przyjmijmy za liczbę całkowitą.

Jednostka kapitału, po roku, zamienia się na $1 + i$, k jednostek na $k(1 + i)$ i to stanowi nowy kapitał

$$K_1 = k.(1 + i),$$

który w następnym roku procentować będzie.

Po upływie 2-go roku, kapitał k zamienia się na

$$K_2 = K_1.(1 + i) = k.(1 + i).(1 + i) = k.(1 + i)^2;$$

po 3-ch latach na

$$K_3 = k.(1 + i)^2.(1 + i) = k.(1 + i)^3;$$

po n latach zamienia się na

$$K_n = k.(1 + i)^n. \tag{81}$$

Gdy teraz przez S_n oznaczymy procent składany, jaki po n latach narośnie od kapitału k, będzie

$$S_n = k.(1 + i)^n - k = k.[(1 + i)^n - 1]. \tag{82}$$

Czynnik $(1 + i)^n$ przedstawia sumę, na jaką, po n latach, zamienia się 1-ka kapitału, oddana na procent składany przy stopie i od jednostki. Czynnik ten odgrywa ważną rolę w zastosowaniu teoryi procentów składanych i oznacza się zazwyczaj przez r^n; nazywać go będziemy czynnikiem oprocentowującym (Aufzinsungsfactor) (*).

Wprowadziwszy symbol

$$r = 1 + i, \tag{83}$$

wzory (81) i (82) można napisać w kształcie

$$(81') \qquad K_n = k.r^n; \quad S_n = k(r^n - 1) \qquad (82')$$

(*) Dr. Zillmer terminem „Aufzinsungsfactor" mianuje czynnik $(1+i) = r$; my jednak, z uwagi na pewne względy praktyczne, termin rzeczony rozciągnęliśmy i na wszelkie potęgi pomienionego czynnika.—Ta sama uwaga stosuje się do czynnika odprocentowującego (Abzinsungsfactor), o którym będzie mowa na str. 105.

Znając r^n dla wszystkich, potrzebnych w praktyce, wartości n i i, resp. $s^0/_0$, można z łatwością obliczać sumy, na jakie, po upływie dowolnej liczby lat, zamienia się kapitał, dość bowiem ten ostatni pomnożyć przez odpowiednią wartość r^n. Dla tego wartości r^n zostały obliczone przy różnych stopach procentowych dla różnej liczby lat i ułożone w tabele, podane przez nas w tablicy IV.

Za pomocą tablicy IV znajdujemy np., że kapitał 5000 fr., po 25 latach przy stopie $4^0/_0$, zamienia się na

$$2{,}665\,836\,33 \times 5\,000 = 13\,329{,}18 \text{ fr.}$$

Gdybyśmy to samo znaleźć chcieli za pomocą wzoru (81′), musielibyśmy użyć logarytmów:

$$K_{25} = 5\,000 \times (1{,}04)^{25},$$

$$\log K_{25} = \log 5\,000 + 25 \log 1{,}04 = 4{,}1248035,$$

stąd

$$K_{25} = 13\,329{,}18; \quad S_{25} = 13\,329{,}18 - 5\,000 = 8\,329{,}18.$$

Ze wzoru (81′) znajdujemy

$$k = \frac{K_n}{r^n}, \tag{84}$$

$$n = \frac{\log K_n - \log k}{\log r}, \tag{85}$$

$$\log r = \frac{\log K_n - \log k}{n}, \text{ a stąd dojść można do } s^0/_0. \tag{86}$$

Dla liczb ostatniego przykładu wypada:

$$k = \frac{13\,329{,}18}{2{,}665\,836\,33} = 5\,000 \text{ fr.},$$

$$n = \frac{4{,}124\,8035 - 3{,}698\,9700}{0{,}017\,033\,34} = 25 \text{ lat},$$

$$\log r = \frac{0{,}425\,8335}{25} = 0{,}017\,0333; \text{ stąd}$$

$$r = 1{,}04; \quad i = 0{,}04; \quad s^0/_0 = 4^0/_0.$$

Wzór (84) daje możność obliczenia, jaki kapitał należy oddać na procent składany przy danej stopie, aby po n latach posiadać daną sumę K_n.

Ażeby np. po 10 latach posiadać 6000 fr., należy dziś oddać na procent składany, przy stopie $3^1/_2{}^0/_0$, sumę

$$k = \frac{6\,000}{(1{,}035)^{10}} = 4\,253{,}51 \text{ fr.}$$

Gdyby więc osoba A po 10 latach miała odebrać 6000 fr. i chciała dziś prawa swoje odstąpić osobie B, przy uwzględnieniu procentu składanego o stopie $3^1/_2{}^0/_0$, osoba B powinna zapłacić osobie A kwotę 4253,51 fr., t. j. z 6000 strącić 1746,49 fr. Manipulacya taka zowie się odprocentowaniem, albo zdyskontowaniem kapitału, a suma k nosi nazwę zdyskontowanej, obecnej lub teraźniejszej wartości kapitału K_n (Gegenwärtiger Werth,—Valeur actuelle,—Present value).

Do oznaczenia teraźniejszej wartości 1-ki kapitału służy, jak to widzimy ze wzoru (84), czynnik

$$\frac{1}{r^n} = r^{-n},$$

będący odwrotnością czynnika oprocentowującego; nazwijmy go czynnikiem odprocentowującym, albo dyskontującym (Abzinsungs-oder Discontirungsfactor) (*). Oznacza się zazwyczaj przez ρ^n, tak, że

(87) $$\rho = \frac{1}{r} = r^{-1}; \quad \rho^n = \frac{1}{r^n} = r^{-n}.$$

Odgrywa on, w teoryi procentów, podobnie ważną rolę, jak czynnik oprocentowujący i dla tego wartości ρ^n zostały również obliczone dla rozmaitych n i przy różnych stopach procentowych. Czynniki dyskontujące podajemy w tablicy V.

Tablica V bardzo ułatwia rachunki. Np., teraźniejsza wartość kapitału 5000 fr., płatnego po 6 latach przy stopie 4%, wynosi

$$6000 \times 0{,}7903145 = 4741{,}89 \text{ fr.}$$

Dotąd zakładaliśmy n całkowite. Gdyby chodziło o oznaczenie sumy K, na jaką zamienia się kapitał k po upływie $n + \frac{a}{b}$ lat $\left(\frac{a}{b} < 1\right)$, przy stopie $i = \frac{s}{100}$ procentu składanego, należy postępować w następujący sposób:

Po n latach, k zamienia się na $K_n = k.r^n$, K_n po $\frac{a}{b}$ roku na

(α) $$K = k.r^n\left(1 + \frac{ai}{b}\right).$$

Wszakże taki kształt jest niedogodny do użycia przy wyprowadzaniu ogólnych wzorów; o wiele byłoby dogodniej, aby i w obecnym przypadku wystarczyło pomnożyć k przez r podniesione do jakiejś potęgi $n + x$. Chodzi tylko o oznaczenie x.

Jeżeli założymy

(β) $$k.r^n\left(1 + \frac{ai}{b}\right) = k.r^{n+x},$$

wypada

(γ) $$r^x = 1 + \frac{ai}{b}.$$

(*) Patrz dopisek na str. 103.

Na podstawie teoryi logarytmów można dowieść, że x bardzo się mało różni od $\frac{a}{b}$ (*). I rzeczywiście z (γ)

$$x.\log r = \log\left(1+\frac{ai}{b}\right), \text{ skąd } x = \frac{\log\left(1+\frac{ai}{b}\right)}{\log r}.$$

Podstawiając np. $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ przy $i=0{,}05$ wypada

$$x=\frac{\log 1{,}025}{\log 1{,}05}=\frac{0{,}010\,723\,87}{0{,}021\,189\,30}=\frac{1}{1{,}975\ldots}, \text{ t. j. prawie } \frac{1}{2};$$

przy $\frac{a}{b}=\frac{1}{12}$, $i=0{,}03$

$$x=\frac{\log 1{,}0025}{\log 1{,}03}=\frac{0{,}001\,084\,38}{0{,}012\,837\,22}=\frac{1}{11{,}83\ldots}, \text{ t. j. prawie } \frac{1}{12} \text{ i t. d.}$$

W obec tak małych różnic, zgodzono się przyjąć $x=\frac{a}{b}$, można więc w miejsce (α) podstawić

$$\mathrm{K}=k.r^{n+\frac{a}{b}},$$

czyli wzory (81') i (84)można uważać za prawidłowe zarówno przy n całkowitem jak i ułamkowem.

(*) Biorąc logarytm naturalny obu stron wzoru (γ), otrzymujemy:

$$x.\mathrm{l}\,r=\mathrm{l}\left(1+\frac{ai}{b}\right), \text{ skąd}$$

$$x=\frac{\mathrm{l}\left(1+\frac{ai}{b}\right)}{\mathrm{l}\,r}. \qquad (\delta)$$

Z teoryi logarytmów wiadomo, że

$$\mathrm{l}\left(1+\frac{ai}{b}\right)=\frac{ai}{b}-\frac{1}{2}\left(\frac{ai}{b}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{ai}{b}\right)^3-\ldots$$

$$\mathrm{l}\,r=\mathrm{l}\,(1+i)=i-\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3}-\ldots, \text{ skutkiem czego}$$

$$x=\frac{\frac{ai}{b}-\frac{1}{2}\left(\frac{ai}{b}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{ai}{b}\right)^3-\ldots}{i-\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3}-\ldots}. \qquad (\delta')$$

Otóż zarówno i jak $\frac{ai}{b}$ są mniejsze od 1-ści, wyrazy więc $\frac{i^2}{2}, \frac{i^3}{3}, \ldots; \left(\frac{ai}{b}\right)^2, \left(\frac{ai}{b}\right)^3, \ldots$ w mianowniku i liczniku wyrażenia na x, jako względnie małe, możemy opuścić, co czyniąc, na przybliżoną wartość dla x otrzymujemy z (δ')

$$x=\frac{\frac{ai}{b}}{i}=\frac{a}{b}.$$

34. PROCENT SKŁADANY OKRESAMI RÓŻNYMI OD ROCZNYCH. Weźmy teraz pod uwagę kapitalizacyę procentów okresami krótszymi od roku, np. co m-a część roku, czyli że co m-a część roku narosły procent włącza się do kapitału dla dalszego procentowania.

Jeżeli stopa jest oznaczona na okres co $\frac{1}{m}$ roku, rachunek odbywa się według wzoru (81'), przyjmując n za liczbę okresów, każdy po $\frac{1}{m}$ roku.

Tablice IV i V służą do ułatwienia rachunku w obecnym przypadku — podobnie, jak dla okresów rocznych.

Np., 4000 fr., przy stopie kwartalnej 2%, zamienia się po 2-ch latach (8-u kwartałach) na

$$1{,}17165938 \times 4000 = 4686{,}64 \text{ fr.}$$

Rzecz się jednak ma inaczej, gdy nie posiadamy stopy na m-ą część roku, tylko stopę roczną, a potrzebujemy uwzględnić $\frac{1}{m}$ roczną kapitalizacyę, gdyż w takim razie stopa na m ą część roku wcale nie jest m-ą częścią stopy rocznej.

Istotnie, kapitał 3000 fr., przy stopie rocznej 6%, po 10 latach zamienia się na

$$1{,}79084770 \times 3000 = 5372{,}54 \text{ fr.,}$$

przy kapitalizacyi rocznej.

Jeżeli zaś przyjmiemy kapitalizacyę półroczną, dla otrzymania tego samego rezultatu nie można przyjąć za stopę półroczną $\frac{6}{2} = 3\%$, albowiem wówczas po 20-u półroczach, resp. po 10-u latach otrzymalibyśmy nie 5372,54, lecz

$$1{,}80611123 \times 3000 = 5418{,}33 \text{ fr.;}$$

stopa więc półroczna musi być niższą od 3%.

Dla odszukania właściwej stopy od jednostki na m-ą część roku, oznaczmy ją przez i_m, wtedy powinno być

$$(1 + i_m)^{m.n} = (1 + i)^n, \text{ stąd}$$

(88)
$$i_m = \sqrt[m]{1 + i} - 1 = r^{\frac{1}{m}} - 1.$$

W poprzednim przykładzie

$$i_2 = (1{,}06)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}02956, \text{ czyli } s_2 = 2{,}956\%,$$

a nie 3%. Podstawiwszy za stopę półroczną 2,956%, otrzymujemy istotnie

$$3000 \times (1{,}02956)^{20} = 3000 \times 1{,}79085 = 5372{,}54 \text{ fr.,}$$

czyli to samo, co po 10-o letniej kapitalizacyi rocznej przy stopie 6%.

Naodwrót, mając daną z góry stopę i_m na m-ą część roku, na odpowiednią jej stopę roczną wypada z (88)

(89)
$$i = (1 + i_m)^m - 1.$$

Np., kwartalna stopa 2%, przy kwartalnej kapitalizacyi, odpowiada rocznej

$$i = (1{,}02)^4 - 1 = 0{,}08243216, \text{ skąd}$$

$$s\% = 8{,}243216\%, \text{ t. j. więcej od } 2 \times 4 = 8\%.$$

Suma 3000 fr. po 3-ch latach kwartalnej kapitalizacyi, przy stopie kwartalnej 2%, zamienia się na

$$1{,}26824179 \times 3000 = 3804{,}73 \text{ fr.}$$

Na to samo zamienia się 3000 fr. po 3-ch latach kapitalizacyi rocznej, przy stopie 8,243216%, albowiem

$$3000 \times (1{,}08243216)^3 = 3804{,}73 \text{ fr.}$$

35. Przyszła i teraźniejsza wartość stałych wkładów peryodycznych, wnoszonych z góry. Załóżmy teraz, że kwota k nie oddaje się jednorazowo, jak w poprzednich dwóch artykułach, lecz że się wnosi peryodycznie, np. co rok, na procent składany, t. j. na początku 1-go roku oddajemy na procent składany, przy stopie $i = \frac{s}{100}$, kwotę k; po roku dodajemy nowe k; po 2-ch latach znów k i t. d. przez lat n. Zachodzi pytanie, jaka jest wartość przyszła tych wkładów po n latach i jaka ich wartość teraźniejsza?

Przyszłą wartość rzeczonych wkładów, wnoszonych na początku każdego roku, czyli z góry, oznaczmy przez ${}_sW_n^{(pg)}$, teraźniejszą—przez ${}_sW_n^{(tg)}$, gdzie W wyobraża wartość wkładów, s stałych, p przyszłą, t teraźniejszą, g czynionych z góry, n przez lat n.

Kwota k, oddana na początku 1-go roku, zamienia się po n latach na $k.r^n$; oddana na początku 2-go roku procentuje już tylko przez $n-1$ lat, więc jej przyszła wartość wynosi $k.r^{n-1}$, i t. d., czyli

$${}_sW_n^{(pg)} = k.r^n + k.r^{n-1} + \ldots + k.r^2 + k.r = kr(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1),$$

albo, ponieważ $r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1 = \frac{r^n - 1}{r - 1}$,

$$(90) \qquad {}_sW_n^{(pg)} = k.r.\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Gdy założymy $k = 1$, poprzedni wzór zamieni się na

$$(90') \qquad {}_sW_n^{(pg)} = r.\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Wzór ostatni przedstawia wartość, jaką po n latach posiadać będą jednostki, wnoszone corocznie z góry przez n lat na procent składany, przy stopie $i = \frac{s}{100}$, $r = 1 + i$. Wartości te, obliczone przy różnych stopach procentowych i na rozmaitą liczbę lat, podajemy w tablicy VI.

W podobny sposób znaleźć można teraźniejszą wartość takich samych corocznych wkładów, czynionych z góry przez lat n. Wkład k, wniesiony na początku 1-go roku, posiada w tejże chwili tę samą wartość k; wniesiony na początku 2-go roku posiada, na początku 1-go roku, wartość $k.\rho$ i t. d.; k wniesione na początku n-go roku posiąda, na początku 1-go roku, wartość $k.\rho^{n-1}$, zatem

$${}_sW_n^{(tg)} = k + k.\rho + k.\rho^2 + \ldots + k.\rho^{n-1} = k(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1}), \text{ t. j.}$$

(91) $${}_sW_n^{(tg)} = k.\frac{1-\rho^n}{1-\rho};$$

przy $k = 1$

(91') $${}_sW_n^{(tg)} = \frac{1-\rho^n}{1-\rho},$$

co stanowi teraźniejszą wartość jednostek, wnoszonych corocznie z góry, przez lat n, na procent składany. Wartości te podajemy w tablicy VII.

Wzory (91) i (91') można z łatwością wyrazić przez r, skoro bowiem $\rho = \frac{1}{r}$, jest więc

(91'') $${}_sW_n^{(tg)} = k.\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}} = \frac{k}{r^{n-1}}\cdot\frac{r^n-1}{r-1};$$

zakładając $k = 1$

(91''') $${}_sW_n^{(tg)} = \frac{1}{r^{n-1}}\cdot\frac{r^n-1}{r-1}.$$

Teraźniejszą wartość można otrzymać z przyszłej przez zdyskontowanie ostatniej na n lat; przyszłą z teraźniejszej przez oprocentowanie ostatniej systemem składanym na takąż liczbę lat, t. j.

(92) $${}_sW_n^{(tg)} = {}_sW_n^{(pg)}.\rho^n; \quad {}_sW_n^{(pg)} = {}_sW_n^{(tg)}.r^n.$$ (93)

Istotnie, czyniąc odpowiednie podstawienie w (92), wypada

$${}_sW_n^{(tg)} = k.r.\frac{r^n-1}{r-1}.\rho^n = k.\frac{1-\rho^n}{1-\rho}, \text{ czyli (91);}$$

$${}_sW_n^{(pg)} = k.\frac{1}{r^{n-1}}\cdot\frac{r^n-1}{r-1}\cdot r^n = k.r.\frac{r^n-1}{r-1}, \text{ t. j. (90).}$$

Wszystkie wyprowadzone w niniejszym artykule wzory stosują się nie tylko do okresów rocznych, ale i do każdych innych; za n bowiem można podstawić jakiekolwiek okresy: roczne, półroczne, kwartalne lub t. p.; należy tylko uwzględnić odpowiednią stopę procentową.

Weźmy przykład —

Corocznie wkładamy, przez lat 30, po 1000 fr.; jaka jest przyszła i teraźniejsza wartość tych wkładów przy stopie 4%?

Według wzoru (90)

$${}_sW_{30}^{(pg)} = 1000 \times 1{,}04 \times \frac{(1{,}04)^{30}-1}{0{,}04} = 58\,328{,}34 \text{ fr.};$$

to samo otrzymujemy wprost z tablicy VI

$${}_sW_{30}^{(pg)} = 58{,}328\,335\,27 \times 1000 = 58\,328{,}34 \text{ fr.}$$

Według wzoru (91''), wartość teraźniejsza

$${}_sW_{30}^{(tg)} = 1000 \times \frac{1}{(1{,}04)^{29}} \cdot \frac{(1{,}04)^{30}-1}{0{,}04} = 17\,983{,}71 \text{ fr.};$$

z tablicy VII wypada to samo

$${}_sW_{30}^{(tg)} = 17{,}983\,7146 \times 1000 = 17\,983{,}71 \text{ fr.}$$

Ostatnio znaleziona wartość teraźniejsza, oddana na procent składany przy stopie 4%, daje po 30-u latach sumę (tab. IV)

$$17\,983{,}71 \times 3{,}243\,397\,51 = 58\,328{,}32 \text{ fr.},$$

czyli wartość przyszłą i naodwrót, wartość przyszła, zdyskontowana przy stopie 4% na 30 lat, daje (tab. V)

$$58\,328{,}34 \times 0{,}308\,3187 = 17\,983{,}72 \text{ fr.},$$

t. j. wartość teraźniejszą.

Bardzo drobne różnice nie mają tu znaczenia, gdyż znajdują usprawiedliwienie w konieczności ograniczania ułamków dziesiętnych.

36. PRZYSZŁE I TERAŹNIEJSZE WARTOŚCI STAŁYCH WKŁADÓW PERYODYCZNYCH, WNOSZONYCH Z DOŁU. W poprzednim artykule zakładaliśmy, że wkłady peryodyczne wnoszą się z góry, t. j. pierwszy na początku pierwszego okresu (np. roku), drugi na początku drugiego i t. d. Może się jednak dziać i naodwrót, że wkłady wpływają z dołu, czyli: pierwszy zostaje wniesiony przy końcu pierwszego okresu, drugi — przy końcu drugiego i t. d.

Wzory na obliczenie przyszłej i teraźniejszej wartości wkładów, wnoszonych z dołu, wyprowadzić można w taki sam zupełnie sposób jak i dla wnoszonych z góry, a mianowicie

$${}_sW_n^{(pd)} = k.r^{n-1} + k.r^{n-2} + \ldots + k.r + k = k(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1),$$

po zsumowaniu wyrazów objętych nawiasem

(94) $${}_sW_n^{(pd)} = k.\frac{r^n - 1}{r-1};$$

przy $k = 1$

(94') $${}_sW_n^{(rd)} = \frac{r^n - 1}{r-1}.$$

Wzory te od (90) i (90′) różnią się tylko brakiem czynnika r i tak być powinno, ponieważ system wnoszenia wkładów z góry różni się od systemu wnoszenia z dołu tylko jednorocznym procentem od każdego wkładu. Dla tego, do obliczania przyszłej wartości wkładów, wnoszonych z dołu, można również użyć tablicy VI, podzieliwszy uprzednio liczby w niej zawarte przez odpowiednie r.

$${}_sW_n^{(td)} = k.\rho + k.\rho^2 + \ldots + k.\rho^n = k.\rho(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1}), \text{ t. j.}$$

$$(95) \qquad {}_sW_n^{(td)} = k.\rho.\frac{1-\rho^n}{1-\rho};$$

przy $k = 1$

$$(95') \qquad {}_sW_n^{(td)} = \rho.\frac{1-\rho^n}{1-\rho}.$$

Tu znów wzory (95) i (95′) różnią się od (91) i (91′) czynnikiem ρ, gdyż teraźniejsza wartość wkładów, wnoszonych z dołu, od takiejże wartości wkładów, wnoszonych z góry, różni się tylko jednorocznym dyskontem każdego wkładu.

Gdy w (95) i (95′) podstawimy $\frac{1}{r}$ za ρ, wypadnie

$$(95'') \qquad {}_sW_n^{(td)} = k.\frac{1}{r}\cdot\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}} = k.\frac{1}{r^n}\cdot\frac{r^n-1}{r-1} = \frac{k}{r-1}\cdot\left(1-\frac{1}{r^n}\right);$$

przy $k = 1$

$$(95''') \qquad {}_sW_n^{(td)} = \frac{1}{r^n}\cdot\frac{r^n-1}{r-1} = \frac{1}{r-1}\cdot\left(1-\frac{1}{r^n}\right).$$

Do obliczania wartości teraźniejszej wkładów, wnoszonych z dołu, może służyć tablica VII po pomnożeniu każdej liczby przez $\rho = \frac{1}{r}$. Ponieważ jednak tablica ta bywa często w praktyce używaną, podajemy ją zatem zupełnie do użycia przygotowaną w tab. VIII.

Związek pomiędzy ${}_sW_n^{(pd)}$ i ${}_sW_n^{(td)}$ zostaje naturalnie taki sam, jak pomiędzy ${}_sW_n^{(pg)}$ i ${}_sW_n^{(tg)}$, t. j.

$$(96) \qquad {}_sW_n^{(td)} = {}_sW_n^{(pd)}.\rho^n,$$

$$(97) \qquad {}_sW_n^{(pd)} = {}_sW_n^{(td)}.r^n.$$

37. PRZYSZŁA I TERAŹNIEJSZA WARTOŚĆ WKŁADÓW PERYODYCZNYCH STALE ROSNĄCYCH I STALE MALEJĄCYCH. Wkłady peryodyczne nie potrzebują być koniecznie stałe, lecz mogą się zmieniać: mogą wzrastać lub maleć o ilości stałe lub według jakiegoś z góry oznaczonego prawa. Tutaj zajmiemy się tylko wkładami rosnącymi lub malejącymi o ilości stałe.

Jeżeli wkłady stale wzrastają — tak, że na początku pierwszego okresu, np. roku, wnosimy k, na początku 2-go roku $k + a$, na początku 3-go roku $k + 2a$ i t. d., na początku n-go roku wnosimy $k + (n - 1)a$, to (*)

$$ {}_wW_n^{(pg)} = k.r^n + (k + a).r^{n-1} + (k + 2a).r^{n-2} + \ldots + [k + (n - 1)a].r = $$

$$ = kr(r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + \ldots + r + 1) + $$

$$ + ar[r^{n-2} + 2r^{n-3} + 3r^{n-4} + \ldots + (n - 2)r + (n - 1)], \text{ czyli} $$

$$ {}_wW_n^{(pg)} = k.r.\frac{r^n - 1}{r - 1} + a.r.\sigma, \tag{α} $$

$$ \text{gdzie } \sigma = r^{n-2} + 2r^{n-3} + 3r^{n-4} + \ldots + (n - 2)r + (n - 1) $$

$$ = \left.\begin{array}{r} r^{n-2} + r^{n-3} + r^{n-4} + \ldots + r + 1 \\ + r^{n-3} + r^{n-4} + \ldots + r + 1 \\ + r^{n-4} + \ldots + r + 1 \\ + \ldots + r + 1 \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ + r + 1 \\ + 1 \end{array}\right\} = $$

$$ = \frac{r^{n-1} - 1}{r - 1} + \frac{r^{n-2} - 1}{r - 1} + \frac{r^{n-3} - 1}{r - 1} + \ldots + \frac{r^2 - 1}{r - 1} + \frac{r - 1}{r - 1} $$

$$ = \frac{1}{r - 1} \cdot [r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + \ldots + r^2 + r - (n - 1)] $$

$$ = \frac{1}{r - 1} \cdot [r(r^{n-2} + r^{n-3} + r^{n-4} + \ldots + r + 1) - (n - 1)], \text{ czyli ostatecznie} $$

$$ \sigma = \frac{1}{r - 1} \cdot \left[r\frac{r^{n-1} - 1}{r - 1} - (n - 1) \right]. \tag{β} $$

Podstawiwszy to wyrażenie na σ w (α), otrzymujemy

$$ {}_wW_n^{(pg)} = k.r.\frac{r^n - 1}{r - 1} + \frac{ar}{r - 1} \cdot \left[r\frac{r^{n-1} - 1}{r - 1} - (n - 1) \right], \text{ albo inaczej} $$

$$ {}_wW_n^{(pg)} = k.r.\frac{r^n - 1}{r - 1} + \frac{ar}{(r - 1)^2} \cdot [r^n - nr + (n - 1)]. \tag{98} $$

Podobnie

$$ {}_wW_n^{(pd)} = k.\frac{r^n - 1}{r - 1} + \frac{a}{(r - 1)^2} \cdot [r^n - nr + (n - 1)]. \tag{99} $$

(*) Znaczek w, postawiony z lewej strony głoski W, oznacza, że wkłady wzrastają.

Gdy założymy $k = a$, będzie to znaczyło, że wnosimy z góry: na początku 1-go roku a, na początku 2-go roku $2a$ i t. d.; lub z dołu: przy końcu 1-go roku a, przy końcu 2-go roku $2a$ i t. d. Wtedy

$$(100) \qquad {}_{w}\mathrm{W}_{n}^{(pg)} = \frac{ar}{(r-1)^2} \cdot [r^{n+1} - (n+1)r + n],$$

$$(101) \qquad {}_{w}\mathrm{W}_{n}^{(pd)} = \frac{a}{(r-1)^2} \cdot [r^{n+1} - (n+1)r + n].$$

Wzory (99) od (98) i (101) od (100) różnią się brakiem czynnika r.

Wyrażenia na teraźniejszą wartość wkładów stale wzrastających możnaby w zupełnie podobny sposób wyprowadzić; krócej wszakże będzie zdyskontować wyrażenia (98), (99), (100) i (101) na n lat, t. j. pomnożyć je przez $\rho^n = \frac{1}{r^n}\cdot$ Czyniąc to, znajdujemy

$$(98') \qquad {}_{w}\mathrm{W}_{n}^{(tg)} = k.\ \frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} + \frac{a}{r^{n-1}(r-1)^2} \cdot [r^n - nr + (n - 1)],$$

$$(99') \qquad {}_{w}\mathrm{W}_{n}^{(td)} = k.\ \frac{1}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} + \frac{a}{r^n(r-1)^2} \cdot [r^n - nr + (n - 1)];$$

$$(100') \qquad {}_{w}\mathrm{W}_{n}^{(tg)} = \frac{a}{r^{n-1}(r-1)^2} \cdot [r^{n+1} - (n+1)r + n],$$

$$(101') \qquad {}_{w}\mathrm{W}_{n}^{(td)} = \frac{a}{r^n(r-1)^2} \cdot [r^{n+1} - (n+1)r + n].$$

Jeżeli wkłady maleją, dość jest podstawić $-a$ za a we wzorach (98), (99), (98') i (99'). Wtedy otrzymujemy (*)

$$(102) \qquad {}_{m}\mathrm{W}_{n}^{(pg)} = k.r\ \frac{r^n - 1}{r - 1} - \frac{ar}{(r-1)^2} \cdot [r^n - nr + (n - 1)],$$

$$(103) \qquad {}_{m}\mathrm{W}_{n}^{(pd)} = k.\ \frac{r^n - 1}{r - 1} - \frac{a}{(r-1)^2} \cdot [r^n - nr + (n - 1)],$$

$$(102') \qquad {}_{m}\mathrm{W}_{n}^{(tg)} = k.\ \frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} - \frac{a}{r^{n-1}(r-1)^2} \cdot [r^n - nr + (n - 1)],$$

$$(103') \qquad {}_{m}\mathrm{W}_{n}^{(td)} = k.\ \frac{1}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} - \frac{a}{r^n(r-1)^2} \cdot [r^n - nr + (n - 1)].$$

Oczywiście wkłady mogą maleć tylko do pewnej granicy, mianowicie dotąd, póki się nie wyczerpie k, wynoszą bowiem: k, $k - a$, $k - 2a$, . . .

(*) Znaczek m, postawiony z lewej strony głoski W, oznacza, że wkłady maleją.

$\ldots, k-(n-1)a$. Ażeby wkład nie stał się ujemnym, coby znaczyło, że wkłady mają ulegać zwrotowi, musi być

$$k-(n-1)a > 0, \text{ czyli } a < \frac{k}{n-1}.$$

Gdy np. $a = \frac{k}{n}$, t. j. $k = an$; albo inaczej, gdyby wkładami były: na, $(n-1)a, (n-2)a, \ldots, 2a, a$, otrzymalibyśmy z (102) i (102′):

$$(104) \qquad {}_mW_n^{(pg)} = \frac{ar}{(r-1)^2} \cdot [nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1],$$

$$(104') \qquad {}_mW_n^{(tj)} = \frac{a}{r^{n-1}(r-1)^2} \cdot [nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1].$$

Z (103) i (103′)

$$(105) \qquad {}_mW_n^{(pd)} = \frac{a}{(r-1)^2} \cdot [nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1)],$$

$$(105') \qquad {}_mW_n^{(td)} = \frac{a}{r^n(r-1)^2} \cdot [nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1].$$

38. Teorya spłat terminowych.—Umarzanie pożyczek. Niektóre instytucye kredytowe udzielają pożyczki pod warunkiem, że w zamian przez pewien szereg lat otrzymywać będą peryodycznie (rocznie lub półrocznie) po pewnej stałej kwocie pieniędzy, mieszczącej w sobie nie tylko procent od wypożyczonej sumy, ale i częściową spłatę zaciągniętego długu, który tym sposobem stopniowo się zmniejsza, aż nareszcie, po upływie oznaczonej liczby lat, w całości się umarza (amortyzuje), t. j. pożyczka przez wnoszone raty w całości spłaconą zostanie.

W tego rodzaju operacyach, wnoszone peryodycznie raty nazywają się spłatami peryodycznemi, albo, z cudzoziemska, annuitami; sama zaś operacya zowie się umarzaniem, albo amortyzowaniem długu.

System taki mógłby znaleźć zastosowanie i w stosunku odwrotnym, t. j. osoba A mogłaby osobie B, albo jakiej instytucyi, dać jednorazowo pewien kapitał i w zamian otrzymywać, przez pewien szereg lat, jakiś stały dochód roczny, półroczny, kwartalny lub miesięczny, amortyzujący wypłacony z góry kapitał. Raty peryodycznie płacone, w tym razie, zyskałyby nazwę dochodu czasowego, który byłby wypłacany, aż do chwili umorzenia kapitału, samej osobie A, jej sukcesorom, albo w ogóle temu, na kogoby rzeczony dochód osoba A przelała. Byłby to więc dochód (renta) niezależny od życia i śmierci osoby A, lecz trwający przez czas z góry ściśle oznaczony.

Zagadnienie spłat polega na oznaczeniu wysokości raty, przy danym kapitale, mającym się umorzyć, przy danej stopie procentowej i liczbie lat, w ciągu których kapitał ma być umorzony.

Przypuśćmy, że raty płacą się z dołu. Mający się umorzyć kapitał oznaczmy przez K, stopę od jednostki przez $i = \frac{s}{100}$, liczbę lat, w ciągu której ma być umorzony kapitał, przez n, wysokość raty przez a.

Teraźniejsza wartość raty a, wnoszonej corocznie z dołu przez n lat, według wzoru (95″), równa się

$$a.\frac{1}{r^n}\cdot\frac{r^n-1}{r-1};$$

teraźniejsza wartość mającego się umorzyć kapitału równa się K; powinno więc być

$$a.\frac{1}{r^n}\cdot\frac{r^n-1}{r-1} = \text{K, skąd}$$

$$(106) \qquad a = \frac{r-1}{r^n-1}\cdot r^n.\text{K}.$$

Do tego samego rezultatu przychodzimy, używając przyszłych wartości. Przyszła wartość kapitału K wynosi $\text{K}.r^n$; przyszła wartość spłat a, według wzoru (94), równa się $a.\frac{r^n-1}{r-1}$, powinno więc być

$$a.\frac{r^n-1}{r-1} = \text{K}.r^n,$$

skąd, jak wyżej,

$$(106) \qquad a = \frac{r-1}{r^n-1}\cdot r^n.\text{K}.$$

Jeżeli np. towarzystwo kredytowe udziela pożyczkę 100000 fr., mającą się umorzyć w ciągu 5-u lat przy stopie 5%, roczna spłata

$$a = \frac{0{,}05}{(1{,}05)^5-1}\cdot(1{,}05)^5.100\,000$$

Przy pomocy tabl. IV znajdujemy

$$a = \frac{0{,}05}{1{,}276\,281\,56-1}\times 1{,}276\,281\,56\times 100\,000 = 23\,097{,}\ 48 \text{ fr.}$$

W pierwszej racie 23097,48 fr. mieści się roczny procent od kapitału 100000 fr., wynoszący 5000 fr. i amortyzacya 23097,48—5000=18097,48 fr.; po roku zostaje przeto do umorzenia 100000 — 18097,48 = 81902,52 fr.

W drugiej racie 23097,48 fr. jest roczny procent od pozostałego do umorzenia kapitału 81902,52, czyli 4095,13 fr. i na amortyzacyę 19002,35 fr., skutkiem czego do dalszej amortyzacyi pozostaje 81902,52 — 19002,35 = = 62900,17 fr.

Postępując w podobny sposób dalej, można ułożyć następującą tabelkę amortyzacyjną

Tabela amortyzacyjna 100 000 fr., przez lat 5 przy stopie $5^0/_0$.

Po latach	Rata		Procent od nieumorzonego kapitału		Amortyzacya		Pozostały do umorzenia kapitał	
1	23 097	48	5 000	—	18 097	48	81 902	52
2	23 097	48	4 095	13	19 002	35	62 900	17
3	23 097	48	3 145	01	19 952	47	42 947	70
4	23 097	48	2 147	39	20 950	09	21 997	61
5	23 097	48	1 099	88	21 997	60	—	01
Rezultat	115 487	40	15 487	41	99 999	99	—	—

Drobna pozostałość nie odgrywa tu żadnej roli.

Podobnie można z góry ułożyć porządek spłacania obligacyj. System obligacyjny jest zaciągnięciem pożyczki, w zamian za którą wydaje się wierzycielom dowody pieniężne, zwane obligacyami. Obligacye przynoszą procent i pewna ich liczba bywa corocznie spłacaną, aż do wyczerpania wszystkich w ciągu oznacznej liczby lat. Losowanie rozstrzyga, które obligacye mają być w danym roku spłacone.

Obliczenie sumy, jaka corocznie ma być przeznaczoną na opłacenie procentów i umorzenie obligacyj, dokonywa się zupełnie w taki sam sposób, jak przy zwyczajnej pożyczce amortyzacyjnej. Cała różnica polega na tem, że ponieważ obligacye wydają się zazwyczaj na pełną liczbę setek lub tysięcy jednostek monetarnych, zatem corocznie tylko okrągła liczba setek i tysięcy może być spłaconą; z każdego roku więc, z sumy, wypadłej do umorzenia, pozostaje jakaś reszta, którą się pozostawia do następnych ciągnień i włącza do sum później do umorzenia wypadających. Pozostałości te powinny procentować, gdyż inaczej w ostatnim roku brakłoby pieniędzy do spłacenia ostatniej seryi obligacyj.

Gdyby na poprzednio za przykład wziętą pożyczkę wydano 1 000 obligacyj, po 100 fr. każda, rachunek wypadłby taki, jak pokazuje tablica pomieszczona na str. 117.

Widzimy z tej tablicy, że, dla zgodzenia rachunku, wykazane w kolumnie 7 pozostałości z rat amortyzacyjnych powinny procentować. Tak małe sumy wszakże oprocentowywać trudno i dla tego, gdybyśmy tego uniknąć chcieli, należałoby procent od pozostałości, w ogólnej sumie 12,60 fr. (kol. 8), włączyć do spłat, po $\frac{12{,}60}{5} = 2{,}52$ fr. rocznie, skutkiem czego rata roczna na opłacenie procentów i umorzenie obligacyj wynosiłaby nie 23 097,48

Tabela amortyzacyjna 1000 obligacyj po 100 fr. każda, przez 5 lat przy stopie 5%.

1	2		3		4		5	6	7		8		9	10
Po latach	Rata łącznie z oprocentowaną pozostałością		Procent od niewylosowanych obligacyj		Amortyzacya				Pozostałość z raty amortyzacyjnej		Procent od pozostałości		Pozostaje do umorzenia	
					Suma		Liczba obligacyj (po 100 fr.)	Umorzono obligacyj na sumę					Obligacyj	Na sumę
1	23 097	48	5 000	—	18 097	48	180	18 000	97	48	4	87	820	82 000
2	23 199	83	4 100	—	19 099	83	190	19 000	99	83	4	99	630	63 000
3	23 202	30	3 150	—	20 052	30	200	20 000	52	30	2	62	430	43 000
4	23 152	40	2 150	—	21 002	40	210	21 000	2	40	—	12	220	22 000
5	23 100	00	1 100	—	22 000	00	220	22 000	—	—	—	—	—	—
Rezultat	115 752	01	15 500	—	100 252	01	1 000	100 000	—	—	12	60	—	—

lecz 23 100 fr. Odnośną do tego przypadku tabelkę, podobną do poprzedniej, każdy z czytelników łatwo sam sobie ułożyć potrafi.

W przeprowadzonych przykładach przyjęliśmy 5-o letni okres amortyzacyi. W praktyce tak krótkie okresy się nie używają, przyjęliśmy jednak taki, aby uniknąć zbyt obszernych tablic, co nie przynosi szkody czytelnikowi, gdyż sposób postępowania, o przedstawienie którego nam chodziło, od długości okresu nie zależy.

Również nie trafia się, aby amortyzacya długów odbywała się za pośrednictwem rat rosnących lub malejących, chociaż jest to możliwe.

Dla przykładu weźmy pod uwagę raty stale rosnące.

Gdy pierwszą ratę, płatną z dołu, oznaczymy przez a, rata druga wynosi $2a$, trzecia $3a$ i t. d. Na teraźniejszą wartość takich spłat otrzymujemy, ze wzoru (101'), wyrażenie

$$\frac{a}{r^n(r-1)^2} \cdot [r^{n+1} - (n+1)r + n].$$

Teraźniejszą wartością mającego się umorzyć kapitału K jest K, więc

$$\frac{a}{r^n(r-1)^2} \cdot [r^{n+1} - (n+1)r + n] = \mathrm{K},$$

skąd

$$a = \frac{r^n(r-1)^2\mathrm{K}}{r^{n+1} - (n+1)r + n}. \tag{107}$$

Jeżeli np. chcemy w ten sposób spłacić 100000 fr. w ciągu 5-u lat, przy stopie $5^0/_0$, wypada na pierwszą ratę

$$a = \frac{(1,05)^5 \cdot (0,05)^2 \cdot 100000}{(1,05)^6 - 6 \times 1,05 + 5} = 7957,73 \text{ fr.}$$

Tabela amortyzacyjna przedstawia się jak następuje

Tabela amortyzacyjna 100000 fr., przez lat 5 przy stopie $5^0/_0$ i racie stale rosnącej.

Po latach	Rata		Procent od nieumorzonego kapitału		Amortyzacya		Pozostaje do umorzenia	
1	7 957	73	5 000	—	2 957	73	97 042	27
2	15 915	46	4 852	11	11 063	35	85 978	92
3	23 873	19	4 298	95	19 574	24	66 404	68
4	31 830	92	3 320	23	28 510	69	37 893	99
5	39 788	65	1 894	70	37 893	95	—	04
Rezultat	119 365	95	19 365	99	99 999	96	—	—

W podobny sposób możnaby przeprowadzić amortyzacyę przy pomocy spłat stale malejących. Sądzimy, że byłoby zbytecznem wskazywać tu drogę postępowania, powiedziane bowiem wystarczyć powinno do samodzielnego radzenia sobie w poszczególnych przypadkach.

---

39. Zdyskontowane liczby osób żyjących. Omawiane w poprzednich artykułach spłaty resp. dochody (art. 38) nie zależały od życia ludzkiego, lecz trwały przez z góry ściśle oznaczoną liczbę lat, bez względu na to, czy bezpośrednio zainteresowane spłatą lub dochodem osoby w ciągu tych lat żyć będą lub nie.

Wszakże wypłata dochodu może także zależeć i od życia osoby pobierającej dochód, t. j. w umowie może być postawiony warunek, że z chwilą śmierci osoby, pobierającej dochód, wypłata takowego ustaje. W takim razie na wysokość rocznego dochodu, oprócz procentu, jaki wniesiony do umorzenia kapitał przynosi, wpływa jeszcze i prawdopodobieństwo życia osoby pobierającej dochód.

Dajmy na to, że osoba A, w chwili zawierania umowy licząca x lat, życzy sobie nabyć prawo do pobierania rocznego dochodu, w wysokości a fr., aż do śmierci. Zachodzi pytanie, jaki kapitał K osoba A jednorazowo wnieść powinna, aby kapitał ten, przy stopie $s^0/_0$, mógł najprawdopodobniej wystarczyć na płacenie do śmierci osobie A dochodu po a fr. rocznie z góry; albo innemi słowy, jaka jest teraźniejsza wartość matematyczna opisanego powyżej dochodu rocznego?

Ponieważ na wysokość kapitału K wpływają prawdopodobieństwa, z jakiemi osoba A przeżyje rok, dwa, trzy i t. d., a prawdopodobieństwa te otrzymują się z tablicy śmiertelności, przeto, zatrzymując oznaczenia ogólne, wprowadzone w art. 18, prawdopodobieństwem przeżycia roku przez osobę A jest $\frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x}$, 2-ch lat $\frac{\lambda_{x+2}}{\lambda_x}$, 3-ch lat $\frac{\lambda_{x+3}}{\lambda_x}$ i t. d., prawd. przeżycia n lat jest $\frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x}$.

Pierwszy roczny dochód a otrzymuje osoba A natychmiast po zawarciu umowy, teraźniejsza więc wartość tej pierwszej raty wynosi, oczywiście, a.

Po roku dochód a będzie wypłacony, jeżeli osoba A żyć wówczas będzie, jego zatem wartość w terminie wypłaty (wartość matematyczna należności a) równa się $a \times \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x}$, wartość teraźniejsza $= a \times \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x} \cdot \rho$.

Teraźniejsza wartość matematyczna raty a, mającej się wypłacić po dwóch latach, wynosi $a. \frac{\lambda_{x+2}}{\lambda_x} \cdot \rho^2$; po 3-ch latach $a. \frac{\lambda_{x+3}}{\lambda_x} \cdot \rho^3$ i t. d., po n latach równa się $a. \frac{\lambda_{x+n}}{\lambda_x} \cdot \rho^n$, czyli teraźniejsza wartość matematyczna rocznego dochodu a, płatnego do śmierci osoby A, wynosi

$$K = a + a. \frac{\lambda_{x+1}\rho}{\lambda_x} + a\frac{\lambda_{x+2}\rho^2}{\lambda_x} + a\frac{\lambda_{x+3}\rho^3}{\lambda_x} + \ldots + a. \frac{\lambda_{x+n}\rho^n}{\lambda_x} + \ldots \text{ do końca}$$

tablicy śmiertelności.

Po wyłączeniu a za nawias, podstawieniu $\frac{\lambda_x}{\lambda_x}$ za jedność, pomnożeniu liczników i mianowników przez ρ^x, wypada

$$K = a. \left(\frac{\lambda_x\rho^x}{\lambda_x\rho^x} + \frac{\lambda_{x+1}\rho^{x+1}}{\lambda_x\rho^x} + \frac{\lambda_{x+2}\rho^{x+2}}{\lambda_x\rho^x} + \ldots + \frac{\lambda_{x+n}\rho^{x+n}}{\lambda_x\rho^x} + \ldots\right)$$

$$= \frac{a}{\lambda_x\rho^x} \cdot (\lambda_x\rho^x + \lambda_{x+1}\rho^{x+1} + \lambda_{x+2}\rho^{x+2} + \ldots + \lambda_{x+n}\rho^{x+n} + \ldots).$$

Albo, przyjmując symboliczny sposób oznaczania sum,

$$(\alpha) \qquad K = a\frac{\Sigma\lambda_x\rho^x}{\lambda_x\rho^x}.$$

Gdyby λ_x oznaczało jakiś kapitał, iloczyn $\lambda_x\rho^x$, według art. 33, nazwalibyśmy zdyskontowaną (na x lat) wartością kapitału λ_x; przez analogię, gdy λ_x oznacza liczbę osób żyjących w wieku lat x, iloczyn $\lambda_x\rho^x = \frac{\lambda_x}{r^x}$ nazwać można zdyskontowaną (na chwilę urodzenia się) liczbą osób żyjących w wieku x lat (Discontirte Zahl der Lebenden des Alters x) (*). $\Sigma\lambda_x\rho^x$ sumą zdyskontowanych liczb osób żyjących (w wieku od lat x po granicę życia ludzkiego).

Zatem: zdyskontowaną liczbą osób żyjących w wieku x lat nazywa się iloczyn, powstały z pomnożenia liczby osób żyjących w wieku lat x, podanej w tablicy śmiertelności, przez czynnik dyskontujący, którego potęga równa się wiekowi rzeczonych osób żyjących.

Zdyskontowaną liczbę osób żyjących oznaczać będziemy przez v_x, tak, że

$$(107) \qquad v_x = \lambda_x\rho^x = \frac{\lambda_x}{r^x}, \text{ skąd } \Sigma\lambda_x\rho^x = \Sigma v_x.$$

Skutkiem tego

$$(\alpha') \qquad \mathrm{K} = a\frac{\Sigma v_x}{v_x}.$$

Uwaga. Wzór (α) możnaby inaczej wyrazić. Oznaczmy granicę życia ludzkiego przez g; pomnóżmy licznik i mianownik wyrażenia (α) przez r^g, wtedy otrzymamy

$$(\alpha'') \qquad \mathrm{K} = a\frac{\Sigma\lambda_x\rho^x.r^g}{\lambda_x.\rho^x.r^g} = a.\frac{\Sigma\frac{\lambda_x r^g}{r^x}}{\frac{\lambda_x r^g}{r^x}} = a\frac{\Sigma\lambda_x r^{g-x}}{\lambda_x r^{g-x}}.$$

Gdyby λ_x oznaczało kapitał, iloczyn $\lambda_x r^{g-x}$ oznaczałby przyszłą, czyli skapitalizowaną wartość kapitału λ_x po $g - x$ latach. Gdy więc λ_x oznacza liczbę żyjących osób x letnich, można, przez analogię, iloczyn $\lambda_x.r^{g-x}$ nazwać skapitalizowaną liczbą osób żyjących (na chwilę granicy życia ludzkiego), a $\Sigma\lambda_x r^{g-x}$ można nazwać sumą skapitalizowanych liczb osób żyjących.

40. ZDYSKONTOWANE LICZBY OSÓB ZMARŁYCH. Weźmy inny przykład: Osoba A, licząca x lat wieku, życzy sobie, aby w pierwszą po jej śmierci rocznicę zawarcia niniejszej umowy, wypłacony został spadkobiercom kapitał k. Jaka jest teraźniejsza wartość matematyczna K' takiej umowy?

Prawdopodobieństwo, z jakiem k wypłaconem będzie w rok po zawarciu umowy, równa się prawdopodobieństwu, z jakiem osoba A w ciągu pierwszego roku umrze. Prawdopodobieństwo to, według wzoru (29'), równa się $\frac{\tau_x}{\lambda_x}$. Ma-

---

(*) Wiele używanych przez nas, w niniejszej pracy, terminów specyalnych nie istniało dotąd w polskiej literaturze naukowej, ponieważ dotąd książek traktujących o ubezpieczeniach życiowych u nas prawie wcale nie pisano. Terminy te w części przekładaliśmy z obcych języków, a w części braliśmy je z praktyki. Tak należy rozumieć używane przez nas zwroty „nazywa się", „nazwano", „bywa nazywane" i t. p.

tematyczna wartość wypłaty rzeczonego kapitału po roku równa się $k. \frac{\tau_x}{\lambda_x}$; wartość teraźniejsza wynosi $k. \frac{\tau_x}{\lambda_x} \cdot \rho$.

Podobnie rozumując dalej, znajdziemy, że teraźniejszą wartością wypłaty kapitału k po 2-ch latach jest $k. \frac{\tau_{x+1}}{\lambda_x} \cdot \rho^2$; po 3-ch latach $k. \frac{\tau_{x+2}}{\lambda_x} \rho^3$ i t. d., po n latach $k. \frac{\tau_{x+n-1}}{\lambda_x} \cdot \rho^n$.

Teraźniejszą wartością matematyczną całej umowy będzie więc

$K' = k. \frac{\tau_x \rho}{\lambda_x} + k. \frac{\tau_{x+1} \rho^2}{\lambda_x} + k. \frac{\tau_{x+2} \rho^3}{\lambda_x} + \ldots + k. \frac{\tau_{x+n-1} \rho^n}{\lambda_x} + \ldots$ do końca tablicy śmiertelności

$$= k. \left(\frac{\tau_x \rho}{\lambda_x} + \frac{\tau_{x+1} \rho^2}{\lambda_x} + \frac{\tau_{x+2} \rho^3}{\lambda_x} + \ldots + \frac{\tau_{x+n-1} \rho^n}{\lambda_x} + \ldots \right).$$

Po pomnożeniu liczników i mianowników przez ρ^x

$$K' = k. \left(\frac{\tau_x \rho^{x+1}}{\lambda_x \rho^x} + \frac{\tau_{x+1} \rho^{x+2}}{\lambda_x \rho^x} + \ldots + \frac{\tau_{x+n-1} \rho^{x+n}}{\lambda_x \rho^x} + \ldots \right)$$

$$= \frac{k}{\lambda_x \rho^x} \cdot (\tau_x \rho^{x+1} + \tau_{x+1} \rho^{x+2} + \ldots + \tau_{x+n-1} \rho^{x+n} + \ldots).$$

Iloczyn $\lambda_x \rho^x$ jest zdyskontowaną liczbą osób żyjących (v_x); gdy nadto sumę iloczynów w nawiasie oznaczymy przez $\Sigma \tau_x \rho^{x+1}$, mieć będziemy

β) $$K' = k. \frac{\Sigma \tau_x \rho^{x+1}}{v_x}.$$

Podobnie jak iloczyn $\lambda_x \rho^x$ nazwano zdyskontowaną liczbą osób żyjących, tak iloczyn $\tau_x \rho^{x+1} = \frac{\tau_x}{r^{x+1}}$ zyskał miano zdyskontowanej liczby osób zmarłych w wieku x lat (Discontirte Zahl der Gestorbenen des Alters x), skutkiem czego suma $\Sigma \tau_x \rho^{x+1}$ jest sumą zdyskontowanych liczb osób zmarłych (w wieku od x lat po granicę życia ludzkiego).

Zatem: zdyskontowaną liczbą osób zmarłych w wieku x lat nazywa się iloczyn, powstały z pomnożenia liczby osób zmarłych w wieku od x do $x + 1$ lat, wykazanej w tablicy śmiertelności, przez czynnik dyskontujący, którego potęga równa się $x+1$.

Zdyskontowaną liczbę zmarłych oznaczać będziemy przez m_x, tak, że

(108) $$m_x = \tau_x . \rho^{x+1} = \frac{\tau_x}{r^{x+1}}, \text{ skąd } \Sigma \tau_x \rho^{x+1} = \Sigma m_x.$$

Skutkiem takich oznaczeń

(β') $$K' = k. \frac{\Sigma m_x}{v_x}.$$

41. Tablice pomocnicze. Zdyskontowane liczby osób żyjących i zmarłych, ich sumy oraz sumy sum posiadają pierwszorzędne znaczenie w teoryi ubezpieczeń życiowych. Wszystkie wzory, odnoszące się do premij za ubezpieczenia życiowe, posiadają w swym składzie jedne lub drugie, albo i jedne i drugie z pomienionych liczb; dla tego, przed przystąpieniem do obliczania premij, należy pomienione liczby obrachować i ułożyć w tablice, z tego właśnie powodu nazwane tablicami podstawowemi, przygotowawczemi, albo pomocniczemi (Grundtafeln, Hülfstabellen,—Tables auxiliaires, Tables de commutation,—Commutation Columns).

Tablice pomocnicze składają się z sześciu kolumn: Pierwsza obejmuje zdyskontowane liczby osób żyjących; angielscy „actuaries" oznaczają tę kolumnę głoską D, od wyrazu Divisor (dzielnik), ponieważ te liczby wchodzą najczęściej, jak to później zobaczymy, w mianownik. Druga kolumna obejmuje sumy zdyskontowanych liczb osób żyjących; bywa oznaczaną przez N, od wyrazu Numerator (licznik), gdyż liczby tej kolumny, we wzorach na rentę, wchodzą do licznika. Kolumna trzecia mieści sumy sum zdyskontowanych liczb osób żyjących, oznacza się głoską S, od wyrazu Sum (suma).

Trzy następne kolumny obejmują zdyskontowane liczby osób zmarłych, ich sumy i sumy sum. Anglicy oznaczają je przez C, M i R; są to głoski bezpośrednio w alfabecie poprzedzające głoski D, N i S.

My, idąc za Zillmerem, oznaczać będziemy liczby trzech pierwszych kolumn znakami v_x (od wyrazu vivant), Σv_x i $\Sigma\Sigma v_x$ (x oznacza wiek osób uważanych), trzy ostatnie przez m_x (mort), Σm_x i $\Sigma\Sigma m_x$, te bowiem oznaczenia jaśniej tłumaczą znaczenie liczb objętych kolumnami i łatwiej tem samem utrzymują się w pamięci.

Ażeby sobie ułatwić podawanie liczebnych przykładów w dalszym ciągu oraz celem pokazania sposobu formowania tablic pomocniczych, podajemy takowe w tablicy IX-ej.

Za podstawę do jej ułożenia przyjęliśmy tablicę śmiertelności 17-tu towarzystw angielskich, uzupełnioną przez Heym'a; $3^1/_2\%$ za stopę procentu technicznego (*).

Kolumny 0 obejmują wiek osób; kolumna 1 liczby osób żyjących w każdym wieku; kolumna 2 liczby osób zmarłych; kolumna 3 czynniki dyskontujące przy stopie $3^1/_2\%$, wyjęte z tabl. V kol. 5.

Kolumna 4 (v_x) otrzymuje się z pomnożenia liczb kolumny 1 przez liczby kolumny 3. Np.

$$v_{30} = 86292 \times 0{,}3562784 = 30743{,}98.$$

(*) Należy odróżnić procent przyjęty w obliczeniach od dającego się rzeczywiście osiągnąć. Ten pierwszy, dla odróżnienia go od drugiego (handlowego), zwać będziemy procentem technicznym. Stopa procentu technicznego zawsze powinna być mniejszą od stopy procentu handlowego.

Kolumna 7 (m_x) wypada z pomnożenia liczb kol. 2 przez liczby kol. 3 niżej o jeden wiersz położone. Np.

$$m_{30} = 727 \times 0{,}344\,2303 = 250{,}2\,554.$$

Wreszcie kol. 5 (Σv_x) otrzymuje się z dodawania liczb kol. 4; kol. 6 ($\Sigma\Sigma v_x$) z dodawania liczb kol. 5; kol. 8 (Σm_x) z dodawania liczb kol. 7; kol. 9 ($\Sigma\Sigma m_x$) z dodawania liczb kol. 8.

Przy dodawaniu liczb kolumnowych rozpoczynać należy od końca i postępować ku górze. Tak np., formując kolumnę 5, postępujemy w następujący sposób:

$$\Sigma v_{99} = v_{99} = 0{,}033\,182$$

$$\Sigma v_{98} = v_{98} + \Sigma v_{99} = 0{,}137\,374 + 0{,}033\,182 = 0{,}170\,556$$

$$\Sigma v_{97} = v_{97} + \Sigma v_{98} = 0{,}462\,093 + 0{,}170\,556 = 0{,}632\,649$$

$$\Sigma v_{96} = v_{96} + \Sigma v_{97} = 1{,}361\,219 + 0{,}632\,649 = 1{,}993\,868$$

i t. d. aż do Σv_0. Albo prościej:

$$\begin{array}{r}
0{,}033\,182 \\
+\ 0{,}137\,374 \\
\hline
0{,}170\,556 \\
+\ 0{,}462\,093 \\
\hline
0{,}632\,649 \\
+\ 1{,}361\,219 \\
\hline
1{,}993\,868 \\
+\ \text{i t. d.}
\end{array}$$

Podobnie postępuje się przy układaniu kolumny 6:

$$\Sigma\Sigma v_{99} = \Sigma v_{99} = 0{,}033\,182$$

$$\Sigma\Sigma v_{98} = \Sigma v_{98} + \Sigma\Sigma v_{99} = 0{,}170\,556 + 0{,}033\,182 = 0{,}203\,738 \text{ i t. d.}$$

Zupełnie tak samo obliczają się kolumny 8 i 9 z kolumny 7.

Kolumna 10 zawiera sumy liczb osób żyjących.

Zauważyć należy, że bardzo jeszcze często, zarówno do układania tablic pomocniczych jak i do dalszych rachunków, bywają używane logarytmy. Sposób ten wszakże jest bardzo mozolny, łatwo podlegający pomyłkom (przeoczeniom) i często, z przyczyny liczb wielocyfrowych, z jakiemi się tutaj spotykamy, nie dość ścisły, nawet przy użyciu logarytmów siedmiocyfrowych. O wiele łatwiej, pewniejsze rezultaty otrzymuje się przy pomocy maszyn rachunkowych (Arithmomètres), z pomiędzy których, używany przezemnie system M. Thomas'a, wyrabiany przez A. M. Payen'a (Paris, Rue de Chateaudun, 44), nadzwyczaj okazał się praktycznym. Do rachunków ubezpieczeń życiowych użyć należy przynajmniej kalibru 16-o (lepiej 20-o) cyfrowego, albowiem mniejsze nie wystarczają.

42. ZWIĄZKI POMIĘDZY ZDYSKONTOWANEMI LICZBAMI OSÓB ŻYJĄCYCH I ZMARŁYCH ORAZ POMIĘDZY SUMAMI I SUMAMI SUM JEDNYCH I DRUGICH. Pomiędzy zdyskontowanemi liczbami osób zmarłych, ich sumami i sumami sum, a zdyskontowanemi liczbami osób żyjących, ich sumami i sumami sum zachodzą pewne związki.

Według wzoru (108), mamy

$$m_x = \tau_x . \rho^{x+1} = (\lambda_x - \lambda_{x+1}) . \rho^{x+1} = \lambda_x . \rho^x . \rho - \lambda_{x+1} \rho^{x+1},$$

czyli

$$m_x = v_x . \rho - v_{x+1} = \frac{v_x}{r} - v_{x+1}. \tag{109}$$

Wstawiając otrzymane wyrażenie za m_x w rozwinięcie

$$\Sigma m_x = m_x + m_{x+1} + m_{x+2} + \ldots, \text{ wypada}$$

$$\Sigma m_x = (v_x \rho - v_{x+1}) + (v_{x+1} \rho - v_{x+2}) + (v_{x+2} \rho - v_{x+3}) + \ldots$$
$$= \rho (v_x + v_{x+1} + v_{x+2} + \ldots) - (v_{x+1} + v_{x+2} + v_{x+3} + \ldots) = \rho \Sigma v_x - \Sigma v_{x+1},$$

albo, ponieważ $\Sigma v_{x+1} = \Sigma v_x - v_x$,

$$\Sigma m_x = v_x - (1 - \rho) \Sigma v_x = v_x - \frac{r-1}{r} \Sigma v_x. \tag{110}$$

Wstawiając znów to ostatnie wyrażenie w rozwinięcie

$$\Sigma\Sigma m_x = \Sigma m_x + \Sigma m_{x+1} + \Sigma m_{x+2} + \ldots,$$

otrzymujemy

$$\Sigma\Sigma m_x = [v_x - (1 - \rho) \Sigma v_x] + [v_{x+1} - (1 - \rho) \Sigma v_{x+1}] +$$
$$+ [v_{x+2} - (1 - \rho) \Sigma v_{x+2}] + \ldots$$
$$= (v_x + v_{x+1} + v_{x+2} + \ldots) - (1 - \rho)(\Sigma v_x + \Sigma v_{x+1} + \Sigma v_{x+2} + \ldots),$$

czyli

$$\Sigma\Sigma m_x = \Sigma v_x - (1 - \rho) \Sigma\Sigma v_x = \Sigma v_x - \frac{r-1}{r} \Sigma\Sigma v_x. \tag{111}$$

Związki (109), (110) i (111) znajdują częste zastosowanie przy przekształcaniu wzorów, wyrażonych przez zdyskontowane liczby osób zmarłych, ich sumy lub sumy sum, na wzory, mające się wyrazić przez zdyskontowane liczby osób żyjących, ich sumy lub sumy sum i naodwrót.

Nadto dają łatwy sposób sprawdzenia, czy tablice pomocnicze prawidłowo ułożone zostały. Tak np., założywszy w (110): $x = 0$, $r = 1{,}035$, wypada

$$\Sigma m_0 = v_0 - \frac{0{,}035}{1{,}035} \Sigma v_0,$$

że zaś, według kol. 8, 4 i 5 tablicy IX

$$\Sigma m_0 = 58124{,}24$$
$$v_0 = 144218{,}0$$
$$\Sigma v_0 = 2545916{,}1,$$

zatem, jeżeli wymienione kolumny dobrze obliczone zostały, powinno być

$$58\,124{,}24 = 144\,218{,}0 - \frac{0{,}035 \times 2\,545\,916{,}1}{1{,}035}.$$

Strona druga powyższego wyrażenia

$$\begin{array}{r} 144\,218{,}0 \\ -\quad 86\,093{,}78 \\ \hline 58\,124{,}22 \end{array}$$

równa się więc stronie pierwszej, gdyż drobnej różnicy 0,02, jako wypływającej z opuszczenia dalszych cyfr dziesiętnych, za znaczącą uważać nie można.

Podobnie, podstawiwszy w (111) $x = 0$, $r = 1{,}035$, otrzymujemy

$$\Sigma\Sigma m_0 = \Sigma v_0 - \frac{0{,}035}{1{,}035}\,\Sigma\Sigma v_0.$$

Według kol. 9, 5 i 6 tablicy IX

$$\Sigma\Sigma m_0 = 834\,266{,}79$$

$$\Sigma v_0 = 2\,545\,916{,}1$$

$$\Sigma\Sigma v_0 = 50\,615\,920{,}9.$$

Powinno więc być

$$834\,266{,}79 = 2\,545\,916{,}1 - \frac{0{,}035 \times 50\,615\,920{,}9}{1{,}035}.$$

Otóż rzeczywiście strona druga wynosi

$$\begin{array}{r} 2\,545\,916{,}1 \\ -\quad 1\,711\,649{,}5 \\ \hline 834\,266{,}6, \end{array}$$

t. j. prawie się równa stronie pierwszej.

43. Związki pomiędzy liczbą osób żyjących i zmarłych oraz pomiędzy sumami i sumami sum jednych i drugich. Jeżeli stopę procentową przyjmiemy za zero, skutkiem czego $r = 1$ i $\rho = 1$, ze wzorów (109), (110) i 111) wypadną związki pomiędzy liczbą osób zmarłych, ich sumami i sumami sum, a liczbą osób żyjących, ich sumami i sumami sum.

Albowiem przy $\rho = 1$, $v_x = \lambda_x . \rho^x = \lambda_x$, $m_x = \tau_x . \rho^{x+1} = \tau_x$; jest więc ze (109), (110) i (111)

$$\tau_x = \lambda_x - \lambda_{x+1}, \tag{109'}$$

$$\Sigma\tau_x = \lambda_x, \tag{110'}$$

$$\Sigma\Sigma\tau_x = \Sigma\lambda_x. \tag{111'}$$

Wyrażenia (109') i (110') są nam już znane z art. 18, wyrażenie zaś (111') można również—tak, jak (32) w art. 18—wprost wyprowadzić.

Istotnie

$$\begin{aligned}\Sigma\Sigma\tau_x &= \Sigma\Sigma(\lambda_x - \lambda_{x+1}) = \Sigma(\lambda_x - \lambda_{x+1}) + \Sigma(\lambda_{x+1} - \lambda_{x+2}) + \Sigma(\lambda_{x+2} - \lambda_{x+3}) + \ldots \\ &= (\lambda_x - \lambda_{x+1}) + (\lambda_{x+1} - \lambda_{x+2}) + (\lambda_{x+2} - \lambda_{x+3}) + \ldots + (\lambda_{g-1} - 0) \\ &\qquad + (\lambda_{x+1} - \lambda_{x+2}) + (\lambda_{x+2} - \lambda_{x+3}) + \ldots + (\lambda_{g-1} - 0) \\ &\qquad\qquad + (\lambda_{x+2} - \lambda_{x+3}) + \ldots + (\lambda_{g-1} - 0) \\ &\qquad\qquad\qquad + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + (\lambda_{g-1} - 0).\end{aligned}$$

Tutaj widocznie, oprócz pierwszych wyrazów każdego wiersza, wszystkie inne wzajem się znoszą, czyli pozostaje

$$\Sigma\Sigma\tau_x = \lambda_x + \lambda_{x+1} + \lambda_{x+2} + \ldots + \lambda_{g-1} = \Sigma\lambda_x,$$

jak być powinno według wzoru (111').

44. TABLICE POMOCNICZE DLA DWÓCH I WIĘCEJ OSÓB. Weźmy teraz następujące zadanie: Osoba A w wieku lat x i osoba B w wieku lat $x + h$, t. j. dwie osoby, których wiek różni się o h lat, pragną pobierać po a fr. rocznego dochodu, płatnego z góry aż do śmierci jednej z nich. Ile za prawo pobierania takiego dochodu należy zapłacić, czyli jaka jest teraźniejsza wartość matematyczna K'' tego rodzaju umowy?

Pierwsze a fr. otrzymują pomienione osoby bezzwłocznie w chwili zawierania umowy, wartość zatem tej pierwszej wypłaty wynosi $a\,\frac{\lambda_x\lambda_{x+h}}{\lambda_x\lambda_{x+h}}$.

Prawdopodobieństwo, z jakiem obie osoby po roku żyć będą równa się, według wzoru (55), $\frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x}\cdot\frac{\lambda_{x+h+1}}{\lambda_{x+h}}$; wartość matematyczna wypłaty a fr. po roku wynosi przeto

$$a.\frac{\lambda_{x+1}\cdot\lambda_{x+h+1}}{\lambda_x\cdot\lambda_{x+h}},$$

zaś teraźniejszą wartością tejże wypłaty jest

$$a.\frac{\lambda_{x+1}\cdot\lambda_{x+h+1}\,\rho}{\lambda_x\cdot\lambda_{x+h}}.$$

Teraźniejsza wartość wypłaty a fr. po 2-ch latach wynosi

$$a.\frac{\lambda_{x+2}\lambda_{x+h+2}\,\rho^2}{\lambda_x\lambda_{x+h}}$$

i t. d. aż do $x + h = g$, gdzie g oznacza granicę życia ludzkiego.

Dodając takim sposobem otrzymane wartości rocznych wypłat, otrzymamy na teraźniejszą wartość matematyczną umowy

$$K'' = a.\left(\frac{\lambda_{x+h}\lambda_x}{\lambda_{x+h}\lambda_x} + \frac{\lambda_{x+h+1}\,\rho\cdot\lambda_{x+1}}{\lambda_{x+h}\cdot\lambda_x} + \frac{\lambda_{x+h+2}\,\rho^2\cdot\lambda_{x+2}}{\lambda_{x+h}\lambda_x} + \ldots\right).$$

Pomnożywszy liczniki i mianowniki wyrazów w nawiasie przez ρ^{x+h}, wypada

$$K'' = \frac{a}{\lambda_{x+h}\rho^{x+h}.\lambda_x} \cdot (\lambda_{x+h}\rho^{x+h}.\lambda_x + \lambda_{x+h+1}\rho^{x+h+1}.\lambda_{x+1} + \lambda_{x+h+2}\rho^{x+h+2}.\lambda_{x+2} + \ldots) =$$

$$= \frac{a}{v_{x+h}\lambda_x} \cdot (v_{x+h}\lambda_x + v_{x+h+1}\lambda_{x+1} + v_{x+h+2}\lambda_{x+2} + \ldots), \text{ czyli}$$

$$(\gamma) \qquad K'' = a . \frac{\Sigma v_{x+h} . \lambda_x}{v_{x+h} . \lambda_x} = a . \frac{\Sigma \lambda_{x+h}\rho^{x+h} . \lambda_x}{\lambda_{x+h}\rho^{x+h} . \lambda_x}.$$

Wyrażenia $\lambda_{x+h}\rho^{x+h}\lambda_x = v_{x+h}\lambda_x$, które możnaby nazwać zdyskontowanemi liczbami żyjących par, ich sumy i sumy sum, we wzorach odnoszących się do wspólnych ubezpieczeń dwóch osób, powtarzają się często i dla tego ich wartości liczebne potrzeba sobie przygotować. Zbiory odnośnych liczb, ułożonych w kolumny, nazywają się tablicami przygotowawczemi lub pomocniczemi dla ubezpieczeń opartych na życiu dwóch osób.

Chcąc posiadać wyczerpujący zbiór takich tablic, potrzeba uwzględnić wszelkie mogące się w praktyce przytrafić różnice pomiędzy wiekiem 2-ch osób, t. j. potrzeba je układać przy założeniu $h = 0, 1, 2, 3, \ldots$ aż do możliwie zdarzyć się mogącej różnicy. Każda tablica składać się będzie z trzech kolumn: 1) $\lambda_{x+h}\rho^{x+h}\lambda_x = v_{x+h}\lambda_x$, 2) $\Sigma\lambda_{x+h}\rho^{x+h}\lambda_x = \Sigma v_{x+h}\lambda_x$, 3) $\Sigma\Sigma\lambda_{x+h}\rho^{x+h}\lambda_x = \Sigma\Sigma v_{x+h}\lambda_x$.

W naszej tabl. IX podajemy, dla przykładu i późniejszych zastosowań, trzy tego rodzaju tablice: dla $h = 0$ (kol. 11, 12, 13); $h = 10$ (kol. 14, 15, 16) i $h = 25$ (kol. 17, 18, 19). Kolumny 11, 14 i 17 są obliczone ze ścisłością do drugiej cyfry od końca.

Sposób ich układania wskazują nagłówki, tak np. w kol. 14, przy $h = 10$, $x = 30$

$$\lambda_{40}\rho^{40}\lambda_{30} = 78653 \times 0{,}2525725 \times 86292 = 1714241044.$$

Sumy i sumy sum formują się w ten sam sposób, jak opisaliśmy w art. 41.

Do ułożenia naszych przykładowych tablic użyliśmy jednej i tej samej tablicy śmiertelności; gdyby jednak chodziło o rozróżnienie płci, wówczas należałoby użyć innej tablicy dla mężczyzn i innej dla kobiet. Gdyby np. $x+h$ letnia osoba była mężczyzną, x letnia -kobietą i jeżelibyśmy ścisłość naszych obliczeń chcieli posunąć aż do rozróżnienia płci, λ_{x+h} czerpaćby trzeba było z tablicy śmiertelności mężczyzn, λ_x z tablicy śmiertelności kobiet.

Zupełnie w taki sam sposób możnaby układać tablice pomocnicze dla trzech osób (zdyskontowane liczby żyjących trójek). Wówczas, przy różnicach wieku k i h, należałoby obliczać najprzód iloczyny

$$\lambda_{x+k} . \rho^{x+k}\lambda_{x+h} . \lambda_x = v_{x+k} . \lambda_{x+h} . \lambda_x,$$

potem sumy tych liczb, później sumy sum, o ile zachodziłaby tego potrzeba.

Rachunki tego rodzaju są naturalnie nadzwyczaj pracowite, a liczba tablic bardzo wielka; często więc, aby tego uniknąć, ucieka się praktyka do przybliżeń, o czem we właściwem miejscu mówić będziemy.

45. WZMIANKA HISTORYCZNA. System zdyskontowanych liczb osób żyjących i sum tych liczb, ułożonych według tego samego wieku w kolumny, został po raz pierwszy użyty do obliczania rent przez Tetens'a („Einleitung zur Berechnung von Leibrenten etc". Lipsk, 1785 r.), który to sposób został ogólnie w Niemczech przyjęty. Do Anglii wprowadził go Griffith Davies (1825) z drobną zmianą w układzie tablic, czyniącą je dogodniejszemi do obliczania wartości rent z dołu płatnych.

Skapitalizowaną liczbę osób żyjących (patrz uwagę do art. 39) wprowadził do rachunku angielski actuary George Barrett (1786), a ogłosił pierwszy raz Francis Baily w dodatku do dzieła „Doctrine of life annuities and assurances", 1813 r.

Sposób Barrett'a przyjęli autorzy francuscy, zaś z angielskich tylko Babbage i David Chisholm.

Oba sposoby, które nazywać będziemy metodą kolumnową, albo tabelaryczną (Méthode à colonnes), pozwalają używać podobnych wzorów na obliczanie premij, ale sposób Tetens'a jest dogodniejszy w użyciu, ponieważ prowadzi do mniejszych liczb, co dla praktyki jest rzeczą nader ważną. Z tego powodu system Tetens'a bywa dziś prawie powszechnie używany, podczas gdy system Barrett'a stopniowo przechodzi do historyi.

ROZDZIAŁ IV.

RENTY OPARTE NA ŻYCIU JEDNEJ OSOBY.

46. PRZEDMIOT UBEZPIECZEŃ ŻYCIOWYCH. Przedmiotem ubezpieczeń życiowych jest zawieranie umów, zapewniających wypłatę pewnych sum pieniężnych, zależną od życia lub śmierci ubezpieczających się osób.

Dla pozyskania prawa na otrzymanie sum ubezpieczonych, osoba zawierająca umowę winna odnośnej instytucyi jednorazowo zapłacić lub peryodycznie płacić pewną kwotę pieniędzy. Opłaty te zowią się premiami.

Jeżeli premia wnosi się raz jeden tylko i pokrywa od razu wszelkie zobowiązania osoby ubezpieczonej względem instytucyi, wtedy premia zowie się jednorazową. Gdy przeciwnie premie wnoszą się co czas pewien, pokrywając bieżąco zobowiązania osoby ubezpieczonej, wówczas premie zowią się peryodycznemi, mianowicie: rocznemi, gdy się wnoszą raz na rok; półrocznemi, gdy się wnoszą raz na pół roku; kwartalnemi i miesięcznemi, gdy się wnoszą raz na kwartał lub raz na miesiąc.

Jeżeli premie peryodyczne są przez cały czas ich wnoszenia tej samej wysokości, wtedy nazywają się premiami stałemi; gdy się zmieniają, noszą nazwę zmiennych i te mogą być rosnącemi lub malejącemi według z góry określonego prawa. Najczęściej premie bywają stałe.

Premie dzielą się na premie netto i brutto. Premie netto wystarczyć powinny na pokrycie samych tylko zobowiązań instytucyi względem osób ubezpieczonych; premie brutto mieszczą w sobie oprócz premii netto jeszcze pewien dodatek, potrzebny na utrzymanie instytucyi.

Zadaniem teoryi ubezpieczeń życiowych jest oznaczenie wysokości premij netto, jakie instytucya pobierać potrzebuje od zawartych ubezpieczeń. Premie brutto określa praktyka na podstawie teoretycznie obliczonych premij netto i wysokości różnych wydatków, bezpośrednio z prowadzeniem instytucyi związanych.

Zasadniczą podstawą obliczania premij netto jest prawo gier równoważnych (art. 14), według którego—po przełożeniu go na język ubezpieczeniowy—wartość matematyczna wnoszonych przez ubezpieczonego premij powinna być równą wartości matematycznej ubezpieczonych sum. Wynika stąd ogólne prawidło na obliczanie premij netto: Należy oznaczyć wartość matematyczną mających się przez ubezpieczonego wnieść premij, zrównać ją z wartością matematyczną sum ubezpieczonych i z tak ułożonego równania obliczyć wysokość szukanych premij.

Jeżeli premia jest jednorazową, wtedy, oczywiście, wysokość jej reprezentuje wartość zobowiązań instytucyi względem ubezpieczonej osoby, obliczoną na chwilę zawarcia umowy.

Premie netto mieszczą w sobie tę samą treść, co stawki w grze równoważnej, t. j. starczą na pokrycie zobowiązań względem osób ubezpieczonych o tyle, o ile instytucya posiada dostatecznie wielką liczbę ubezpieczeń oraz o ile przyjęta za podstawę tablica śmiertelności dokładnie przedstawia rzeczywistą śmiertelność osób ubezpieczonych. O warunkach tych nigdy zapominać nie trzeba, stanowią one bowiem fundament, na którym spoczywa cały gmach rachunkowej teoryi ubezpieczeń życiowych. Ponieważ zaś żadnemu z obu powyższych warunków najczęściej nie staje się zadość, przeto instytucye ubezpieczeniowe zniewolone są z dodatków do premij netto odkładać pewne fundusze zapasowe, przeznaczone na pokrywanie tych strat, jakie mogą wyniknąć z braku potrzebnej ścisłości. Wysokość nagromadzonych zapasów może do pewnego stopnia służyć za miarę wytrzymałości instytucyi.

Dla krótkości, premie netto nazywać będziemy jednym wyrazem „premie”, podczas gdy premie brutto określać będziemy złożonym terminem „premie brutto”.

W wykładzie naszym, przy wyprowadzaniu wzorów, za wysokość ubezpieczonych sum zawsze przyjmować będziemy jednostkę, znając bowiem premię za ubezpieczenie jednostki, łatwo—przez proste mnożenie—przejść można do premij za dowolną liczbę ubezpieczonych jednostek.

Wreszcie rozumowań naszych nie będziemy opierali na pojęciu prawdopodobieństwa, jak to czyniliśmy w art. 39, 40 i 44, lecz—trzymając się użytej przez Zillmera metody — na liczbie osób ubezpieczonych, albowiem tą drogą prowadzone rozumowania wychodzą o wiele przejrzyściej i mogą być dobrze zrozumiane nawet przez osoby mniej w matematyce biegłe.

47. OKREŚLENIE I PODZIAŁ RENT. — ZNAKOWANIE. Ubezpieczeniem renty nazywa się umowa, zawarta pomiędzy osobą A, a instytucyą resp. towawarzystwem ubezpieczeń życiowych, mocą której wzamian za wniesioną przez osobę A jednorazowo sumę lub za wnoszone peryodycznie przez czas pewien premie, zobowiązuje się towarzystwo również przez czas pewien wypłacać peryodycznie osobie A po pewnej stałej lub zmiennej (według umówionego prawa) kwocie pieniędzy, z tem zastrzeżeniem, że zobowiązanie towarzystwa ustaje z chwilą śmierci osoby A, bez względu na jaki przeciąg czasu umowa zawartą została.

Kwoty pod powyższymi warunkami wypłacane przez towarzystwo osobie A nazywają się rentami, a sama osoba — rentierem.

Renta może być wypłacaną tylko peryodycznie (nie jednorazowo) i może być stałą lub zmienną według danego prawa, może być np. stale rosnącą, stale malejącą lub t. p. Może być wypłacaną rocznie, półrocznie, kwartalnie, albo miesięcznie i wtedy przybiera nazwę renty rocznej, półrocznej, kwartalnej, albo miesięcznej.

Zależnie od czasu, przez jaki renta się wypłaca, oraz od chwili, od jakiej towarzystwo rentę wypłacać zaczyna, renta dzieli się na rozmaite rodzaje:

Renta dożywotnia (Leibrente, — Rente v. Annuité viagère, — Whole life annuity) jest taką, którą towarzystwo wypłaca osobie ubezpieczonej przez całe jej życie, czyli, że rentę przerywa tylko śmierć rentiera.

Renta czasowa (Aufhörende oder temporäre Leibrente, — Rente temporaire, — Temporary annuity) wypłaca się tylko przez czas z góry ściśle oznaczony lub do śmierci rentiera, jeżeli ta przed oznaczonym terminem nastąpi.

Każda z tych rent może być:

Natychmiastową (Sofortige Leibrente, — Rente viagère immédiate, — Annuity immediate), gdy towarzystwo zaczyna wypłacać rentę zaraz po zawarciu umowy. Rentę natychmiastową, oczywiście, nabyć można tylko za pośrednictwem premii jednorazowej; albo

Odroczoną (Aufgeschobene Leibrente, — Rente viagère différée, — Annuity deferred), którą dopiero po upływie pewnego czasu towarzystwo zaczyna wypłacać - o ile wówczas jeszcze osoba ubezpieczona żyje. Ten rodzaj renty może być ubezpieczony i za pośrednictwem premij peryodycznych.

Niezależnie od rodzaju, każda renta może być płatną z góry (praenumerando), albo z dołu (postnumerando).

Ponieważ, jak to z określenia renty wynika, instytucyi bynajmniej nie zależy na tem, aby rentier żył długo, przeto obojętny dla niej jest stan zdrowia ubezpieczającego się; skutkiem tego życzący sobie ubezpieczyć rentę nie bywają poddawani badaniu lekarskiemu. Doboru jednak dokonywają sami ubezpieczeni w ten sposób, że tylko czujący się zdrowymi nabywają renty. Wynikają stąd dla instytucyj ubezpieczeniowych, przy nieodpowiednich tablicach śmiertelności, straty i ta okoliczność stanowi przyczynę, z powodu której niemieccy i angielscy specyaliści, w ostatnich czasach, tak gorliwie zajęli się sprawą ułożenia nowych tablic, przeznaczonych specyalnie do obliczania wartości rent. Francya taką tablicę już posiada i tę pomieściliśmy w naszym zbiorze (Tabl. III, kol. 23).

Wartość jednostki renty dożywotniej, natychmiast z góry rocznie płatnej osobie posiadającej x lat w chwili zawierania umowy, oznaczać będziemy symbolem R_x.

Liczbę lat, na jaką renta jest odroczoną, oznaczać będziemy przez n, pomieszczone na dole z lewej strony głoski R, np. ${}_n\mathrm{R}_x$. Ponieważ renta dożywotnia natychmiastowa, płatna rocznie z dołu, w gruńcie rzeczy jest odroczoną na rok jeden, przeto symbolem tej ostatniej będzie ${}_1\mathrm{R}_x$; za symbol renty płaconej z dołu kwartalnie przyjmiemy ${}_{\frac{1}{4}}\mathrm{R}_x$ i t. d. Brak znaczka $({}_1)$ lub ułamkowego z lewej strony na dole wskazuje, że renta wypłaca się z góry.

Liczbę lat, po upływie których, licząc od chwili zawarcia umowy, przestajemy płacić rentę czasową, oznaczać będziemy znaczkiem, pomieszczonym u góry po stronie lewej głoski R. Tym sposobem symbolem wartości matematycznej renty czasowej, natychmiast z góry, np. przez N lat płatnej rocznie, będzie ${}^{\mathrm{N}}\mathrm{R}_x$, płatnej rocznie z dołu ${}^{\mathrm{N}}_1\mathrm{R}_x$, płatnej kwartalnie z dołu ${}^{\mathrm{N}}_{\frac{1}{4}}\mathrm{R}_x$. Symbolem renty czasowej, odroczonej na n lat, płatnej z góry rocznie, jest ${}^{\mathrm{N}}_n\mathrm{R}_x$, płatnej z dołu ${}^{\mathrm{N}}_{n,1}\mathrm{R}_x$; obie ostatnie renty widocznie będą płacone przez lat $\mathrm{N}-n$.

Na oznaczenie jednostki renty rocznej, płatnej po $\frac{1}{m}$ jednostki w ratach co m-a część roku, używać będziemy symbolu $\left(\frac{m}{m}\right)$, pomieszczonego u góry z prawej strony głoski R. Tak np. symbolem dla renty czasowej odroczonej, płatnej z dołu po $\frac{1}{4}$ jednostki co kwartał, będzie

$${}^{\mathrm{N}}_{n,\frac{1}{4}}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{4}{4}\right)};$$

symbolem takiej samej renty płatnej z góry jest ${}^{\mathrm{N}}_n\mathrm{R}_x^{\left(\frac{4}{4}\right)}$

Ponieważ premia jednorazowa, jak wiemy z art. 46, jest wartością matematyczną renty, zatem rzeczoną premię oznaczać będziemy takim samym symbolem jak wartość matematyczną renty. Co się zaś tyczy premij peryodycznych, to do ich oznaczenia użyjemy głoski p, pisząc przy niej, w nawiasie, symbol odpowiedniej renty. Gdy premia peryodyczna ma się płacić w ratach mniejszych od rocznych, dodawać będziemy, na dole z lewej strony głoski p, znaczek $\left(\frac{\mu}{\mu}\right)$, jeżeli premie płacą się co μ-a część roku; brak takiego znaczka symbolizuje premie płatne rocznie.

Liczbę lat, przez jaką mają być premie peryodyczne płacone, określać będziemy znaczkiem, pomieszczonym u góry z lewej strony głoski p.

Np. symbolem premij kwartalnych, płaconych przez lat l, za ubezpieczenie renty czasowej, odroczonej na n lat, i płatnej z dołu przez lat $\mathrm{N}-n$ w ratach $\frac{1}{2}$ rocznych, osobie mającej w chwili zawierania umowy x lat, jest

$${}^{l}_{\frac{4}{4}}p\left[{}^{\mathrm{N}}_{n,\frac{1}{2}}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{2}{2}\right)}\right].$$

Wszelkie premie, zarówno jednorazowe jak i peryodyczne, płacą się zawsze z góry.

48. Wartość renty dożywotniej natychmiastowej, płatnej rocznie. Obliczmy premię jednorazową, czyli wartość teraźniejszą 1-ki renty natychmiastowej, płaconej, z góry rocznie aż do śmierci, osobie liczącej x lat w chwili zawierania umowy. Wysokość szukanej premii jednorazowej, zgodnie z poprzednim artykułem, oznaczmy symbolem R_x.

Wyobraźmy sobie taką liczbę λ_x osób x letnich, jaka się znajduje w tablicy śmiertelności, i przypuśćmy, że wszystkie te osoby zabezpieczają sobie powyżej określoną rentę dożywotnią.

Każda z pomienionych osób wnosi jednorazowo kwotę R_x, zatem λ_x osób wnosi $\lambda_x . R_x$; jest to teraźniejsza wartość dochodu instytucyi.

Wzamian za to instytucya wypłaca, zaraz po zawarciu umowy, każdej osobie po jednostce renty; λ_x osobom wypłaca zatem instytucya λ_x jednostek i to jest wartością teraźniejszą pierwszej wypłaty.

Po roku pozostaje przy życiu λ_{x+1} osób, każda otrzymuje po 1-ce; tym wszystkim żyjącym osobom wypłaci instytucya po roku λ_{x+1} jednostek, które w chwili zawierania umowy posiadają wartość $\lambda_{x+1} . \rho$.

Drogą podobnego rozumowania przekonać się łatwo, że teraźniejszemi wartościami wypłat, mających nastąpić po 2-ch, 3-ch i t. d. latach, są $\lambda_{x+2}\rho^2$, $\lambda_{x+3}\rho$ i t. d. aż do końca tablicy śmiertelności.

Suma wartości rzeczonych wypłat powinna być równa wartości dochodu instytucyi, t. j.

$$\lambda_x . R_x = \lambda_x + \lambda_{x+1}\rho + \lambda_{x+2}\rho^2 + \lambda_{x+3}\rho^3 + \ldots, \text{ skąd}$$

$$(\alpha) \qquad R_x = \frac{\lambda_x + \lambda_{x+1}\rho + \lambda_{x+2}\rho^2 + \lambda_{x+3}\rho^3 + \ldots}{\lambda_x}.$$

Licznik i mianownik strony drugiej pomnóżmy przez ρ^x, wtedy będzie

$$R_x = \frac{\lambda_x\rho^x + \lambda_{x+1}\rho^{x+1} + \lambda_{x+2}\rho^{x+2} + \ldots}{\lambda_x\rho^x} = \frac{v_x + v_{x+1} + v_{x+2} + v_{x+3} + \ldots}{v_x},$$

czyli

$$(112) \qquad R_x = \frac{\Sigma v_x}{v_x}.$$

Zakładając np. $x = 30$, otrzymujemy, z tabl. IX, kol. 5 i 4, na wartość 1-ki renty dożywotniej, płatnej rocznie z góry osobie 30-o letniej,

$$R_{30} = \frac{593\,788{,}92}{30\,743{,}98} = 19{,}31399.$$

W podobny sposób można obliczyć wartość 1-ki renty dla każdego wieku, dzieląc liczby kol. 5 (tabl. IX) przez obok stojące liczby kol. 4, i otrzymać tablicę wartości rent dożywotnich, jakiej przykład podajemy w tabl. X, kol. 1.

Znając wartość 1-ki renty, łatwo obliczyć można wartość renty dowolnie wysokiej. Np. wartość rocznej renty w wysokości 600 fr., dla 30-o letniej osoby, wynosi

$$19{,}31399 \times 600 = 11588{,}39 \text{ fr.}$$

Wartość renty rocznej z dołu płatnej różni się od płatnej z góry o 1-kę wypłaconą zaraz po zawarciu umowy, a więc

(113) $${}_1\mathrm{R}_x = \mathrm{R}_x - 1, \text{ stąd}$$

(112′) $$\mathrm{R}_x = {}_1\mathrm{R}_x + 1.$$

Podstawiwszy w (113) za R_x wyrażenie ze wzoru (112) i $\frac{v_x}{v_x}$ za 1-śé, otrzymujemy

(113′) $${}_1\mathrm{R}_x = \frac{\Sigma v_{x+1}}{v_x},$$

które to wyrażenie możńaby wyprowadzić wprost, opuszczając w (α) pierwszy wyraz licznika.

Dla osoby 30-o letniej, ze wzoru (113),

$${}_1\mathrm{R}_{30} = 19{,}31399 - 1 = 18{,}31399;$$

ze wzoru (113′)

$${}_1\mathrm{R}_{30} = \frac{\Sigma v_{31}}{v_{30}} = \frac{563044{,}94}{30743{,}98} = 18{,}31399.$$

Ażeby otrzymać wartość rent płatnych z dołu przez dzielenie liczb postawionych obok siebie w tablicach pomocniczych, matematycy angielscy podnoszą liczby kol. 5-ej o jeden wiersz ku górze (*).

49. WARTOŚĆ RENTY DOŻYWOTNIEJ, PŁATNEJ NATYCHMIAST W RATACH MNIEJSZYCH OD ROCZNYCH. — WZÓR DAVIES-MALMSTEN'A. Załóżmy teraz, że renta wypłaca się z góry, ale nie rocznie, tylko co m-a część roku po $\frac{1}{m}$ jednostki.

Dla wyprowadzenia wzoru na wartość w taki sposób płaconej renty, potrzebaby znać śmiertelność osób co m-a część roku. Takich danych tablice śmiertelności nam nie dostarczają, uciec się więc trzeba do przypuszczenia, skutkiem czego i wyprowadzony wzór nie będzie zupełnie ścisły, tylko przybliżony.

Najprostszem przypuszczeniem jest, że śmiertelność rozkłada się jednostajnie na cały rok, t. j. że w ciągu m-ej części roku umiera m-a część zmarłych w ciągu całego roku. Jeżeli więc na początku roku żyje λ_x osób x letnich,

---

(*) Układ Griffith Davies'a (art. 45).

a z tych po roku pozostaje przy życiu λ_{x+1}, czyli w ciągu roku umiera $\lambda_x-\lambda_{x+1}$, to w ciągu każdej m-ej części roku umiera osób $\frac{\lambda_x-\lambda_{x+1}}{m}$. Zatem:

w wieku x lat żyje osób $\lambda_x = \frac{m\lambda_x}{m}$,

„ $x+\frac{1}{m}$ „ $\lambda_x-\frac{1}{m}(\lambda_x-\lambda_{x+1})=\frac{(m-1)\lambda_x+\lambda_{x+1}}{m}$,

„ $x+\frac{2}{m}$ „ $\lambda_x-\frac{2}{m}(\lambda_x-\lambda_{x+1})=\frac{(m-2)\lambda_x+2\lambda_{x+1}}{m}$,

i t. d.

„ $x+\frac{m-2}{m}$ „ $\lambda_x-\frac{m-2}{m}(\lambda_x-\lambda_{x+1})=\frac{2\lambda_x+(m-2)\lambda_{x+1}}{m}$,

„ $x+\frac{m-1}{m}$ „ $\lambda_x-\frac{m-1}{m}(\lambda_x-\lambda_{x+1})=\frac{\lambda_x+(m-1)\lambda_{x+1}}{m}$.

W taki sam sposób rozkłada się liczba żyjących w każdym innym roku życia.

Otóż każda osoba, żyjąca na początku roku, otrzymuje $\frac{1}{m}$ rocznej renty (jednostki), λ_x osób otrzymuje

$$\frac{1}{m}\lambda_x=\frac{m\lambda_x}{m^2}.$$

Po upływie m-ej części roku, żyje osób $\frac{(m-1)\lambda_x+\lambda_{x+1}}{m}$, każda otrzymuje $\frac{1}{m}$ jednostki, wszystkim razem wypłaca się

$\frac{(m-1)\lambda_x+\lambda_{x+1}}{m^2}$, co na początku roku jest warte $\frac{(m-1)\lambda_x+\lambda_{x+1}}{m^2}\cdot\rho^{\frac{1}{m}}$.

Wartość rent, mających się wypłacić po $\frac{2}{m}$ roku, wynosi na początku roku $\frac{(m-2)\lambda_x+2\lambda_{x+1}}{m^2}\cdot\rho^{\frac{2}{m}}$ i t. d. do końca roku.

Wartość wszystkich wypłat w ciągu roku równa się sumie wartości powyższych wypłat częściowych, t. j.

$$=\frac{m\lambda_x}{m^2}+\frac{(m-1)\lambda_x+\lambda_{x+1}}{m^2}\cdot\rho^{\frac{1}{m}}+\frac{(m-2)\lambda_x+2\lambda_{x+1}}{m^2}\rho^{\frac{2}{m}}+\dots$$

$$\dots+\frac{\lambda_x+(m-1)\lambda_{x+1}}{m^2}\rho^{\frac{m-1}{m}}$$

$$=\frac{\lambda_x}{m^2}\left[m+(m-1)\rho^{\frac{1}{m}}+(m-2)\rho^{\frac{2}{m}}+\dots+\rho^{\frac{m-1}{m}}\right]+$$

$$+\frac{\lambda_{x+1}}{m^2}\left[\rho^{\frac{1}{m}}+2\rho^{\frac{2}{m}}+3\rho^{\frac{3}{m}}+\dots+(m-1)\rho^{\frac{m-1}{m}}\right].$$

Gdy, dla krótkości, oznaczymy wyrażenie w pierwszej klamrze przez A, w drugiej klamrze przez B, wyrażenie na wartość teraźniejszą wypłat, mających się uskutecznić w ciągu 1-go roku, da się napisać w kształcie

$$\frac{\lambda_x}{m^2}\,\mathrm{A}+\frac{\lambda_{x+1}}{m^2}\,\mathrm{B}.$$

Podobnie, wartość wypłat dokonać się mających w ciągu 2-go roku, obliczona na początek tegoż roku, wynosi

$$\frac{\lambda_{x+1}}{m^2}\,\mathrm{A}+\frac{\lambda_{x+2}}{m^2}\,\mathrm{B},$$

a ta sama wartość, obliczona na początek 1-go roku, równa się

$$\frac{\lambda_{x+1}}{m^2}\,\rho\mathrm{A}+\frac{\lambda_{x+2}}{m^2}\,\rho\mathrm{B}.$$

Wartość wypłat dokonywanych w ciągu 3-go roku, sprowadzona do początku 1-go roku, wyraża się przez

$$\frac{\lambda_{x+2}}{m^2}\,\rho^2\mathrm{A}+\frac{\lambda_{x+3}}{m^2}\,\rho^2\mathrm{B}$$

i t. d. do końca tablicy śmiertelności.

Suma powyższych wyrażeń przedstawia teraźniejszą wartość rent płaconych z góry λ_x osobom, w ratach co m-a część roku po $\frac{1}{m}$ jednostki, t. j.

$$\lambda_x.\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}=\left(\frac{\lambda_x}{m^2}\,\mathrm{A}+\frac{\lambda_{x+1}}{m^2}\,\mathrm{B}\right)+\left(\frac{\lambda_{x+1}}{m^2}\,\rho\mathrm{A}+\frac{\lambda_{x+2}}{m^2}\,\rho\mathrm{B}\right)+$$

$$\left(\frac{\lambda_{x+2}}{m^2}\,\rho^2\mathrm{A}+\frac{\lambda_{x+3}}{m^2}\,\rho^2\mathrm{B}\right)+\ldots$$

Stąd

$$\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}=\frac{\mathrm{A}}{m^2}\left(\frac{\lambda_x+\lambda_{x+1}\rho+\lambda_{x+2}\rho^2+\ldots}{\lambda_x}\right)+\frac{\mathrm{B}}{m^2}\left(\frac{\lambda_{x+1}+\lambda_{x+2}\rho+\lambda_{x+3}\rho^2+\ldots}{\lambda_x}\right).$$

Że zaś

$$\frac{\lambda_x+\lambda_{x+1}\rho+\lambda_{x+2}\rho^2+\ldots}{\lambda_x}=\frac{\lambda_x\rho^x+\lambda_{x+1}\rho^{x+1}+\lambda_{x+2}\rho^{x+2}+\ldots}{\lambda_x\rho^x}=\frac{\Sigma v_x}{v_x}=\mathrm{R}_x,$$

$$\frac{\lambda_{x+1}+\lambda_{x+2}\rho+\lambda_{x+3}\rho^2+\ldots}{\lambda_x}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\lambda_{x+1}\rho^{x+1}+\lambda_{x+2}\rho^{x+2}+\lambda_{x+3}\rho^{x+3}+\ldots}{\lambda_x\rho^x}$$

$$=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\Sigma v_{x+1}}{v_x}=\frac{1}{\rho}\cdot{}_1\mathrm{R}_x=\frac{1}{\rho}\cdot(\mathrm{R}_x-1),$$

przeto

$$(\alpha)\qquad\left\{\begin{aligned}&\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}=\frac{\mathrm{A}}{m^2}\,\mathrm{R}_x+\frac{\mathrm{B}}{m^2\rho}(\mathrm{R}_x-1)=\\&=\frac{\mathrm{A}\rho+\mathrm{B}}{m^2\rho}\,\mathrm{R}_x-\frac{\mathrm{B}}{m^2\rho}=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}r}{m^2}\,\mathrm{R}_x-\frac{\mathrm{B}r}{m^2}.\end{aligned}\right.$$

Należy teraz oznaczyć A i B:

$$A = m + (m-1)\rho^{\frac{1}{m}} + (m-2)\rho^{\frac{2}{m}} + \ldots + \rho^{\frac{m-1}{m}},$$

$$B = \rho^{\frac{1}{m}} + 2\rho^{\frac{2}{m}} + 3\rho^{\frac{3}{m}} + \ldots + (m-1)\rho^{\frac{m-1}{m}},$$ albo inaczej

$$B = \frac{1}{r^{\frac{m-1}{m}}}\left[r^{\frac{m-2}{m}} + 2r^{\frac{m-3}{m}} + \ldots + (m-1)\right].$$

Wyrażenia te są podobne (art 37) do

$$\sigma = r^{n-2} + 2r^{n-3} + 3r^{n-4} + \ldots + (n-2)r + (n-1),$$

potrzeba tylko w σ, dla otrzymania A, podstawić $n - 1 = m$, skąd $n = m+1$ i $r = \rho^{\frac{1}{m}}$. Jeżeli te podstawienia wprowadzimy we wzór (β) art. 37, wypadnie

$$A = \frac{1}{\rho^{\frac{1}{m}} - 1}\left(\rho^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{\rho - 1}{\rho^{\frac{1}{m}} - 1} - m\right),$$

albo, ponieważ $\rho = \frac{1}{r}$,

$$A = \frac{1}{\frac{1}{r^{\frac{1}{m}}} - 1}\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{m}}} \cdot \frac{\frac{1}{r} - 1}{\frac{1}{r^{\frac{1}{m}}} - 1} - m\right)$$

$$= \frac{r^{\frac{1}{m}}}{1 - r^{\frac{1}{m}}}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{1 - r}{1 - r^{\frac{1}{m}}} - m\right) = \frac{r^{\frac{1}{m}}}{r^{\frac{1}{m}} - 1}\left(m - \frac{1}{r} \cdot \frac{r - 1}{r^{\frac{1}{m}} - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{r}{r^{\frac{1}{m}}}\left(r^{\frac{1}{m}} - 1\right)}\left(mr - \frac{r - 1}{r^{\frac{1}{m}} - 1}\right) = \frac{1}{r^{\frac{m-1}{m}}\left(r^{\frac{1}{m}} - 1\right)}\left(\frac{m.r^{\frac{m+1}{m}} - mr - r + 1}{r^{\frac{1}{m}} - 1}\right);$$

ostatecznie

$$(\beta) \qquad A = \frac{1}{r^{\frac{m-1}{m}}\left(r^{\frac{1}{m}} - 1\right)^2} \cdot \left[m.r^{\frac{m+1}{m}} - (m+1)r + 1\right].$$

Dla otrzymania B, trzeba w σ podstawić $r^{\frac{1}{m}}$ za r i m za n, nadto rezultat pomnożyć przez $\frac{1}{r^{\frac{m-1}{m}}}$.

Wtedy z (β) art. 37 wypada

$$B = \frac{1}{r^{\frac{m-1}{m}}}\left\{\frac{1}{r^{\frac{1}{m}}-1}\left[r^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{r^{\frac{m-1}{m}}-1}{r^{\frac{1}{m}}-1} - (m-1)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{r^{\frac{m-1}{m}}\left(r^{\frac{1}{m}}-1\right)^2} \cdot \left(r - r^{\frac{1}{m}} - (m-1)r^{\frac{1}{m}} + (m-1)\right);$$

ostatecznie

$$(\gamma) \qquad B = \frac{1}{r^{\frac{m-1}{m}}\left(r^{\frac{1}{m}}-1\right)^2} \cdot \left(r - mr^{\frac{1}{m}} + m - 1\right).$$

Stąd

$$(\delta) \qquad A + Br = \frac{(r^2-2r+1)}{r^{\frac{m-1}{m}}\left(r^{\frac{1}{m}}-1\right)^2} = \frac{(r-1)^2}{r^{\frac{m-1}{m}}\left(r^{\frac{1}{m}}-1\right)^2} = \frac{1}{r^{\frac{m-1}{m}}} \cdot \left\{\frac{r-1}{r^{\frac{1}{m}}-1}\right\}^2.$$

Podstawiwszy (δ) i (γ) w (α), otrzymujemy

$$R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = \frac{1}{m^2 r^{\frac{m-1}{m}}}\left\{\frac{r-1}{r^{\frac{1}{m}}-1}\right\}^2 R_x - \frac{r}{m^2 r^{\frac{m-1}{m}}\left(r^{\frac{1}{m}}-1\right)^2}\left(r - mr^{\frac{1}{m}} + m - 1\right),$$

albo

$$(114) \quad R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = \frac{1}{m^2 r^{\frac{m-1}{m}}} \cdot \frac{(r-1)^2}{\left(r^{\frac{1}{m}}-1\right)^2} R_x - \frac{r^{\frac{1}{m}}}{m^2\left(r^{\frac{1}{m}}-1\right)^2} \cdot \left(r - mr^{\frac{1}{m}} + m - 1\right).$$

Jest to wzór znany pod nazwą wzoru Davies-Malmsten'a, ścisły o tyle, o ile śmiertelność roczna rozkłada się jednostajnie na rok cały.

Zakładając kolejno: przy $m = 2, 4, 12$; $r = 1{,}03$; $1{,}035$; $1{,}04$; $1{,}045$; $1{,}0475$ i $1{,}05$, spółczynniki wzoru (114) przybierają następujące wartości

	$\frac{1}{m^2 r^{\frac{m-1}{m}}} \cdot \frac{(r-1)^2}{\left(r^{\frac{1}{m}}-1\right)^2}$			$\frac{r^{\frac{1}{m}}.}{m^2\left(r^{\frac{1}{m}}-1\right)^2} \cdot \left(r - mr^{\frac{1}{m}} + m - 1\right)$		
$m =$	2	4	12	2	4	12
r=1,03	1,000 055	1,000 061	1,000 072	0,253 72	0,379 65	0,463 26
r=1,035	1,000 074	1,000 091	1,000 099	0,254 34	0,380 42	0,464 08
r=1,04	1,000 096	1,000 122	1,000 127	0,254 95	0,381 19	0,464 89
r=1,045	1,000 121	1,000 151	1,000 160	0,255 56	0,381 96	0,465 70
r=1,0475	1,000 135	1,000 169	1,000 178	0,255 87	0,382 34	0,466 10
r=1,05	1,000 149	1,000 187	1,000 197	0,256 17	0,382 73	0,466 51

Zwracamy jednak uwagę, że wartości spółczynników obliczane być winny z wielką ścisłością; logarytmy 7-o cyfrowe tu nie wystarczają, użyć trzeba więcej cyfrowych. Podane przez nas liczby zaczerpnęliśmy z dzieł Zillmera i Maleszewskiego, sami obliczyliśmy tylko cztery: dla $m = 12$ przy $r = 1{,}03$ i 1,035, posiłkując się 27-o cyfrowymi logarytmami Fedor Thoman'a (*).

Z przytoczonej tabelki okazuje się, że spółczynnik przy R_x, przy różnych wartościach na m i r, jest bardzo blizki jedności, a drugi wyraz strony prawej wzoru (114) nieznacznym tylko ulega zmianom przy różnych wartościach r. Skutkiem tego, dla praktyki, starczą wartości otrzymane przy założeniu $r = 1$. Wtedy, za pomocą analizy matematycznej, można wzorowi (114) nadać bardzo prosty kształt

(115) $$R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = R_x - \frac{m-1}{2m},$$

skąd na wartość renty płaconej z góry:

w ratach $\frac{1}{2}$ rocznych po $\frac{1}{2}$ wypada $R_x^{\left(\frac{2}{2}\right)} = R_x - 0{,}25$

" kwartalnych " $\frac{1}{4}$ " $R_x^{\left(\frac{4}{4}\right)} = R_x - 0{,}375$

" miesięcznych " $\frac{1}{12}$ " $R_x^{\left(\frac{12}{12}\right)} = R_x - 0{,}458\,333\ldots$

Jeżeli renta ma być płacona z dołu w ratach po $\frac{1}{m}$ jednostki co m-a część roku, dość jest od wartości renty z góry płatnej odjąć $\frac{1}{m}$, t. j.

(ε) $${}_{\frac{1}{m}}R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} - \frac{1}{m}.$$

Podstawiając w (ε) za $R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}$ wartość ze wzoru (115), otrzymujemy

(116) $${}_{\frac{1}{m}}R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = R_x - \frac{m+1}{2m},$$

albo, ponieważ $R_x = {}_1R_x + 1$,

(116') $${}_{\frac{1}{m}}R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = {}_1R_x + \frac{m-1}{2m},$$ czyli na wartość renty płaconej z dołu:

w ratach $\frac{1}{2}$ rocznych po $\frac{1}{2}$ wypada ${}_{\frac{1}{2}}R_x^{\left(\frac{2}{2}\right)} = {}_1R_x + 0{,}25$

" kwartalnych " $\frac{1}{4}$ " ${}_{\frac{1}{4}}R_x^{\left(\frac{4}{4}\right)} = {}_1R_x + 0{,}375$

" miesięcznych " $\frac{1}{12}$ " ${}_{\frac{1}{12}}R_x^{\left(\frac{12}{12}\right)} = {}_1R_x + 0{,}458\,333\ldots$

(*) „Tables des logarithmes à 27 décimales, pour les calculs de précision", par M. Fédor Thoman. Paryż, 1867.

Liczebne wartości wyżej podanych rent, dla osoby 30-o letniej, są następujące:

$$R_{30}^{\left(\frac{2}{2}\right)}=19{,}31399-0{,}25 \quad =19{,}06399;\ {}_{\frac{1}{2}}R_{30}^{\left(\frac{2}{2}\right)}=18{,}31399+0{,}25 \quad =18{,}56399$$

$$R_{30}^{\left(\frac{4}{4}\right)}=19{,}31399-0{,}375 \quad =18{,}93899;\ {}_{\frac{1}{4}}R_{30}^{\left(\frac{4}{4}\right)}=18{,}31399+0{,}375 \quad =18{,}68899$$

$$R_{30}^{\left(\frac{12}{12}\right)}=19{,}31399-0{,}45833=18{,}85566;\ {}_{\frac{1}{12}}R_{30}^{\left(\frac{12}{12}\right)}=18{,}31399+0{,}45833=18{,}77232.$$

Tak np. wartość renty dożywotniej, płatnej natychmiast z dołu, kwartalnie po 250 fr., osobie 30-o letniej, równa się

$$18{,}68899 \times 250 \times 4 = 18688{,}99 \text{ fr.}$$

Gdybyśmy do tego przypadku zastosowali wzór (114), wypadłoby

$$(1{,}000091 \times 19{,}31399 - 0{,}38042 - 0{,}25) \times 1000 = 18685{,}33,$$

t. j. wartość bardzo mało (o 3,66 fr.) od poprzedniej różna.

Przybliżone wzory (115) i (116) można napisać w kształcie

$$R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = R_x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2m} \quad \text{i} \quad {}_{\frac{1}{m}}R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = R_x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}.$$

Pokazuje się z nich, że wartość renty płatnej z góry jest tem mniejsza, a płatnej z dołu — tem większa, im raty są drobniejsze; jednak ani jednej, ani drugiej wartość, o ile poprzestajemy na wzorach (115) i (116), nie może ani spaść, ani przejść po za granicę $R_x - \frac{1}{2}$, gdyż takie otrzymujemy wyrażenie, zakładając w (115) i (116) $m = \infty$, t. j. przyjmując, że raty wypłacają się w nieskończenie krótkich odstępach czasu i w nieskończenie małych ilościach. W taki sposób wypłacana renta nazywa się rentą ciągłą.

Dla $x = 30$

$$R_{30}^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} = {}_{\frac{1}{\infty}}R_{30}^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} = 19{,}31399 - 0{,}5 = 18{,}31399 + 0{,}5 = 18{,}81399.$$

Przyczynę zmian, zachodzących w wartości renty skutkiem rozdrabniania rat, łatwo sobie objaśnić można. Albowiem, gdy renta wypłaca się rocznie z góry, ubezpieczony otrzymuje całoroczną ratę za rok, w którym umarł, podczas gdy, przy kwartalnej np. wypłacie renty, całkowitej raty za pomieniony rok nie otrzyma, jeżeli umrze w I, II lub III kwartale; słusznie więc w tym drugim razie wartość renty jest mniejsza.

Naodwrót, gdy renta jest płatna z dołu rocznie, ubezpieczony nie otrzyma wcale raty za rok, w którym umarł; tymczasem, gdy renta jest płacona z dołu kwartalnie, może otrzymać część raty rocznej za ten rok, w którym śmierć nastąpi, mianowicie, jeżeli umrze w II, III lub IV kwartale; dla tego wartość kwartalnie z dołu płatnej renty powinna być i jest większa od płaconej rocznie z dołu.

50. Wartość renty dożywotniej natychmiastowej, z wypłatą ostatniej raty ściśle do chwili śmierci rentiera. Widzieliśmy, że gdy renta jest płacona peryodycznie z góry, np. raz na rok, rentier otrzyma ratę za cały rok, w którym śmierć jego nastąpi — pomimo, że żyć będzie najprawdopodobniej tylko część roku. Gdy renta wypłaca się rocznie z dołu, zmarły nic nie otrzyma za przeżytą część ostatniego roku.

Chodzi nam teraz o wartość takiej renty płatnej z dołu, w której po śmierci rentiera wypłaca się za ostatni rok taką część raty rocznej, jaką część ostatniego roku przeżyje rentier.

W tym celu oznaczmy najprzód wartość 1 ki renty dożywotniej, płatnej rocznie z dołu, ale pod warunkiem, że rentier żył na początku tego roku, za który rata ma być wypłaconą. Innemi słowy: pierwsza rata wypłaca się bezwarunkowo po upływie roku, od chwili zawarcia umowy; druga po 2-ch latach, jeżeli ubezpieczony żył na początku 2-go roku; trzecia po 3-ch latach, jeżeli ubezpieczony żył na początku 3-go roku i t. d., ostatnia przy końcu roku, w którym śmierć nastąpiła.

Pod takimi warunkami płacona renta różni się od renty płaconej z góry tem tylko, że każda rata wypłaca się o rok później; jej wartość zatem jest, widocznie, zdyskontowaną na rok jeden wartością zwyczajnej renty rocznej płatnej z góry, t. j. równa się

$$(\alpha)\qquad R_x \,.\, \rho = \frac{R_x}{r};$$

zaś od renty płaconej z dołu, której wartość równa się

$$(\beta)\qquad {}_1R_x = R_x - 1$$

różni się tylko o ostatnią, po śmierci rentiera mającą się wypłacić ratę. Wartość zatem tej ostatniej raty jest różnicą pomiędzy (α) i (β), czyli wynosi

$$(\gamma)\qquad \frac{R_x}{r} - R_x + 1 = 1 - \left(1 - \frac{1}{r}\right) R_x = 1 - \frac{r-1}{r} R_x.$$

Gdy ostatnia rata ma się płacić nie w wysokości 1-ki, tylko w takiej części, jaką część ostatniego roku przeżył ubezpieczony, to ponieważ, przy bardzo wielkiej liczbie ubezpieczonych osób i jednostajnem rozłożeniu się śmiertelności na cały rok, można przyjąć, że średnio umierają wszystkie osoby w połowie roku, ostatnia rata wynosić będzie przecięciowo na każdą osobę po $\frac{1}{2}$.

Jeżeli ta ostatnia rata, w wysokości $\frac{1}{2}$, ma się płacić przy końcu roku, w którym śmierć nastąpi, wówczas jej teraźniejsza wartość, na zasadzie (γ), wynosi

$$(\delta)\qquad \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r-1}{r} R_x\right),$$

a teraźniejsza wartość renty, płaconej z dołu aż do chwili śmierci ubezpieczonego, jest o (δ) mniejszą od (α) lub większą od (β), czyli równa się

$$\frac{\mathrm{R}_x}{r} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r - 1}{r}\,\mathrm{R}_x\right),\ \text{resp. } \mathrm{R}_x - 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r - 1}{r}\,\mathrm{R}_x\right),$$

albo jeszcze równa się połowie sumy obu powyższych wyrażeń, t. j. wynosi

$$(117) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{R}_x}{r} + \mathrm{R}_x - 1\right).$$

Jeżeli ostatnia rata, w wysokości $\frac{1}{2}$, ma być płaconą nie przy końcu roku, w którym śmierć nastąpi, lecz zaraz po śmierci ubezpieczonego, to — ze względu, iż wypłatę można przyjąć za dopełnianą przeciętnie w połowie roku — wypłata ostatniej raty uskuteczni się o $\frac{1}{2}$ roku wcześniej, a tem samem jej wartość będzie większa o $\frac{1}{2}$ roczny procent od wypłaty dopełnianej przy końcu roku, t. j. teraźniejsza wartość ostatniej wypłaty będzie równa

$$(\delta') \qquad \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r - 1}{r}\,\mathrm{R}_x\right) \cdot r^{\frac{1}{2}}.$$

Skutkiem tego wartość całej renty, płatnej po chwilę śmierci, wynosi

$$(117') \ \mathrm{R}_x - 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r - 1}{r}\,\mathrm{R}_x\right) r^{\frac{1}{2}} = \mathrm{R}_x \cdot \frac{2 - r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{2 - r^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Podobnie postępować trzeba, gdy renta jest płaconą nie rocznie, lecz w ratach po $\frac{1}{m}$ co m-a część roku.

Wartością renty płaconej po $\frac{1}{m}$ jednostki z dołu co m-a część roku, pod warunkiem, że na początku tej m-ej części roku, za którą ma być renta wypłacaną, ubezpieczony pozostawał przy życiu, jest

$$\frac{\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}}{r^{\frac{1}{m}}}.$$

Wartość podobnej renty, również z dołu płatnej, lecz z warunkiem, aby rentier pozostawał przy życiu w chwili płacenia raty, wynosi

$${}_{\frac{1}{m}}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = \mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} - \frac{1}{m}.$$

Stąd na wartość ostatniej raty omawianej renty wypada

$$\frac{\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}}{r^{\frac{1}{m}}} - \mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} + \frac{1}{m} = \frac{1}{m} - \frac{r^{\frac{1}{m}} - 1}{r^{\frac{1}{m}}}\,\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}.$$

Jeżeli więc ta ostatnia rata ma być płacona zaraz po śmierci ubezpieczonego, w takim stosunku, jaką część m-ej części roku przeżyje rentier do chwili śmierci, to — zakładając jednostajny rozkład śmiertelności w każdej m-ej części roku—szukana wartość renty, płaconej po $\frac{1}{m}$ co m-a część roku, aż po chwilę śmierci rentiera, wyraża się przez wzór

$$(118)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} - \frac{1}{m} + \frac{r^{\frac{1}{2m}}}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{r^{\frac{1}{m}} - 1}{r^{\frac{1}{m}}}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}\right) = \\ &= \mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} . \frac{2 - r^{\frac{1}{2m}} + r^{-\frac{1}{2m}}}{2} - \frac{2 - r^{\frac{1}{2m}}}{2m} . \end{aligned}\right.$$

Np. z pomieszczonego w art. 49 przykładu wiemy, że wartość renty dożywotniej, płatnej natychmiast z dołu w ratach kwartalnych po 250 fr., osobie 30-o letniej, równa się, według wzoru przybliżonego, 18688,99 fr.

Gdy więc renta ma być płaconą do chwili śmierci ubezpieczonego, jej wartość, na zasadzie wzoru (118), wynosi

$$\left[\mathrm{R}_{30}^{\left(\frac{4}{4}\right)} . \frac{2 - (1{,}035)^{\frac{1}{8}} + (1{,}035)^{-\frac{1}{8}}}{2} - \frac{2 - (1{,}035)^{\frac{1}{8}}}{8}\right] \times 250 \times 4 =$$

$$= 18733{,}09 \text{ fr.},$$

od zwyczajnej z dołu płatnej jest zatem większą o 44,10 fr.

51. Renta odroczona. Jeżeli renta zaczyna się wypłacać dopiero po upływie n lat, od chwili zawarcia umowy, wtedy renta, jak wiemy, nazywa się odroczoną (na n lat). Renta odroczona może być również płaconą z góry lub z dołu. Pierwsza rata renty płatnej z góry wypłaca się zaraz po upływie n lat; wypłata renty z dołu płatnej zaczyna się: przy rencie rocznej w rok później, przy rencie po $\frac{1}{m}$ co m-a część roku w m-ą część roku po upływie n lat.

Zacznijmy od renty płatnej rocznie z góry.

Z λ_x osób x letnich, ubezpieczonych na rentę odroczoną na n lat, otrzymają pierwszą roczną ratę tylko te osoby, które owe n lat przeżyją, jest ich λ_{x+n}; instytucya wypłaci im λ_{x+n} jednostek, które w chwili zawierania umowy są warte $\lambda_{x+n}.\rho^n$. W rok później płaci instytucya λ_{x+n+1} jednostek, teraźniejsza wartość tej wypłaty równa się $\lambda_{x+n+1}\rho^{n+1}$ i t. d. aż do wymarcia wszystkich.

Z drugiej strony, gdy teraźniejszą wartość renty odroczonej, resp. odnośną premię jednorazową oznaczymy przez ${}_n\mathrm{R}_x$, jednorazowy dochód instytucyi wyniesie ${}_n\mathrm{R}_x . \lambda_x$; powinno zatem być

$${}_n\mathrm{R}_x . \lambda_x = \lambda_{x+n}\rho^n + \lambda_{x+n+1}\rho^{n+1} + \lambda_{x+n+2}\rho^{n+2} + \ldots ,$$

skąd

$${}_n\mathrm{R}_x = \frac{\lambda_{x+n}\rho^n + \lambda_{x+n+1}\rho^{n+1} + \lambda_{x+n+2}\rho^{n+2} + \ldots}{\lambda_x} .$$

Mnożąc licznik i mianownik strony prawej przez ρ^x, wypada

$${}_n\mathrm{R}_x = \frac{\lambda_{x+n}\rho^{x+n} + \lambda_{x+n+1}\rho^{x+n+1} + \lambda_{x+n+2}\rho^{x+n+2} + \dots}{\lambda_x \rho^x} =$$

$$= \frac{v_{x+n} + v_{x+n+1} + v_{x+n+2} + \dots}{v_x};$$

albo, pisząc symbolicznie,

$$(119) \qquad {}_n\mathrm{R}_x = \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_x}.$$

Wartością np. 1-ki renty, albo jednorazową premią netto za ubezpieczenie, osobie 30-o letniej, 1-ki renty dożywotniej, odroczonej na lat 20, według tabl. IX, kol. 4 i 5, jest

$${}_{20}\mathrm{R}_{30} = \frac{175\,710{,}99}{30\,743{,}98} = 5{,}715\,30;$$

za ubezpieczenie 1 000 fr. rocznej renty

$$5{,}715\,30 \times 1\,000 = 5\,715{,}30 \text{ fr.}$$

Wzór (119) można napisać w kształcie

$$(119') \qquad {}_n\mathrm{R}_x = \frac{v_{x+n}}{v_x} \cdot \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_{x+n}} = \frac{v_{x+n}}{v_x} \cdot \mathrm{R}_{x+n},$$

t. j. wartość renty odroczonej na n lat równa się iloczynowi, powstałemu z pomnożenia wartości renty natychmiastowej, płatnej osobie o n lat starszej, przez stosunek zdyskontowanej liczby osób żyjących w chwili, gdy renta ma się zacząć płacić, do zdyskontowanej liczby osób żyjących w chwili zawierania umowy. Np.

$${}_{20}\mathrm{R}_{30} = \frac{12\,447{,}26}{30\,743{,}98} \times 14{,}116\,44 = 5{,}71530.$$

Wartość rocznej renty, odroczonej na lat n i płatnej z dołu, jest wartością renty odroczonej na lat $n + 1$ i płatnej z góry, czyli

$$(119'') \qquad {}_{n,1}\mathrm{R}_x = {}_{n+1}\mathrm{R}_x = \frac{\Sigma v_{x+n+1}}{v_x} = \frac{v_{x+n+1}}{v_x}\,\mathrm{R}_{x+n+1}.$$

Renta natychmiastowa z dołu płatna jest nie czem innem, jak tylko na rok odroczoną rentą płatną z góry; zakładając zatem w (119) $n = 1$, powinniśmy otrzymać ${}_1\mathrm{R}_x$. Tak jest rzeczywiście, albowiem z (119') mamy

$${}_1\mathrm{R}_x = \frac{v_{x+1}}{v_x} \cdot \frac{\Sigma v_{x+1}}{v_{x+1}} = \frac{v_x + \Sigma v_{x+1} - v_x}{v_x} = \frac{\Sigma v_x - v_x}{v_x} = \frac{\Sigma v_x}{v_x} - 1 = \mathrm{R}_x - 1,$$

t. j. wyrażenie zgodne ze wzorem (113).

Z wyrażenia

$${}_1\mathrm{R}_x = \mathrm{R}_x - 1 = \frac{v_{x+1}}{v_x}\,\mathrm{R}_{x+1}$$

otrzymujemy

$$(120)\qquad \begin{cases} R_x = 1 + \dfrac{v_{x+1}}{v_x} R_{x+1}, \\ R_{x+1} = \dfrac{v_x}{v_{x+1}} (R_x - 1). \end{cases}$$

Są to związki zachodzące pomiędzy wartościami rent dla dwóch sąsiednich wieków; związków tych używa się czasami do kolejnego obliczania wartości rent, począwszy od R_{100} w górę aż po R_0 lub naodwrót, np.

$$R_{100} = 0,$$

$$R_{99} = 1 + \frac{0}{0{,}033\,182} \times 0 = 1,$$

$$R_{98} = 1 + \frac{0{,}033\,182}{0{,}137\,374} \times 1 = 1{,}241\,54,$$

$$R_{97} = 1 + \frac{0{,}137\,374}{0{,}462\,093} \times 1{,}241\,54 = 1{,}369\,09 \text{ i t. d.}$$

Gdy chodzi o wartość renty odroczonej płatnej w ratach po $\frac{1}{m}$ co m-a część roku, należy we wzorze (119') za R_{x+n} podstawić $R_{x+n}^{\left(\frac{m}{m}\right)}$. Czyniąc to, wypada

$${}_nR_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = \frac{v_{x+n}}{v_x} R_{x+n}^{\left(\frac{m}{m}\right)},$$

że zaś z (115) $\qquad R_{x+n}^{\left(\frac{m}{m}\right)} = R_{x+n} - \dfrac{m-1}{2m}$, zatem

$${}_nR_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = \frac{v_{x+n}}{v_x} R_{x+n} - \frac{v_{x+n}}{v_x} \cdot \frac{m-1}{2m}, \text{ albo}$$

$$(121)\qquad {}_nR_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = {}_nR_x - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{v_{x+n}}{v_x}.$$

Dla $x = 30$, $n = 20$ i $m = 4$

$${}_{20}R_{30}^{\left(\frac{4}{4}\right)} = 5{,}71530 - \frac{3}{8} \times \frac{12\,447{,}26}{30\,743{,}98} = 5{,}71530 - 0{,}15183 = 5{,}56347;$$

wartość takiejże renty płaconej w wysokości 1 000 fr. rocznie, w ratach kwartalnych po 250 fr., wynosi 5 563,47 fr.

Gdy renta ma być płaconą z dołu

$$(121')\qquad {}_{n,\frac{1}{m}}R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = {}_nR_x - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{v_{x+n}}{v_x} - \frac{1}{m} \cdot \frac{v_{x+n}}{v_x} = {}_nR_x - \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{v_{x+n}}{v_x}.$$

Wreszcie, gdyby chodziło o wartość renty odroczonej, z wypłatą ostatniej raty ściśle aż do chwili śmierci ubezpieczonego, należałoby we wzór (119') podstawić za R_{x+n} odpowiednio zmodyfikowane wyrażenia (117′) lub (118), stosownie do tego, czy renta jest płatną rocznie, czy też co m-a część roku.

52. Renta czasowa natychmiast płatna. Renta czasowa wypłaca się przez oznaczoną z góry liczbę lat lub do chwili ewentualnie wcześniejszej śmierci rentiera.

Przypuśćmy, że nam chodzi o wartość 1-ki renty czasowej, płatnej natychmiast z góry rocznie przez n lat.

Na początku pierwszego roku wypłaca instytucya, λ_x osobom x letnim, λ_x jednostek renty. Po roku płaci już tylko λ_{x+1} jednostek, których wartością, w chwili zawierania umowy, jest $\lambda_{x+1}\rho$; wartość λ_{x+2} jednostek, płaconych po 2-ch latach, równa się $\lambda_{x+2}\rho^2$, i. t. d. aż do $\lambda_{x+n-1}\rho^{n-1}$.

Ponieważ wartość omawianej renty umówiliśmy się oznaczać symbolem ${}^{n}R_x$, przeto

$${}^{n}R_x . \lambda_x = \lambda_x + \lambda_{x+1}\rho + \lambda_{x+2}\rho^2 + \ldots + \lambda_{x+n-1}\rho^{n-1}, \text{ skąd}$$

$${}^{n}R_x = \frac{\lambda_x + \lambda_{x+1}\rho + \lambda_{x+2}\rho^2 + \ldots + \lambda_{x+n-1}\rho^{n-1}}{\lambda_x}$$

$$= \frac{\lambda_x\rho^x + \lambda_{x+1}\rho^{x+1} + \lambda_{x+2}\rho^{x+2} + \ldots + \lambda_{x+n-1}\rho^{x+n-1}}{\lambda_x\rho^x}$$

$$= \frac{v_x + v_{x+1} + v_{x+2} + \ldots + v_{x+n-1}}{v_x}$$

$$= \frac{(v_x + v_{x+1} + v_{x+2} + \ldots \text{ do końca tab.}) - (v_{x+n} + v_{x+n+1} + \ldots \text{ do końca tab.})}{v_x},$$

czyli ostatecznie

$$(122) \qquad {}^{n}R_x = \frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}{v_x}.$$

Wartość np. 1-ki renty czasowej, płatnej przez lat 20 osobie 30-o letniej, wynosi

$${}^{20}R_{30} = \frac{\Sigma v_{30} - \Sigma v_{50}}{v_{30}} = \frac{593\,788,92 - 175\,710,99}{30\,743,98} = \frac{418\,077,93}{30\,743,98} = 13,598\,69.$$

Wzór (122) daje się przedstawić pod postacią

$$(122') \qquad {}^{n}R_x = \frac{\Sigma v_x}{v_x} - \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_x} = R_x - {}_{n}R_x,$$

którą wprost można było przewidzieć, ponieważ widocznie renta czasowa jest różnicą pomiędzy rentą dożywotnią i odroczoną. Otrzymana np. poprzednio liczebna wartość

$${}^{20}R_{30} = R_{30} - {}_{20}R_{30} = 19,313\,99 - 5,715\,30 = 13,598\,69.$$

Gdyby renta czasowa miała być płaconą z dołu, należy w (122′) za R_x i ${}_{n}R_x$ podstawić wartości odpowiednich rent z dołu płatnych, t. j.

$${}^{n}_{1}R_x = {}_{1}R_x - {}_{n,1}R_x,$$

że zaś ${}_{n,1}R_x = {}_{n+1}R_x$, zatem

(122'') $${}^{n}_{1}R_x = {}_{1}R_x - {}_{n+1}R_x = \frac{\Sigma v_{x+1} - \Sigma v_{x+n+1}}{v_x}.$$

Wartość renty czasowej, płatnej po $\frac{1}{m}$ co m-a część roku, jest różnicą pomiędzy, w podobny sposób płatną, rentą dożywotnią natychmiastową i odroczoną, czyli

(123) $${}^{n}R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} - {}_{n}R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = R_x - \frac{m-1}{2m} - \left({}_{n}R_x - \frac{m-1}{2m}\cdot\frac{v_{x+n}}{v_x}\right)$$
$$= R_x - {}_{n}R_x - \frac{m-1}{2m}\cdot\frac{v_x - v_{x+n}}{v_x},$$

albo, ponieważ $R_x - {}_{n}R_x = {}^{n}R_x$,

(123') $${}^{n}R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = {}^{n}R_x - \frac{m-1}{2m}\cdot\frac{v_x - v_{x+n}}{v_x}.$$

Np. dla $x = 30$, $n = 20$, $m = 4$,

$${}^{20}R_{30}^{\left(\frac{4}{4}\right)} = 13{,}59869 - \frac{3}{8} \times \frac{30743{,}98 - 12447{,}26}{30743{,}98}$$
$$= 13{,}59869 - 0{,}22317 = 13{,}37552.$$

Łącząc tę wartość liczebną z wartością renty odroczonej, otrzymujemy rentę natychmiastową dożywotnio płatną

$$13{,}37552 + 5{,}56347 = 18.93899,$$

t. j. wartość obliczoną w art. 49.

Ażeby otrzymać wzór na rentę płatną z dołu w ratach po $\frac{1}{m}$ co m-a część roku, należy w (123) za $R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}$ i ${}_{n}R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}$ podstawić ${}_{\frac{1}{m}}R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}$ i ${}_{n.\frac{1}{m}}R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}$ ze wzorów (116) i (121'); wtedy będzie

$${}^{n}_{\frac{1}{m}}R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = R_x - \frac{m+1}{2m} - \left({}_{n}R_x - \frac{m+1}{2m}\cdot\frac{v_{x+n}}{v_x}\right)$$
$$= R_x - {}_{n}R_x - \frac{m+1}{2m}\cdot\frac{v_x - v_{x+n}}{v_x}, \text{ czyli}$$

(123'') $${}^{n}_{\frac{1}{m}}R_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = {}^{n}R_x - \frac{m+1}{2m}\cdot\frac{v_x - v_{x+n}}{v_x}.$$

Jeżeli renta czasowa ma być płaconą z dołu z wypłatą ostatniej raty ściśle do chwili śmierci rentiera, w razie gdyby ta przed ustaniem renty nastąpiła, trzeba we wzór (122') za R_x i ${}_{n}R_x$ podstawić właściwie zmienione wyrażenia (117') lub (118), zależnie od tego, czy renta ma być płaconą rocznie, czy co m-a część roku.

53. RENTA CZASOWA ODROCZONA. Renta czasowa odroczona zaczyna się wypłacać np. po n latach i trwa tylko przez pewien czas, np. przez $\mathrm{N} - n$ lat, gdzie N oznacza liczbę lat, po upływie której, od chwili zawarcia umowy, rentę przestaje się wypłacać.

Po tem, cośmy w poprzednich artykułach powiedzieli, łatwo zrozumieć można, że wartość renty czasowej, płatnej przez $\mathrm{N} - n$ lat i odroczonej na n lat, jest różnicą pomiędzy wartością renty dożywotniej, odroczonej na lat n i odroczonej na lat N, t. j:

Gdy renta jest płatna rocznie z góry

$$(124)\quad {}^{\mathrm{N}}_{n}\mathrm{R}_x = {}_{n}\mathrm{R}_x - {}_{\mathrm{N}}\mathrm{R}_x = \frac{v_{x+n}}{v_x}\mathrm{R}_{x+n} - \frac{v_{x+\mathrm{N}}}{v_x}\mathrm{R}_{x+\mathrm{N}} = \frac{\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+\mathrm{N}}}{v_x}.$$

Gdy renta jest płatna z góry w ratach po $\frac{1}{m}$ co m-a część roku

$$(125)\left\{\begin{aligned} {}^{\mathrm{N}}_{n}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} &= {}_{n}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} - {}_{\mathrm{N}}\mathrm{N}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = {}_{n}\mathrm{R}_x - \frac{m-1}{2m}\cdot\frac{v_{x+n}}{v_x} - \\ &- \left({}_{\mathrm{N}}\mathrm{R}_x - \frac{m-1}{2m}\cdot\frac{v_{x+\mathrm{N}}}{v_x}\right) = {}_{n}\mathrm{R}_x - {}_{\mathrm{N}}\mathrm{R}_x - \frac{m-1}{2m}\left(\frac{v_{x+n} - v_{x+\mathrm{N}}}{v_x}\right) \\ &= {}^{\mathrm{N}}_{n}\mathrm{R}_x - \frac{m-1}{2m}\cdot\frac{v_{x+n} - v_{x+\mathrm{N}}}{v_x}. \end{aligned}\right.$$

W taki sam sposób, jak w poprzednich artykułach, można wyprowadzić wzory na przypadki, gdy renta ma być płaconą z dołu bez i z wypłatą ostatniej raty ściśle do chwili śmierci ubezpieczonego, w razie gdyby ewentualnie śmierć jego nastąpiła przed ustaniem płacenia renty.

Dla rent płaconych z dołu mamy np.

$$(124')\left\{\begin{aligned} {}^{\mathrm{N}}_{n,1}\mathrm{R}_x &= {}_{n,1}\mathrm{R}_x - {}_{\mathrm{N},1}\mathrm{R}_x = {}_{n+1}\mathrm{R}_x - {}_{\mathrm{N}+1}\mathrm{R}_x = \frac{v_{x+n+1}}{v_x}\mathrm{R}_{x+n+1} - \frac{v_{x+\mathrm{N}+1}}{v_x}\mathrm{R}_{x+\mathrm{N}+1} = \\ &= \frac{\Sigma v_{x+n+1} - \Sigma v_{x+\mathrm{N}+1}}{v_x}; \end{aligned}\right.$$

$$(125')\quad \begin{aligned} {}^{\mathrm{N}}_{n,\frac{1}{m}}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} &= {}_{n,\frac{1}{m}}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} - {}_{\mathrm{N},\frac{1}{m}}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = \\ &= {}_{n}\mathrm{R}_x - \frac{m+1}{2m}\cdot\frac{v_{x+n}}{v_x} - \left({}_{\mathrm{N}}\mathrm{R}_x - \frac{m+1}{2m}\cdot\frac{v_{x+\mathrm{N}}}{v_x}\right) \\ &= {}_{n}\mathrm{R}_x - {}_{\mathrm{N}}\mathrm{R}_x - \frac{m+1}{2m}\cdot\frac{v_{x+n} - v_{x+\mathrm{N}}}{v_x} \\ &= {}^{\mathrm{N}}_{n}\mathrm{R}_x - \frac{m+1}{2m}\cdot\frac{v_{x+n} - v_{x+\mathrm{N}}}{v_x}. \end{aligned}$$

Renty czasowe odroczone mają zastosowanie przy ubezpieczaniu dzieciom dochodów na czas ich kształcenia się.

54. RENTY ROSNĄCE. Dotąd mówiliśmy tylko o rentach stałych, t. j. o takich, których wysokość przez cały czas ich trwania nie ulega zmianie; obecnie przechodzimy do rent zmiennych, w szczególności zaś do jednostajnie rosnących i malejących. Wprawdzie renty zmienne bezpośredniego zastosowania w praktyce nie mają, służą jednak za podstawę do obliczania premij zmiennych, jednostajnie rosnących lub malejących, które czasami, zwłaszcza w Anglii, bywają używane. Że zaś premie zawsze zaczynają się wnosić natychmiast i opłacają się z góry, przeto zajmiemy się tutaj tylko rentami zmiennemi, płatnemi natychmiast z góry.

Znajdziemy najprzód wyrażenie na wartość renty dożywotniej, płatnej z góry rocznie osobie w wieku lat x: na początku pierwszego roku w wysokości 1-ki, na początku drugiego roku w wysokości 2-ch jednostek, na początku trzeciego roku w wysokości 3-ch jednostek, i t. d. aż do śmierci.

Przypuśćmy, że ubezpieczamy tego rodzaju rentę λ_x osobom, t. j. tylu, ile jest żyjących osób x letnich w tablicy śmiertelności. Wartość opisanej renty dla każdej osoby oznaczmy przez $\overset{<}{\mathrm{R}}_x$ gdzie znaczek $<$, otwarty w stronę prawą, oznacza rentę rosnącą.

Na początku pierwszego roku wypłaci instytucya λ_x jednostek; na początku drugiego roku $2\lambda_{x+1}$, których wartość, w chwili zawierania umowy, wynosi $2\lambda_{x+1}\rho$; na początku trzeciego roku wypłaca instytucya $3\lambda_{x+2}$ o wartości teraźniejszej $3\lambda_{x+2}\rho^2$, i t. d. do wymarcia wszystkich.

Mamy więc

$$\overset{<}{\mathrm{R}}_x . \lambda_x = \lambda_x + 2\lambda_{x+1}\rho + 3\lambda_{x+3}\rho^2 + \ldots, \text{ skąd}$$

$$\overset{<}{\mathrm{R}}_x = \frac{\lambda_x + 2\lambda_{x+1}\rho + 3\lambda_{x+2}\rho^2 + \ldots}{\lambda_x}.$$

Mnożąc licznik i mianownik przez ρ^x, wypada

$$\overset{<}{\mathrm{R}}_x = \frac{v_x + 2v_{x+1} + 3v_{x+2} + \ldots}{v_x}.$$

Licznik ostatniego wyrażenia daje się rozłożyć w następujący sposób:

$$v_x + 2v_{x+1} + 3v_{x+2} + \ldots = \left.\begin{array}{r} v_x + v_{x+1} + v_{x+2} + v_{x+3} + \ldots \\ + v_{x+1} + v_{x+2} + v_{x+3} + \ldots \\ + v_{x+2} + v_{x+3} + \ldots \\ + v_{x+3} + \ldots \\ + \ldots \end{array}\right\} =$$

$$= \Sigma v_x + \Sigma v_{x+1} + \Sigma v_{x+2} + \ldots = \Sigma\Sigma v_x.$$

Jest więc

$$\overset{<}{\mathrm{R}}_x = \frac{\Sigma\Sigma v_x}{v_x}, \tag{126}$$

albo, ponieważ

$$\frac{\Sigma\Sigma v_x}{v_x} = \frac{\Sigma v_x}{v_x} + \frac{\Sigma v_{x+1}}{v_x} + \frac{\Sigma v_{x+2}}{v_x} + \ldots = R_x + {}_1R_x + {}_2R_x + \ldots,$$

$$(126') \qquad \overset{<}{R}_x = R_x + {}_1R_x + {}_2R_x + {}_3R_x + \ldots = \sum_{z=0}^{z=g}{}_zR_x,$$

gdzie g oznacza granicę życia ludzkiego, wskazaną przez tablicę śmiertelności użytą do obliczeń.

Znaczy to, że wartość renty rosnącej, w określony powyżej sposób, równa się sumie wartości 1-ki renty stałej natychmiast płatnej i rent odroczonych na rok, dwa, trzy i t. d. aż do końca tablicy śmiertelności. W praktyce jednak najlepiej zawsze używać wzoru mieszczącego w sobie liczby tablic pomocniczych, a więc, jak w obecnym przypadku, wzoru (126).

Dla $x = 30$, mamy

$$\overset{<}{R}_{30} = \frac{9\,202\,652{,}74}{30\,743{,}98} = 299{,}331\,86.$$

Jeżeli renta rośnie tylko przez lat n, a następnie do śmierci utrzymuje się w stałej wysokości, do jakiej po n latach doszła, to — oznaczywszy wartość takiej renty przez $\overset{<(n)}{R}_x$, gdzie (n) oznacza rentę „rosnącą przez lat n" — mamy widocznie

$$(\alpha)\ \overset{<(n)}{R}_x = \frac{v_x + 2v_{x+1} + 3v_{x+2} + \ldots + (n-1)v_{x+n-2} + nv_{x+n-1} + n(v_{x+n} + v_{x+n+1} + \ldots)}{v_x}.$$

Otóż $n(v_{x+n} + v_{x+n+1} + v_{x+n+2} + \ldots) = n\Sigma v_{x+n}$, zaś

$$\left.\begin{array}{rl} v_x + 2v_{x+1} + 3v_{x+2} + \ldots + nv_{x+n-1} = & v_x + v_{x+1} + v_{x+2} + \ldots + v_{x+n-1} \\ & \quad + v_{x+1} + v_{x+2} + \ldots + v_{x+n-1} \\ & \qquad + v_{x+2} + \ldots + v_{x+n-1} \\ & \qquad\quad + \ldots\ldots \\ & \qquad\quad + v_{x+n-2} + v_{x+n-1} \\ & \qquad\qquad + v_{x+n-1} \end{array}\right\} =$$

$$= (\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) + (\Sigma v_{x+1} - \Sigma v_{x+n}) + \ldots + (\Sigma v_{x+n-2} - \Sigma v_{x+n}) + (\Sigma v_{x+n-1} - \Sigma v_{x+n})$$
$$= (\Sigma v_x + \Sigma v_{x+1} + \Sigma v_{x+2} + \ldots + \Sigma v_{x+n-1}) - n\Sigma v_{x+n}$$
$$= \Sigma\Sigma v_x - \Sigma\Sigma v_{x+n} - n\Sigma v_{x+n}.$$

Skutkiem tego licznik wyrażenia (α) sprowadza się do

$$\Sigma\Sigma v_x - \Sigma\Sigma v_{x+n} - n\Sigma v_{x+n} + n\Sigma v_{x+n},$$

a szukana wartość renty

$$(127) \qquad \overset{<(n)}{R}_x = \frac{\Sigma\Sigma v_x - \Sigma\Sigma v_{x+n}}{v_x} = R_x + {}_1R_x + {}_2R_x + \ldots + {}_{n-1}R_x = \sum_{z=0}^{z=n-1}{}_zR_x.$$

Np. $$\overset{<(20)}{\mathrm{R}}_{30} = \frac{9\,202\,652{,}74 - 1\,911\,283{,}55}{30\,743{,}98} = 237{,}16413.$$

Wartość renty czasowej, płatnej przez n lat i rosnącej corocznie o 1-kę, otrzymamy, odejmując od (127) n razy wziętą wartość 1-ki renty dożywotniej odroczonej na n lat.

Wypada zatem

$$(128) \qquad {}^{n}\overset{<(n)}{\mathrm{R}}_x = \sum_{z=o}^{z=n-1} {}_z\mathrm{R}_x - n \cdot {}_n\mathrm{R}_x = \frac{\Sigma\Sigma v_x - \Sigma\Sigma v_{x+n} - n\Sigma v_{x+n}}{v_x},$$

co zresztą łatwo otrzymuje się i bezpośrednio, gdy w (α) opuścimy w liczniku

$$n(v_{x+n} + v_{x+n+1} + v_{x+n+2} + \ldots) = n\Sigma v_{x+n}.$$

Dla $x = 30$, $n = 20$, wypada

$$ {}^{20}\overset{<(20)}{\mathrm{R}}_{30} = \frac{9\,202\,652{,}74 - 1\,911\,283{,}55 - 20 \times 175\,710{,}99}{30\,743{,}98} = 122{,}85818.$$

Renty mogą wzrastać nie co rok, lecz co lat kilka w równych i nierównych odstępach czasu i w rozmaitym stosunku. Przypadków może tu być bardzo wiele. Dla przykładu podamy tylko jeden, najprostszy.

Niech renta rośnie co lat ν w ciągu n lat (n wielokrotne względem ν), po upływie których podwaja się i wtedy pozostaje nadal, aż do śmierci, stałą. Jeżeli renta ma wzrastać jednostajnie, to każdy przyrost wynosić musi $\frac{\nu}{n}$ jednostki — tak, że przez pierwsze ν lat płaci instytucya po 1-ce renty rocznie, przez następne ν lat po $1 + \frac{\nu}{n}$, przez dalsze ν lat po $1 + \frac{2\nu}{n}$ i t. d. — przez ostatnie ν lat po $1 + \frac{\left(\frac{n}{\nu} - 1\right)\nu}{n} = 1 + \frac{n-\nu}{n} = 2 - \frac{\nu}{n}$; dalej wypłaca się już bez zmiany aż do śmierci po 2 jednostki rocznie.

Renty powyższe można rozłożyć na następujące:
Na rentę dożywotnią natychmiastową z góry rocznie płatną po 1-ce $= \mathrm{R}_x$
" " " odroczoną na ν lat z góry rocznie płatną po $\frac{\nu}{n} = \frac{\nu}{n} \cdot {}_\nu\mathrm{R}_x$
" " " " " 2ν " " " " " $= \frac{\nu}{n} \cdot {}_{2\nu}\mathrm{R}_x$
. . . .
" " " " " $n-\nu$ " " " " $= \frac{\nu}{n} \cdot {}_{n-\nu}\mathrm{R}_x$
" " " " " n " " " " $= \frac{\nu}{n} \cdot {}_n\mathrm{R}_x.$

Czyli szukanem wyrażeniem jest

$$(127') \qquad \overset{<(n,\nu)}{\mathrm{R}_x} = \mathrm{R}_x + \frac{\nu}{n}({}_{\nu}\mathrm{R}_x + {}_{2\nu}\mathrm{R}_x + {}_{3\nu}\mathrm{R}_x + \ldots + {}_{n}\mathrm{R}_x)$$

$$= \frac{\Sigma v_x + \frac{\nu}{n}(\Sigma v_{x+\nu} + \Sigma v_{x+2\nu} + \Sigma v_{x+3\nu} + \ldots + \Sigma v_{x+n})}{v_x}.$$

Gdy np. renta ma wzrastać co 5 lat — tak, żeby po 15-u latach się podwoiła, to

$$\overset{<(15,5)}{\mathrm{R}_x} = \mathrm{R}_x + \frac{1}{3}({}_{5}\mathrm{R}_x + {}_{10}\mathrm{R}_x + {}_{15}\mathrm{R}_x) = \frac{\Sigma v_x + \frac{1}{3}(\Sigma v_{x+5} + \Sigma v_{x+10} + \Sigma v_{x+15})}{v_x}.$$

Dla $x = 30$

$$\overset{<(15,5)}{\mathrm{R}_{30}} = \frac{593\,788{,}92 + \frac{1}{3}(452\,480{,}79 + 338\,818{,}12 + 247\,869{,}92)}{30\,743{,}98}$$

$$= \frac{940\,178{,}53}{30\,743{,}98} = 30{,}580\,90.$$

Jeżeli renta jest czasową, tylko przez n lat trwającą, należy od (127') odjąć rentę odroczoną na n lat w wysokości po 2 jednostki z góry rocznie płatne, t. j.

$$\overset{<(n,\nu)}{{}^{n}\mathrm{R}_x} = \mathrm{R}_x + \frac{\nu}{n}({}_{\nu}\mathrm{R}_x + {}_{2\nu}\mathrm{R}_x + \ldots + {}_{n-\nu}\mathrm{R}_x + {}_{n}\mathrm{R}_x) - 2\,{}_{n}\mathrm{R}_x$$

$$= (\mathrm{R}_x - {}_{n}\mathrm{R}_x) + \frac{\nu}{n}\left[{}_{\nu}\mathrm{R}_x + {}_{2\nu}\mathrm{R}_x + \ldots + {}_{n-\nu}\mathrm{R}_x - \left(\frac{n}{\nu} - 1\right){}_{n}\mathrm{R}_x\right].$$

$$= {}^{n}\mathrm{R}_x + \frac{\nu}{n}\left[({}_{\nu}\mathrm{R}_x - {}_{n}\mathrm{R}_x) + ({}_{2\nu}\mathrm{R}_x - {}_{n}\mathrm{R}_x) + \ldots + ({}_{n-\nu}\mathrm{R}_x - {}_{n}\mathrm{R}_x)\right].$$

Ostatecznie

$$(128') \qquad \overset{<(n,\nu)}{{}^{n}\mathrm{R}_x} = {}^{n}\mathrm{R}_x + \frac{\nu}{n}\left({}_{\nu}^{n}\mathrm{R}_x + {}_{2\nu}^{n}\mathrm{R}_x + \cdots + {}_{n-\nu}^{n}\mathrm{R}_x\right)$$

$$= \frac{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) + \frac{\nu}{n}\left[\Sigma v_{x+\nu} + \Sigma v_{x+2\nu} + \ldots + \Sigma v_{x+n-\nu} - \left(\frac{n}{\nu} - 1\right)\Sigma v_{x+n}\right]}{v_x}.$$

55. RENTY MALEJĄCE. Renty malejące mogą być stosowane tylko czasowo, gdyż dla zmniejszających się dożywotnio niepodobna przewidzieć granicy do jakiej renta może się zredukować w szczególnych przypadkach długowieczności. Ewentualnie nawet renta mogłaby stać się ujemną, coby znaczyło, że w końcu ubezpieczony powinien płacić rentę instytucyi. Chociaż taki przypadek teoretycznie jest możliwy, to jednak w praktyce byłby nielogiczny i dla tego ograniczymy się do rent czasowo malejących.

Dajmy na to, że instytucya płaci w pierwszym roku rentę w wysokości 1-ki, następnie corocznie, przez n lat, renta maleje jednostajnie, aż stawszy się, po n latach, dwa razy mniejszą od pierwszorocznej pozostaje nadal stałą do śmierci. Renta, oczywiście, musi się rocznie zmniejszać o $\frac{1}{2n}$.

Postępując zwykłym sposobem, znajdujemy

$$\overset{>(n)}{\mathrm{R}}_x . \lambda_x = \lambda_x + \frac{2n-1}{2n} \lambda_{x+1} \rho + \frac{2n-2}{2n} \lambda_{x+2} \rho^2 + \ldots + \frac{2n-(n-1)}{2n} \lambda_{x+n-1} \rho^{n-1} +$$

$$+ \frac{2n-n}{2n} (\lambda_{x+n} \rho^n + \lambda_{x+n+1} \rho^{n+1} + \ldots).$$

Stąd

$$\overset{>(n)}{\mathrm{R}}_x = \frac{2n v_x + (2n-1) v_{x+1} + (2n-2) v_{x+2} + \ldots + (n+1) v_{x+n-1}}{2n v_x} +$$

$$+ \frac{n (v_{x+n} + v_{x+n+1} + \ldots)}{2n v_x}.$$

Licznik drugiej części ostatniego wyrażenia, czyli $n(v_{x+n} + v_{x+n+1} + \ldots) = n \Sigma v_{x+n}$, zaś licznik pierwszej części można rozłożyć w następujący sposób:

$$(n+1)(v_x + v_{x+1} + v_{x+2} + \ldots + v_{x+n-1}) +$$

$$\begin{array}{c} 2n-(n+1)=n-1 \\ \text{szeregów} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} + v_x + v_{x+1} + v_{x+2} + \ldots + v_{x+n-3} + v_{x+n-2} \\ + v_x + v_{x+1} + v_{x+2} + \ldots + v_{x+n-3} \\ + v_x + v_{x+1} + v_{x+2} + \ldots \\ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + v_x + v_{x+1} + v_{x+2} \\ + v_x + v_{x+1} \\ + v_x \end{array} \right\} =$$

$$= (n+1)(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) + (\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n-1}) + (\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n-2}) + \ldots$$

$$\ldots + (\Sigma v_x - \Sigma v_{x+2}) + (\Sigma v_x - \Sigma v_{x+1}) = 2n \Sigma v_x - (\Sigma\Sigma v_{x+1} - \Sigma\Sigma v_{x+n}) - (n+1) \Sigma v_{x+n}.$$

Skutkiem tego

$$\overset{>(n)}{\mathrm{R}}_x = \frac{2n \Sigma v_x - (\Sigma\Sigma v_{x+1} - \Sigma\Sigma v_{x+n}) - (n+1) \Sigma v_{x+n} + n \Sigma v_{x+n}}{2n v_x}, \text{ albo}$$

$$\overset{>(n)}{\mathrm{R}}_x = \frac{2n \Sigma v_x - (\Sigma\Sigma v_{x+1} - \Sigma\Sigma v_{x+n} + \Sigma v_{x+n})}{2n v_x} \tag{129}$$

$$= \mathrm{R}_x - \frac{1}{2n} ({}_1\mathrm{R}_x + {}_2\mathrm{R}_x + \ldots + {}_n\mathrm{R}_x).$$

Gdyby renta była płaconą tylko czasowo przez lat n, t. j. gdyby po upływie n lat przestała być płaconą, wtedy należy od (129) odjąć $\frac{1}{2} \cdot {}_{n}\mathrm{R}_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_x}$. Uczyniwszy to, otrzymujemy

$$(130) \qquad {}^{n}\overset{>(n)}{\mathrm{R}}_x = \frac{2n\Sigma v_x - [\Sigma\Sigma v_{x+1} - \Sigma\Sigma v_{x+n} + (n+1)\Sigma v_{x+n}]}{2n v_x}$$

$$= {}^{n}\mathrm{R}_x - \frac{1}{2n}({}^{n}_{1}\mathrm{R}_x + {}^{n}_{2}\mathrm{R}_x + \ldots + {}^{\;\;\;n}_{n-1}\mathrm{R}_x).$$

Jeżeli renta zmniejsza się nie co rok o $\frac{1}{2n}$, lecz co ν lat o $\frac{\nu}{2n}$ (n wielokrotne względem ν), wówczas już bez żadnych dalszych rozumowań możemy napisać:

$$(129') \qquad \overset{>(n,\nu)}{\mathrm{R}}_x = \mathrm{R}_x -- \frac{\nu}{2n}({}_{\nu}\mathrm{R}_x + {}_{2\nu}\mathrm{R}_x + \ldots + {}_{n}\mathrm{R}_x),$$

$$(130') \qquad {}^{n}\overset{>(n,\nu)}{\mathrm{R}}_x = {}^{n}\mathrm{R}_x - \frac{\nu}{2n}({}^{n}_{\nu}\mathrm{R}_x + {}^{\;n}_{2\nu}\mathrm{R}_x + \ldots + {}^{\;\;\;n}_{n-\nu}\mathrm{R}_x).$$

Renty zmienne mogą być także płacone w ratach muiejszych od rocznych i wtedy, dla otrzymania odnośnych wzorów, należy w poprzednio wyprowadzone, w miejsce wartości rent płaconych rocznie, podstawić wartości rent płaconych w ratach mniejszych od rocznych.

Nadmienić wreszcie musimy, że, jak to z rozumowań przy wyprowadzaniu wzorów wynika, w razie śmierci ubezpieczonego w czasie pobierania renty, a przy odroczonych nawet przed zaczęciem pobierania renty, jednorazowa premia w całości pozostaje przy instytucyi. O ubezpieczeniach rent ze zwrotem premij, w razie przedwczesnej śmierci ubezpieczonego, mówić będziemy w rozdziale VI.

56. Premie peryodyczne w ogólności. Zaznaczyliśmy już kilkakrotnie, że wartość teraźniejsza danej renty stanowi jednorazową premię netto, jaką ubezpieczony zapłacić powinien, aby mógł nabyć prawo do pobierania renty. Jednorazowe wszakże premie są dość wysokie, skutkiem czego większość osób nie mogłaby korzystać z ubezpieczeń, z przyczyny braku potrzebnych na to środków. Aby więc uprzystępnić każdemu możność zawierania ubezpieczeń, premie jednorazowe bywają rozkładane na peryodyczne z uwzględnieniem, naturalnie, przy ich obliczaniu ryzyka, jakie ponosi instytucya godząca się na zastąpienie premii jednorazowej przez peryodyczne, które, z powodu przedwczesnej śmierci ubezpieczonego, nie zawsze mogą być w całości przez instytucyę pobrane.

Zadaniem tedy obliczania premij peryodycznych jest zastąpienie premij jednorazowych przez wkłady co czas pewien dokonywane, ale w ten sposób, żeby na tej zmianie instytucya nic nie straciła, czyli, żeby wartość matematyczna mających się przez ubezpieczonego wnieść premij peryodycznych była ściśle równa wartości matematycznej zawartego ubezpieczenia, resp. premii jednorazowej za takowe.

Premie peryodyczne mogą być roczne, półroczne lub t. p.; mogą się w niektórych rodzajach ubezpieczeń wnosić dożywotnio, w innych czasowo tylko, t. j. przez z góry ściśle określoną liczbę lat lub do chwili ewentualnie wcześniejszej śmierci ubezpieczonego. Opłacają się zawsze z góry.

Z powyższego wypływa, że premie peryodyczne są nie czem innem, jak tylko rentami, opartemi na życiu ubezpieczonego, lecz płaconemi nie przez instytucyę ubezpieczonemu, tylko naodwrót przez ubezpieczonego instytucyi. Wysokość ich zależy zatem od wieku osoby ubezpieczonej, od czasu przez jaki mają być wnoszone, od sposobu wnoszenia (roczne, półroczne lub t. p.) i od wysokości premii jednorazowej, którą zastępować mają. Ponieważ zaś wartości wszelkiego rodzaju rent oznaczać już potrafimy, przeto i obliczanie wysokości premij peryodycznych nie może dla nas przedstawiać wielkich trudności.

Przeciwnie, następujący — ogólnie podany sposób rozwiązywania odnośnych zagadnień bez trudu przez uważnego czytelnika zrozumianym być powinien.

Ażeby oznaczyć wysokość premii peryodycznej, należnej za dane ubezpieczenie, trzeba obliczyć teraźniejszą wartość mających się wnosić premij peryodycznych, t. j. szukaną wartość premii peryodycznej należy pomnożyć przez wartość 1-ki renty, płaconej z góry na takich samych warunkach, na jakich premia peryodyczna ma być wnoszoną; tak znaleziony iloczyn zrównać z teraźniejszą wartością ubezpieczenia, czyli z premią jednorazową za takowe i z ułożonego w ten sposób równania obrachować szukaną wysokość premii peryodycznej.

Gdy np. przez p oznaczymy roczną wysokość szukanej premii peryodycznej, przez R_p teraźniejszą wartość 1-ki renty, płaconej na takich samych warunkach, na jakich ma być wnoszoną szukana premia peryodyczna, przez W_u wartość danego ubezpieczenia, czyli premię jednorazową za takowe,to

$$p \times R_p = W_u, \tag{131}$$

skąd

$$p = \frac{W_u}{R_p}, \tag{131'}$$

t. j. premia peryodyczna równa się ilorazowi powstałemu z podzielenia premii jednorazowej, należnej za dane ubezpieczenie, przez wartość 1-ki renty, płaconej w ten sam sposób, w jaki premia peryodyczna ma być wnoszoną.

57. PREMIE PERYODYCZNE ZA UBEZPIECZENIE RENT ODROCZONYCH. Premie peryodyczne za ubezpieczenie rent mogą być wnoszone nie dłużej, jak do chwili, od której zaczyna się wypłata renty, gdyż przy jednoczesnem płaceniu premij i pobieraniu renty, miałaby miejsce wzajemna, całkiem niepotrzebna, wymiana pieniędzy. Wynika stąd, że renty natychmiastowe mogą być ubezpieczane tylko przy pomocy premij jednorazowych, podczas gdy do renty odroczonych, zarówno dożywotnich jak i czasowych, można stosować premie peryodyczne, które mogą być wnoszone albo przez cały czas odroczenia, albo krócej.

Dajmy na to, że nam chodzi o premię roczną, mającą się płacić przez lat l, za ubezpieczenie 1-ki renty dożywotniej, odroczonej na lat n, płatnej rocznie z góry ($l < n$).

Wartością, czyli jednorazową premią za rzeczoną rentę, według wzoru (119), jest

$$(119) \qquad {}_nR_x = \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_x}.$$

Wartością 1-ki renty czasowej natychmiastowej, płatnej z góry rocznie przez lat l, według wzoru (122), jest

$$(122) \qquad {}^lR_x = \frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}}{v_x}.$$

Gdy więc szukaną premię roczną oznaczymy, stosownie do powiedzianego w art. 47, przez

$${}^lp({}_nR_x),$$

to ze wzoru (131') wypada

$$(132) \qquad {}^lp({}_nR_x) = \frac{{}_nR_x}{{}^lR_x} = \frac{\Sigma v_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}},$$

a gdyby premie roczne miały być płacone przez cały czas trwania odroczenia, t. j. przez lat n, byłoby

$$(132') \qquad {}^np({}_nR_x) = \frac{\Sigma v_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}.$$

Gdyby renta miała być płaconą z góry w ratach po $\frac{1}{m}$ co m-a część roku, a premie w ratach rocznych przez l lat, otrzymalibyśmy

$$(133) \qquad {}^lp\left[{}_nR_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}\right] = \frac{{}_nR_x - \frac{m-1}{2m}\cdot\frac{v_{x+n}}{v_x}}{{}^lR_x} = \frac{\Sigma v_{x+n} - \frac{m-1}{2m}v_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}},$$

dla premij w ratach rocznych przez n lat płatnych

$$(133') \qquad {}^np\left[{}_nR_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}\right] = \frac{\Sigma v_{x+n} - \frac{m-1}{2m}v_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}.$$

Jeżeli premie mają być płacone w ratach co μ-a część roku, to na całoroczną premię, za ubezpieczenie 1-ki renty rocznie płatnej, otrzymujemy

$$(134)\qquad {}^{l}_{\frac{\mu}{\mu}}p({}_n\mathrm{R}_x)=\frac{{}_n\mathrm{R}_x}{{}^{l}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{\mu}{\mu}\right)}}=\frac{\Sigma v_{x+n}}{(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+l})-\frac{\mu-1}{2\mu}(v_x-v_{x+l})},$$

przy $l=n$

$$(134')\qquad {}^{n}_{\frac{\mu}{\mu}}p({}_n\mathrm{R}_x)=\frac{\Sigma v_{x+n}}{(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+n})-\frac{\mu-1}{2\mu}(v_x-v_{x+n})}.$$

Dla renty płaconej z góry po $\frac{1}{m}$ co m-a część roku

$$(135)\qquad {}^{l}_{\frac{\mu}{\mu}}p\left[{}_n\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}\right]=\frac{\Sigma v_{x+n}-\frac{m-1}{2m}v_{x+n}}{(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+l})-\frac{\mu-1}{2\mu}(v_x-v_{x+l})},$$

przy $l=n$

$$(135')\qquad {}^{n}_{\frac{\mu}{\mu}}p\left[{}_n\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}\right]=\frac{\Sigma v_{x+n}-\frac{m-1}{2m}v_{x+n}}{(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+n})-\frac{\mu-1}{2\mu}(v_x-v_{x+n})}.$$

Samo z siebie wynika, że ${}^{l}_{\frac{\mu}{\mu}}p$ (R) resp. ${}^{n}_{\frac{\mu}{\mu}}p$ (R), podane we wzorach (134), (135); (134′) i (135′), oznaczają premie roczne, które należy podzielić przez μ, jeżeli chcemy otrzymać wysokość rat co μ-a część roku płatnych.

Weźmy przykład liczebny.

Chodzi o rentę odroczoną na lat 20, dla 30-o letniej osoby w wysokości 1 000 fr. rocznie.

I. Renta ma się płacić rocznie z góry.

1. Premia jednorazowa, według art. 51, wynosi

$${}_{20}\mathrm{R}_{30}=5\,715{,}30 \text{ fr.}$$

2. Premia roczna, za 1-kę renty, wnoszona ratami rocznemi przez lat 20, według wzoru (132′), równa się

$${}^{20}p({}_{20}\mathrm{R}_{30})=\frac{\Sigma v_{50}}{\Sigma v_{30}-\Sigma v_{50}}=\frac{175\,710{,}99}{418\,077{,}93}=0{,}420\,28,$$

za 1 000 fr. rocznej renty

$$0{,}420\,28\times 1\,000=420{,}28 \text{ fr.}$$

3. Premia roczna, za 1-kę renty, wnoszona ratami kwartalnemi przez lat 20, według wzoru (134′), wynosi

$${}^{20}_{\frac{4}{4}}p({}_{20}\mathrm{R}_{30})=\frac{\Sigma v_{50}}{(\Sigma v_{30}-\Sigma v_{50})-\frac{3}{8}(v_{30}-v_{50})}=\frac{175\,710{,}99}{411\,216{,}66}=0{,}427\,30,$$

za 1000 fr. rocznej renty

$$0{,}42730 \times 1000 = 427{,}30 \text{ fr., stąd na premię}$$

kwartalną wypada $\frac{427{,}30}{4} = 106{,}825$ fr.

II. Renta ma być płaconą kwartalnie z góry.

1. Premia jednorazowa, według obliczenia dokonanego w art. 51, wynosi

$${}_{20}R_{30}^{\left(\frac{4}{4}\right)} = 5563{,}47 \text{ fr.}$$

2. Premia roczna, za 1-kę renty, wnoszona ratami rocznemi przez lat 20, według wzoru (133'), równa się

$${}^{20}p\left[{}_{20}R_{30}^{\left(\frac{4}{4}\right)}\right] = \frac{\Sigma v_{50} - \frac{3}{8} v_{50}}{\Sigma v_{30} - \Sigma v_{50}} = \frac{171\,043{,}27}{418\,077{,}93} = 0{,}40912,$$

za 1000 fr. rocznej renty

$$0{,}40912 \times 1000 = 409{,}12 \text{ fr.}$$

3. Premia roczna, za 1-kę renty, wnoszona ratami kwartalnemi przez lat 20, według wzoru (135'), wynosi

$${}^{20}_{\frac{4}{4}}p\left[{}_{20}R_{30}^{\left(\frac{4}{4}\right)}\right] = \frac{\Sigma v_{50} - \frac{3}{8} v_{50}}{(\Sigma v_{30} - \Sigma v_{50}) - \frac{3}{8}(v_{30} - v_{50})} = \frac{171\,043{,}27}{411\,216{,}66} = 0{,}41594,$$

za 1000 fr. rocznej renty

$$0{,}41594 \times 1000 = 415{,}94 \text{ fr.,}$$

stąd na premię kwartalną wypada

$$\frac{415{,}94}{4} = 103{,}985 \text{ fr.}$$

Gdyby renta odroczona miała być płaconą z dołu, należy postępować w taki sam sposób, tylko zamiast wartości renty odroczonej z góry płatnej trzebaby w liczniki ostatnio wyprowadzonych wzorów popodstawiać odpowiednie wartości renty odroczonej płatnej z dołu.

Dla rent czasowych odroczonych, z góry płatnych, służą następujące wzory:

I. Dla rent płaconych w ratach rocznych:

1. Premia roczna płacona przez l lat w ratach rocznych

$$(136) \qquad {}^{l}p\left({}^{N}_{n}R_{x}\right) = \frac{\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+N}}{\Sigma v_{x} - \Sigma v_{x+l}},$$

płacona przez lat n

$$(136') \qquad {}^{n}p\left({}^{N}_{n}R_{x}\right) = \frac{\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+N}}{\Sigma v_{x} - \Sigma v_{x+n}}.$$

2. Premia roczna płacona przez lat l w ratach co μ-a część roku

$$(137) \qquad {}^{l}_{\frac{\mu}{\mu}}p\,({}^{\mathrm{N}}_{n}\mathrm{R}_x) = \frac{\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+\mathrm{N}}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}) - \frac{\mu - 1}{2\mu}(v_x - v_{x+l})},$$

płacona przez n lat

$$(137') \qquad {}^{n}_{\frac{\mu}{\mu}}p\,({}^{\mathrm{N}}_{n}\mathrm{R}_x) = \frac{\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+\mathrm{N}}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - \frac{\mu - 1}{2\mu}(v_x - v_{x+n})}.$$

II. Dla rent płaconych w ratach po $\frac{1}{m}$ co m-a część roku:

1. Premia roczna płacona przez l lat w ratach rocznych

$$(138) \qquad {}^{l}p\left[{}^{\mathrm{N}}_{n}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}\right] = \frac{(\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+\mathrm{N}}) - \frac{m-1}{2m}(v_{x+n} - v_{x+\mathrm{N}})}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}},$$

płacona przez lat n

$$(138') \qquad {}^{n}p\left[{}^{\mathrm{N}}_{n}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}\right] = \frac{(\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+\mathrm{N}}) - \frac{m-1}{2m}(v_{x+n} - v_{x+\mathrm{N}})}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}.$$

2. Premia roczna płacona przez lat l w ratach co μ-a część roku

$$(139) \qquad {}^{l}_{\frac{\mu}{\mu}}p\left[{}^{\mathrm{N}}_{n}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}\right] = \frac{(\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+\mathrm{N}}) - \frac{m-1}{2m}(v_{x+n} - v_{x+\mathrm{N}})}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}) - \frac{\mu-1}{2\mu}(v_x - v_{x+l})},$$

płacona przez lat n

$$(139') \qquad {}^{n}_{\frac{\mu}{\mu}}p\left[{}^{\mathrm{N}}_{n}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}\right] = \frac{(\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+\mathrm{N}}) - \frac{m-1}{2m}(v_{x+n} - v_{x+\mathrm{N}})}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - \frac{\mu-1}{2\mu}(v_x - v_{x+n})}.$$

Podobne wzory można wyprowadzić dla rent czasowych odroczonych z dołu płatnych.

Jeżeli premie peryodyczne mają jednostajnie wzrastać lub maleć, trzeba w mianowniki wzorów na wysokość premij peryodycznych podstawić, stosownie do warunków płacenia premij, wyrażenia (128) lub (128') resp. (130) albo (130').

Szczegółowych wzorów na każdy przypadek nie będziemy podawali, najprzód dla tego, że tego rodzaju płacenie premij nader rzadko się przytrafia, a następnie — ponieważ sądzimy, że czytelnicy nasi po należytem wystudyowaniu dotychczasowych rozumowań, sami sobie w razie potrzeby dadzą radę.

Tylko dla przykładu podamy tu wzór na przypadek względnie bardziej skomplikowany.

Przypuśćmy, że chodzi o ubezpieczenie renty czasowej, odroczonej na lat n, płatnej z góry przez lat $\mathrm{N}-n$ w ratach po $\frac{1}{m}$ co m-a część roku, za pośrednictwem premij rocznie płatnych przez czas odroczenia i malejących co ν lat w takim stosunku, aby po upływie n lat odroczenia premia stała się dwa razy mniejszą od pierwotnej (n wielokrotne względem ν).

Wartością ubezpieczonej renty, według wzoru (125), jest

$$(125)\qquad {}^{\mathrm{N}}_{n}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}={}^{\mathrm{N}}_{n}\mathrm{R}-\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{v_{x+n}-v_{x+\mathrm{N}}}{v_x}.$$

Wartością renty, malejącej w opisany powyżej sposób, według (130′), jest

$$(130')\qquad {}^{n}\overset{>(n,\nu)}{\mathrm{R}_x}={}^{n}\mathrm{R}_x-\frac{\nu}{2n}\left({}^{n}_{\nu}\mathrm{R}_x+{}^{n}_{2\nu}\mathrm{R}_x+\ldots+{}^{n}_{n-\nu}\mathrm{R}_x\right)$$

skutkiem tego, szukana premia w swej pierwotnej wysokości równa się

$$(140)\qquad \left\{\begin{aligned}&{}^{n}\overset{>(n,\nu)}{p}\left[{}^{\mathrm{N}}_{n}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}\right]=\frac{{}^{\mathrm{N}}_{n}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}}{{}^{n}\overset{>(n,\nu)}{\mathrm{R}_x}}=\\&=\frac{{}^{\mathrm{N}}_{n}\mathrm{R}_x-\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{v_{x+n}-v_{x+\mathrm{N}}}{v_x}}{{}^{n}\mathrm{R}_x-\frac{\nu}{2n}\left({}^{n}_{\nu}\mathrm{R}_x+{}^{n}_{2\nu}\mathrm{R}_x+\ldots+{}^{n}_{n-\nu}\mathrm{R}_x\right)},\end{aligned}\right.$$

albo, po wprowadzeniu wielkości z tablic pomocniczych,

$$(140')\qquad {}^{n}\overset{>(n,\nu)}{p}\left[{}^{\mathrm{N}}_{n}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}\right]=\frac{(\Sigma v_{x+n}-\Sigma v_{x+\mathrm{N}})-\frac{m-1}{2m}(v_{x+n}-v_{x+\mathrm{N}})}{(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+n})-\frac{\nu}{2n}\left(\Sigma v_{x+\nu}+\Sigma v_{x+2\nu}+\ldots+\Sigma v_{x+n-\nu}-\frac{n-\nu}{\nu}\Sigma v_{x+n}\right)}.$$

Gdyby nam chodziło np. o ubezpieczenie nowonarodzonemu dziecku 1000 fr. rocznej renty na wychowanie, płatnej z góry w ratach kwartalnych przez lat 12, począwszy od 10-u lat życia (*), za pomocą premij rocznych płaconych przez lat 10 i malejących co 2 lata—tak, aby po 10-u latach pierwotna premia się przepołowiła (**), należałoby we wzorze (140′) podstawić: $x=0$, $n=10$, $\mathrm{N}=22$, $m=4$, $\nu=2$, co czyniąc otrzymujemy

$${}^{10}\overset{>(10,2)}{p}\left[{}^{22}_{10}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{4}{4}\right)}\right]=\frac{(\Sigma v_{10}-\Sigma v_{22})-\frac{3}{8}(v_{10}-v_{22})}{(\Sigma v_0-\Sigma v_{10})-\frac{1}{10}(\Sigma v_2+\Sigma v_4+\Sigma v_6+\Sigma v_8-4\,\Sigma v_{10})}=$$

$$=\frac{674\,494{,}73}{800\,784{,}93}=0{,}842\,29,$$

(*) Właściwie, począwszy od 10-ej rocznicy zawarcia umowy ubezpieczeniowej.

(**) To jest malejących o 10% co dwa lata.

jako pierwszą premię roczną od 1-ki; od 1000 franków renty rocznej, płaconej z góry co kwartał po 250 fr., wypada 0,84229 × 1000 = 842,29 fr.

Tym sposobem: przez pierwsze dwa lata premia roczna wynosi po 842,29 fr.; przez drugie dwa lata po 842,29 — 84,23 = 758,06 fr.; przez trzecie 2-a lata po 758,06 — 84,23=673,83 fr.; przez czwarte 2-a lata po 673,83—84,23= = 589,60 fr.; wreszcie przez piąte 2-a lata po 589,60 – 84,23=505,37 fr. Po 10-u latach premia wynosiłaby 505,37 — 84,23 = 421,14 fr., t. j. byłaby połową pierwotnej, lecz wówczas nie będzie już płaconą.

Podobnie jak jednorazowe, tak samo i wszystkie wniesione peryodycznie premie pozostają przy instytucyi, jeżeli ubezpieczony umrze podczas lub przed rozpoczęciem pobierania renty. W razie gdyby na przypadek przedwczesnej śmierci ubezpieczonego wniesione premie miały być zwrócone, rachunek przedstawi się inaczej i o tem mówić będziemy w rozdziale VI.

58. TABELARYCZNY SPOSÓB OBLICZANIA TARYF. Podane przez nas liczebne przykłady były oderwane i dla tego obliczaliśmy je tą koleją, jaką wskazują wzory. Gdy jednak chodzi o ułożenie taryfy, rachunek prowadzić należy tabelarycznie. I tak, gdybyśmy np. obliczali taryfę ze wzoru (132'), dla wieku lat od $x = 20$ do $x = 50$, przy $n = 25$, należałoby formować następujące kolumny liczb:

Kolumnę 1-ą, dla x, od $x = 20$ do $x = 50$;

kolumnę 2-ą, dla Σv_{x+n}, od $x + n = 45$ do $x + n = 75$;

kolumnę 3-ą, dla Σv_x, od $x = 20$ do $x = 50$;

kolumnę 4-ą, dla $\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}$, powstałą z odjęcia liczb kolumny 2 od obok stojących liczb kolumny 3.

Kolumna 5-a, powstała z podzielenia liczb kolumny 2 przez obok stojące liczby kolumny 4, stanowić będzie potrzebną nam taryfę, t. j. roczne premie netto za ubezpieczenie z góry rocznie płatnych rent, odroczonych na lat 25, dla osób w wieku od lat 20 do 50.

Wskazany sposób obliczania taryfy przyjmuje za podstawę stałą liczbę lat, po upływie której renta zaczyna być płaconą ($n = 25$ stale), skutkiem czego wiek $x + n$, od którego ubezpieczony zaczyna pobierać rentę, jest zmienny, np. 20-o letni zaczyna pobierać rentę od 45-u lat, 30-o letni od 55-u i t. d.

Gdyby chodziło o taryfę dla rent, które od tego samego wieku (bez względu na wiek, w jakim ubezpieczenie zawieramy) płacić się zaczynają, należałoby we wzorze (132') założyć $x + n$ stałe, a n zmienne. Jeżeli np. założymy $x + n$ stale równe 60, to dla $x = 20$ będzie $n=40$; dla $x=21$, $n=39$; dla $x = 22$, $n = 38$ i t. d.; dla $x = 50$, $n = 10$. Wówczas tabelaryczny rachunek przedstawi się, jak następuje:

Kolumna 1, dla x, od $x = 20$ do $x = 50$;

dawna kolumna 2 jest niepotrzebna, gdyż $\Sigma v_{x+n} = \Sigma v_{60}$ jest stałe, równe 76651,500, w jej miejsce wchodzi

kolumna 2, dla Σv_x, od $x = 20$ do $x = 50$;

kolumna 3, dla $\Sigma v_x - \Sigma v_{60}$, powstaje z odjęcia od liczb kolumny 2 stałej liczby 76651,500; wreszcie

kolumna 4, powstała z podzielenia liczby 76651,500 przez liczby kol. 3, stanowi szukaną taryfę, oznaczającą roczne premie netto za ubezpieczenie z góry rocznie płatnych rent, odroczonych do czasu ukończenia lat 60, dla osób, zawierających ubezpieczenie w wieku od lat 20 do 50.

Ten sam tabelaryczny sposób obliczania taryf stosuje się do wszystkich innych wzorów niniejszego rozdziału.

ROZDZIAŁ V.

UBEZPIECZENIA KAPITAŁÓW OPARTE NA ŻYCIU JEDNEJ OSOBY.

---

59. Pojęcia ogólne. — Znakowanie. Wypłata kapitału może być ubezpieczoną w dwojaki sposób: albo na przypadek dożycia pewnego oznaczonego terminu, albo na przypadek śmierci. Pierwszy sposób nazywa się ubezpieczeniem kapitału na dożycie (Kapital-Versicherung auf den Lebensfall, — Assurance d'un capital en cas de vie, resp. d'un capital différé, — Endowment); drugi—ubezpieczeniem kapitału pośmiertnego (Kapital-Versicherung auf den Todesfall, — Assurance en cas de décès, — Life insurance).

Wszystkie inne rodzaje ubezpieczeń kapitałów są mniej lub więcej skomplikowanemi połączeniami dwóch powyżej wymienionych.

Kapitał pośmiertny może być ubezpieczany: albo natychmiastowo, t. j. gdy się wypłaca po śmierci osoby ubezpieczonej bez względu na to, kiedy takowa nastąpi — choćby zaraz po zapłaceniu pierwszej premii; albo z odroczeniem, gdy się wypłaca tylko w takim razie, jeżeli osoba ubezpieczona umrze dopiero po upływie pewnego z góry oznaczonego terminu.

Zarówno ubezpieczenia natychmiastowe jak i odroczone mogą być zawierane dośmiertnie, gdy umowa trwa przez całe życie osoby ubezpieczonej; albo czasowo, jeżeli umowa trwa tylko przez czas pewien.

Wynika stąd, że ubezpieczenia czysto pośmiertne można podzielić na następujące cztery typowe kategorye, na

1° Ubezpieczenie natychmiastowe dośmiertne (Versicherung auf Lebenszeit, — Assurance pour la vie entière, — Whole life insurance), często nazywane zwyczajnem ubezpieczeniem pośmiertnem, w którem kapitał wypłaca się po śmierci ubezpieczonego bez względu na to, kiedy takowa nastąpi, i gdy umowa trwa przez całe życie.

2° Ubezpieczenie odroczone pośmiertne (Lebensversicherung mit Carenzzeit), gdy kapitał wypłaca się w razie, jeżeli osoba ubezpieczona umrze dopiero po upływie pewnego, z góry oznaczonego terminu, i umowa trwa przez całe życie. Lata odroczenia bywają, w obecnym przypadku, nazywane latami próby (Carenzzeit);

3⁰ Ubezpieczenie natychmiastowe czasowe (Kurze Lebensversicherung, — Assurance temporaire d'un capital, — Term insurance), gdy kapitał wypłaca się w razie, jeżeli osoba ubezpieczona umrze w ciągu pewnej, bezpośrednio po zawarciu ubezpieczenia następującej, liczby lat, po upływie której umowa traci moc obowiązującą; wreszcie

4⁰ Ubezpieczenie odroczone czasowe (Kurze Lebensversicherung mit Carenzzeit), gdy kapitał wypłaca się wtedy tylko, jeżeli ubezpieczony umrze po upływie pewnego terminu i w ciągu z góry oznaczonej liczby lat, bezpośrednio po latach odroczenia następujących.

We wszystkich powyższych przypadkach można ubezpieczać kapitały stałe lub zmienne, t. j. rosnące albo malejące z biegiem lat trwania ubezpieczeń.

Za wysokość ubezpieczonego kapitału, przy wyprowadzaniu wzorów, przyjmować będziemy jednostkę monetarną, znając bowiem premię za ubezpieczenie 1-ki kapitału, łatwo — przez proste mnożenie — oznaczyć się daje premia za ubezpieczenie kapitału dowolnie wysokiego.

Jednorazową premię, czyli teraźniejszą wartość matematyczną ubezpieczonego kapitału na dożycie, dla osoby x letniej, oznaczać będziemy przez

$$\overset{d}{\mathrm{K}}_x,$$

gdzie d, umieszczone nad K, wyobraża kapitał na dożycie. Jednorazową premię, czyli teraźniejszą wartość matematyczną ubezpieczonego kapitału pośmiertnego oznaczać będziemy przez

$$\overset{s}{\mathrm{K}}_x,$$

gdzie znów s, napisane nad K , oznacza kapitał pośmiertny.

Ubezpieczenia odroczone i czasowe znaczyć będziemy, podobnie jak w rentach, przez

$${}_n\overset{s}{\mathrm{K}}_x \quad \text{resp.} \quad {}^n\overset{s}{\mathrm{K}}_x.$$

Na oznaczanie premij peryodycznych użyjemy takiego samego systemu, jak przy rentach; więc np. za symbol stałej premii rocznej, płaconej co μ-a część roku przez lat l, za czasowe ubezpieczenie jednostki kapitału pośmiertnego, przyjmiemy

$${}^{l}_{\frac{\mu}{\mu}}p\left\{{}^n\overset{s}{\mathrm{K}}_x\right\}.$$

Symbolem premii rocznie płatnej przez l lat i stale, co lat ν, rosnącej w ciągu lat k ($k \leq l$ i wielokrotne względem ν) za dośmiertne ubezpieczenie 1-ki kapitału pośmiertnego, odroczonego na lat n, będzie

$${}^{<(k,\nu)}_{\quad l}p\left\{{}_n\overset{s}{\mathrm{K}}_x\right\}.$$

Gdyby roczna premia miała być płaconą przez cały czas odroczenia (przez n lat) i rosła stale co rok, symbol powyższy zmieniłby swój kształt na

$$\overset{<(n)}{{}^{n}p}\left\{{}_{n}\overset{s}{K}_{x}\right\}.$$

Symboliczne oznaczenia innych rodzajów ubezpieczeń kapitałów podawać będziemy stopniowo, w miarę jak zajdzie tego potrzeba.

60. Ubezpieczenie kapitału na dożycie. Ubezpieczeniem kapitału na dożycie nazywa się umowa, na zasadzie której instytucya, wzamian za jednorazową opłatę lub za peryodycznie wnoszone przez ubezpieczonego premie, obowiązuje się temuż wypłacić pewną ściśle oznaczoną sumę pieniędzy w razie, jeżeli ubezpieczony żyć będzie w chwili płatności kapitału. Gdyby ubezpieczony umarł przed oznaczonym terminem, wniesione przez niego premie zwracają się lub przechodzą na rzecz instytucyi, stosownie do umowy.

Wypada stąd przedewszystkiem, że, jak przy rentach tak i przy ubezpieczaniu kapitałów na dożycie, stan zdrowia ubezpieczających się jest dla instytucyi obojętny i dla tego nie podlegają oni badaniu lekarskiemu.

O ubezpieczeniach ze zwrotem premij mówić będziemy szczegółowo w następnym rozdziale; tutaj zajmiemy się tylko ubezpieczeniami bez zwrotu premij w razie wcześniejszej śmierci ubezpieczonego.

Niech będzie λ_x osób x letnich, ubezpieczających sobie na dożycie po 1-ce kapitału, płatnego po upływie n lat każdej z tych osób, która rzeczonego terminu dożyje. Dożyje zaś rzeczonego terminu osób λ_{x+n}, instytucya wypłaci im λ_{x+n} jednostek, które w chwili zawierania umowy są warte $\lambda_{x+n}\rho^n$.

Ponieważ szukaną wartość omawianego ubezpieczenia, czyli jednorazową premię za takowe, umówiliśmy się oznaczać przez

$${}_{n}\overset{d}{K}_{x},$$

przeto każda z ubezpieczających się osób, w chwili zawarcia umowy, płaci instytucyi jednorazowo ${}_{n}\overset{d}{K}_{x}$, a λ_x osób wnosi kwotę

$${}_{n}\overset{d}{K}_{x}.\lambda_x.$$

Suma ta winna być równą jednoczesnej wartości mających się przez instytucyę uskutecznić wypłat, t. j.

$${}_{n}\overset{d}{K}_{x}.\lambda_x = \lambda_{x+n}.\rho^n,$$

skąd

$${}_{n}\overset{d}{K}_{x} = \frac{\lambda_{x+n}.\rho^n}{\lambda_x} = \frac{\lambda_{x+n}\rho^{x+n}}{\lambda_x\rho^x}, \text{ czyli}$$

(141) $${}_{n}\overset{d}{K}_{x} = \frac{v_{x+n}}{v_x}.$$

Za ubezpieczenie np. 1-o letniemu dziecku 1-ki kapitału, płatnego w chwili dojścia tegoż do pełnoletności, czyli po ukończeniu 21 lat życia, wypada na jednorazową premię

$$ {}_{20}\overset{d}{\mathrm{K}}_1 = \frac{v_{21}}{v_1} = \frac{44\,958,04}{118\,543,0} = 0,379\,26; $$

za ubezpieczenie 5 000 fr. 0,379 26 × 5 000 = 1 896,30 fr.

Gdybyśmy tę ostatnią sumę oddali na procent składany do kasy oszczędności, to po 20-u latach, przy $3^1/_2{}^0/_0$, mielibyśmy tylko (Tabl. IV, kol. 4)

$$ 1,989\,788\,86 \times 1\,896,30 = 3\,773,24 \text{ fr.}, $$

t. j. mniej o 1 226,76 fr., aniżeli daje ubezpieczenie.

Na pokrycie owych 1 226,76 fr. składają się w ciągu 20 lat zmarłe osoby, którym wniesione premie się nie zwracają. Jeżeliby, zamiast wskazanej przez tablicę śmiertelności liczby osób, umarło mniej, na pokrycie rzeczonych 1 226,76 fr. zabrakłoby, oczywiście, pieniędzy, czyli instytucya poniosłaby stratę; gdyby naodwrót umarło więcej osób, byłby zysk. Możność zajścia straty lub zysku stanowi istotę ryzyka, w ubezpieczeniach zatem na dożycie, podobnie jak i w innych rodzajach ubezpieczeń, tkwi pierwiastek ryzyka, czemu starają się zaprzeczyć niezbyt kompetentni autorzy dziennikarskich artykułów. Wprawdzie przez dodanie do premii netto pewnego procentu na administracyę zwiększa się premia, ale okoliczność ta w niczem nie zmienia istoty rzeczy, gdyż dodatek na administracyę ma swoje specyalne przeznaczenia, bez zadosyćuczynienia którym żadna instytucya egzystowaćby nie mogła.

Premie peryodyczne, podobnie jak przy rentach odroczonych, w rozmaity sposób mogą być wnoszone i obliczają się na tej samej zasadzie, jaką podaliśmy w art. 56.

Trzymając się powołanej zasady, wypadają wzory:

Dla stałej premii rocznej, płatnej rocznie przez lat l,

$$ (142) \qquad {}^{l}p\left\{{}_{n}\overset{d}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{{}_{n}\overset{d}{\mathrm{K}}_x}{{}^{l}\mathrm{R}_x} = \frac{v_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}}; $$

dla płatnej przez lat n

$$ (142') \qquad {}^{n}p\left\{{}_{n}\overset{d}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{v_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}. $$

Dla stałej premii rocznej, płatnej przez lat l w ratach co μ-a część roku,

$$ (143) \qquad {}^{\;l}_{\frac{\mu}{\mu}}p\left\{{}_{n}\overset{d}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{{}_{n}\overset{d}{\mathrm{K}}_x}{{}^{l}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{\mu}{\mu}\right)}} = \frac{v_{x+n}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}) - \frac{\mu-1}{2\mu}(v_x - v_{x+l})}; $$

dla płatnej przez lat n

$$ (143') \qquad {}^{\;n}_{\frac{\mu}{\mu}}p\left\{{}_{n}\overset{d}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{v_{x+n}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - \frac{\mu-1}{2\mu}(v_x - v_{x+n})}. $$

Dla pierwszej premii rocznej, rosnącej corocznie, przez n lat, o swą pierwotną wysokość

$$(144) \qquad {}^{n}\overset{<(n)}{p}\left\{{}_{n}\overset{d}{\mathrm{K}}_{x}\right\} = \frac{{}_{n}\overset{d}{\mathrm{K}}_{x}}{{}^{n}\overset{<(n)}{\mathrm{R}}_{x}} = \frac{v_{x+n}}{\Sigma\Sigma v_x - \Sigma\Sigma v_{x+n} - n\,\Sigma v_{x+n}}\,.$$

Dla malejącej co ν lat po $\frac{\nu}{2n}$

(145)

$${}^{n}\overset{>(n,\nu)}{p}\left\{{}_{n}\overset{d}{\mathrm{K}}_{x}\right\} = \frac{{}_{n}\overset{d}{\mathrm{K}}_{x}}{{}^{n}\overset{>(n,\nu)}{\mathrm{R}}_{x}} = \frac{v_{x+n}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - \frac{\nu}{2n}(\Sigma v_{x+\nu} + \Sigma v_{x+2\nu} + \ldots + \Sigma v_{x+n-\nu} - \frac{n-\nu}{\nu}\Sigma_{x+n})}$$

i tak dalej.

Tak np., za ubezpieczenie 1-o letniemu dziecku 1-ki kapitału, płatnego po przeżyciu 20-u lat, powinniśmy corocznie przez lat 20 płacić stale po

$${}^{20}p\left\{{}_{20}\overset{d}{\mathrm{K}}_{1}\right\} = \frac{v_{21}}{\Sigma v_1 - \Sigma v_{21}} = 0{,}030\,71\,;$$

za ubezpieczenie 5000 fr. po 0,030 71 × 5 000 = 153,55 fr. rocznie.

Te same premie, lecz płacone w ratach kwartalnych, wynoszą rocznie od 1-ki kapitału

$${}^{20}_{\frac{4}{4}}p\left\{{}_{20}\overset{d}{\mathrm{K}}_{1}\right\} = \frac{v_{21}}{(\Sigma v_1 - \Sigma v_{21}) - \frac{3}{8}(v_1 - v_{21})} = 0{,}031\,30\,;$$

od 5 000 fr. po 0,031 30 × 5 000=156,50 fr. rocznie, skąd na premię kwartalną wypada $\frac{156{,}50}{4} = 39{,}125$ fr.

Gdyby chodziło o płacenie premij rosnących w sposób podany we wzorze (144), na pierwszą premię od 1-ki kapitału otrzymujemy

$${}^{20}\overset{<(20)}{p}\left\{{}_{20}\overset{d}{\mathrm{K}}_{1}\right\} = \frac{v_{21}}{\Sigma\Sigma v_1 - \Sigma\Sigma v_{21} - 20\,\Sigma v_{21}} = 0{,}003\,42\,;$$

od 5 000 fr. 0,003 42 × 5 000 = 17,10 fr., czyli pierwsza premia roczna wynosiłaby 17,10 fr., każda następna byłaby większa od poprzedniej o 17,10 fr., aż ostatnia wzrosłaby do 17,10 × 20 = 342 fr.

Ubezpieczenia kapitałów czysto dożyciowych znajdują przedewszystkiem zastosowanie, gdy chodzi o zabezpieczenie posagów dzieciom, dla tego czasami bywają nazywane „ubezpieczeniami posagowemi". Ta jednak forma zabezpieczania posagów, przy premiach peryodycznych, może się stać zawodną, w razie bowiem śmierci opłacającego premie (np. ojca), najczęściej zachodzi trudność, często zupełna niemożność dalszego wnoszenia premij, przez co ubezpieczenie upada i zamierzony cel nie zostaje osiągnięty. Alternatywie tej starają się instytucye zapobiedz przez inną kombinacyę, o której w dalszym ciągu (art. 67) mówić będziemy.

61. PREMIE JEDNORAZOWE ZA ZWYCZAJNE UBEZPIECZENIE KAPITAŁÓW POŚMIERTNYCH. Przystępujemy teraz do najważniejszego działu ubezpieczeń życiowych, mianowicie do t. z. ubezpieczeń pośmiertnych.

Ubezpieczeniem kapitału pośmiertnego zowie się umowa, na podstawie której instytucya, wzamian za jednorazową opłatę lub za peryodycznie wnoszone premie, obowiązuje się po śmierci ubezpieczonego wypłacić jego spadkobiercom prawnym lub osobom imiennie wskazanym pewną, z góry ściśle oznaczoną, sumę pieniędzy.

Ponieważ wypłatę kapitału decyduje tu śmierć ubezpieczonego, skutkiem czego dla instytucyi rezultat jest tem mniej korzystny, im wcześniej ubezpieczony umrze, a — ogólnie biorąc—śmierć tem wcześniej następuje, im słabszy jest organizm, przeto instytucye poddają kandydatów do tego rodzaju ubezpieczeń badaniu lekarskiemu i przyjmują tylko takie osoby, które się dostatecznie zdrowemi okazują.

Weźmy najprzód pod uwagę natychmiastowe dośmiertne ubezpieczenie 1-ki kapitału, płatnego przy końcu roku ubezpieczeniowego, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi.

Przypuśćmy, że się ubezpiecza jednocześnie λ_x osób, t. j. tyle, ilu żyjących, w wieku lat x, wykazuje tablica śmiertelności.

W ciągu pierwszego roku umiera osób $\lambda_x - \lambda_{x+1} = \tau_x$; przy końcu zatem pierwszego roku wypłaci instytucya τ_x jednostek (monetarnych), które w chwili zawierania umowy są warte $\tau_x . \rho$. W ciągu drugiego roku umiera $\lambda_{x+1} - \lambda_{x+2} = \tau_{x+1}$ osób; przy końcu drugiego roku wypłaci instytucya τ_{x+1} jednostek, których wartość na początku pierwszego roku wynosi $\tau_{x+1} . \rho^2$. Rozumując w podobny sposób dalej, widzimy, że wartość obecna wypłat, dokonywanych przy końcu trzeciego, czwartego i t. d. roku, wynosi: $\tau_{x+2}\rho^3$; $\tau_{x+3} . \rho^4$ i t. d., a obecna wartość wszystkich spodziewanych wypłat równa się $\tau_x . \rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \tau_{x+2}\rho^3 + \ldots$ do końca tablicy śmiertelności. Taką wartość wnieść powinny jednorazowo wszystkie osoby ubezpieczone.

Jeżeli więc premię jednorazową za ubezpieczenie, przez osobę x letnią, 1-ki kapitału, płatnego przy końcu roku ubezpieczeniowego, w którym śmierć pomienionej osoby nastąpi, oznaczymy przez $\overset{s}{K}_x$, to być powinno

$$\overset{s}{K}_x . \lambda_x = \tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \tau_{x+2}\rho^3 + \ldots,$$

skąd

$$\overset{s}{K}_x = \frac{\tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \tau_{x+2}\rho^3 + \ldots}{\lambda_x}.$$

Pomnożywszy licznik i mianownik strony drugiej przez ρ^x, wypada

$$\overset{s}{K}_x = \frac{\tau_x\rho^{x+1} + \tau_{x+1}\rho^{x+2} + \tau_{x+2}\rho^{x+3} + \ldots}{\lambda_x\rho^x},$$

lub, zgodnie z oznaczeniami art. 40-go,

$$\overset{s}{K}_x = \frac{m_x + m_{x+1} + m_{x+2} + \ldots}{v_x},$$

albo symbolicznie

$$(146) \qquad \overset{s}{K}_x = \frac{\Sigma m_x}{v_x}.$$

Tak np., za ubezpieczenie 1-ki kapitału pośmiertnego, osoba 30-o letnia zapłacić powinna jednorazowo

$$\overset{s}{K}_{30} = \frac{\Sigma m_{30}}{v_{30}} = \frac{10\,664,17}{30\,743,98} = 0,346\,870;$$

za ubezpieczenie 5000 fr. 0,346870 × 5000 = 1734,35 fr.

I w ogóle, dla ułożenia taryfy jednorazowych premij netto za ubezpieczenie 1-ki kapitału, płatnego przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi, należy liczby kol. 8 (tab. IX) podzielić przez liczby kol. 4 w tym samym wierszu stojące. Taryfę taką podajemy w tab. X, kol. 2, począwszy od 20-go roku życia.

Według wzoru (110) w art. 42

$$\Sigma m_x = v_x - \frac{r-1}{r}\Sigma v_x,$$

co podstawiwszy w (146), otrzymujemy wzór

$$(146') \qquad \overset{s}{K}_x = 1 - \frac{r-1}{r} \cdot \frac{\Sigma v_x}{v_x} = 1 - \frac{r-1}{r} R_x,$$

który pozwala obliczać szukane premie z sumy zdyskontowanych liczb osób żyjących, resp. ze znanych nam już wartości rent dożywotnich.

Np. dla $x = 30$,

$$\overset{s}{K}_{30} = 1 - \frac{0,035}{1,035} \times \frac{593\,788,92}{30\,743,98} = 1 - \frac{0,035}{1,035} \times 19,313\,99 = 0,346\,870.$$

Z drugiego wyrażenia wzoru (146′) wypada

$$(146'') \qquad R_x = r.\frac{1 - \overset{s}{K}_x}{r-1}.$$

Wzór (146″) pozwala obliczać wartość rent dożywotnich z wartości kapitałów pośmiertnych — podobnie, jak (146′) służy za przejście od wartości rent do wartości kapitałów pośmiertnych.

Dotąd zakładaliśmy, że kapitał zostaje wypłacony dopiero przy końcu roku ubezpieczeniowego, w którym śmierć nastąpi; jeżeli zaś kapitał ma być wypłacony nie przy końcu roku, lecz zaraz po śmierci ubezpieczonego, wzór (146) ulegnie pewnej modyfikacyi.

Za pomocą rachunku wyższego można na ten drugi przypadek wyprowadzić wzór bardzo ścisły. Ponieważ jednak rachunek wyższy z naszego wykładu wyłączyliśmy, poprzestać więc musimy tylko na wzorze przybliżonym, który wszakże dla praktyki zupełnie wystarcza.

Jeżeli jest dostatecznie wielka liczba osób ubezpieczonych, to, jak wiadomo, bez wielkiego błędu przyjąć można, że wypadki śmierci rozkładają się jednostajnie na cały rok, a tem samem, że wszystkie wypadki śmierci można uważać za zachodzące jednocześnie w połowie roku, resp. że kapitały pośmiertne stale wypłacają się nie przy końcu, lecz w połowie roku ubezpieczeniowego.

Przyjąwszy λ_x za liczbę jednocześnie ubezpieczonych osób, w ciągu pierwszego roku umiera z nich $\lambda_x - \lambda_{x+1} = \tau_x$, t. j. w połowie pierwszego roku wypłaca instytucya τ_x jednostek, które na początku roku są warte $\tau_x . \rho^{\frac{1}{2}}$.

W połowie drugiego roku umiera osób $\lambda_{x+1} - \lambda_{x+2} = \tau_{x+1}$, instytucya wypłaca, sukcesorom po osobach zmarłych, τ_{x+1} jednostek, przedstawiających na początku pierwszego roku wartość $\tau_{x+1}\ \rho^{\frac{3}{2}}$ i t. d. do końca tablicy.

Wszystkie mające się wypłacić kwoty są zatem w chwili zawierania umowy warte

$$\tau_x\rho^{\frac{1}{2}} + \tau_{x+1}\rho^{\frac{3}{2}} + \tau_{x+2}\rho^{\frac{5}{2}} + \dots,$$

czyli

$$\overset{s}{K}'_x . \lambda_x = \tau_x\rho^{\frac{1}{2}} + \tau_{x+1}\rho^{\frac{3}{2}} + \tau_{x+2}\rho^{\frac{5}{2}} + \dots,$$

skąd

$$\overset{s}{K}'_x = \frac{\tau_x\rho^{\frac{1}{2}} + \tau_{x+1}\rho^{\frac{3}{2}} + \tau_{x+2}\rho^{\frac{5}{2}} + \dots}{\lambda_x}.$$

Po pomnożeniu licznika i mianownika przez ρ^{x+1}

$$\overset{s}{K}'_x = r^{\frac{1}{2}} . \frac{m_x + m_{x+1} + m_{x+2} + \dots}{v_x},$$

t. j., pisząc symbolicznie, wypada wzór

$$\overset{s}{K}'_x = \frac{r^{\frac{1}{2}} . \Sigma m_x}{v_x}, \tag{147}$$

różniący się od (146) tylko czynnikiem $r^{\frac{1}{2}}$.

Rezultat taki łatwo można było przewidzieć, obecny bowiem przypadek różni się od poprzedniego o pół roku wcześniejszą wypłatę; za tę samą więc premię, jaką podaje wzór (146), można ubezpieczyć kapitał płatny w połowie roku, resp. zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, ale kapitał mniejszy od płatnego przy końcu roku o półroczny procent. Jeżeli zatem kapitał, płatny zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, ma być równy płatnemu przy końcu roku, należna zań premia musi być o półroczny procent większą od premii przynależnej za ubezpieczenie kapitału płatnego przy końcu roku ubezpieczeniowego.

Dla osoby 30-o letniej

$$\overset{s}{K}'_{30} = \frac{r^{\frac{1}{2}}\Sigma m_{30}}{v_{30}} = \frac{(1,035)^{\frac{1}{2}} \times 10664,17}{30743,98} = 0,352888;$$

od 5000 fr. premia wynosi 0,352888 × 5000 = 1764,44 fr., t. j. o 30,09 więcej niż w poprzednim przypadku, gdy kapitał miał być wypłacony przy końcu roku ubezpieczeniowego.

Różnica taka jest nieznaczna wobec dodatku na administracyę, dochodzącego od 20% do 40% premii netto — zwłaszcza, że kapitał nigdy zaraz po śmierci się nie wypłaca, gdyż dostarczenie potrzebnych instytucyi dowodów śmierci, z konieczności opóźnia termin wypłaty ubezpieczonego kapitału.

To też niektóre instytucye, szczególniej angielskie, unikając zbytecznych obliczeń, zamiast wzoru (147) używają, do obliczania premij za ubezpieczenie kapitałów pośmiertnych, prostszego wzoru (146).

Zresztą zależy to od zapatrywania. Według Dormoy, we Francyi przyjmują za podstawę wypłatę kapitału na początku roku ubezpieczeniowego, w którym śmierć następuje; wówczas wzór (146) resp. (147) przeobraża się na

$$(148) \qquad \overset{s}{K}''_x = \frac{r\Sigma m_x}{v_x} = r - (r \quad 1)\, R_x,$$

albo, podstawiwszy $R_x = {}_1R_x + 1$,

$$(148') \qquad \overset{s}{K}''_x = r - (r - 1) - (r - 1)\,.\,{}_1R_x = 1 - (r - 1)\,.\,{}_1R_x.$$

Jest to wzór identyczny z wzorem (80), podanym przez Dormoy w tomie I na str. 170.

Z pośród powyższych trzech wzorów (146), (147) i (148), najodpowiedniejszym jest wzór (147).

62. PREMIE PERYODYCZNE ZA ZWYCZAJNE UBEZPIECZENIE KAPITAŁÓW POŚMIERTNYCH. Do wyprowadzenia wzorów na premie peryodyczne służy, podobnie jak i przy ubezpieczeniach na dożycie, zasada podana w art. 56 i odpowiednie wzory na rozmaitego rodzaju renty.

Rozróżnić należy premie stałe, płatne do śmierci lub przez czas ograniczony, oraz premie zmienne, malejące albo rosnące co rok lub co lat kilka. I tak:

Dla premij stałych, rocznie aż do śmierci płatnych, służą wzory

$$(149) \qquad p\{\overset{s}{K}_x\} = \frac{\overset{s}{K}_x}{R_x} = \frac{\Sigma m_x}{\Sigma v_x},$$ gdy kapitał ma być wypłacony przy końcu roku ubezpieczeniowego, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi;

(149′) $p\left\{\overset{s}{\mathrm{K}}{}'_x\right\} = \frac{\overset{s}{\mathrm{K}}{}'_x}{\mathrm{R}_x} = \frac{r^{\frac{1}{2}}\Sigma m_x}{\Sigma v_x}$, gdy kapitał ma być wypłacony zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej.

Dla premij stałych rocznych płatnych co μ-a część roku

$$\underset{\overline{\mu}}{{}_{\mu}p}\left\{\overset{s}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_x}{\Sigma v_x - \frac{\mu - 1}{2\mu} v_x}, \tag{150}$$

$$\underset{\overline{\mu}}{{}_{\mu}p}\left\{\overset{s}{\mathrm{K}}{}'_x\right\} = \frac{r^{\frac{1}{2}}\Sigma m_x}{\Sigma v_x - \frac{\mu - 1}{2\mu} v_x}. \tag{150′}$$

Np., za ubezpieczenie 1-ki kapitału, płatnego przy końcu roku ubezpieczeniowego, w którym śmierć nastąpi, osoba 30-o letnia powinna płacić rocznie aż do śmierci po

$$p\left\{\overset{s}{\mathrm{K}}_{30}\right\} = \frac{\Sigma m_{30}}{\Sigma v_{30}} = \frac{10\,664{,}17}{593\,788{,}92} = 0{,}017\,960,$$

od 5000 fr. po 0,017960 × 5000 = 89,80 fr.;

kwartalnie po

$$\frac{\underset{\overline{4}}{{}_{4}p}\left\{\overset{s}{\mathrm{K}}_{30}\right\}}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Sigma m_{30}}{\Sigma v_{30} - \frac{3}{8} v_{30}} = \frac{0{,}25 \times 10\,664{,}17}{593\,788{,}92 - 0{,}375 \times 30\,743{,}98} = 0{,}004\,579,$$

od 5000 fr. po 0,004579 × 5000 = 22,895 fr.

Za ubezpieczenie 1-ki kapitału, płatnego zaraz po śmierci, rocznie po

$$p\left\{\overset{s}{\mathrm{K}}{}'_{30}\right\} = \frac{(1{,}035)^{\frac{1}{2}}\Sigma m_{30}}{\Sigma v_{30}} = 0{,}018\,272,$$

od 5000 fr. po 0,018272 × 5000 = 91,36 fr.;

kwartalnie po

$$\frac{\underset{\overline{4}}{{}_{4}p}\left\{\overset{s}{\mathrm{K}}{}'_{30}\right\}}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(1{,}035)^{\frac{1}{2}}\Sigma m_{30}}{\Sigma v_{30} - \frac{3}{8} v_{30}} = 0{,}004\,658,$$

od 5000 fr. po 0,004658 × 5000 = 23,29 fr.

Taryfę premij netto, obliczoną ze wzoru (149), podajemy w tab. X, kol. 3. Tabelarycznie otrzymuje się z tab. IX, dzieląc liczby kol. 8 przez liczby kol. 5 w tym samym wierszu stojące. Ze wzoru (149) łatwo przejść można do wyrażenia premij rocznych za pośrednictwem samych tylko zdyskontowanych liczb osób żyjących, resp. za pomocą wartości rent dożywotnich.

Podstawiając mianowicie za Σm_x znane nam, ze wzoru (110), wyrażenie

$$\Sigma m_x = v_x - \frac{r-1}{r} \Sigma v_x,$$

otrzymujemy

$$(149'') \qquad p\left\{\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x\right\} = \frac{v_x}{\Sigma v_x} - \frac{r-1}{r} = \frac{1}{\frac{\Sigma v_x}{v_x}} - \frac{r-1}{r} = \frac{1}{\mathrm{R}_x} - \frac{r-1}{r}.$$

Stąd naodwrót

$$(149''') \qquad \mathrm{R}_x = \frac{1}{p\left\{\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x\right\} + \frac{r-1}{r}},$$

co podstawiwszy w (146′) wypada

$$(149'''') \qquad \overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x = \frac{p\left\{\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x\right\}}{p\left\{\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x\right\} + \frac{r-1}{r}},$$

jako związek pomiędzy premią jednorazową i roczną.

Dla premij stałych, rocznie przez l lat płatnych, wypada

$$(151) \qquad {}^{l}p\left\{\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x\right\} = \frac{\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x}{{}^{l}\mathrm{R}_x} = \frac{\Sigma m_x}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}},$$

$$(151') \qquad {}^{l}p\left\{\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}'_x\right\} = \frac{\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}'_x}{{}^{l}\mathrm{R}_x} = \frac{r^{\frac{1}{2}} \Sigma m_x}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}}.$$

Dla premij stałych, płatnych przez l lat co μ-a część roku, otrzymujemy

$$(152) \qquad {}^{\;l}_{\frac{\mu}{\mu}}p\left\{\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_x}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}) - \frac{\mu-1}{2\mu}(v_x - v_{x+l})},$$

$$(152') \qquad {}^{\;l}_{\frac{\mu}{\mu}}p\left\{\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}'_x\right\} = \frac{r^{\frac{1}{2}} \Sigma m_x}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}) - \frac{\mu-1}{2\mu}(v_x - v_{x+l})}.$$

Tego rodzaju ubezpieczenia zowią się ubezpieczeniami kapitałów pośmiertnych ze skróconym czasem płacenia premij i polegają widocznie na tem, że się ubezpieczony przez dowolną liczbę lat załatwia z opłatą premij, podczas gdy kapitał zostaje wypłacony dopiero po śmierci ubezpieczonego, bez względu na to, kiedy takowa nastąpi — podczas płacenia premij, czy też po ukończeniu. Ze względu, iż przy opłacie premij do śmierci, w razie długoletniego życia, starość człowieka może być obarczoną zobowiązaniami pieniężnemi, którym ewentualnie, właśnie skutkiem podeszłego wieku, możemy nie módz zadość uczynić, ubezpieczenia ze skróconym czasem płacenia premij nabierają wielkiej wagi i całkowicie wyrugować powinny system płacenia premij do śmierci.

Odnośne taryfy można układać w dwojaki sposób: albo z ustaleniem liczby lat, przez jaką premie mają być płacone; albo z ustaleniem wieku do jakiego premie płacić należy. W pierwszym razie, we wzorzach (151), (151′), (152) i (152′) jest l stałe, a $x + l$ zmienne; w drugim przypadku naodwrót l zmienne, a $x + l$ stałe.

Gdyby wreszcie chodziło o premie zmienne rosnące lub malejące, należy mianowniki poprzednich wzorów zmienić stosownie do warunków płacenia premij według tego, cośmy o rentach powiedzieli.

Tak np. dla pierwszej premii rocznej, rosnącej corocznie, przez l lat, o swą pierwotną wysokość, wypada

$$\overset{<(l)}{{}^{l}p}\left\{\overset{s}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_x}{\Sigma\Sigma v_x - \Sigma\Sigma v_{x+l} - l\,\Sigma v_{x+l}}; \tag{153}$$

dla malejącej co ν lat po $\frac{\nu}{2l}$

$$\overset{>(l,\nu)}{{}^{l}p}\left\{\overset{s}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_x}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}) - \frac{\nu}{2l}\left(\Sigma v_{x+\nu} + \Sigma v_{x+2\nu} + \ldots + \Sigma v_{x+l-\nu} - \frac{l-\nu}{\nu}\Sigma v_{x+l}\right)} \tag{154}$$

i tak dalej.

Ponieważ, jak to w następnym rozdziale zobaczymy, towarzystwa przyjmują w zasadzie tylko premie roczne, a rozkład na premie półroczne, kwartalne i miesięczne dokonywa się systemem zwykłego oprocentowania; zaś premie zmienne nader rzadko bywają w użyciu — przeto w dalszym ciągu naszego wykładu nie będziemy już podawali wzorów ani na jedne, ani na drugie, poprzestając na samych premiach jednorazowych i rocznych. Do takiego skrócenia sobie pracy tem bardziej uważamy się za upoważnionych, że na zasadzie tego, cośmy dotąd powiedzieli, czytelnicy nasi, w razie potrzeby — mając na uwadze wyprowadzone przez nas wzory na renty — sami sobie potrzebne im wzory niewątpliwie wyprowadzić potrafią.

63. ODROCZONE UBEZPIECZENIE KAPITAŁÓW POŚMIERTNYCH. Gdy kapitał pośmiertny wypłaca się tylko w takim razie, jeżeli osoba ubezpieczona umrze dopiero po upływie pewnej, z góry ściśle oznaczonej, liczby lat, zwanych latami próby (Carenzzeit), w razie zaś wcześniejszej śmierci, wszelkie zobowiązania instytucyi upadają, to ubezpieczenie takie zowie się odroczonem.

Przypuśćmy, że kapitał pośmiertny wypłaca się tylko wtedy, jeżeli ubezpieczony umrze po n latach, licząc od chwili zawarcia umowy. Z λ_x jednocześnie ubezpieczonych osób przeżyje n lat λ_{x+n} osób; z tych w $(n+1)$-ym roku umrze osób $\lambda_{x+n} - \lambda_{x+n+1} = \tau_{x+n}$ i instytucya przy końcu $(n + 1)$-go roku ubezpieczeniowego wypłaci τ_{x+n} jednostek monetarnych, które w chwili zawierania umowy przedstawiają wartość $\tau_{x+n}\rho^{n+1}$. W ciągu $(n + 2)$-go roku umrze τ_{x+n+1} osób, a wypłacona ich sukcesorom suma posiada, w chwili zawierania umowy, wartość $\tau_{x+n+1}\rho^{n+2}$. Rozumując w taki sam sposób dalej, aż do końca tablicy śmiertelności, na szukaną wartość omawianych ubezpieczeń wypada

$$\tau_{x+n}\rho^{n+1} + \tau_{x+n+1}\rho^{n+2} + \tau_{x+n+2}\rho^{n+3} + \ldots$$

Ponieważ obecną wartość ubezpieczenia odroczonego, czyli premię jednorazową za takowe, umówiliśmy się oznaczać przez ${}_n\overset{s}{\mathrm{K}}_x$, zatem powinno być

$${}_n\overset{s}{\mathrm{K}}_x . \lambda_x = \tau_{x+n}\rho^{n+1} + \tau_{x+n+1}\rho^{n+2} + \tau_{x+n+2}\rho^{n+3} + \ldots,$$

skąd

$${}_n\overset{s}{\mathrm{K}}_x = \frac{\tau_{x+n}\rho^{n+1} + \tau_{x+n+1}\rho^{n+2} + \tau_{x+n+2}\rho^{n+3} + \ldots,}{\lambda_x}.$$

Mnożąc licznik i mianownik przez ρ^x

$${}_n\overset{s}{\mathrm{K}}_x = \frac{m_{x+n} + m_{x+n+1} + m_{x+n+2} + \ldots}{v_x},$$

albo symbolicznie

(155) $${}_n\overset{s}{\mathrm{K}}_x = \frac{\Sigma m_{x+n}}{v_x},$$ gdy kapitał ma być płacony przy końcu roku ubezpieczeniowego, w którym śmierć nastąpi; jeżeli zaś kapitał ma być wypłacony zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, to

(155') $${}_n\overset{s}{\mathrm{K}}'_x = \frac{r^{\frac{1}{2}} . \Sigma m_{x+n}}{v_x}.$$

Pomnożywszy stronę drugą wzoru (155) przez $\frac{v_{x+n}}{v_{x+n}} = 1$, otrzymujemy

(156) $${}_n\overset{s}{\mathrm{K}}_x = \frac{v_{x+n}}{v_x} \cdot \frac{\Sigma m_{x+n}}{v_{x+n}} = \frac{v_{x+n}}{v_x} \cdot \overset{s}{\mathrm{K}}_{x+n},$$

co znaczy, że wartość odroczonego ubezpieczenia kapitału pośmiertnego równa się wartości ubezpieczenia natychmiastowego dla osoby starszej, od osoby zawierającej umowę, o liczbę lat odroczenia, pomnożonej przez stosunek zdyskontowanej liczby osób żyjących w tym ostatnim wieku do zdyskontowanej liczby osób żyjących w wieku, jaki osoba ubezpieczona posiada w chwili zawierania umowy.

Dla osoby 30-o letniej z 10-u latami próby

$${}_{10}\overset{s}{\mathrm{K}}_{30} = \frac{\Sigma m_{40}}{v_{30}} = \frac{8\,407,969}{30\,743,98} = 0,273\,483,$$

od 5000 fr. $0,273483 \times 5000 = 1\,367,42$ fr.

$${}_{10}\overset{s}{\mathrm{K}}'_{30} = \frac{(1,035)^{\frac{1}{2}}\,\Sigma m_{40}}{v_{30}} = 0,278\,228,$$

od 5000 fr. $0,278228 \times 5000 = 1\,391,14$ fr.

Wzory na premie roczne, płatne przez lat l, przedstawiają się w kształcie

$$ {}^{l}p\left\{{}_{n}\overset{s}{\mathrm{K}}_{x}\right\} = \frac{\Sigma m_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}}, \tag{157} $$

$$ {}^{l}p\left\{{}_{n}\overset{s}{\mathrm{K}}'_{x}\right\} = \frac{r^{\frac{1}{2}}\,\Sigma m_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}}. \tag{157'} $$

Czas trwania płatności rocznych premij może być naturalnie rozmaity, czyli l może przybierać różne wartości: może być równe, mniejsze lub większe od n. Najważniejszą jest płatność premij do śmierci lub przez czas trwania lat próby ($l = n$).

Dla pierwszego przypadku

$$ p\left\{{}_{n}\overset{s}{\mathrm{K}}_{x}\right\} = \frac{\Sigma m_{x+n}}{\Sigma v_x}, \tag{158} $$

$$ p\left\{{}_{n}\overset{s}{\mathrm{K}}'_{x}\right\} = \frac{r^{\frac{1}{2}}\Sigma m_{x+n}}{\Sigma v_x}; \tag{158'} $$

dla przypadku drugiego

$$ {}^{n}p\left\{{}_{n}\overset{s}{\mathrm{K}}_{x}\right\} = \frac{\Sigma m_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}, \tag{159} $$

$$ {}^{n}p\left\{{}_{n}\overset{s}{\mathrm{K}}'_{x}\right\} = \frac{r^{\frac{1}{2}}\,\Sigma m_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}. \tag{159'} $$

Np. dla $x = 30$, $n = 10$

$$ p\left\{{}_{10}\overset{s}{\mathrm{K}}_{30}\right\} = \frac{\Sigma m_{40}}{\Sigma v_{30}} = \frac{8\,407{,}969}{593\,788{,}92} = 0{,}014160, $$

od 5000 fr. po 0,014160 × 5000 = 70,80 fr. rocznie;

$$ {}^{10}p\left\{{}_{10}\overset{s}{\mathrm{K}}_{30}\right\} = \frac{\Sigma m_{40}}{\Sigma v_{30} - \Sigma v_{40}} = \frac{8\,407{,}969}{593\,788{,}92 - 338\,818{,}12} = 0{,}032\,976, $$

od 5000 fr. po 0,032976 × 5000 = 164,88 fr. rocznie.

Ubezpieczenia odroczone kapitałów pośmiertnych nie posiadają dotąd wielkiego zastosowania, albowiem najpotrzebniejszym dla sierot jest kapitał, gdy ojciec umiera przedwcześnie, resp. gdy umiera w czasie lat próby. Posiadają jednak pewne względne znaczenie dla osób ze słabszem zdrowiem, które — nie wytrzymując ścisłej rewizyi lekarskiej — nie mogą tem samem korzystać z ubezpieczeń natychmiast obowiązujących. Lata próby mają za zadanie chronić instytucye od zbyt wielkich strat, na jakie byłyby narażone przez niezupełnie zdrowe osoby, umierające wkrótce po zawarciu ubezpieczenia. Do przedmiotu tego powrócimy jeszcze w rozdziale VI.

64. CZASOWE UBEZPIECZENIE KAPITAŁÓW POŚMIERTNYCH. Jeżeli kapitał pośmiertny wypłaca się tylko wtedy, gdy ubezpieczony umiera w ciągu pierwszych n lat po zawarciu umowy, a po upływie owych n lat umowa przestaje instytucyę obowiązywać, to ubezpieczenie takie nosi nazwę ubezpieczenia czasowego.

Z pośród λ_x osób x letnich, jednocześnie się ubezpieczających, umiera w ciągu pierwszego roku osób τ_x i instytucya, przy końcu tegoż roku, wypłaca τ_x jednostek monetarnych, które na początku roku są warte $\tau_x \rho$. W ciągu drugiego roku umiera osób τ_{x+1}; instytucya, przy końcu drugiego roku, wypłaca τ_{x+1} jednostek, posiadających, w chwili zawierania umowy, wartość $\tau_{x+1}\rho^2$ i t. d. Przy końcu n-go roku wypłaca instytucya τ_{x+n-1} jednostek, przedstawiających, w chwili zawierania umowy, wartość $\tau_{x+n-1}\rho^n$.

Gdy więc wartość pojedynczego ubezpieczenia czasowego oznaczymy przez ${}^{n}\overset{s}{\mathrm{K}}_x$, będzie

$$ {}^{n}\overset{s}{\mathrm{K}}_x \,.\, \lambda_x = \tau_x \rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \dots + \tau_{x+n-1}\rho^n, \text{ skąd} $$

$$ {}^{n}\overset{s}{\mathrm{K}}_x = \frac{\tau_x \rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \dots + \tau_{x+n-1}\rho^n}{\lambda_x}. $$

Mnożąc licznik i mianownik przez ρ^x, otrzymujemy

$$ {}^{n}\overset{s}{\mathrm{K}}_x = \frac{m_x + m_{x+1} + m_{x+2} + \dots + m_{x+n-1}}{v_x} = $$

$$ = \frac{(m_x + m_{x+1} + m_{x+2} + \dots \text{ do końca t. śm.}) - (m_{x+n} + m_{x+n+1} + \dots \text{ do końca t. śm.})}{v_x}, $$

albo symbolicznie

(160) $$ {}^{n}\overset{s}{\mathrm{K}}_x = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}}{v_x}, $$ gdy kapitał ma się wypłacać przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi.

Rezultat ten łatwo daje się wyprowadzić z wyrażeń na ubezpieczenie dośmiertne natychmiastowe i odroczone, albowiem widocznie wartość ubezpieczenia natychmiastowego dośmiertnego stanowi sumę z ubezpieczenia czasowego i odroczonego, t. j.

$$ \overset{s}{\mathrm{K}}_x = {}^{n}\overset{s}{\mathrm{K}}_x + {}_{n}\overset{s}{\mathrm{K}}_x, $$

skąd

(α) $$ {}^{n}\overset{s}{\mathrm{K}}_x = \overset{s}{\mathrm{K}}_x - {}_{n}\overset{s}{\mathrm{K}}_x. $$

Podstawiwszy w (α) wyrażenia na $\overset{s}{\mathrm{K}}_x$ i ${}_{n}\overset{s}{\mathrm{K}}_x$, ze wzorów (146) i (155), znajdujemy ten sam wzór

(160) $$ {}^{n}\overset{s}{\mathrm{K}}_x = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}}{v_x}. $$

Jeżeli kapitał ma się wypłacić zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, wzór (160) przybiera kształt

(160′) $$ {}^{n}\overset{s}{\mathrm{K}}{}'_x = r^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}}{v_x}. $$

Dla premij rocznych, płatnych przez lat l,

$$ {}^{l}p\left\{{}^{n}\overset{s}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}}, \tag{161} $$

$$ {}^{l}p\left\{{}^{n}\overset{s}{\mathrm{K}}{}'_x\right\} = r^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}}, \tag{161'} $$

gdzie l może być mniejsze lub równe n, ale nigdy nie może być większe od n.

Gdy $l = n$, wzory (161) i (161′) przechodzą na

$$ {}^{n}p\left\{{}^{n}\overset{s}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}, \tag{162} $$

$$ {}^{n}p\left\{{}^{n}\overset{s}{\mathrm{K}}{}'_x\right\} = r^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}. \tag{162'} $$

Dla $x = 30$, $n = 10$ wypada

$$ {}^{10}\overset{s}{\mathrm{K}}_{30} = \frac{\Sigma m_{30} - \Sigma m_{40}}{v_{30}} = \frac{10\,664,17 - 8\,407,969}{30\,743,98} = 0,073\,387, $$

od 5000 fr. 0,073387 × 5000 = 366,935 fr.;

$$ {}^{10}p\left\{{}^{10}\overset{s}{\mathrm{K}}_{30}\right\} = \frac{\Sigma m_{30} - \Sigma m_{40}}{\Sigma v_{30} - \Sigma v_{40}} = \frac{10\,664,17 - 8\,407,969}{593\,788,92 - 338\,818,12} = 0,008\,849, $$

od 5000 fr. po 0,008849 × 5000 = 44,245 fr. rocznie.

Ubezpieczenia czasowe bywają stosowane w tranzakcyach handlowych, gdy chodzi o zabezpieczenie zobowiązań względem osób trzecich na czas ograniczony. Tak np., jeżeli ktoś zobowiązuje się uiścić dług w ciągu lat 15-u, wtedy dla zabezpieczenia wypłaty kapitału wierzycielowi w razie wcześniejszej śmierci dłużnika, ten ostatni może zawrzeć ubezpieczenie czasowe na dłużną sumę i odnośną polisę wręczyć wierzycielowi.

W ogóle jednak ubezpieczenia czasowe kapitału pośmiertnego w swej najprostszej formie mało dotąd w praktyce bywają używane, ważne jednak posiadają zastosowanie, gdy wchodzą jako część składowa do ubezpieczeń kombinowanych, o których niebawem mówić będziemy.

W podobny sposób możnaby wyprowadzić wzory na ubezpieczenia odroczone czasowe, lecz tą kombinacyą zajmować się tu nie będziemy, ponieważ praktycznego zastosowania mieć ona nie może.

65. UBEZPIECZENIE KAPITAŁÓW ZMIENNYCH. Dotąd zakładaliśmy, że wysokość ubezpieczonego kapitału nie ulega zmianie, czyli pozostaje stałą przez cały czas trwania umowy, t. j. sukcesorowie zmarłego otrzymują zawsze ten sam kapitał, bez względu na to, kiedy ubezpieczony umrze. Obecnie przechodzimy do przypadków, w których ubezpieczony kapitał, z biegiem lat, podlega zmianom, rosnąc lub malejąc — tak, że wysokość kapitału pośmiertnego zależy od czasu trwania umowy.

Zastanowimy się najprzód nad ubezpieczeniem kapitałów rosnących.

Osoba x letnia ubezpiecza kapitał pośmiertny w ten sposób, że jeżeli umrze w pierwszym zaraz roku po zawarciu umowy, jej sukcesorowie, przy końcu roku ubezpieczeniowego, otrzymają 1-kę kapitału; gdy umrze w drugim roku, sukcesorowie otrzymają 2-ie jednostki kapitału; gdy umrze w trzecim roku, otrzymają 3-y jednostki, i t. d. co rok przybywa po jednostce aż do śmierci osoby ubezpieczonej.

Jeżeli w taki sposób ubezpiecza się jednocześnie λ_x osób, to przy końcu pierwszego roku wypłaci instytucya τ_x jednostek, posiadających na początku roku wartość $\tau_x . \rho$; przy końcu drugiego roku wypłaci instytucya $2\,\tau_{x+1}$ jednostek, przedstawiających w chwili zawierania umowy wartość $2\,\tau_{x+1}\rho^2$ i t. d. Wartość wszystkich tych wypłat równa się

$$\tau_x . \rho + 2\tau_{x+1}\rho^2 + 3\tau_{x+2}\rho^3 + \ldots \text{ do końca tab. śmier.}$$

Gdy teraźniejszą wartość tego rodzaju ubezpieczenia oznaczymy przez $\overset{<s}{\mathrm{K}}_x$, będzie

$$(\alpha) \qquad \overset{<s}{\mathrm{K}}_x . \lambda_x = \tau_x\rho + 2\,\tau_{x+1}\rho^2 + 3\,\tau_{x+2}\rho^3 + \ldots,$$

skąd

$$(\beta) \qquad \overset{<s}{\mathrm{K}}_x = \frac{\tau_x\rho + 2\,\tau_{x+1}\rho^2 + 3\,\tau_{x+2}\rho^3 + \ldots}{\lambda_x}.$$

Mnożąc licznik i mianownik przez ρ^x

$$(\gamma) \qquad \overset{<s}{\mathrm{K}}_x = \frac{m_x + 2\,m_{x+1} + 3\,m_{x+2} + \ldots}{v_x}.$$

Licznik ostatniego wyrażenia daje się w następujący sposób przekształcić

$$(\delta) \qquad \left\{ \begin{array}{l} m_x + 2m_{x+1} + 3m_{x+2} + 4m_{x+3} + \ldots = \\ \left. \begin{array}{rl} = m_x + m_{x+1} + m_{x+2} + m_{x+3} + \ldots & \text{do końca tablicy śmiertel.} \\ + m_{x+1} + m_{x+2} + m_{x+3} + \ldots & \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,} \\ + m_{x+2} + m_{x+3} + \ldots & \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,} \\ + m_{x+3} + \ldots & \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,} \\ + \ldots & \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,} \end{array} \right\} = \\ = \Sigma m_x + \Sigma m_{x+1} + \Sigma m_{x+2} + \Sigma m_{x+3} + \ldots = \Sigma\Sigma m_x, \end{array} \right.$$

co podstawiwszy w (γ), wypada

$$(163) \qquad \overset{<s}{\mathrm{K}}_x = \frac{\Sigma\Sigma m_x}{v_x}.$$

Dla $x = 30$,

$$\overset{<s}{\mathrm{K}}_{30} = \frac{\Sigma\Sigma m_{30}}{v_{30}} = \frac{282\,588{,}17}{30\,743{,}98} = 9{,}191\,659.$$

Od 1000 franków pierwotnego kapitału premia jednorazowa wynosi $9{,}191\,659 \times 1\,000 = 9\,191{,}66$ fr., po wniesieniu których sukcesorowie otrzymają 1000 fr., jeżeli ubezpieczony umrze w pierwszym roku; 2000 fr., gdy umrze w drugim roku; 10000 fr., gdy umrze w dziesiątym roku trwania umowy i t. d.

Gdyby kapitał miał być wypłacony zaraz po śmierci ubezpieczonego, w licznik wyrażenia (β) wchodziłyby oczywiście, zamiast ρ, ρ^2, ρ^3, . . . , czynniki $\rho^{\frac{1}{2}}$, $\rho^{\frac{3}{2}}$, $\rho^{\frac{5}{2}}$, . . . ; wtedy, mnożąc licznik i mianownik przez $\rho^{x+\frac{1}{2}}$, wypadnie

$$\overset{<s}{\mathrm{K}}'_x = \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{m_x + 2m_{x+1} + 3m_{x+2} + \dots}{v_x}, \text{ albo inaczej}$$

$$\overset{<s}{\mathrm{K}}'_x = \frac{r^{\frac{1}{2}} \Sigma\Sigma m_x}{v_x}. \tag{163'}$$

Dla premij rocznych, płatnych do śmierci, jest

$$p\left\{\overset{<s}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma\Sigma m_x}{\Sigma v_x}, \tag{164}$$

$$p\left\{\overset{<s}{\mathrm{K}}'_x\right\} = \frac{r^{\frac{1}{2}} \Sigma\Sigma m_x}{\Sigma v_x}; \tag{164'}$$

dla płatnych przez lat l

$$^{l}p\left\{\overset{<s}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma\Sigma m_x}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}}, \tag{165}$$

$$^{l}p\left\{\overset{<s}{\mathrm{K}}'_x\right\} = \frac{r^{\frac{1}{2}} \Sigma\Sigma m_x}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}}. \tag{165'}$$

Przy $x = 30$

$$p\left\{\overset{<s}{\mathrm{K}}_{30}\right\} = \frac{\Sigma\Sigma m_{30}}{\Sigma v_{30}} = \frac{282\,588{,}17}{593\,788{,}92} = 0{,}475\,907,$$

od 1000 fr. pierwotnego kapitału po $0{,}475\,907 \times 1000 = 475{,}91$ fr. rocznie przy $x = 30$, $l = 20$

$$^{20}p\left\{\overset{<s}{\mathrm{K}}_{30}\right\} = \frac{\Sigma\Sigma m_{30}}{\Sigma v_{30} - \Sigma v_{50}} = \frac{282\,588{,}17}{593\,788{,}92 - 175\,710{,}99} = 0{,}675\,922,$$

od 1000 fr. pierwotnego kapitału po $0{,}675\,922 \times 1000 = 675{,}92$ fr. rocznie.

Kapitały rok rocznie mogą wzrastać nie koniecznie o swą pierwotną wielkość, lecz o jakąś jej część stałą, np. o k-ą część kapitału płatnego w pierwszym roku ubezpieczeniowym. Wtedy zamiast (α) mielibyśmy

$$\overset{<s\left(\frac{1}{k}\right)}{\mathrm{K}_x}.\lambda_x = \tau_x\rho + \left(1 + \frac{1}{k}\right)\tau_{x+1}\rho^2 + \left(1 + \frac{2}{k}\right)\tau_{x+2}\rho^3 + \dots \tag{α'}$$

$$= (\tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \tau_{x+2}\rho^3 + \dots) + \frac{1}{k}(\tau_{x+1}\rho^2 + 2\tau_{x+2}\rho^3 + \dots).$$

Stąd

$$\overset{<s\left(\frac{1}{k}\right)}{\mathrm{K}_x} = \frac{\tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \tau_{x+2}\rho^3 + \dots}{\lambda_x} + \frac{1}{k} \cdot \frac{\tau_{x+1}\rho^2 + 2\tau_{x+2}\rho^3 + 3\tau_{x+3}\rho^4 + \dots}{\lambda_x}$$

$$= \frac{m_x + m_{x+1} + m_{x+2} + \dots}{v_x} + \frac{1}{k} \cdot \frac{m_{x+1} + 2m_{x+2} + \dots}{v_x},$$

czyli

$$(166)\qquad \overset{<s(\frac{1}{k})}{\mathrm{K}}_x = \frac{\Sigma m_x + \frac{1}{k}\Sigma\Sigma m_{x+1}}{v_x}.$$

Premie roczne, płatne do śmierci, obliczają się ze wzoru

$$(166')\qquad p\left[\overset{<s(\frac{1}{k})}{\mathrm{K}}_x\right] = \frac{\Sigma m_x + \frac{1}{k}\Sigma\Sigma m_{x+1}}{\Sigma v_x},$$

płatne przez lat l, ze wzoru

$$(166'')\qquad {}^{l}p\left[\overset{<s(\frac{1}{k})}{\mathrm{K}}_x\right] = \frac{\Sigma m_x + \frac{1}{k}\Sigma\Sigma m_{x+1}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}}.$$

W razie płatności kapitału zaraz po śmierci ubezpieczonego, każde z wyrażeń (166), (166′) i (166″) winno być jeszcze pomnożone przez $r^{\frac{1}{2}}$.

Rezultaty powyższe łatwe były do przewidzenia, taka albowiem kombinacya rozpada się na dwa ubezpieczenia: na zwyczajne ubezpieczenie stałego kapitału w wysokości 1-ki + odroczone, na rok jeden, ubezpieczenie kapitału w wysokości $\frac{1}{k}$ jednostki, rosnącego stale co rok o swą pierwotną wysokość.

Jeżeli kapitał wzrasta co rok o swą pierwotną wysokość tylko przez lat n, następnie zaś aż do śmierci pozostaje stały i równy n razy wziętej wysokości kapitału pierwotnego, wtedy (α) przechodzi na

$$(\alpha'')\qquad \overset{<s(n)}{\mathrm{K}}_x.\lambda_x = \tau_x\rho + 2\tau_{x+1}\rho^2 + \ldots + (n-1)\tau_{x+n-2}\rho^{n-1} + n\tau_{x+n-1}\rho^n + \\ + n(\tau_{x+n}\rho^{n+1} + \tau_{x+n+1}\rho^{n+2} + \ldots),\ \text{czyli}$$

$$(\varepsilon)\quad \overset{<s(n)}{\mathrm{K}}_x = \frac{(m_x + 2m_{x+1} + 3m_{x+2} + \ldots + n\,m_{x+n-1}) + n(m_{x+n} + m_{x+n+1} + \ldots)}{v_x}.$$

Część pierwszą licznika można przekształcić w następujący sposób

$$(\zeta)\quad \left\{\begin{aligned} & m_x + 2m_{x+1} + 3m_{x+2} + \ldots + n\,m_{x+n-1} = \\ & \left.\begin{aligned} = m_x + m_{x+1} + m_{x+2} + \ldots + m_{x+n-1} \\ + m_{x+1} + m_{x+2} + \ldots + m_{x+n-1} \\ + m_{x+2} + \ldots + m_{x+n-1} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ + m_{x+n-1} \end{aligned}\right\}\ n\ \text{wierszy} = \\ & = (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}) + (\Sigma m_{x+1} - \Sigma m_{x+n}) + \ldots + (\Sigma m_{x+n-1} - \Sigma m_{x+n}) \\ & = (\Sigma m_x + \Sigma m_{x+1} + \ldots + \Sigma m_{x+n-1}) - n\,\Sigma m_{x+n} \\ & = \Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n} - n\,\Sigma m_{x+n}. \end{aligned}\right.$$

Podstawiwszy to wyrażenie w (ε) i zauważywszy, że druga część licznika wzoru (ε) $= n\Sigma m_{x+n}$, wypada

$$\overset{<s(n)}{K}_x = \frac{\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n} - n\Sigma m_{x+n} + n\Sigma m_{x+n}}{v_x},$$

albo ostatecznie

(167) $$\overset{<s(n)}{K}_x = \frac{\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n}}{v_x}.$$

Na roczne premie, płatne dożywotnio, otrzymujemy

(167′) $$p\left\{\overset{<s(n)}{K}_x\right\} = \frac{\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n}}{\Sigma v_x},$$

na płatne przez lat l

(167″) $${}^{l}p\left\{\overset{<s(n)}{K}_x\right\} = \frac{\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}},$$

gdzie, jako szczególny przypadek, może być $l = n$.

Gdyby ubezpieczenie było czasowe i miało trwać przez lat n, należałoby w wyrażeniu (α″) opuścić część

$$n(\tau_{x+n}\rho^{n+1} + \tau_{x+n+1}\rho^{n+2} + \ldots),$$

skutkiem czego, na podstawie (ς), daje się wyprowadzić wzór

(168) $${}^{n}\overset{<s(n)}{K}_x = \frac{\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n} - n\,\Sigma m_{x+n}}{v_x},$$

względnie

(168′) $${}^{n}\overset{<s(n)}{K'}_x = r^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n} - n\,\Sigma m_{x+n}}{v_x}.$$

Przytem zauważyć trzeba, że w ubezpieczeniach czasowych liczba lat, przez jaką kapitał wzrasta, nie potrzebuje być koniecznie równa liczbie lat przez jaką trwa ubezpieczenie czasowe, t. j. może być ${}^{n}\overset{<s(\nu)}{K}_x$, gdzie $\nu < n$. W (168) i (168′) jest $\nu = n$.

Następnie, zarówno w ubezpieczeniach dośmiertnych czasowo rosnących, jak i w czasowych, kapitał corocznie mógłby wzrastać nie o swą pierwotną wielkość i nie jednostajnie, lecz o rozmaitą część swej pierwotnej wysokości.

Możnaby także wyprowadzić i tutaj wzory na ubezpieczenia odroczone dośmiertne i na odroczone czasowe z najrozmaitszemi kombinacyami wzrostu kapitału; ale wzorów dla tych różnorodnych odmian i odcieni wyprowadzać nie będziemy, gdyż nie mają one praktycznych zastosowań, bezpożytecznie zatem byłoby obciążać nimi książkę. Sądzimy zresztą, że przyjęty przez nas system wyprowadzania wzorów dostatecznie już przygotował czytelnika do radzenia sobie nawet w najtrudniejszych tego rodzaju kombinacyach.

Zajmiemy się jeszcze tylko ubezpieczeniem kapitałów rosnących co lat kilka i w tym celu rozwiążemy następujące zagadnienie ogólne.

Osoba x letnia ubezpiecza czasowo, na lat n, kapitał pośmiertny, rosnący co lat ν o k-ą część swej pierwotnej wysokości—dotąd, póki się nie stanie h razy większym od pierwotnego, poczem aż do wyekspirowania terminu pozostaje w swej ostatniej wysokości.

Gdy za pierwotną wielkość kapitału przyjmiemy 1-kę, ostatnia wysokość ubezpieczonego kapitału może dojść do h. Kapitał rość będzie przez lat $(h-1).k.\nu < n$; albowiem oznaczywszy liczbę lat, w ciągu jakiej kapitał rośnie, przez u, mamy

$$\frac{1}{k}\cdot\frac{u}{\nu} = h-1, \text{ skąd } u = (h-1).k.\nu.$$

Określone w powyższem zagadnieniu ubezpieczenie daje się rozłożyć na $1+(h-1)k$ następujących:

1-o na natychmiastowe, czasowo przez n lat trwające, ubezpieczenie stałego kapitału w wysokości 1-ki,

2-o na odroczone na ν lat, czasowo przez $n-\nu$ lat trwające, ubezpieczenie stałego kapitału w wysokości $\frac{1}{k}$,

3-o na odroczone na 2ν lat, czasowo przez $n-2\nu$ lat trwające, ubezpieczenie stałego kapitału w wysokości $\frac{1}{k}$ i t. d.

Wartość matematyczna pierwszego ubezpieczenia $= \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}}{v_x}$, wartość matematyczna drugiego ubezpieczenia $= \frac{1}{k}\cdot\frac{\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma m_{x+n}}{v_x}$, trzeciego $= \frac{1}{k}\cdot\frac{\Sigma m_{x+2\nu} - \Sigma m_{x+n}}{v_x}$ i t. d...., wartość ostatniego $= \frac{1}{k}\cdot\frac{\Sigma m_{x+(h-1)k\nu} - \Sigma m_{x+n}}{v_x}$.

Wartość matematyczna wszystkich tych ubezpieczeń, razem wziętych, czyli premia jednorazowa za określone w zagadnieniu ubezpieczenie jest sumą powyżej oznaczonych wartości, t. j.

$${}^{n}\overset{<s\left(u,\nu,\frac{1}{k}\right)}{\mathrm{K}}_x = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}}{v_x} + \frac{1}{k}\cdot\frac{\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma m_{x+n}}{v_x} + \frac{1}{k}\cdot\frac{\Sigma m_{x+2\nu} - \Sigma m_{x+n}}{v_x} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{k}\cdot\frac{\Sigma m_{x+(h-1)k\nu} - \Sigma m_{x+n}}{v_x} =$$

$$= \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n} + \frac{1}{k}(\Sigma m_{x+\nu} + \Sigma m_{x+2\nu} + \dots + \Sigma m_{x+(h-1)k\nu}) - \frac{(h-1)k}{k}\Sigma m_{x+n}}{v_x}$$

$$= \frac{\Sigma m_x + \frac{1}{k}(\Sigma m_{x+\nu} + \Sigma m_{x+2\nu} + \dots + \Sigma m_{x+(h-1)k\nu}) - h\Sigma m_{x+n}}{v_x},$$

albo, pisząc w formie skróconej,

$$(169) \qquad {}^{n}\overset{<s\left(u,\nu,\frac{1}{k}\right)}{\mathrm{K}}_x = \frac{\Sigma m_x + \frac{1}{k}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=(h-1)k} m_{x+\alpha\nu} - h\Sigma m_{x+n}}{v_x}.$$

Wyrażeniem na premie roczne, płatne przez lat *n*, jest

$$(169') \qquad {}^{n}p\left[\overset{<s\left(u,\nu,\frac{1}{k}\right)}{{}^{n}\mathrm{K}_x}\right]=\frac{\Sigma m_x+\frac{1}{k}\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=(h-1)k} \Sigma m_{x+\alpha\nu}-h\Sigma m_{x+n}}{\Sigma v_x-\Sigma v_{x+n}}.$$

Jeżeli np. kapitał pośmiertny, ubezpieczony czasowo przez osobę 30-o letnią na lat 21, co 2 lata ma wzrastać o 3-ą część swej pierwotnej wielkości (1-ki) i przestaje dalej wzrastać, gdy się stanie 4 razy większy od swej pierwotnej wielkości, to ponieważ tutaj $x=30$, $n=21$, $\nu=2$, $k=3$, $h=4$, jest zatem

$$\overset{<s\left(18,2,\frac{1}{3}\right)}{{}^{21}\mathrm{K}_{30}}=\frac{\Sigma m_{30}+\frac{1}{3}\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=9} \Sigma m_{30+2\alpha}-4\,\Sigma m_{51}}{v_{30}}=\frac{10\,789{,}016}{30\,743{,}98}=0{,}350\,931,$$

od 3000 fr. pierwotnego kapitału 0,350931 × 3000 = 1052,79 fr.;

$${}^{21}p\left[\overset{<s\left(18,2,\frac{1}{3}\right)}{{}^{21}\mathrm{K}_{30}}\right]=\frac{\Sigma m_{30}+\frac{1}{3}\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=9} \Sigma m_{30+2\alpha}-4\,\Sigma m_{51}}{\Sigma v_{30}-\Sigma v_{51}}=\frac{10\,789{,}016}{430\,525{,}19}=0{,}025\,060,$$

od 3000 fr. pierwotnego kapitału po 0,025060 × 3000 = 75,18 fr. rocznie.

Gdyby kapitał był ubezpieczony nie czasowo, lecz dośmiertnie, wzór (169) przechodzi na

$$(170) \qquad \overset{<s\left(u,\nu,\frac{1}{k}\right)}{\mathrm{K}_x}=\frac{\Sigma m_x+\frac{1}{k}\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=(h-1)k} \Sigma m_{x+\alpha\nu}}{v_x},$$

a przy płaceniu premij rocznych aż do śmierci, wzór (169′) przechodzi na

$$(170') \qquad p\left[\overset{<s\left(u,\nu,\frac{1}{k}\right)}{\mathrm{K}_x}\right]=\frac{\Sigma m_x+\frac{1}{k}\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=(h-1)k} \Sigma m_{x+\alpha\nu}}{\Sigma v_x}.$$

Np.

$$\overset{<s\left(18,2,\frac{1}{3}\right)}{\mathrm{K}_{30}}=\frac{\Sigma m_{30}+\frac{1}{3}\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=9} \Sigma m_{30+2\alpha}}{v_{30}}=\frac{36\,043{,}640}{30\,743{,}98}=1{,}172\,380,$$

od 3000 fr. pierwotnego kapitału 1,172380 × 3000 = 3517,14 fr.;

$$p\left[\overset{<s\left(18,2,\frac{1}{3}\right)}{\mathrm{K}_{30}}\right]=\frac{\Sigma m_{30}+\frac{1}{3}\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=9} \Sigma m_{30+2\alpha}}{\Sigma v_{30}}=\frac{36\,043{,}640}{593\,788{,}92}=0{,}060\,701,$$

od 3000 fr. pierwotnego kapitału po 0,060701 × 3000 = 182,10 fr. rocznie.

W podobny sposób wyprowadzić można wzór dla wprost odwrotnego zadania, gdy kapitał maleje.

Osoba *x* letnia ubezpiecza czasowo, na lat *n*, kapitał pośmiertny, malejący co ν lat o *k*-ą część swej pierwotnej wysokości — dotąd, póki się nie stanie *h* razy mniejszy od pierwotnego, poczem, aż do chwili wyekspirowania terminu, pozostaje w swej ostatniej wysokości.

Gdy i tutaj za pierwotną wysokość kapitału przyjmiemy 1-kę, ostatnia wysokość kapitału może dojść do $\frac{1}{h}$, co nastąpi po upływie $\frac{(h-1)k\nu}{h} < n$ lat; albowiem, oznaczywszy szukaną liczbę lat przez u, cały kapitał ma się zmniejszyć $\frac{u}{\nu}$ razy po $\frac{1}{k}$ razem o $1 - \frac{1}{h} = \frac{h-1}{h}$; powinno więc być

$$\frac{h-1}{h} : \frac{u}{\nu} = \frac{1}{k}, \text{ skąd } u = \frac{(h-1)k\nu}{h}, \text{ gdzie } k \text{ zakładamy}$$

wielokrotne względem h, gdyż $\frac{u}{\nu}$ musi być całkowite.

Otóż sukcesorom po osobach zmarłych w ciągu pierwszych ν lat wypłaca instytucya po 1-ce, co stanowi czasowe ubezpieczenie 1-ki kapitału w ciągu ν lat; wartość takiego ubezpieczenia równa się

$$\frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+\nu}}{v_x}.$$

Sukcesorom po osobach zmarłych w ciągu drugich ν lat wypłaca instytucya po $1 - \frac{1}{k}$; jest to ubezpieczenie czasowe, odroczone na lat ν, jego więc wartość równa się

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma m_{x+2\nu}}{v_x}$$

i t. d. — tak, że wartość całego ubezpieczenia wynosi

$$\overset{>s\left(u,\nu,\frac{1}{k}\right)}{{}^{n}\mathrm{K}_x} = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+\nu}}{v_x} + \left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma m_{x+2\nu}}{v_x} + \left(1-\frac{2}{k}\right)\cdot\frac{\Sigma m_{x+2\nu} - \Sigma m_{x+3\nu}}{v_x} +$$

$$+ \ldots + \left[1 - \left\{\frac{(h-1)k}{h} - 1\right\}\frac{1}{k}\right]\frac{\Sigma m_{x+\left[\frac{(h-1)k}{h}-1\right]\nu} - \Sigma m_{x+\frac{(h-1)k}{h}\nu}}{v_x} +$$

$$+ \left[1 - \frac{(h-1)k}{h}\cdot\frac{1}{k}\right]\cdot\frac{\Sigma m_{x+\frac{(h-1)k}{h}\nu} - \Sigma m_{x+n}}{v_x} =$$

$$= \frac{\Sigma m_x}{v_x} - 1\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma m_{x+2\nu}}{v_x} - 2\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{\Sigma m_{x+2\nu} - \Sigma m_{x+3\nu}}{v_x} - \ldots$$

$$\ldots - \left[\frac{(h-1)k}{h} - 1\right]\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{\Sigma m_{x+\left[\frac{(h-1)k}{h}-1\right].\nu} - \Sigma m_{x+\frac{(h-1)k}{h}.\nu}}{v_x} -$$

$$- \frac{(h-1)k}{h}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{\Sigma m_{x+\frac{(h-1)k}{h}.\nu}}{v_x} - \frac{1}{h}\cdot\frac{\Sigma m_{x+n}}{v_x} =$$

$$= \frac{\Sigma m_x - \frac{1}{k}\left(\Sigma m_{x+\nu} + \Sigma m_{x+2\nu} + \ldots + \Sigma m_{x+\frac{(h-1)k}{h}.\nu}\right) - \frac{1}{h}\Sigma m_{x+n}}{v_x},$$

albo, pisząc w skróceniu,

$$(171)\qquad \overset{>s\left(u,\nu,\frac{1}{k}\right)}{{}^{n}\mathrm{K}_x} = \frac{\Sigma m_x - \frac{1}{k}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\frac{(h-1)k}{h}} m_{x+\alpha\nu} - \frac{1}{h}\Sigma m_{x+n}}{v_x}.$$

Wzorem na stałe premie roczne, płatne przez lat n, jest

$$(171')\qquad {}^{n}p\left[\overset{>s\left(u,\nu,\frac{1}{k}\right)}{{}^{n}\mathrm{K}_x}\right] = \frac{\Sigma m_x - \frac{1}{k}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\frac{(h-1)k}{h}} m_{x+\alpha\nu} - \frac{1}{h}\Sigma m_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}.$$

Gdyby ubezpieczenie miało trwać do śmierci, we wzorze (171) oczywiście odpada wyraz $\frac{1}{h}\,\Sigma m_{x+n}$, wtedy będzie

$$(172)\qquad \overset{>s\left(u,\nu,\frac{1}{k}\right)}{\mathrm{K}_x} = \frac{\Sigma m_x - \frac{1}{k}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\frac{(h-1)k}{h}} m_{x+\alpha\nu}}{v_x},$$

a gdyby premie miały być płacone dożywotnio

$$(172')\qquad p\left[\overset{>s\left(u,\nu,\frac{1}{k}\right)}{\mathrm{K}_x}\right] = \frac{\Sigma m_x - \frac{1}{k}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\frac{(h-1)k}{h}} m_{x+\alpha\nu}}{\Sigma v_x}.$$

Jeżeli tak ubezpieczone kapitały mają być płacone zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, każdy z odnośnych wzorów należy jeszcze pomnożyć przez $r^{\frac{1}{2}}$.

Ubezpieczenia kapitałów rosnących i malejących, w swej bezpośredniej formie, mało bywają dotąd w praktyce używane, chociaż mogłyby oddawać pewne usługi.

Ubezpieczenia kapitałów rosnących mogłyby zastąpić ubezpieczenia z latami próby, nienarażając bowiem instytucyi, w pierwszych zaraz latach trwania umowy, na zbyt wysokie straty, dają jednak cośkolwiek sukcesorom w razie przedwczesnej śmierci osoby ubezpieczonej.

Ubezpieczenia znów kapitałów malejących posiadają pewną wyrozumowaną racyę bytu. Największy kapitał przedewszystkiem jest potrzebny rodzinie osieroconej w pierwszych latach trwania umowy, gdy ojciec, umierający w młodym wieku, pozostawia jeszcze małoletnie dzieci. Później, skoro już wszystkie, albo przynajmniej niektóre dzieci potrafią na siebie pracować, mniejszy kapitał łatwiej wystarczyć może, zwłaszcza jeżeli rodzeństwo starsze zechce przyjść z pomocą młodszemu.

Najważniejszem wszakże zastosowaniem ubezpieczeń kapitałów rosnących jest t. z. kontrasekuracya i bardzo dziś, w niektórych kombinacyach, rozpowszechnione ubezpieczenia ze zwrotem premij, o czem szczegółowo pomówimy w następnym rozdziale.

Wszystkie wyprowadzane w niniejszym artykule wzory posiadają w swym składzie zdyskontowane liczby osób zmarłych, które łatwo przez zdyskontowane liczby osób żyjących zastąpić można; dość bowiem za Σm_x i $\Sigma\Sigma m_x$ popodstawiać podane w art. 42 wyrażenia:

$$(110)\quad \Sigma m_x = v_x - \frac{r-1}{r}\Sigma v_x \quad \text{i} \quad (111)\quad \Sigma\Sigma m_x = \Sigma v_x - \frac{r-1}{r}\Sigma\Sigma v_x.$$

Czyniąc to dla najważniejszego wzoru (168), otrzymujemy

$$(173)\ {}^{n}\overset{<s(n)}{\mathrm{K}}_x = \frac{\Sigma v_x - \frac{r-1}{r}\Sigma\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n} + \frac{r-1}{r}\Sigma\Sigma v_{x+n} - n\left(v_{x+n} - \frac{r-1}{r}\Sigma v_{x+n}\right)}{v_x} =$$

$$= \frac{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n} - n v_{x+n}) - \frac{r-1}{r}(\Sigma\Sigma v_x - \Sigma\Sigma v_{x+n} - n\Sigma v_{x+n})}{v_x}.$$

Przeróbki takie mogą być przydatne wówczas, gdy, chcąc uniknąć formowania tablic pomocniczych ze zdyskontowaną liczbą osób zmarłych, poprzestajemy na samych tylko zdyskontowanych liczbach osób żyjących.

Takie wszakże ułatwienie jest tylko pozorne, albowiem, jak to już łatwo z porównania wzorów (168) i (173) dostrzedz można, wzory na ubezpieczenia pośmiertne, wyrażone przez zdyskontowane liczby osób żyjących, są bardziej skomplikowane od wzorów ze zdyskontowaną liczbą osób zmarłych; obliczanie więc taryf z pierwszych jest mozolniejsze od obliczania z ostatnich, czyli co zyskujemy na tablicach pomocniczych to tracimy, i to w znacznie wyższym stopniu, na obliczaniu samych taryf.

66. UBEZPIECZENIA MIESZANE. Z połączenia ubezpieczeń pośmiertnych z ubezpieczeniami na dożycie powstaje grupa ubezpieczeń mieszanych (Gemischte Versicherungen,—Assurances mixtes, — Endowment insurances).

Osoba x letnia ubezpiecza 1-kę kapitału płatnego jej sukcesorom, jeżeli osoba ubezpieczona umrze w ciągu n lat, bezpośrednio po zawarciu umowy następujących, albo jej samej, jeżeli po upływie n lat żyć będzie.

Gdy przyjmiemy, że tego rodzaju ubezpieczenia zawiera jednocześnie λ_x osób i że kapitał wypłaca się przy końcu roku ubezpieczeniowego, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi, to przy końcu pierwszego roku instytucya wypłaci τ_x jednostek, przy końcu drugiego roku τ_{x+1} i t. d., przy końcu $(n-1)$-go roku τ_{x+n-2}, przy końcu n-go roku wypłaci sukcesorom po zmarłych w n ym roku τ_{x+n-1} jednostek, a pozostałym przy życiu osobom jednostek λ_{x+n}.

Sumą wartości tych wszystkich wypłat, w chwili zawierania umowy, jest

$$(\alpha)\qquad \tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \ldots + \tau_{x+n-2}\rho^{n-1} + \tau_{x+n-1}\rho^n + \lambda_{x+n}\rho^n.$$

Jeżeli wartość pojedynczego ubezpieczenia, czyli premię jednorazową za takowe oznaczymy przez ${}^{n}\overset{m}{\mathrm{K}}_x$, gdzie m symbolizuje ubezpieczenie „mieszane”, to wszyscy ubezpieczeni, w chwili zawierania umowy, zapłacą ${}^n\overset{m}{K}_x.\lambda_x$, powinno więc być

$${}^n\overset{m}{K}_x.\lambda_x = \tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \ldots + \tau_{x+n-2}\rho^{n-1} + \tau_{x+n-1}\rho^n + \lambda_{x+n}\rho^n,$$

skąd

$$(\beta) \qquad {}^n\overset{m}{K}_x = \frac{\tau_x\rho+\tau_{x+1}\rho^2+\ldots+\tau_{x+n-2}\rho^{n-1}+\tau_{x+n-1}\rho^n+\lambda_{x+n}\rho^n}{\lambda_x}.$$

Mnożąc licznik i mianownik ostatniego wyrażenia przez ρ_x, wypada

$${}^n\overset{m}{K}_x = \frac{m_x + m_{x+1} + \ldots + m_{x+n-2} + m_{x+n-1} + v_{x+n}}{v_x} =$$

$$= \frac{(m_x + m_{x+1} + m_{x+2} + \ldots) - (m_{x+n} + m_{x+n+1} + \ldots) + v_{x+n}}{v_x},$$

albo symbolicznie

$$(174) \qquad {}^n\overset{m}{K}_x = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n} + v_{x+n}}{v_x}.$$

Gdy kapitał pośmiertny ma być wypłacony zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, resp. w połowie roku, w którym jej śmierć zajdzie, w wyrażeniu (β), zamiast czynników $\rho, \rho^2, \ldots, \rho^n$ przy $\tau_x, \tau_{x+1}, \ldots, \tau_{x+n-1}$, podstawić należy $\rho^{\frac{1}{2}}, \rho^{\frac{3}{2}}, \ldots, \rho^{n-\frac{1}{2}}$, podczas gdy przy λ_{x+n} czynnik ρ^n pozostaje bez zmiany, t. j. mamy

$${}^n\overset{m}{K'}_x = \frac{\tau_x\rho^{\frac{1}{2}} + \tau_{x+1}\rho^{\frac{3}{2}} + \ldots + \tau_{x+n-2}\rho^{n-\frac{3}{2}} + \tau_{x+n-1}\rho^{n-\frac{1}{2}}}{\lambda_x} + \frac{\lambda_{x+n}\rho^n}{\lambda_x}.$$

Mnożąc licznik i mianownik pierwszej części wyrażenia po stronie drugiej przez $\rho^{x+\frac{1}{2}}$, a części drugiej przez ρ^x, otrzymujemy wzór

$${}^n\overset{m}{K'}_x = r^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{m_x + m_{x+1} + \ldots + m_{x+n-1}}{v_x} + \frac{v_{x+n}}{v_x},$$

czyli symbolicznie

$$(174') \qquad {}^n\overset{m}{K'}_x = \frac{r^{\frac{1}{2}}(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}) + v_{x+n}}{v_x},$$

który od wzoru (174) różni się tylko czynnikiem $r^{\frac{1}{2}}$ przed częścią, odnoszącą się do ubezpieczenia pośmiertnego (*).

(*) Jest to reguła ogólna i dla tego, przyjmując stale wypłatę kapitałów pośmiertnych w połowie roku, resp. zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, najlepiej jest, dla ułatwienia sobie rachunków, przygotować w tablicach pomocniczych kolumny, otrzymane z pomnożenia zdyskontowanych liczb osób zmarłych przez $r^{\frac{1}{2}}\left(r^{\frac{1}{2}}m_x;\ r^{\frac{1}{2}}\Sigma m_x \text{ i } r^{\frac{1}{2}}\Sigma\Sigma m_x\right)$.

Z brzmienia samego zagadnienia i płynących zeń rozumowań okazuje się jasno, że rozważany rodzaj ubezpieczeń składa się z dwóch oddzielnych części: z czasowego ubezpieczenia pośmiertnego, trwającego przez lat n, i z ubezpieczenia kapitału na dożycie z terminem n letnim, t. j.

$$(\gamma) \qquad {}^n\overset{m}{\mathrm{K}}_x = {}^n\overset{s}{\mathrm{K}}_x + {}_n\overset{d}{\mathrm{K}}_x; \qquad (\gamma') \quad {}^n\overset{m}{\mathrm{K}'}_x = {}^n\overset{s}{\mathrm{K}'}_x + {}_n\overset{d}{\mathrm{K}}_x.$$

I rzeczywiście, podstawiwszy za ${}^n\overset{s}{\mathrm{K}}_x$ resp. za ${}^n\overset{s}{\mathrm{K}'}_x$ i za ${}_n\overset{d}{\mathrm{K}}_x$ we wzorach (γ) resp. (γ'), wyrażenia (160) resp. (160′) z art. 64 oraz (141) z art. 60, otrzymujemy dopieroco wyprowadzone wzory (174) i (174′). Właśnie dla tego omawiane obecnie ubezpieczenia, jako powstające z połączenia, czyli ze zmieszania dwóch innych rodzajów, zowią się mieszanemi.

Wzorami na premie roczne są

$$(175) \qquad {}^lp\left\{{}^n\overset{m}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n} + v_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}},$$

$$(175') \qquad {}^lp\left\{{}^n\overset{m}{\mathrm{K}'}_x\right\} = \frac{r^{\frac{1}{2}}(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}) + v_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}}.$$

Czas płacenia premij rocznych l może być krótszy lub równy n, ale nigdy od n dłuższy. Zazwyczaj bywa $l = n$ i wtedy

$$(176) \qquad {}^np\left\{{}^n\overset{m}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n} + v_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}},$$

$$(176') \qquad {}^np\left\{{}^n\overset{m}{\mathrm{K}'}_x\right\} = \frac{r^{\frac{1}{2}}(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}) + v_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}.$$

Dla $x = 30$, $n = 20$

$$ {}^{20}\overset{m}{\mathrm{K}}_{30} = \frac{\Sigma m_{30} - \Sigma m_{50} + v_{50}}{v_{30}} = \frac{16606{,}092}{30743{,}98} = 0{,}540141,$$

od 5000 fr. 0,540141 × 5000 = 2700,705 fr.;

$$ {}^{20}p\left\{{}^{20}\overset{m}{\mathrm{K}}_{30}\right\} = \frac{\Sigma m_{30} - \Sigma m_{50} + v_{50}}{\Sigma v_{30} - \Sigma v_{50}} = \frac{16606{,}092}{418077{,}93} = 0{,}039720,$$

od 5000 fr. po 0,039720 × 5000 = 198,60 fr. rocznie.

Ubezpieczenia mieszane najlepiej, naszem zdaniem, odpowiadają potrzebie ojców rodziny, gdyż zapewniają byt rodzinie w razie przedwczesnej śmierci ojca i samemu ojcu, jeżeli los pozwoli mu dożyć późniejszego wieku. Skutkiem tych zalet zapewne, ubezpieczenia mieszane w ostatnich czasach bardzo szybko rozwijać się zaczęły, rugując stopniowo z użycia inne, mniej praktyczne kombinacye ubezpieczeń pośmiertnych.

Wyprowadzone tu wzory z łatwością zastąpić można przez wyrażone za pośrednictwem zdyskontowanej liczby osób żyjących. Tak np., podstawiwszy w (174) i (175) za Σm_x i Σm_{x+n} znane nam wyrażenie

$$\Sigma m_x = v_x - \frac{r-1}{r}\Sigma v_x,$$

wypada

$$(174'')\qquad {}^n\overset{m}{\mathrm{K}}_x = \frac{v_x - \frac{r-1}{r}(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n})}{v_x} = 1 - \frac{r-1}{r}\,{}^n\mathrm{R}_x.$$

Porównywając (174'') ze (146') widzimy, że premia jednorazowa za ubezpieczenie mieszane otrzymuje się z wartości renty czasowej zupełnie w taki sam sposób, jak premia jednorazowa za zwyczajne ubezpieczenie kapitału pośmiertnego z renty dożywotniej.

W podobny sposób otrzymujemy

$$(175'')\qquad {}^lp\left\{{}^n\overset{m}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{v_x - \frac{r-1}{r}(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n})}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}},$$

a przy $l = n$

$$(176'')\qquad {}^np\left\{{}^n\overset{m}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{1}{{}^n\mathrm{R}_x} - \frac{r-1}{r},$$

skąd znów, po porównaniu ze (149''), okazuje się, że premia roczna, płacona przez cały czas trwania umowy, tak samo otrzymuje się z wartości renty czasowej, jak dożywotnia premia roczna za zwyczajne ubezpieczenie kapitału pośmiertnego z wartości renty dożywotniej.

W miejsce kapitału możnaby, w ubezpieczeniach mieszanych, osobie przeżywającej n lat zabezpieczyć oznaczonej wysokości rentę dożywotnią. Wtedy wystarcza we wzorach (174), (174'), (175) i t. d. za $\frac{v_{x+n}}{v_x}$ podstawić odpowiednie wyrażenie na rentę dożywotnią odroczoną.

Gdyby renta miała wynosić $\frac{h}{k}$ jednostki monetarnej rocznie, mielibyśmy np. zamiast (174) i (176) następujące wzory na premie jednorazowe i roczne za tego rodzaju ubezpieczenia

$$(177)\qquad {}^n\overset{\mathrm{R}}{\mathrm{K}}_x = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n} + \frac{h}{k}\Sigma v_{x+n}}{v_x},$$

$$(177')\qquad {}^np\left\{{}^n\overset{\mathrm{R}}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n} + \frac{h}{k}\Sigma v_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}.$$

Np., osoba 30-o letnia ubezpiecza 5000 fr. kapitału płatnego jej sukcesorom w razie, jeżeli umrze w ciągu 20-u lat; w razie zaś, jeżeli dożyje 50-u lat, ona sama otrzyma po 500 fr. rocznej renty dożywotniej. Tutaj renta roczna stanowi 10% ubezpieczonego kapitału, skutkiem czego $\frac{h}{k} = 0{,}1$; premie zatem od 1-ki kapitału wynoszą

$$ {}^{20}\overset{\mathrm{R}}{\mathrm{K}}_{30} = \frac{\Sigma m_{30} - \Sigma m_{50} + 0{,}1\,\Sigma v_{50}}{v_{30}} = \frac{21\,729{,}931}{30\,743{,}98} = 0{,}706\,803, $$

od 5000 fr. kapitału i ewentualnie 500 fr. rocznej renty $0{,}706\,803 \times 5000 = 3\,534{,}015$ fr.;

$$ {}^{20}p\left\{{}^{20}\overset{\mathrm{R}}{\mathrm{K}}_{30}\right\} = \frac{\Sigma m_{30} - \Sigma m_{50} + 0{,}1\,\Sigma v_{50}}{\Sigma v_{30} - \Sigma v_{50}} = \frac{21\,729{,}931}{418\,077{,}93} = 0{,}051\,976, $$

od 5000 fr. kapitału i ewentualnie 500 fr. rocznej renty premia roczna wynosi po $0{,}051\,976 \times 5\,000 = 259{,}88$ fr.

Zamiast tej ostatniej kombinacyi, można do podobnego rezultatu dojść i za pośrednictwem zwyczajnego ubezpieczenia mieszanego, po przeżyciu bowiem n lat można, za otrzymany kapitał, nabyć prawo do renty natychmiastowej dożywotniej. Np., osoba 30-o letnia, ubezpieczona na 5000 fr. według kombinacyi mieszanej, po dożyciu lat 50, wzamian za należny jej kapitał 5000 fr., życzy sobie otrzymać rentę dożywotnią z góry rocznie płatną.

Wartością jednostki rocznej renty dożywotniej, z góry płatnej osobie 50-o letniej, według tab. X, kol. 1, jest 14,11644. Za 5000 fr. premii jednorazowej może więc ta osoba otrzymać $\frac{5\,000}{14{,}11644} = 354{,}20$ fr. rocznej renty dożywotniej.

Możność takiej zamiany jest o tyle dogodniejszą od bezpośredniego ubezpieczenia renty systemem mieszanym, że zostawia podniesienie kapitału lub zamianę takowego na rentę woli ubezpieczonego, który tem samem swój wybór może zastosować do okoliczności i warunków, w jakich go ekspiracya terminu zastaje, a czego na 20 lat wprzód przewidzieć nie jest w stanie.

67. Ubezpieczenia częściowo mieszane. — Ubezpieczenia z terminem stałym. Do mieszanego systemu ubezpieczeń można najrozmaitsze wprowadzać przemiany; nazywać je będziemy ubezpieczeniami częściowo mieszanemi.

Dosyć rozpowszechniony jest np. zwyczaj ubezpieczania kapitału, płatnego sukcesorom w razie, jeżeli ubezpieczony umrze w ciągu n pierwszych lat po zawarciu umowy; jeżeli zaś ubezpieczony przeżyje rzeczony przeciąg czasu, sam otrzyma połowę kapitału, niezależnie od czego, po późniejszej śmierci osoby ubezpieczonej, sukcesorowie otrzymają cały ubezpieczony kapitał — tak samo, jakby go byli otrzymali, gdyby ubezpieczony umarł przed upływem n lat.

Łatwo dostrzedz, że kombinacya ta jest połączeniem (zmieszaniem) zwyczajnego ubezpieczenia pośmiertnego na cały kapitał z ubezpieczeniem na dożycie połowy kapitału. Skutkiem tego, gdy 1-a kapitału pośmiertnego ma być płatna przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi, wzorem na premię jednorazową jest

$$ (178) \qquad {}^{n}\overset{c/m}{\mathrm{K}}_{x} = \frac{\Sigma m_x + \frac{1}{2} v_{x+n}}{v_x}. $$

Wzorem na premię roczną, płatną przez l lat, jest

$${}^{l}p\left\{{}^{n}\overset{c/m}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_x + \frac{1}{2} v_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}}, \tag{178'}$$

gdy $l = n$

$${}^{n}p\left\{{}^{n}\overset{c/m}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_x + \frac{1}{2} v_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}. \tag{178''}$$

Gdyby, w razie śmierci osoby ubezpieczonej przed upływem n lat, miał być wypłacony sukcesorom cały kapitał (= 1-ce); po przeżyciu n lat połowa kapitału samemu ubezpieczonemu, a druga połowa sukcesorom po późniejszej śmierci ubezpieczonego; kombinacya rozpada się na zwyczajne ubezpieczenie pośmiertne połowy kapitału i na ubezpieczenie mieszane (n letnie) drugiej połowy. Wzorem na premię jednorazową jest tutaj oczywiście

$${}^{n}\overset{c/m}{\mathrm{K}}_x = \frac{\frac{1}{2}\Sigma m_x + \frac{1}{2}(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n} + v_{x+n})}{v_x}, \text{ czyli}$$

$${}^{n}\overset{c/m}{\mathrm{K}}_x = \frac{\Sigma m_x + \frac{1}{2}(v_{x+n} - \Sigma m_{x+n})}{v_x}; \tag{179}$$

wzorem na premię roczną, płatną przez lat l, jest

$${}^{l}p\left\{{}^{n}\overset{c/m}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_x + \frac{1}{2}(v_{x+n} - \Sigma m_{x+n})}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}}. \tag{179'}$$

I w ogóle, jeżeli po upływie n lat, żyjącej wówczas jeszcze osobie ubezpieczonej mamy wypłacić $\frac{h}{k}$ całego kapitału, płatnego sukcesorom w razie śmierci osoby ubezpieczonej w ciągu n pierwszych lat, a resztę, czyli $1-\frac{h}{k}=\frac{k-h}{k}$ całego kapitału sukcesorom po późniejszej śmierci ubezpieczonego, to odpowiednim wzorem jest

$${}^{n}\overset{c/m}{\mathrm{K}}_x = \frac{\frac{k-h}{k}\Sigma m_x + \frac{h}{k}(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n} + v_{x+n})}{v_x}, \text{ czyli}$$

$${}^{n}\overset{c/m}{\mathrm{K}}_x = \frac{\Sigma m_x + \frac{h}{k}(v_{x+n} - \Sigma m_{x+n})}{v_x}, \tag{180}$$

gdy kapitał pośmiertny ma być wypłacony przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi; zaś

$${}^{n}\overset{c/m}{\mathrm{K}}{}'_x = \frac{r^{\frac{1}{2}}.\Sigma m_x + \frac{h}{k}.(v_{x+n} - r^{\frac{1}{2}}.\Sigma m_{x+n})}{v_x}, \tag{180'}$$

gdy kapitał pośmiertny ma być wypłacony zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej.

Wzorami na premie roczne, płatne przez l lat, są

$$(181)\qquad {}^{l}p\left\{{}^{n}\overset{c/m}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_x + \frac{h}{k}\,(v_{x+n} - \Sigma m_{x+n})}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}},$$

$$(181')\qquad {}^{l}p\left\{{}^{n}\overset{c/m}{\mathrm{K}'}_x\right\} = \frac{r^{\frac{1}{2}}.\Sigma m_x + \frac{h}{k}\,(v_{x+n} - r^{\frac{1}{2}}.\Sigma m_{x+n})}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}}.$$

Najrozmaitszych stosunków pomiędzy wysokością kapitałów, wypłacanych po śmierci i za życia, przed i po upływie z góry oznaczonego czasu, może tu być niezliczona ilość. Można także części kapitału, w różnych wysokościach, wypłacać kilkakrotnie za życia osoby ubezpieczonej, można ubezpieczone kapitały łączyć z rentami; lecz tych najrozmaitszych odmian wyszczególniać, ani też wzorów na nie wyprowadzać nie będziemy, raz dla tego, że wszystkie wyliczyć trudno, gdyż może ich być bardzo wiele, a następnie, ponieważ napisanie odpowiednich wzorów—po tem, cośmy tu powiedzieli — nie przedstawia żadnych trudności.

Natomiast pominąć nie możemy jednej, bardzo ważnej kombinacyi, znanej w praktyce pod mianem ubezpieczenia kapitału z terminem stałym, albo pod nazwą ubezpieczenia terminowego (Kapital-Versicherung mit bestimmter Verfallzeit, — Assurance à terme fixe).

Osoba x letnia ubezpiecza 1-kę kapitału w ten sposób, że po upływie n lat kapitał ma być bezwarunkowo wypłacony, bez względu na to, czy osoba ubezpieczona żyć wówczas będzie, czy też nie. Premie roczne wszakże o tyle tylko będą płacone, przez z góry oznaczoną liczbę lat l, o ile ubezpieczony przez cały ten czas żyć będzie; jeżeli umrze wcześniej, opłata premij ustaje z chwilą jego śmierci.

Widzimy przedewszystkiem, że tutaj ubezpieczony kapitał nie stanowi przedmiotu ryzyka, ponieważ w każdym razie wypłacony zostanie. Ryzyku podlegają tylko premie peryodyczne, których płatność lub niepłatność zależy od życia lub śmierci osoby ubezpieczonej.

Następnie, tego rodzaju ubezpieczenie nie może być zawarte za pośrednicwem premii jednorazowej, która musiałaby być równą zdyskontowanej, na n lat, wartości ubezpieczonego kapitału; nie byłoby tu zatem żadnego ryzyka, czyli tranzakcya stanowiłaby interes bankierski, nie zaś ubezpieczeniowy.

Teraźniejszą wartością 1-ki kapitału, bezwarunkowo płatnego po n latach, jest ρ^n; jednorazową wartością matematyczną mających się wnieść premij rocznych jest

$${}^{l}p\left\{{}_{n}\overset{t}{\mathrm{K}}_x\right\}\cdot\frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}}{v_x},$$

gdzie ${}_{n}\overset{t}{\mathrm{K}}_x$ przyjmujemy za symbol ubezpieczenia terminowego. Powinno więc być

$${}^{l}p\left\{{}_{n}\overset{t}{\mathrm{K}}_x\right\}\cdot\frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}}{v_x} = \rho^n,$$

skąd

$$(182) \qquad {}^{l}p\left\{{}_{n}\overset{t}{\mathrm{K}}_{x}\right\} = \frac{v_x \rho^n}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}} = \frac{v_x}{r^n(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l})};$$

gdy $l = n$

$$(182') \qquad {}^{n}p\left\{{}_{n}\overset{t}{\mathrm{K}}_{x}\right\} = \frac{v_x \rho^n}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}} = \frac{v_x}{r^n(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n})}.$$

Dla $x = 30$, $n = 20$, $l = 10$

$$ {}^{10}p\left\{{}_{20}\overset{t}{\mathrm{K}}_{30}\right\} = \frac{v_{30}\left(\frac{1}{1,035}\right)^{20}}{\Sigma v_{30} - \Sigma v_{40}} = \frac{15\,450,876}{254\,970,80} = 0,060\,599,$$

od 5000 fr. po 0,060599 × 5000 = 302,995 fr. rocznie;
dla $l = n = 20$

$$ {}^{20}p\left\{{}_{20}\overset{t}{\mathrm{K}}_{30}\right\} = \frac{v_{30}\left(\frac{1}{1,035}\right)^{20}}{\Sigma v_{30} - \Sigma v_{50}} = \frac{15\,450,876}{418\,077,93} = 0,036\,957,$$

od 5000 fr. po 0,036957 × 5000 = 184,785 fr. rocznie.

W art. 60 powiedzieliśmy, że stosowanie ubezpieczeń kapitałów na dożycie do zabezpieczania posagów dzieciom posiada tę słabą stronę, iż, w razie śmierci ojca, premie dalej opłacać trzeba, co nie zawsze jest możliwe, a tem samem dzieci nie zawsze odnoszą te korzyści, jakie im ojciec pragnął zapewnić. Otóż tę niedogodność usuwają ubezpieczenia terminowe, w których po śmierci ojca premie dalej się nie opłacają. Posiadają one jeszcze tę wygodę, że w razie śmierci uposażonego dziecka, kapitał, bez żadnych strat, może być przelany na inne dzieci. Dla tego ubezpieczenia kapitałów z terminem stałym często bywają używane za środek zabezpieczenia posagów dzieciom, ale nie zawsze da się to w praktyce urzeczywistnić, ponieważ ojciec musi się poddać rewizy lekarskiej. Jeżeli zdrowie ojca nie odpowiada warunkom wymaganym przez instytucyę, ubezpieczenie nie przychodzi do skutku i osoba interesowana z konieczności zwrócić się musi do ubezpieczenia kapitału na dożycie.

ROZDZIAŁ VI.

PREMIE BRUTTO. — UBEZPIECZENIA ZE ZWROTEM PREMIJ.

68. Potrzeba zwiększenia premij netto, — określenie premii brutto. Premie netto, których obliczaniem dotąd się zajmowaliśmy, starczą na pokrywanie wszelkich zobowiązań instytucyi względem ubezpieczonych — o tyle, o ile śmiertelność pomiędzy nimi trzyma się tego porządku, jaki wskazuje tablica śmiertelności przyjęta za podstawę do obliczania premij. Okoliczność tę, wynikającą z poprzednich naszych rozumowań, łatwo na przykładzie sprawdzić można.

Przypuśćmy, że mamy 1000 osób 40-o letnich, ubezpieczonych czasowo, przez lat 5, na przypadek śmierci, każda po 1000 fr., płatne przy końcu tego roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi.

Roczna premia netto, jaką każdy z żyjących ubezpieczonych z góry przez lat 5 opłacać winien, według wzoru (162), wynosi

$$ {}^5p\left\{{}^5\overset{s}{\mathrm{K}}_{40}\right\} = \frac{\Sigma m_{40} - \Sigma m_{45}}{\Sigma v_{40} - \Sigma v_{45}} \times 1000 = \frac{960{,}75 \times 1000}{90948{,}2} = 10{,}5637 \text{ fr.} $$

Według przyjętej przez nas tablicy śmiertelności 17-u towarzystw angielskich (tabl. III, kol. 9 i 10), z pośród 1000 osób 40-o letnich umiera w pierwszym roku 0,01036 × 1000 = 10,36, dożywa 41 lat reszta, czyli 989,64. Z 989,64 osób 41-o letnich umiera w ciągu roku 0,01061 × 989,64 = 10,50, pozostaje przy życiu 42-u letnich 979,14.

Prowadząc podobny rachunek dalej, znajdziemy, że w wieku lat:

od 42 do 43 umiera osób 10,66; pozostaje przy życiu 968,48 osób 43 letnich,
„ 43 „ 44 „ „ 10,90; „ „ „ 957,58 „ 44 „
„ 44 „ 45 „ „ 11,20; „ „ „ 946,38 „ 45 „

Chociaż ułamkowe liczby zmarłych i żyjących w rzeczywistości nie mogą mieć miejsca, to jednak, dla ścisłości rachunku, wprowadzamy je tutaj.

Na początku pierwszego roku otrzymuje instytucya 10,5637 × 1000 = = 10563,70 fr., które, procentując przy stopie $3^{1}/_{1}{}^{0}/_{0}$, zamieniają się przy końcu roku na 10563,70 × 1,035 = 10933,43 fr.; z tej sumy sukcesorowie, po

10,36 zmarłych, otrzymują 1000 × 10,36 = 10360 fr., a na następny rok pozostaje w remanencie 573,43 fr.

Na początku 2-go roku otrzymuje instytucya nowych premij 10,5637 × × 989,64 = 10454,26 fr.; posiada więc, razem z zeszłorocznym remanentem, 11027,69 fr., które, skutkiem procentowania, przy końcu roku dają kapitał 11413,66 fr., a po wypłaceniu sukcesorom, po 10,50 zmarłych, 1000×10,50= = 10500 fr., pozostaje na rok następny 913,66 fr.

W ten sposób idąc dalej, otrzymujemy następującą tabelkę

Rok	Liczba osób		Pozostało z lat poprzednich		Wpłynęło premij na początku roku ubezpieczeniowego		Razem znajduje się na początku roku		Po oprocentowaniu przy 3½% znajduje się przy końcu roku ubezpieczeniowego		Wypłaca się sukcesorom po zmarłych w ciągu roku		Pozostaje na rok następny	
	Żyjących na początku roku	Zmarłych w ciągu roku												
1	1000,00	10,36	—	—	10 563	70	10 563	70	10 933	43	10 360	—	573	43
2	989,64	10,50	573	43	10 454	26	11 027	69	11 413	66	10 500	—	913	66
3	979,14	10,66	913	66	10 343	34	11 257	00	11 651	00	10 660	—	991	00
4	968,48	10,90	991	00	10 230	73	11 221	73	11 614	49	10 900	—	714	49
5	957,58	11,20	714	49	10 115	59	10 830	08	11 209	13	11 200	—	9	13

Nie zważając na drobną pozostałość 9,13 fr., powstałą z powodu użycia małej liczby cyfr dziesiętnych, widzimy, że istotnie pobierane premie netto wystarczają na pokrycie zobowiązań zaciągniętych przez instytucyę względem ubezpieczonych, jeżeli śmiertelność rzeczywista zgadza się ze śmiertelnością przewidywaną przez tablicę śmiertelności.

Wszakże śmiertelność rzeczywista najczęściej różni się od podanej w tablicy — bywa większą lub mniejszą, co naturalnie burzy rachunek w naszej tabelce przeprowadzony. Wprawdzie, jeżeli tablica śmiertelności dokładnie odzwierciadla śmiertelność danej grupy osób ubezpieczonych, to z biegiem lat, przy bardzo wielkiej liczbie ubezpieczonych, różnice te na plus i minus do pewnego stopnia wzajem się zrównoważyć powinny; jednak, wobec zwykle niedostatecznie wysokiej liczby osób ubezpieczonych, równowaga taka nie zachodzi i ewentualnie może się na niekorzyść instytucyi zwrócić. Stanowi to t. z. ryzyko ubezpieczeń życiowych, przeciwko złym skutkom którego możliwie zabezpieczyć się trzeba. W tym celu każda instytucya gromadzi u siebie jakiś zapas, zwany kapitałem zasobowym (*), przeznaczony na pokrywanie szkód, wynikających ze zwiększonej, nad przyjętą normę, śmiertelności. Do

---

(*) **Kapitału zasobowego** nie należy identyfikować z **rezerwą premiową**, o której będzie mowa w rozdziale VIII.

gromadzenia kapitału zasobowego, stanowiącego podstawę wytrzymałości instytucyi, potrzebne są odpowiednie dochody, których nam premie netto nie dostarczają.

Następnie, instytucya ponosić jeszcze musi inne niezbędne wydatki. Potrzebuje opłacać agentów, pozyskujących ubezpieczenia i ściągających (inkasujących) następnie peryodycznie wnoszone premie, t. j. musi płacić t. z. prowizyę akwizycyjną i inkasową. Musi opłacać lekarzy za dokonywane rewizye, urzędników za załatwianie czynności rachunkowych i manipulacyjnych; musi mieć lokal, inwentarz ruchomy, książki i księgi, broszury, druki, blankiety i różne inne materyały, co razem wzięte stanowi t. z. wydatki administracyjne.

Dalej — założyciele, angażujący w instytucyi swe kapitały, potrzebują mieć jakieś zyski, czyli procent wyższy od bieżącego, bez czego trudno byłoby zebrać potrzebne do założenia instytucyi kapitały.

Wreszcie, jeżeli instytucya ma się stać z czasem czysto wzajemną, potrzeba z zysków odkładać fundusz na umorzenie kapitału zakładowego.

Słowem, instytucye ubezpieczeń życiowych, oprócz dochodów potrzebnych na pokrywanie zobowiązań względem ubezpieczonych, posiadać jeszcze muszą źródła, z których pokrywaćby mogły wydatki na ryzyko, akwizycyę, inkaso, na administracyę i na zyski. Źródłem mogą tu być tylko premie, wnoszone przez ubezpieczonych — jeżeli pominiemy bardzo problematyczną, jak na dłuższy przeciąg czasu, korzyść, płynącą z wyższego nieco procentu handlowego nad przyjęty do obliczeń procent techniczny.

Gdyby instytucye, na pokrycie tych wszystkich wydatków, czerpały z premij netto, rachunek, przeprowadzony w naszej tabelce, wykazałby brak środków potrzebnych na pokrywanie zobowiązań względem ubezpieczonych, wobec czego zachodzi konieczna potrzeba zwiększenia premij netto o pewien dodatek, który -- dla krótkości — ogólnie dodatkiem na administracyę nazywać będziemy.

Premia netto zwiększona o dodatek na administracyę zowie się premią brutto i obecnie chodzi nam właśnie o wyznaczenie stosunku, w jakim premie netto zwiększyć należy, aby pozyskać dochód wystarczający na pokrycie wydatków dodatkowo obciążających instytucye.

69. ZILLMEROWSKI SYSTEM UMARZANIA PROWIZYI AKWIZYCYJNEJ.

Przedmiotem ryzyka (matematycznego) teoretycznie zajmowali się już niektórzy specyaliści, jak: J. N. Tetens (1786), Lachmund, Sprague, Hattendorf, Kanner, Wittstein i Perozzo (*), ale ich prace po za granicę teoryi dotąd nie wykroczyły. Badania dowodnie wykazały, że ryzyko zależy od liczby osób ubezpieczonych i w tem leży pewna trudność stosowania teoryi do praktyki, gdyż liczba ubezpieczonych nie jest stałą, lecz bardzo zmienną ilością.

(*) Patrz B. Maleszewskiego „Теорія и практика пенсіонныхъ кассъ". Tom II, Część II, Rozd. X.

W praktyce sprawa dodatku na ryzyko nosi dotąd na sobie charakter dowolności. Najczęściej z zysków potrąca się corocznie pewna, ustawą oznaczona, część na kapitał zasobowy, co się powtarza dotąd, póki rzeczony kapitał nie dojdzie oznaczonej wysokości. Jeżeli, z przyczyny nadmiernej śmiertelności, kapitał zasobowy zostanie naruszony, potrącanie z zysków odpowiedniej części ponawia się i trwa aż do chwili uzupełnienia naruszonego kapitału.

Stałych reguł na oznaczenie wysokości dodatków na akwizycyę, inkaso, na administracyę i na zyski ustanowić nie można, wydatki te bowiem zależą od różnych okoliczności. Wywierają na nie wpływ warunki bytu pracujących osób, podaż pracy oraz konkurencya innych, tego samego rodzaju, instytucyj.

Wydatki dokonywają się bieżąco (zyski przeważnie rocznie), oprócz akwizycyi, która obecnie bywa całkowicie wypłacaną w ciągu pierwszego roku trwania ubezpieczeń.

Początkowo i akwizycya była płaconą peryodycznie przez cały czas trwania umowy ubezpieczeniowej — w miarę, jak wpływały premie. Porządek taki był bardzo właściwy: z jednej strony nie obciążał instytucyi na początek zbyt wysokimi wydatkami i nie narażał jej na straty, gdy ubezpieczenie zostało zerwane, bo akwizycya była płaconą tylko o tyle, o ile premie wpływały; z drugiej strony — przywiązywał agenta do instytucyi, dając mu ciągły dochód, i zniewalał go do baczenia, aby ubezpieczony umowy nie zrywał i premie regularnie wnosił. Przy takim jednak systemie wynagradzania agentów, ubezpieczenia napływały leniwo i dla tego, żeby silniej agentów do działalności pobudzić, zmieniono peryodyczny system wynagradzania na doraźny.

Ubezpieczenia istotnie zaczęły napływać obficiej, ale stały się mniej trwałemi, gdyż agenci, od razu wynagrodzeni w całości, przestają dbać o trwałość ubezpieczeń, uganiając się za nowemi, bez zwracania uwagi, czy namawiane do ubezpieczenia się osoby będą w możności płacić premie przez cały czas trwania umowy. To też w ostatnich czasach poczęła się objawiać reakcya: jedni proponują powrót do dawnego systemu wynagradzania agentów przez cały czas trwania ubezpieczeń; inni chcą doraźnie wypłacać połowę prowizyi, rozkładając wypłatę drugiej połowy na cały przeciąg trwania umowy — w miarę, jak wpływają premie; inni wreszcie chcą rozłożyć wypłatę prowizyi akwizycyjnej na pewną ograniczoną liczbę lat i ten ostatni sposób znalazł już nawet praktyczne zastosowanie we Francyi.

Jakikolwiek jednak będzie system, zawsze prowizyę akwizycyjną trzeba będzie wypłacać dotąd, póki same społeczeństwa, zrozumiawszy pożyteczność ubezpieczeń życiowych, nie zaczną samodzielnie korzystać z usług odnośnych instytucyj. Dokąd to nie nastąpi, prowizyę płacić trzeba i, co za tem idzie, o środki na jej pokrycie starać się należy.

Dr. Zillmer proponował włączać prowizyę akwizycyjną do premii netto — tak, aby w pierwszej rocznej premii netto mieściła się cała jednorazowa prowizya agenta, a mimo to premie przez cały czas były jednakowe. Wtedy obliczanie premij netto w następujący sposób należałoby uskuteczniać.

Przypuśćmy, że za zwyczajne ubezpieczenie 1-ki kapitału pośmiertnego, przy premiach rocznych dośmiertnie wnoszonych, płacimy jednorazowo prowizyę a.

Teraźniejszą wartość ubezpieczonego kapitału oznaczmy, jak zwykle, przez $\overset{s}{\mathrm{K}}_x$; zwyczajną roczną premię netto, ubezpieczającą kapitał pośmiertny, przez p_x, a umarzającą zarazem i prowizyę a przez $p_{x(a)}$. Wtedy powinno być

$$p_{x(a)} . \mathrm{R}_x = \overset{s}{\mathrm{K}}_x + a,$$

skąd

$$p_{x(a)} = \frac{\overset{s}{\mathrm{K}}_x + a}{\mathrm{R}_x} = p_x + \frac{a}{\mathrm{R}_x}, \tag{183}$$

t. j. zwyczajną premię roczną trzeba zwiększyć o premię należną za ubezpieczenie kapitału z góry w wysokości a wypłaconego.

Gdybyśmy np. płacili, tytułem prowizyi, 1% od ubezpieczonego, osobie 30-o letniej, kapitału, musielibyśmy, od 1-ki kapitału, pobierać nie 0,017 960, jak wypadło w art. 62, lecz

$$p_{30(1\%)} = 0{,}017\,960 + \frac{0{,}01}{\mathrm{R}_{30}} = 0{,}017\,960 + \frac{0{,}01}{19{,}313\,99} = 0{,}018\,478,$$

od 5 000 fr. po 92,39 fr. rocznie.

Przy takim sposobie umarzania prowizyi, jej wysokość a nie mogłaby jednak, w zasadzie, być dowolnie wysoką, musiałoby albowiem z pierwszorocznej premii netto, po wypłaceniu prowizyi, pozostać przynajmniej tyle, ile potrzeba na pokrycie spodziewanych w pierwszym roku szkód. Otóż wartością pierwszorocznej szkody, przypadającej średnio na każdego ubezpieczonego, jest oczywiście premia netto za czasowe jednoroczne ubezpieczenie, czyli t. z. roczna ryzyko premia, t. j. według wzoru (160),

$${}^{1}\overset{s}{\mathrm{K}}_x = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+1}}{v_x} = \frac{m_x}{v_x},$$

musiałoby więc być

$$p_{x(a)} - a \geqq \frac{m_x}{v_x},$$

skąd wypada

$$a \leqq \frac{\mathrm{R}_x\left(p_x - \frac{m_x}{v_x}\right)}{\mathrm{R}_x - 1} = \frac{\mathrm{R}_x}{{}_1\mathrm{R}_x}\left(p_x - \frac{m_x}{v_x}\right). \tag{184}$$

Np. dla 1-ki kapitału, przy $x = 30$

$$a \leqq \frac{19{,}313\,99}{18{,}313\,99}\left(0{,}017\,960 - \frac{250{,}2554}{30\,743{,}98}\right) = 0{,}010\,36;$$

dla 5 000 fr. $a \leqq 0{,}010\,36 \times 5\,000 = 51{,}80$ fr., t. j. prowizya nie powinna przechodzić 1,036% od ubezpieczonego kapitału.

System Zillmer'a wywołał żywą ze strony specyalistów opozycyę, ponieważ, przy ewentualnej niesumienności organów rządzących instytucyą, może dać powód do nietrzymania się powyżej oznaczonych granic (184) i w następstwie, do nadmiernego, w celach konkurencyjnych, podnoszenia prowizyi bez obawy zmniejszenia zysków, co fatalnie na rezerwę, a tem samem i na stan finansowy instytucyi, resp. na los ubezpieczonych oddziaałćby mogło. Szczegółami, objaśniającymi w jaki sposób taki stan rzeczy źleby na rezerwę oddziałał, w tem miejscu zająć się nie możemy, gdyż wprzód potrzeba się zapoznać z samą rezerwą premiową, co dopiero nastąpi w rozdziale VIII.

Tu nadmienimy tylko, że ostatecznie prowizya akwizycyjna dotąd — podobnie, jak ryzyko i wszystkie inne wydatki — włącza się do ogólnego dodatku na administracyę, do oznaczenia którego z kolei przechodzimy, posiłkując się sposobem, podanym przez Massé'a (*).

70. Wzór Massé'a na oznaczenie dodatku administracyjnego.

Oznaczmy przez p_x roczną premię netto, dla x letniej osoby, za jakiekolwiek ubezpieczenie; przez π_x odpowiednią premię brutto. Wtedy

$$\frac{\pi_x - p_x}{p_x} = i = \frac{s}{100} \tag{185}$$

będzie dodatkiem na administracyę do każdego franka premii netto; a s dodatkiem do każdych 100 fr. takiejże premii, czyli dodatkiem wyrażonym w formie stopy procentowej.

Oznaczmy dalej:

(186)
- przez α dodatek jednorazowy na akwizycyę, zawarty w każdym franku pierwszej rocznej premii brutto;
- przez β dodatek roczny na zysk instytucyi;
- przez γ dodatek na właściwą administracyę;
- przez δ dodatek na inkaso, którego wypłata rozpoczyna się dopiero od drugiego roku ubezpieczeniowego.

Jeżeli premie mają się płacić przez n lat, to $p_x \,.\, {}^{n}\mathrm{R}_x = p_x(1 + {}^{n}_{1}\mathrm{R}_x)$ jest teraźniejszą wartością matematyczną wszystkich mających się wnieść rocznych premij netto; $\pi_x \,.\, {}^{n}\mathrm{R}_x = \pi_x(1 + {}^{n}_{1}\mathrm{R}_x)$ jest jednoczesną wartością wszystkich mających się wnieść rocznych premij brutto.

Według tych oznaczeń, na rzecz premii netto wpływa:
w pierwszym roku $\pi_x(1 - \alpha - \beta - \gamma)$,
w następnych $n - 1$ latach po $\pi_x(1 - \beta - \gamma - \delta)$, czyli teraźniejsza wartość wszystkich mających wpłynąć premij netto wynosi

$$p_x(1 + {}^{n}_{1}\mathrm{R}_x) = \pi_x(1 - \alpha - \beta - \gamma) + \pi_x(1 - \beta - \gamma - \delta) \,.\, {}^{n}_{1}\mathrm{R}_x,$$

(*) B. **Maleszewski**: „Теорія и практика пенсіонныхъ кассъ",Tom II, część II, str. 181 i dalsze.

lub, gdy dla krótkości oznaczymy

$$(186') \qquad \alpha + \beta + \gamma = a, \beta + \gamma + \delta = b,$$

$$p_x(1 + {}_1^n\mathrm{R}_x) = \pi_x(1 - a) + \pi_x(1 - b) . {}_1^n\mathrm{R}_x,$$

skąd

$$p_x = \frac{\pi_x [(1 - a) + (1 - b) {}_1^n\mathrm{R}_x]}{1 + {}_1^n\mathrm{R}_x}, \text{ oraz}$$

$$\frac{\pi_x - p_x}{p_x} = i = \frac{a + b \, {}_1^n\mathrm{R}_x}{(1 - a) + (1 - b) \, {}_1^n\mathrm{R}_x},$$

albo, po pomnożeniu licznika i mianownika przez $(1 - b)$ oraz dodaniu i odjęciu od licznika po b,

$$(187) \qquad i = \frac{s}{100} = \frac{b}{1 - b} + \frac{a - b}{1 - b} \cdot \frac{1}{(1 - a) + (1 - b) \, {}_1^n\mathrm{R}_x} .$$

Gdy premie mają być płacone dośmiertnie,

$$(187') \qquad i = \frac{s}{100} = \frac{b}{1 - b} + \frac{a - b}{1 - b} \cdot \frac{1}{(1 - a) + (1 - b) {}_1\mathrm{R}_x} .$$

Mając oznaczone $i = \frac{s}{100}$, można otrzymać łatwo premię brutto z premii netto, albowiem ze (185) wypada

$$(188) \qquad \pi_x = p_x\left(1 + \frac{s}{100}\right) = p_x \cdot q,$$

gdzie q zastępuje, dla krótkości, $1 + \frac{s}{100}$ ·

Gdybyśmy, poprzestając na samych tylko wydatkach koniecznych, opuścili z rachunku zyski, należałoby w (187) resp. w (187') podstawić

$$(186'') \qquad a = \alpha + \gamma; \; b = \gamma + \delta.$$

Przypuśćmy np., że tytułem prowizyi akwizycyjnej wypłacamy jednorazowo 30% rocznej premii brutto, na administracyę corocznie po 10%, a na inkaso, począwszy od 2-go roku, po 3%; wtedy będzie

$$\alpha = 0{,}30; \; \gamma = 0{,}10; \; \delta = 0{,}03, \text{ t. j.}$$

$$a = 0{,}40; \; b = 0{,}13,$$

skutkiem czego ze wzoru (187'), dla osoby 30-o letniej, otrzymujemy

$$i = \frac{13}{87} + \frac{27}{87} \cdot \frac{1}{0{,}60 + 0{,}87 \times 18{,}313\,99} = 0{,}1682, \text{ czyli}$$

$$\frac{s}{100} = 0{,}1682, \text{ skąd } s = 16{,}82\%; \; q = 1{,}1682.$$

Widzimy więc, że w obecnym przypadku dodatek na administracyę stanowi około 17% premii netto; ponieważ zaś roczną premią netto za zwyczajne ubezpieczenie 1-ki kapitału pośmiertnego, dla osoby 30-o letniej, jest 0,017960 (art. 62), przeto premią brutto będzie 0,017960 × 1,1682 = 0,020981.

Taryfy układają się zazwyczaj od 100 lub 1000 jednostek kapitału ubezpieczonego; w rozpatrywanym więc przypadku, przy wieku lat 30, figurować powinna premia w wysokości 2,10 od 100 lub 20,98 od 1000, albo, jak się czasami pisze, 2,10% lub 20,98‰.

Tą drogą oznaczony dodatek na administracyę przyjmuje się za minimalny, poniżej którego zejść nie można: najprzód dla tego, że się tu nie uwzględniło ryzyka i zysków, jako wydatków trudnych do oznaczenia z góry; następnie, ponieważ akwizycya łącznie z administracyą i inkasem z biegiem lat rozmaitym ulegają zmianom. Z tych powodów dodatek oznacza się zwykle znacznie wyższy od teoretycznie obliczonego (od 20% do 40%), jeżeli zaś rezultat operacyj wykaże nadmiar, wskazujący że taryfa jest za wysoką, nadmiar bywa rozdzielony pomiędzy ubezpieczonych pod nazwą dywidendy, albo udziału w zyskach.

Podział zysków dokonywa się corocznie w rozmaity sposób: albo w stosunku do wniesionych w ciągu sprawozdawczego roku premij, albo w stosunku do sumy wniesionych premij od chwili zawarcia ubezpieczenia po datę podziału zysków, albo wreszcie w stosunku do rezerwy, nagromadzonej na rachunku każdego ubezpieczonego. Który z powyższych sposobów jest najwłaściwszy, dotąd stanowczo nie roztrzygnięto; według naszego widzenia rzeczy, najracyonalniejszym jest sposób ostatni.

Niektóre instytucye, jak np. amerykański „Equitable" i „New-York", wprowadziły zwyczaj niewypłacania ubezpieczonym zysków corocznie, lecz gromadzą je u siebie przez z góry oznaczoną liczbę lat; do zysków właściwych włączają jeszcze inne korzyści, płynące ze śmierci i zrywania umów przez spółubezpieczonych, tracących przypadające im dywidendy. Sumę w ten sposób zebranych zysków dzielą pomiędzy tych ubezpieczonych, którzy wytrwali do oznaczonego terminu. System ten, nazwany zbieraniem lub akumulacyą zysków, albo półtontiną (*), dał rzeczonym instytucyom pole do dawania

---

(*) W połowie XVII wieku żyjący w Paryżu lekarz włoski Lorenzo Tonti, widząc lichy stan skarbu francuskiego, wymyślił następującą kombinacyę: Pewna liczba osób składa jednorazowo po pewnej kwocie pieniędzy, które się lokują w kasie rentowej. Otrzymany procent corocznie dzieli się pomiędzy żyjących uczestników, skutkiem czego, w miarę jak uczestnicy wymierają, każdemu z pozostających przy życiu dostaje się stopniowo wzrastająca renta. Po śmierci ostatniego rentiera, pozostały kapitał, jako nieposiadający właściciela, może przejść na rzecz skarbu. Kombinacya ta, od nazwiska swego twórcy, zyskała miano tontiny.

Na tle tontin, lecz z myślą całkiem odwróconą, pojawiły się następnie operacye spekulacyjne, zwane „Wzajemnemi stowarzyszeniami na przeżycie": Każdy z uczestników obowiązuje się wnieść jednorazowo lub wnosić rocznie, półrocznie, albo kwartalnie, np. przez lat 10, 12, 15, na rzecz stowarzyszenia, składki w wysokości, jaką z góry sam oznaczy. Po upływie terminu, określającego czas trwania umowy, stowarzyszenie się rozwiązuje, a nagromadzony kapitał, po strąceniu z niego pewnej kwoty na rzecz instytucyi, zostaje rozdzielony pomiędzy tych uczestników, którzy terminu dożyli. Przez analogię i ta operacya pozyskała miano tontiny.

przesadzonych obietnic, które, nie spełniając się nigdy, rozbudzają tylko bezpotrzebnie ludzką namiętność, podgryzają etyczną podstawę ubezpieczeń życiowych, wprowadzając do nich pierwiastek gry hazardowej; wywołują następnie niezadowolenie z doznanych zawodów i zniechęcają w rezultacie ogół do korzystania z dobrodziejstw asekuracyi życiowej. To też w ostatnich czasach przeciwko temu systemowi powstała silna reakcya i niektóre rządy, jak np. u nas, zabroniły praktykowania systemu akumulacyjnego (patrz art. 29).

Chociaż wzór (187) stanowczo nie oznacza wysokości dodatku na administracyę, tylko określa jego minimum, to jednak daje on wskazówki, jak dodatek normować należy. Uczy nas mianowicie, że dodatek na administracyę nie zależy od rodzaju ubezpieczenia, tylko od wartości renty, reprezentującej mające się wnieść premie. Otóż wartość renty, począwszy od pewnego wieku, stale z biegiem lat maleje, a ze wzrostem czasu, przez jaki ma być płaconą, rośnie; skutkiem tego dodatek na administracyę, naodwrót, winien wzrastać razem z wiekiem osoby ubezpieczonej w chwili zawierania umowy i maleć ze wzrostem czasu płatności premij.

Zmiany te nie są bardzo znaczne, jeżeli granice wieku i czasu wnoszenia premij nie są zbyt obszerne. Np. dla osoby 30-o letniej znaleźliśmy jako minimum dodatku na administracyę $s = 16{,}82\%$; dla osoby 60-o letniej wypada

$$i = \frac{13}{87} + \frac{27}{87} \cdot \frac{1}{0{,}60 + 0{,}87 \times 9{,}788\,55} = 0{,}1834,$$

skąd $s = 18{,}34\%$, czyli obecne minimum jest od poprzedniego o $1{,}52\%$ większe.

Reguła powyższa wszakże nie zawsze bywa w praktyce stosowaną, ponieważ często rachować się trzeba z wysokością samych premij netto — rosnących, jak wiadomo, z wiekiem i malejących ze wzrostem czasu, przez jaki premie mają być wnoszone.

Co się tyczy dodatku na administracyę do premij jednorazowych, to w zasadzie powinien on być procentowo równy dodatkowi do premij rocznych, jeżeli

---

Przy systemie „akumulacyi zysków" ubezpieczeni wnoszą niejako pewne opłaty (nieodbierane corocznie zyski) do instytucyi, która je kapitalizuje przez lat 10, 15 lub 20 i łącznie z zyskami uczestników zmarłych oraz tych, którzy umowy zerwali, rozdziela pomiędzy uczestników pozostałych przy życiu i wnoszących do końca premie. Otóż ponieważ opisana tu manipulacya z corocznymi zyskami jest zupełnie podobną do „Wzajemnych stowarzyszeń na przeżycie", a cała różnica polega tylko na tem, że stowarzyszony musi się wprzód ubezpieczyć na życie, przeto „akumulacyi zysków" nadano nazwę półtontiny.

W każdego rodzaju tontinie wysokość zysku korzystających z niej zależy od większej lub mniejszej śmiertelności uczestników. Jest tu więc pierwiastek gry losowej i to gry najgorszego gatunku, gdyż opartej na śmierci i nieszczęściu drugich. Ponieważ mam mieć tem więcej, resp. mam być tem szczęśliwszy, im więcej mych towarzyszów umrze, czyli im większą liczbę osób spotka nieszczęście, zatem moje szczęście polega na nieszczęściu drugich. Jest to idea wysoce niemoralna i ta okoliczność stanowi właśnie główną przyczynę, dla której wszelkiego rodzaju tontiny albo już zupełnie zostały zaniechane, albo też, jak np. „akumulacya zysków", znajdują się na drodze do zupełnego zaniku.

koszta zawierania i utrzymania ubezpieczeń nie ulegają zmianie (*). Albowiem podobnie jak jednorazowa premia netto jest teraźniejszą wartością matematyczną mających się wnieść rocznych premij netto, tak samo jednorazowa premia brutto powinna być teraźniejszą wartością matematyczną spodziewanych rocznych premij brutto. Gdy więc przez P_x oznaczymy jednorazową premię netto, odpowiadającą rocznej p_x; przez Π_x jednorazową premię brutto, odpowiadającą rocznej π_x, to powinno być

$$\Pi_x = p_x \,.\, q \,.\, {}^{n}R_x; \quad P_x = p_x \,.\, {}^{n}R_x, \text{ stąd}$$

$$\frac{\Pi_x - P_x}{P_x} = \frac{p_x . {}^{n}R_x . (q-1)}{p_x . {}^{n}R_x} = q - 1, \text{ czyli}$$

$$\Pi_x = P_x . q.$$

Ponieważ jednak, przy premii jednorazowej odpada wydatek na inkaso ($\delta = 0$), przeto i dodatek na administracyę do premii jednorazowej staje się stosunkowo mniejszy od dodatku do premii rocznej. Tak np. w użytym przez nas przykładzie dla 30-o letniej osoby:

$$a = \alpha + \gamma = 0{,}40; \quad b = \gamma = 0{,}10;$$

$$i = \frac{0{,}10}{0{,}90} + \frac{0{,}30}{0{,}90} \cdot \frac{1}{0{,}60 + 0{,}90 \times 18{,}31399} = 0{,}1306, \text{ t. j.}$$

$$s = 13{,}06\%; \quad q = 1{,}1306,$$

jako minimum dodatku na administracyę przy zwyczajnem ubezpieczeniu 30-o letniej osoby na przypadek śmierci za pomocą premii jednorazowej (**).

71. ROZŁOŻENIE ROCZNYCH PREMIJ BRUTTO NA RATY DROBNIEJSZE. W obu poprzednich rozdziałach wyprowadziliśmy wzory nie tylko na premie roczne, ale i na premie płacone w μ ratach co μ-a część roku, zatem np. w ratach półrocznych, kwartalnych, miesięcznych i t. p. Prawa obliczanych tam premij, płaconych w ratach mniejszych od rocznych, niczem się nie różnią od praw premij wnoszonych rocznie, t. j. w razie, jeżeli ktoś zapłacił np. ratę za pierwszy kwartał roku ubezpieczeniowego, w którym umarł, sukcesorowie otrzymują całkowity ubezpieczony kapitał, bez obowiązku dopłacenia niewniesionych za rzeczony rok pozostałych trzech rat kwartalnych.

W praktyce jednak taki sposób nie jest używany; premie w zasadzie zawsze się wnoszą rocznie, a podział na raty, mniejsze od rocznych, nosi na sobie charakter pożyczki, za którą trzeba płacić procent i ewentualny dług

---

(*) To jest, jeżeli za ubezpieczenie, zawarte za pośrednictwem premii jednorazowej, płacimy prowizyę akwizycyjną w stosunku do odpowiedniej premii rocznej i gdy inne wydatki w taki sam sposób stosunkujemy.

(**) Często prowizya akwizycyjna oznacza się nie w stosunku do premii rocznej, lecz w stosunku do ubezpieczonego kapitału. W takim razie należy ten ostatni stosunek zamienić na stosunek do premii rocznej i następnie dopiero zastosować wzór (187).

bezwarunkowo zwrócić, co się dokonywa przez strącenie z ubezpieczonego kapitału rat niedopłaconych za rok, w którym śmierć nastąpiła.

Obciążenie rat procentem znajduje usprawiedliwienie w tem, że gdyby premia była zapłaconą od razu w całości, przynosiłaby instytucyi przez cały rok procent, co w części nie ma miejsca jeżeli się wnosi ratami mniejszemi od rocznych; że zaś podstawy rachunkowe wymagają procentu, zatem ubezpieczeni opłacać go powinni. Skutkiem tej przyczyny, stopa procentowa za rozłożenie premij na drobniejsze od rocznych rat powinna być taka sama, jaką instytucya może otrzymać od innych swoich funduszów, t. j. w zasadzie powinna być równa procentowi handlowemu, ale ponieważ rozłożenie premij rocznych na drobniejsze raty pociąga za sobą rozmaite dodatkowe koszta (zwiększenie pracy biurowej, wydatki pocztowe i t. p.), zatem procent pobiera się zazwyczaj wyższy od handlowego.

Sposób dzielenia premij rocznych na mniejsze podaliśmy już w art. 32; odnośne prawidło brzmi, jak następuje:

Roczną premię brutto należy oprocentować według stopy s_μ%, obliczonej ze wzoru

$$(80) \qquad s_\mu = \frac{(\mu - 1)s}{2\mu},$$

gdzie s oznacza stopę roczną, ustanowioną za rozłożenie premij na μ-e części, i otrzymany rezultat podzielić przez μ, z czego wypadły iloraz będzie wysokością raty co μ-a część roku wnoszonej, t. j.

$$(189) \qquad \text{Rata co } \mu\text{-a część roku} = \frac{\pi_x \cdot \left(1 + \frac{s_\mu}{100}\right)}{\mu}.$$

Widzieliśmy np. w art. 70, że roczna premia brutto za zwyczajne ubezpieczenie 1 000 fr. kapitału pośmiertnego, równa się 20,98 fr.

Jeżeli za rozłożenie premij rocznych na raty ustanowimy stopę 8%, t. j. $s = 8$, to, według (80),

$$s_2 = \frac{8}{4} = 2\% \text{ dla rat półrocznych,}$$

$$s_4 = \frac{24}{8} = 3\% \text{ „ „ kwartalnych,}$$

$$s_{12} = \frac{88}{24} = 3^2/_3\% = 3{,}67\% \text{ dla rat miesięcznych,}$$

czyli według (189)

$$\text{rata półroczna wynosi } \frac{20{,}98 \times 1{,}02}{2} = 10{,}70 \text{ fr.,}$$

$$\text{„ kwartalna „ } \frac{20{,}98 \times 1{,}03}{4} = 5{,}40 \text{ fr.,}$$

$$\text{„ miesięczna „ } \frac{20{,}98 \times 1{,}0367}{12} = 1{,}81 \text{ fr.}$$

Wynika stąd, że instytucya, w danym razie, pobiera od 1 000 fr. ubezpieczonego kapitału za raty półroczne 0,42 fr., za kwartalne 0,62 fr., a za miesięczne 0,74 fr.

---

72. Kontrasekuracya. Zdarza się, że ubezpieczony życzy sobie, aby sam, albo jego sukcesorowie (zależnie od rodzaju ubezpieczenia) w chwili, gdy zajdzie fakt decydujący wypłatę lub niewypłacenie ubezpieczonego kapitału, otrzymali zwrot wszystkich zapłaconych za ubezpieczenie premij. W tym celu powinien ubezpieczony zwrot premij zaasekurować.

Kombinacya taka, w praktyce ubezpieczeniowej, nosi miano kontrasekuracyi (Contre-assurance) i przy premiach jednorazowych sprowadza się oczywiście do odpowiedniego ubezpieczenia kapitału w wysokości jednorazowej premii, a przy premiach rocznych do ubezpieczenia kapitału stale co rok rosnącego o wysokość premii rocznej.

Osoba x letnia, za zwyczajne ubezpieczenie 1-ki kapitału pośmiertnego, płatnego w końcu roku, w którym jej śmierć nastąpi, zapłaciła jednorazową premię brutto Π_x i życzy sobie, aby jej sukcesorowie, razem z ubezpieczonym kapitałem, otrzymali z powrotem wniesioną premię $\Pi_x = \frac{\Sigma m_x}{v_x} \cdot Q$, gdzie Q oznacza czynnik zamieniający jednorazową premię netto na brutto.

Jest to oczywiście zwyczajne pośmiertne ubezpieczenie kapitału Π_x, za które jednorazowa premia netto, według wzoru (146), równa się

$$\underset{c}{\overset{s}{\mathrm{K}}}_x = \frac{\Pi_x \,.\, \Sigma m_x}{v_x} = \left(\frac{\Sigma m_x}{v_x}\right)^2 . \mathrm{Q}; \tag{190}$$

premia roczna, płatna przez l lat, wynosi

$${}^l p\left(\underset{c}{\overset{s}{\mathrm{K}}}_x\right) = \frac{\Pi_x \,.\, \Sigma m_x}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}} = \frac{(\Sigma m_x)^2 . \mathrm{Q}}{v_x(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l})}, \tag{190'}$$

premią roczną płatną do śmierci jest

$$p\left(\underset{c}{\overset{s}{\mathrm{K}}}_x\right) = \frac{\Pi_x . \Sigma m_x}{\Sigma v_x} = \frac{(\Sigma m_x)^2 . \mathrm{Q}}{v_x \Sigma v_x}. \tag{190''}$$

Znaczek c jest symbolem kontrasekuracyi (jako pierwsza głoska złożonego wyrazu „contre-assurance”).

Jeżeli osoba x letnia ubezpiecza 1-kę kapitału pośmiertnego za pomocą rocznej premii brutto $\pi_x = \frac{\Sigma m_x}{\Sigma v_x} \cdot q$ płatnej dośmiertnie, albo za pomocą rocznej premii brutto ${}^l\pi_x = \frac{\Sigma m_x}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l}} \cdot q$ płatnej przez l lat, to jednorazową premią netto za kontrasekuracyę: w przypadku pierwszym jest, według wzoru (163),

$$\underset{<c}{\overset{s}{\mathrm{K}}}_x = \frac{\pi_x . \Sigma\Sigma m_x}{v_x} = \frac{\Sigma m_x . \Sigma\Sigma m_x}{v_x \Sigma v_x} \cdot q, \tag{191}$$

w przypadku drugim, według wzoru (167),

$$(192)\qquad \underset{<c(l)}{\overset{s}{\mathrm{K}}}_x = \frac{{}^l\pi_x(\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+l})}{v_x} = \frac{\Sigma m_x(\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+l})}{v_x(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l})}\cdot q.$$

Gdyby kontrasekuracya miała być zawartą za pośrednictwem premij rocznych, płatnych dośmiertnie lub przez lat l', należałoby w (191) i (192) w miejsce v_x podstawić Σv_x resp. $\Sigma v_x - \Sigma v_{x+l'}$.

Jeżeli kapitał pośmiertny i kontrasekurowane premie mają się wypłacać zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, odpowiednie części wzorów (190), (191) i (192), mianowicie czynniki zawierające zdyskontowane liczby osób zmarłych, trzeba pomnożyć przez $r^{\frac{1}{2}}$.

Np. osoba 30-o letnia, za zwyczajne ubezpieczenie 1-ki kapitału pośmiertnego, winna płacić rocznie do śmierci po 0,017 960 (art. 62) premii netto — albo, przyjąwszy za dodatek na administracyę 20% premii netto, rocznie po 0,017 960 × 1,2 = 0,021 552 tytułem premii brutto.

Jednorazową premią netto za kontrzaasekurowanie wniesionych do śmierci rocznych premij po 0,021 552, według (191), jest

$$\underset{<c}{\overset{s}{\mathrm{K}}}_{30} = \frac{0{,}021\,552\,\Sigma\Sigma m_{30}}{v_{30}} = 0{,}021\,552 \times 9{,}191\,659 = 0{,}198\,099.$$

Za premie, płacone od 5 000 fr. ubezpieczonego kapitału, jednorazowo

$$0{,}198\,099 \times 5\,000 = 990{,}50 \text{ fr.}$$

Premie roczne, płatne do śmierci za tę samą kontrasekuracyę, wynoszą

$$p\left(\underset{<c}{\overset{s}{\mathrm{K}}}_{30}\right) = \frac{0{,}021\,552\,\Sigma\Sigma m_{30}}{\Sigma v_{30}} = 0{,}010\,257;$$

od 5 000 fr. ubezpieczonego kapitału po 0,010 257 × 5 000 = 51,285 fr. rocznie.

Przypuśćmy teraz, że w ubezpieczeniu na dożycie chodzi o zwrot wszystkich wniesionych premij rocznych w razie, jeżeli ubezpieczony umrze przed upływem terminu płatności kapitału.

Roczną premią brutto za ubezpieczenie 1-ki kapitału, płatnego, jeżeli osoba x letnia przeżyje lat n, według wzoru (142'), jest

$$(142')\qquad {}^n\pi_x = \frac{v_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}\cdot q.$$

Na jednorazową premię netto za kontrzaasekurowanie wniesionych premij, w razie śmierci osoby ubezpieczonej przed upływem n lat, według wzoru (168), wypada

$$(193)\qquad {}^n\underset{<c}{\overset{s}{\mathrm{K}}}_x = {}^n\pi_x.\,\frac{\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n} - n\,\Sigma m_{x+n}}{v_x},$$

a na roczną premię netto, płatną najwyżej przez n lat,

$$(194)\qquad {}^np\left({}^n\underset{<c}{\overset{s}{\mathrm{K}}}_x\right) = {}^n\pi_x.\,\frac{\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n} - n\,\Sigma m_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}.$$

Np. dla $x = 30$, $n = 20$, przy 20% dodatku na administracyę

$${}^{20}\pi_{30} = \frac{v_{50}}{\Sigma v_{30} - \Sigma v_{50}} \cdot 1{,}20 = 0{,}035728,$$

od 5000 fr. po $0{,}035728 \times 5000 = 178{,}64$ fr. rocznie.

$${}^{20}\underset{<c}{\overset{s}{\mathrm{K}}}_{30} = \frac{0{,}035728 \times (\Sigma\Sigma m_{30} - \Sigma\Sigma m_{50} - 20\,\Sigma m_{50})}{v_{30}} = 0{,}048115;$$

od 5000 fr. $0{,}048115 \times 5000 = 240{,}575$ fr.

$${}^{20}p\left({}^{20}\underset{<c}{\overset{s}{\mathrm{K}}}_{30}\right) = \frac{0{,}035728 \times (\Sigma\Sigma m_{30} - \Sigma\Sigma m_{50} - 20\,\Sigma m_{50})}{\Sigma v_{30} - \Sigma v_{50}} = 0{,}003538;$$

od 5000 fr. po $0{,}003538 \times 5000 = 17{,}69$ fr. rocznie.

Przy powyżej opisanym sposobie, kontrasekuracya nie jest zupełną, albowiem, jakkolwiek zwrot premij za ubezpieczenie główne jest zapewniony, to jednak przepadają premie za samą kontrasekuracyę. Zupełną kontrasekuracyę można osięgnąć za pomocą t. z. ubezpieczeń ze zwrotem premij, do których z kolei przechodzimy.

73. ZWYCZAJNE UBEZPIECZENIE KAPITAŁÓW POŚMIERTNYCH ZE ZWROTEM PREMIJ. System kontrasekuracyi stosują, a przynajmniej stosowały głównie towarzystwa francuskie, przeważnie jednak bywa on rzadko w praktyce używany; najczęściej zwrot premij zastrzega się w samem ubezpieczeniu głównem i premia kontrasekuracyjna zostaje włączoną do premii za ubezpieczenie główne. Taki system zowie się ubezpieczeniem ze zwrotem premij (mit Rückgewähr).

W umowie może być zastrzeżony zwrot premij netto lub brutto, ale ponieważ w praktyce zwracają się zawsze premie rzeczywiście wniesione, czyli brutto, w dalszym więc ciągu tylko o ubezpieczeniach ze zwrotem premij brutto mówić będziemy.

Osoba x letnia ubezpiecza 1-kę kapitału, płatnego, na przypadek jej śmierci, przy końcu roku, w którym śmierć rzeczonej osoby nastąpi — z tem, że oprócz ubezpieczonego kapitału zostaną jednocześnie, komu należy, zwrócone bez procentów wszystkie premie brutto za pomienione ubezpieczenie wniesione.

Jeżeli premia jest jednorazową, to, oznaczywszy premię netto przez $\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x$ (z przyjmujemy za symbol ubezpieczenia ze zwrotem premij), będzie oczywiście

$$(\alpha) \qquad \overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x = \overset{s}{\mathrm{K}}_x + \overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x \mathrm{Q} . \overset{s}{\mathrm{K}}_x,$$

gdzie Q oznacza czynnik zamieniający premię netto na brutto.

Podstawiwszy za $\overset{s}{\mathrm{K}}_x$ znane nam wyrażenie ze wzoru (146), wypada

$$\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x = \frac{\Sigma m_x}{v_x} + \overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x \mathrm{Q} . \frac{\Sigma m_x}{v_x},$$

skąd

$$(195) \qquad \overset{s(z)}{K}_x = \frac{\Sigma m_x}{v_x - Q.\Sigma m_x}.$$

Premia brutto otrzymuje się zwyczajnym sposobem, przez pomnożenie obliczonego $\overset{s(z)}{K}_x$ przez Q.

Gdy kapitał i premia jednorazowa mają być wypłacone zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, wzór (195) przechodzi na

$$(195') \qquad \overset{s(z)}{K'}_x = \frac{r^{\frac{1}{2}}.\Sigma m_x}{v_x - Qr^{\frac{1}{2}}.\Sigma m_x}.$$

W razie zwrotu premii netto, wystarczy we wzorach (195) i (195′) podstawić $Q = 1$.

Wyprowadzone wzory możnaby otrzymać i drogą bezpośredniego rozumowania; użyjemy jej przy wyprowadzaniu wzorów na premie roczne, tutaj zaś zauważymy tylko, że tego rodzaju ubezpieczenie sprowadza się do ubezpieczenia kapitału pośmiertnego i dodatku na administracyę za procent od jednorazowo wniesionej premii netto.

Istotnie, przypuśćmy np., że zarówno ubezpieczony kapitał jak i wniesiona jednorazowo premia wypłacają się przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi.

Roczną premię, płatną z dołu, za zwyczajne ubezpieczenie 1-ki kapitału pośmiertnego i dodatku na administracyę, będzie stanowił procent od jednorazowej premii netto wniesionej z góry, czyli od $\overset{s(z)}{K}_x$ (dodatek na administracyę nie przynosi procentu), t. j. $\overset{s(z)}{K}_x.(r-1)$. Spodziewane więc wpływy na pokrycie zobowiązań instytucyi względem jednego ubezpieczonego, sprowadzone do chwili zawierania umowy, wynoszą

$$\overset{s(z)}{K}_x.(r-1).\frac{1}{\lambda_x}\left(\frac{\lambda_x}{r} + \frac{\lambda_{x+1}}{r^2} + \frac{\lambda_{x+2}}{r^3} + \dots\right) = \overset{s(z)}{K}_x.\frac{r-1}{r}\cdot\frac{\Sigma v_x}{v_x},$$

czyli, podstawiwszy ze wzoru (110)

$$\Sigma v_x = \frac{r}{r-1}\cdot(v_x - \Sigma m_x),$$

otrzymujemy na teraźniejszą wartość spodziewanych wpływów

$$(\beta) \qquad \overset{s(z)}{K}_x\cdot\frac{v_x - \Sigma m_x}{v_x}.$$

Z drugiej strony, teraźniejszą wartością ubezpieczonej 1-ki kapitału pośmiertnego i dodatku na administracyę jest oczywiście

$$(\gamma) \qquad \frac{\Sigma m_x}{v_x} + \overset{s(z)}{K}_x.(Q-1)\cdot\frac{\Sigma m_x}{v_x}.$$

(β) powinno być równe (γ), mamy zatem równanie

$$\overset{s(z)}{K}_x . \frac{v_x - \Sigma m_x}{v_x} = \frac{\Sigma m_x}{v_x} + \overset{s(z)}{K}_x . (Q - 1) \cdot \frac{\Sigma m_x}{v_x}, \text{ z którego wypada}$$

$$\overset{s(z)}{K}_x = \frac{\Sigma m_x}{v_x - Q . \Sigma m_x} . \tag{195}$$

Jeżeli premie są wnoszone rocznie aż do śmierci, to—oznaczywszy chwilowo przez p roczną premię netto za zwyczajne ubezpieczenie 1-ki kapitału pośmiertnego, płatnego przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi, i za jednoczesny zwrot, bez procentu, wszystkich wniesionych do śmierci rocznych premij brutto, przez q czynnik zamieniający premię netto na brutto—na teraźniejszą wartość wszystkich spodziewanych przez instytucyę wpływów netto od λ_x osób jednocześnie ubezpieczonych otrzymujemy wyrażenie

$$p . \frac{\Sigma v_x}{v_x} \cdot \lambda_x . \tag{δ}$$

Jednoczesną wartością spodziewanych wypłat jest

$$\frac{\tau_x + pq\tau_x}{r} + \frac{\tau_{x+1} + 2pq\tau_{x+1}}{r^2} + \frac{\tau_{x+2} + 3pq\tau_{x+2}}{r^3} + \ldots = \tag{ε}$$

$$= \left(\frac{\tau_x}{r} + \frac{\tau_{x+1}}{r^2} + \frac{\tau_{x+2}}{r^3} + \ldots\right) + pq\left(\frac{\tau_x}{r} + \frac{2\tau_{x+1}}{r^2} + \frac{3\tau_{x+2}}{r^3} + \ldots\right).$$

Stąd, po zrównaniu (δ) z (ε),

$$p \cdot \frac{\Sigma v_x}{v_x} . \lambda_x = \left(\frac{\tau_x}{r} + \frac{\tau_{x+1}}{r^2} + \frac{\tau_{x+2}}{r^3} + \ldots\right) + pq\left(\frac{\tau_x}{r} + \frac{2\tau_{x+1}}{r^2} + \frac{3\tau_{x+2}}{r^3} + \ldots\right).$$

Podzieliwszy obie strony przez r^x

$$p . \Sigma v_x = \Sigma m_x + pq(m_x + 2m_{x+1} + 3m_{x+2} + \ldots).$$

Że zaś, według (δ) art. 65,

$$m_x + 2m_{x+1} + 3m_{x+2} + \ldots = \Sigma\Sigma m_x, \text{ przeto}$$

$$p . \Sigma v_x = \Sigma m_x + pq\Sigma\Sigma m_x, \text{ albo inaczej}$$

$$p(\Sigma v_x - q\Sigma\Sigma m_x) = \Sigma m_x,$$

skąd, po podstawieniu za p rozwiniętego symbolu $p\left\{\overset{s(z)}{K}_x\right\}$, mamy

$$p\left\{\overset{s(z)}{K}_x\right\} = \frac{\Sigma m_x}{\Sigma v_x - q\Sigma\Sigma m_x} . \tag{196}$$

Gdyby kapitał miał być wypłacony i zwrot premij uskuteczniony zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, byłoby oczywiście

$$p\left\{\overset{s(z)}{K'}_x\right\} = \frac{r^{\frac{1}{2}} . \Sigma m_x}{\Sigma v_x - q r^{\frac{1}{2}} . \Sigma\Sigma m_x} . \tag{196'}$$

Gdyby miały być zwracane nie premie brutto, tylko netto, należałoby w (196) i (196′) podstawić $q = 1$.

Premie brutto otrzymują się z pomnożenia obliczonych według (196) i (196′) premij netto przez q.

W podobny sposób możnaby wyprowadzić wzory i na przypadek, gdyby premie roczne były wnoszone czasowo. Tego przypadku wszakże rozpatrywać nie będziemy, gdyż w ogóle, jak to w następnym artykule zauważymy, zwyczajne ubezpieczenia kapitałów pośmiertnych ze zwrotem premij nie mają racyi bytu.

Dla osoby 30-o letniej otrzymujemy:

Na premię jednorazową, przy 20% dodatku na administracyę,

$$\overset{s(z)}{K}_{30} = \frac{\Sigma m_{30}}{v_{30} - 1{,}2\ \Sigma m_{30}} = \frac{10\,664{,}17}{30\,743{,}98 - 1{,}2 \times 10\,664{,}17} = 0{,}594\,204,$$

od 5000 fr. premia netto $0{,}594\,204 \times 5000 = 2\,971{,}02$ fr., premia brutto $2\,971{,}02 \times 1{,}2 = 3\,565{,}22$ fr.

Wychodzi to na jedno, jakbyśmy bez zwrotu premii ubezpieczyli kapitał w wysokości $5000 + 3\,565{,}22 = 8\,565{,}22$ fr. Jednorazowa premia netto za takie ubezpieczenie wynosiłaby istotnie (według tab. X, kol. 2) jak wyżej

$$0{,}346\,870 \times 8\,565{,}22 = 2\,971{,}02 \text{ fr.}$$

Na premię roczną, dośmiertnie płatną, przy 30% dodatku na administracyę, wypada

$$p\left\{\overset{s(z)}{K}_{30}\right\} = \frac{\Sigma m_{30}}{\Sigma v_{30} - 1{,}3\ \Sigma\Sigma m_{30}} = \frac{10\,664{,}17}{593\,788{,}92 - 1{,}3 \times 282\,588{,}17} = 0{,}047\,098,$$

od 5000 fr.: roczna premia netto $0{,}047\,098 \times 5000 = 235{,}49$ fr., premia brutto $235{,}49 \times 1{,}3 = 306{,}14$ fr. (*).

(*) Zauważyć trzeba, że ponieważ Q resp. q są ilościami — jak dotąd — dowolnemi, zatem przy nadmiernem ich powiększeniu, mianowniki wyprowadzonych przez nas wzorów mogłyby stać się zerami, a nawet ilościami ujemnemi, t. j. przyszlibyśmy do rezultatu niedorzecznego. Dla tego nieodzowną jest rzeczą, przed zastosowaniem wzorów na ubezpieczenia ze zwrotem premij brutto, zbadać granicę, jakiej Q resp. q przekroczyć nie mogą, i dociec, czy niższy od obliczonej granicy dodatek wystarcza na potrzeby instytucyi.

Tak np. dla (195) powinno być $v_x > Q\,.\,\Sigma m_x$, skąd $Q < \frac{v_x}{\Sigma m_x}$;

„ (196) „ $\Sigma v_x > q\,.\,\Sigma\Sigma m_x$, „ $q < \frac{\Sigma v_x}{\Sigma\Sigma m_x}$.

Dla $x = 30$

$$Q < \frac{v_{30}}{\Sigma m_{30}} = \frac{30\,743{,}98}{10\,664{,}17} = 2{,}9;\ q < \frac{\Sigma v_{30}}{\Sigma\Sigma m_{30}} = \frac{593\,788{,}92}{282\,588{,}17} = 2{,}1.$$

Z art. 70 wiemy, że dodatek na administracyę w ubezpieczeniach pośmiertnych zawiera się mniej więcej w granicach od 20% do 40% premii netto, czyli Q resp. q zawierają się mniej więcej w granicach od 1,2 do 1,4, są więc znacznie niższe od powyżej oznaczonych granic, t. j. w obecnym przypadku posiadamy zupełną swobodę ruchów dla Q i q. W większej liczbie przypadków zwykle tak bywa, ale nie zawsze; czasami dla Q resp. q wypadają tak nizkie granice, jak to np. zobaczymy w art. 76, że instytucye przy podobnie małych dodatkach nie mogłyby egzystować. W takim razie podobnej kombinacyi ubezpieczeniowej wprowadzać w życie nie można. Zresztą w podobnym przypadku wypadają i premie nadzwyczaj wysokie·

74. Przypadki, w których ubezpieczenia ze zwrotem premij mają znaczenie względnie praktyczne. Ubezpieczenia kapitałów pośmiertnych ze zwrotem premij nie posiadają znaczenia praktycznego, przedewszystkiem dla tego, że ubezpieczeni nic na tem nie zyskują; chociaż bowiem sukcesorowie zmarłego otrzymają kapitał zwiększony o zwrot premij, to jednak same premie do tyla wzrosnąć muszą, aby przypadające od nich procenty pokryły należne instytucyi premie zwyczajne, gdyż instytucya musi swoje otrzymać, ażeby módz wywiązać się z przyjętych na siebie zobowiązań. I rzeczywiście, podczas gdy jednorazowa premia netto, za ubezpieczenie 30-o letniej osoby na 5000 fr. kapitału pośmiertnego bez zwrotu premii, wynosiła (art. 61) 1734,35 fr., premia brutto, przy 20% dodatku, 2081,22 fr.; jednorazowa premia brutto, za takież ubezpieczenie ze zwrotem premii, wzrosła do 3565,22 fr. Podczas gdy roczna premia netto, za podobne ubezpieczenie bez zwrotu premij, wynosiła (art. 62) 89,80 fr., premia brutto, przy 30% dodatku, 116,74 fr.; roczna premia brutto, za to samo ubezpieczenie ze zwrotem premij, podniosła się do 306,14 fr.

Z drugiej strony, jaki zysk odnoszą sukcesorowie? Zwiększa się ich sukcesya o zwrot premij, lecz o ile — nikt, przy premiach rocznych, z góry przewidzieć nie może. Czyż więc nie lepiej i nie praktycznej jest za wnoszoną wyższą premię od razu ubezpieczyć większy kapitał i nie pozostawiać sukcesorów na łasce losu?—Nam się zdaje, że na to nie może być dwóch odpowiedzi.

W ogóle, naszem zdaniem, zwrot premij może mieć pewne względne znaczenie tylko w tych przypadkach, w których główny cel ubezpieczenia nie zostaje osiągnięty, a więc:

I. przy rentach odroczonych — w razie, jeżeli niedoszły rentier umiera przed upływem terminu, od którego renta miała być płaconą;

II. przy odroczonych ubezpieczeniach kapitałów pośmiertnych, jeżeli ubezpieczona osoba umiera przed upływem lat próby;

III. w czasowych ubezpieczeniach kapitałów pośmiertnych, gdy ubezpieczony przeżyje okres, na jaki ubezpieczenie było zawarte;

IV. w ubezpieczeniach kapitałów na dożycie, jeżeli osoba ubezpieczona terminu płatności kapitału nie dożyje, czyli, gdy wcześniej umrze; wreszcie

V. we wszelkiego rodzaju połączeniach, do jakich poprzednie cztery przypadki dostarczają materyału.

75. Ubezpieczenie rent odroczonych ze zwrotem premij. Weźmy najprzód pod uwagę renty odroczone.

Osoba x letnia, za pośrednictwem premii jednorazowej, ubezpiecza sobie 1-kę renty rocznej dożywotniej, której wypłata rozpoczyna się po upływie n lat, jeżeli osoba ubezpieczona owego terminu dożyje; jeżeli zaś umrze wcześniej, instytucya zwróci, komu należy, wniesioną jednorazowo premię brutto.

Jednorazową premię netto za takie ubezpieczenie oznaczać będziemy przez ${}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x$, premię brutto — przez ${}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x . \mathrm{Q}$.

Zwrot premii może być zastrzeżony: 1) bez procentu, albo 2) z procentem składanym i w obu przypadkach premia może być zwróconą: a) albo po upływie terminu odroczenia, b) albo przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi, c) albo wreszcie zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej.

Ażeby wskazać metody postępowania, wyprowadzimy dla rent wzory na oba przypadki i na wszystkie trzy odcienia; w dalszym jednak ciągu pominiemy w pierwszym przypadku odcień *a*), jako nie praktyczny, oraz w przypadku drugim odcień *a*) i *c*), gdyż—jak to niebawem zobaczymy—wszystko jest jedno kiedy premie z procentem składanym bywają zwracane.

1. Premia zwraca się bez procentu

i *a*) wypłaca się po upływie terminu odroczenia.

Ubezpieczając jednocześnie λ_x osób, jednorazowy wpływ netto instytucyi wynosi

$$
{}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x . \lambda_x .
$$

Jednoczesna wartość matematyczna spodziewanych wypłat: z tytułu zwrotu premij równa się

$$
{}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x . \mathrm{Q} . (\lambda_x - \lambda_{x+n}) \rho^n = {}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x . \mathrm{Q} . (\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n}) . \rho^n ,
$$

z tytułu ubezpieczonych rent wynosi

$$
\lambda_{x+n} \rho^n + \lambda_{x+n+1} \rho^{n+1} + \ldots \text{ do końca tablicy śmiertelności.}
$$

Winno zatem być

$$
{}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x . \lambda_x = {}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x . \mathrm{Q} . (\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n}) \rho^n + (\lambda_{x+n} \rho^n + \lambda_{x+n+1} \rho^{n+1} + \ldots).
$$

Mnożąc obie strony przez ρ^x, wypada

$$
{}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x . v_x = {}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x . \mathrm{Q} (\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n}) \rho^{x+n} + \Sigma v_{x+n}, \text{ skąd}
$$

$$
(197) \qquad {}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x = \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_x - \mathrm{Q} \rho^{x+n} (\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n})} .
$$

b) Premia wypłaca się przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi.

Teraźniejszą wartością matematyczną spodziewanych wypłat, z tytułu zwrotu premij i ubezpieczenia rent, jest

$$
{}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x . \mathrm{Q} . (\tau_x \rho + \tau_{x+1} \rho^2 + \ldots + \tau_{x+n-1} \rho_n) + (\lambda_{x+n} \rho^n + \lambda_{x+n+1} \rho^{n+1} + \ldots).
$$

Powinno więc być

$$
{}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x . \lambda_x = {}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x . \mathrm{Q} (\tau_x \rho + \tau_{x+1} \rho^2 + \ldots + \tau_{x+n-1} \rho^n) + (\lambda_{x+n} \rho^n + \lambda_{x+n+1} \rho^{n+1} + \ldots),
$$

po pomnożeniu obu stron przez ρ^x

$${}_n\overset{(z)}{R}_x . v_x = {}_n\overset{(z)}{R}_x . Q(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}) + \Sigma v_{x+n}, \text{ skąd}$$

$$(197') \qquad {}_n\overset{(z)}{R}_x = \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_x - Q(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})} .$$

c) Premia wypłaca się zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej.

Wtedy, jak nam wiadomo, wzór (197') przechodzi na

$$(197'') \qquad {}_n\overset{(z)}{R'}_x = \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_x - Q . r^{\frac{1}{2}} (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})} .$$

2. Premia zwraca się z procentem składanym

i *a*) Wypłaca się po upływie terminu odroczenia.

Jednorazowy wpływ netto wynosi, jak poprzednio,

$${}_n\overset{(z)}{R}_x . \lambda_x .$$

Jednoczesna wartość matematyczna wypłat, z tytułu zwrotu premij i ubezpieczenia rent, równa się

$${}_n\overset{(z)}{R}_x . Q . (\lambda_x - \lambda_{x+n}) . r^n . \rho^n + (\lambda_{x+n} \rho^n + \lambda_{x+n+1} \rho^{n+1} + \ldots);$$

zatem winno być

$${}_n\overset{(z)}{R}_x . \lambda_x = {}_n\overset{(z)}{R}_x . Q . (\Sigma \tau_x - \Sigma \tau_{x+n}) + (\lambda_{x+n} \rho^n + \lambda_{x+n+1} \rho^{n+1} + \ldots).$$

Po pomnożeniu obu stron przez ρ^x

$${}_n\overset{(z)}{R}_x . v_x = {}_n\overset{(z)}{R}_x . Q . (\Sigma \tau_x - \Sigma \tau_{x+n}) . \rho^x + \Sigma v_{x+n}; \text{ stąd}$$

$$(198) \qquad {}_n\overset{(z)}{R}_x = \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_x - Q \rho^x (\Sigma \tau_x - \Sigma \tau_{x+n})} .$$

b) Premia wypłaca się przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi.

Teraźniejsza wartość matematyczna spodziewanych wypłat wynosi

$${}_n\overset{(z)}{R}_x . Q . (\tau_x r . \rho + \tau_{x+1} r^2 \rho^2 + \ldots + \tau_{x+n-1} r^n \rho^n) + (\lambda_{x+n} \rho^n + \lambda_{x+n+1} \rho^{n+1} + \ldots).$$

Powinno więc być

$${}_n\overset{(z)}{R}_x . \lambda_x = {}_n\overset{(z)}{R}_x . Q . (\Sigma \tau_x - \Sigma \tau_{x+n}) + (\lambda_{x+n} \rho^n + \lambda_{x+n+1} \rho^{n+1} + \ldots), \text{ a mnożąc}$$

obie strony przez ρ^x

$${}_n\overset{(z)}{R}_x . v_x = {}_n\overset{(z)}{R}_x . Q . (\Sigma \tau_x - \Sigma \tau_{x+n}) . \rho^x + \Sigma v_{x+n}, \text{ czyli}$$

$$(198') \qquad {}_n\overset{(z)}{R}_x = \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_x - Q \rho^x (\Sigma \tau_x - \Sigma \tau_{x+n})} .$$

c) Premia wypłaca się zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej.

Teraźniejsza wartość matematyczna wypłat równa się

$$ {}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x \,.\, \mathrm{Q}.(\tau_x.r^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}+\tau_{x+1}r^{\frac{8}{2}}\rho^{\frac{3}{2}}+\ldots+\tau_{x+n-1}r^{n-\frac{1}{2}}\rho^{n-\frac{1}{2}})+(\lambda_{x+n}\rho^n+\ldots). $$

Jest więc

$$ {}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x \,.\, \lambda_x = {}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x.\mathrm{Q}(\Sigma\tau_x-\Sigma\tau_{x+n})+(\lambda_{x+n}\rho^n+\lambda_{x+n+1}\rho^{n+1}+\ldots); $$

po pomnożeniu obu stron przez ρ^x i rozwiązaniu równania wypada

$$ (198'') \qquad {}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x = \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_x-\mathrm{Q}\rho^x(\Sigma\tau_x-\Sigma\tau_{x+n})}\,. $$

Widzimy, że wszystkie trzy wzory (198), (198') i (198'') posiadają identyczny kształt i tak też być powinno, o ile bowiem instytucya nie zwraca premii zaraz po śmierci, o tyle z jednej strony zyskuje procent składany, lecz z drugiej strony musi takowy, komu należy, wypłacić.

Przejdźmy do ubezpieczeń o premiach rocznych, płatnych przez cały czas odroczenia (*). Roczne premie netto, przy wyprowadzaniu wzorów, oznaczać będziemy, dla krótkości, przez p; premie brutto — przez pq. Rozwiniętego symbolu ${}^n p\left\{{}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x\right\}$ użyjemy dopiero wypisując wzór ostateczny.

1. Premie zwracają się bez procentu

i *a*) Wypłacają się po upływie terminu odroczenia.

Wartość matematyczna spodziewanych wpływów netto, w chwili zawierania umowy, wynosi

$$ p.(\lambda_x+\lambda_{x+1}\rho+\lambda_{x+2}\rho^2+\ldots+\lambda_{x+n-1}\rho^{n-1}). $$

Jednoczesna wartość spodziewanych wypłat, z tytułu zwrotu premij i ubezpieczenia rent, równa się

$$ pq.(\tau_x+2\tau_{x+1}+\ldots+n\tau_{x+n-1}).\rho^n+(\lambda_{x+n}\rho^n+\lambda_{x+n-1}\rho^{n+1}+\ldots). $$

Powinno być

$$ p(\lambda_x+\lambda_{x+1}\rho+\ldots+\lambda_{x+n-1}\rho^{n-1})=pq(\tau_x+2\tau_{x+1}+\ldots+n\tau_{x+n-1})\rho^n+ $$
$$ +(\lambda_{x+n}\rho^n+\lambda_{x+n-1}\rho^{n+1}+\ldots). $$

Mnożąc obie strony przez ρ^x i podstawiając, na zasadzie takiego samego rozumowania, jak przy wyprowadzaniu wzoru (ζ) w art. 65,

$$ \tau_x+2\tau_{x+1}+\ldots+n\tau_{x+n-1}=\Sigma\Sigma\tau_x-\Sigma\Sigma\tau_{x+n}-n\Sigma\tau_{x+n}, $$

znajdujemy

$$ p.(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+n})=pq\rho^{x+n}(\Sigma\Sigma\tau_x-\Sigma\Sigma\tau_{x+n}-n\Sigma\tau_{x+n})+\Sigma v_{x+n}, $$

(*) Premie roczne mogłyby również być wnoszone i przez czas krótszy. Tych przypadków jednak, jako nie będących w użyciu, rozpatrywać nie będziemy.

skąd

$$(199)\quad {}^{n}p\left\{{}_{n}\overset{(z)}{\mathrm{R}}_{x}\right\}=\frac{\Sigma v_{x+n}}{(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+n})-q\rho^{x+n}(\Sigma\Sigma\tau_x-\Sigma\Sigma\tau_{x+n}-n\Sigma\tau_{x+n})}\,.\ (*)$$

b) Premie wypłacają się przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi.

Teraźniejsza wartość spodziewanych wypłat równa się

$$pq(\tau_x\rho+2\tau_{x+1}\rho^2+\ldots+n\tau_{x+n-1}\rho^n)+(\lambda_{x+n}\rho^n+\lambda_{x+n+1}\rho^{n+1}+\ldots),$$

więc powinno być

$$p(\lambda_x+\lambda_{x+1}\rho+\ldots+\lambda_{x+n-1}\rho^{n-1})=pq(\tau_x\rho+2\tau_{x+1}\rho^2+\ldots+n\tau_{x+n-1}\rho^n)+$$
$$+(\lambda_{x+n}\rho^n+\lambda_{x+n+1}\rho^{n+1}+\ldots).$$

Mnożąc obie strony przez ρ^x, wypada

$$p(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+n})=pq(\Sigma\Sigma m_x-\Sigma\Sigma m_{x+n}-n\Sigma m_{x+n})+\Sigma v_{x+n},\text{ skąd}$$

$$(199')\quad {}^{n}p\left\{{}_{n}\overset{(z)}{\mathrm{R}}_{x}\right\}=\frac{\Sigma v_{x+n}}{(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+n})-q(\Sigma\Sigma m_x-\Sigma\Sigma m_{x+n}-n\Sigma m_{x+n})}\,.$$

c) Premie wypłacają się zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej.

Odnośny wzór różni się od (199′) tylko czynnikiem $r^{\frac{1}{2}}$ przed częścią zawierającą zdyskontowane liczby osób zmarłych, t. j.

$$(199'')\quad {}^{n}p\left\{{}_{n}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}'_{x}\right\}=\frac{\Sigma v_{x+n}}{(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+n})-qr^{\frac{1}{2}}(\Sigma\Sigma m_x-\Sigma\Sigma m_{x+n}-n\Sigma m_{x+n})}\,.$$

2. Premie zwracają się z procentem składanym

i *a*) Wypłacają się po upływie terminu odroczenia.

Teraźniejsza wartość spodziewanych wypłat równa się

$$pq[\tau_x r^n+\tau_{x+1}(r^n+r^{n-1})+\ldots+\tau_{x+n-1}(r^n+r^{n-1}+\ldots+r)]\,.\,\rho^n+$$
$$+(\lambda_{x+n}\rho^n+\lambda_{x+n+1}\rho^{n+1}+\ldots),$$

czyli powinno być

$$p\cdot(\lambda_x+\lambda_{x+1}\rho+\lambda_{x+2}\rho^2+\ldots+\lambda_{x+n-1}\rho^{n-1})=$$
$$(\alpha)\quad =pq[\tau_x+\tau_{x+1}(1+\rho)+\ldots+\tau_{x+n-1}(1+\rho+\ldots+\rho^{n-1})]+(\lambda_{x+n}\rho^n+\ldots)$$
$$=pq\left(\tau_x\cdot\frac{1-\rho}{1-\rho}+\tau_{x+1}\cdot\frac{1-\rho^2}{1-\rho}+\ldots+\tau_{r+n-1}\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\right)+(\lambda_{x+n}\rho^n+\ldots)$$
$$=\frac{pq}{1-\rho}[(\Sigma\tau_x-\Sigma\tau_{x+n})-(\tau_x\rho+\tau_{x+1}\rho^2+\ldots+\tau_{x+n-1}\rho^n)]+(\lambda_{x+n}\rho^n+\ldots).$$

(*) Widzimy, że do wyprowadzonych obecnie wzorów wchodzą sumy i sumy sum liczb osób zmarłych, dla których nie posiadamy odpowiednich kolumn w tab. IX. Kolumn takich wszakże wprowadzać do tablic pomocniczych nie potrzebujemy, gdyż, jak nam wiadomo,

$$\Sigma\tau_x=\lambda_x;\ \Sigma\Sigma\tau_x=\Sigma\lambda_x;$$

zaś kol. 1 podaje właśnie liczby λ_x, kol. 10 liczby $\Sigma\lambda_x$.

Mnożąc obie strony przez ρ^x

$$p(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) = \frac{pq}{1-\rho}[\rho^x(\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n}) - (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})] + \Sigma v_{x+n}.$$

Stąd wypada

$$(200)\quad {}^np\left\{{}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x\right\} = \frac{\Sigma v_{x+n}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - \frac{qr}{r-1}[\rho^x(\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n}) - (\Sigma m_x - \Sigma m_{r+n})]}.$$

b) Premie wypłacają się przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi.

Teraźniejsza wartość spodziewanych wypłat wynosi

$$pq.[\tau_x.r.\rho + \tau_{x+1}(r^2+r)\rho^2 + \ldots + \tau_{x+n-1}(r^n + r^{n-1} + \ldots + r)\rho^n] + (\lambda_{x+n}\rho^n + \ldots)$$
$$= pq.[\tau_x + \tau_{x+1}(1+\rho) + \ldots + \tau_{x+n-1}(1+\rho+\ldots+\rho^{n-1})] + (\lambda_{x+n}\rho^n + \ldots).$$

To ostatnie wyrażenie jest identyczne z (α), skutkiem czego i ostateczne wyrażenie na ${}^np\left\{{}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x\right\}$, w obecnym przypadku, pozostaje takie samo jak (200).

c) Premie wypłacają się zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej.

Teraźniejsza wartość spodziewanych wypłat równa się

$$pq.[\tau_x.r^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}} + \tau_{x+1}(r^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{1}{2}})\rho^{\frac{3}{2}} + \ldots + \tau_{x+n-1}(r^{n-\frac{1}{2}} + r^{n-\frac{3}{2}} + \ldots + r^{\frac{1}{2}})\rho^{n-\frac{1}{2}}] +$$
$$+ (\lambda_{x+n}\rho^n + \ldots) =$$
$$= pq[\tau_x + \tau_{x+1}(1+\rho) + \ldots + \tau_{x+n-1}(1+\rho+\ldots+\rho^{n-1})] + (\lambda_{x+n}\rho^n + \ldots).$$

I to wyrażenie jest identyczne z (α), więc wyrażenie na ${}^np\left\{{}_n\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x\right\}$ i w obecnym przypadku pozostaje takie samo jak (200), czyli wzory na wszystkie trzy odcienia przypadku drugiego, podobnie jak przy premii jednorazowej, posiadają identyczny kształt (200).

Gdyby chodziło o zwrot premij netto, wystarczy, oczywiście, we wszystkich wyprowadzonych tu wzorach założyć Q resp. $q = 1$.

Jeżeli renta ma się wypłacać w ratach mniejszych od rocznych, należy, zgodnie ze wzorem (121), w liczniki naszych wzorów za Σv_{x+n} popodstawiać $\Sigma v_{x+n} - \frac{m-1}{2m} v_{x+n}$, gdzie m oznacza na ile rat dzielimy rentę roczną.

Podobne wzory można wyprowadzić dla rent odroczonych czasowych, posiadających — jak nam wiadomo z art. 53 — zastosowanie przy ubezpieczaniu małoletnim środków na kształcenie.

Gdy renta ma się zacząć płacić po n latach i ma być płaconą rocznie z góry przez lat $\mathrm{N}-n$, wyrażeniem na jednorazową premię netto za takie ubezpieczenie ze zwrotem premii, bez procentu, przy końcu roku, w którym ewentualnie śmierć osoby ubezpieczonej, w ciągu n pierwszych lat, nastąpi, będzie

$$(201)\qquad {}^{\mathrm{N}}_{n}\overset{(z)}{\mathrm{R}}_x = \frac{\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+\mathrm{N}}}{v_x - \mathrm{Q}(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})}.$$

Jeżeli renta ma być płaconą po $\frac{1}{m}$ co m-a część roku

$$(201') \qquad {}_{n}^{\mathrm{N}}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = \frac{(\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+\mathrm{N}}) - \frac{m-1}{2m}(v_{x+n} - v_{x+\mathrm{N}})}{v_x - \mathrm{Q}(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})}.$$

Dla premij rocznych: w pierwszym przypadku

$$(202) \qquad {}^{n}p\left\{{}_{n}^{\mathrm{N}}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}_x\right\} = \frac{\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+\mathrm{N}}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - q(\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n} - n\Sigma m_{x+n})},$$

w przypadku drugim

$$(202') \quad {}^{n}p\left[{}_{n}^{\mathrm{N}}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}\right] = \frac{(\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+\mathrm{N}}) - \frac{m-1}{2m}(v_{x+n} - v_{x+\mathrm{N}})}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - q(\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n} - n\Sigma m_{x+n})}.$$

Przy zwrocie premij zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, we wzorach (201), (201′), (202) i (202′) do części zawierających zdyskontowane liczby osób zmarłych należy, jak wiadomo, wprowadzić czynnik $r^{\frac{1}{2}}$.

Gdy premie mają być zwracane z procentem składanym:

$$(203) \qquad {}_{n}^{\mathrm{N}}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}_x = \frac{\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+\mathrm{N}}}{v_x - \mathrm{Q}\rho^x(\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n})},$$

$$(203') \qquad {}_{n}^{\mathrm{N}}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)} = \frac{(\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+\mathrm{N}}) - \frac{m-1}{2m}(v_{x+n} - v_{x+\mathrm{N}})}{v_x - \mathrm{Q}\rho^x(\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n})};$$

$$(204) \quad {}^{n}p\left({}_{n}^{\mathrm{N}}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}_x\right) = \frac{\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+\mathrm{N}}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - \frac{qr}{r-1}\left[\rho^x(\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n}) - (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})\right]},$$

$$(204') \quad {}^{n}p\left[{}_{n}^{\mathrm{N}}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}\right] = \frac{(\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+\mathrm{N}}) - \frac{m-1}{2m}(v_{x+n} - v_{x+\mathrm{N}})}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - \frac{qr}{r-1}\left[\rho^x(\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n}) - (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})\right]}.$$

Przykład. Nowonarodzonemu dziecku zabezpiecza ojciec 1200 fr. rocznej renty, mającej się wypłacać, z góry kwartalnie (po 300 fr.), od chwili ukończenia 10-u lat (ubezpieczeniowych) przez 7-o letni czas trwania nauki. Jaką premię roczną przez lat 10 ma wnosić ojciec, jeżeli w razie śmierci dziecka przed ukończeniem 10-u lat jest wymagany zwrot wniesionych premij bez procentu i jaką — przy zwrocie premij z procentem składanym. Zwrot premij ma nastąpić przy końcu roku ubezpieczeniowego, w którym ewentualnie śmierć dziecka nastąpi. Ponieważ w pierwszym przypadku powinno być

$$q < 10{,}0; \quad \text{w drugim } q < 9{,}2,$$

zatem na dodatek administracyjny przyjmijmy 20% premii netto.

Dla otrzymania premii netto za ubezpieczenie 1-ki renty, należy we wzorach (202′) resp. (204′) podstawić:

$$x = 0,\ n = 10,\ \mathrm{N} = 17,\ m = 4,\ q = 1{,}2; \text{ wtedy:}$$

Przy zwrocie premij bez procentu, będzie

$$ {}^{10}p\left[{}^{17}_{10}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}_0^{\left(\frac{4}{4}\right)}\right]=\frac{(\Sigma v_{10}-\Sigma v_{17})-\frac{3}{8}(v_{10}-v_{17})}{(\Sigma v_0-\Sigma v_{10})-1{,}2\,(\Sigma\Sigma m_0-\Sigma\Sigma m_{10}-10\,\Sigma m_{10})}= $$

$$ =\frac{433\,502{,}7}{852\,414{,}0}=0{,}508\,559. $$

Premia brutto wynosi 0,508 559 × 1,2 = 0,610 271.

Za 1 200 fr. rocznej renty 0,610 271 × 1 200 = 732,33 fr. rocznie.

Przy zwrocie premij z procentem składanym

$$ {}^{10}p\left[{}^{17}_{10}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}_0^{\left(\frac{4}{4}\right)}\right]=\frac{(\Sigma v_{10}-\Sigma v_{17})-\frac{3}{8}(v_{10}-v_{17})}{(\Sigma v_0-\Sigma v_{10})-\frac{1{,}2\times 1{,}035}{0{,}035}\left[\frac{1}{(1{,}035)^0}(\Sigma\tau_0-\Sigma\tau_{10})-(\Sigma m_0-\Sigma m_{10})\right]}= $$

$$ =\frac{433\,502{,}7}{841\,151{,}6}=0{,}515\,368. $$

Premia brutto wynosi 0,515 368 × 1,2 = 0,618 442.

Za 1 200 fr. rocznej renty 0,618 442 × 1 200 = 742,13 fr. rocznie, t. j. o 1,34% więcej, aniżeli za ubezpieczenie ze zwrotem premij bez procentu.

76. ODROCZONE I CZASOWE UBEZPIECZENIA KAPITAŁÓW POŚMIERTNYCH ZE ZWROTEM PREMIJ. W odroczonych ubezpieczeniach kapitałów pośmiertnych ze zwrotem premij napotykamy na te same przypadki, jakie rozróżniliśmy przy rentach odroczonych; jak również i rozumowania przy wyprowadzaniu odpowiednich wzorów nie ulegają zmianie — oprócz, naturalnie, tej części, która się odnosi do ubezpieczenia samych kapitałów w miejsce rent odroczonych. Potrzebne więc nam wzory możemy wypisać wprost ze wzorów na renty, zastępując wszędzie w licznikach Σv_{x+n} przez Σm_{x+n}. Mamy zatem:

Dla jednorazowej premii netto za ubezpieczenie 1-ki kapitału pośmiertnego, płatnego w razie śmierci osoby ubezpieczonej po *n* latach próby, ze zwrotem wniesionej premii brutto, gdy ubezpieczony umrze przed upływem lat odroczenia.

1. Jeżeli premia zwraca się bez procentu i jej zwrot oraz wypłata kapitału następują przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej zajdzie,

$$ {}_{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}{}_x=\frac{\Sigma m_{x+n}}{v_x-\mathrm{Q}(\Sigma m_x-\Sigma m_{x+n})}; \tag{205} $$

gdy zwrot premii oraz wypłata kapitału następują zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej

$$ {}_{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}'}{}_x=\frac{r^{\frac{1}{2}}\Sigma m_{x+n}}{v_x-\mathrm{Q}r^{\frac{1}{2}}(\Sigma m_x-\Sigma m_{x+n})}. \tag{205'} $$

2. Jeżeli premia zwraca się z procentem składanym i jej zwrot następuje kiedykolwiek (byle po śmierci osoby ubezpieczonej przed upły-

wem terminu odroczenia), a wypłata kapitału ma mieć miejsce przy końcu roku, w którym śmierć zajdzie,

$$ {}_{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_{x} = \frac{\Sigma m_{x+n}}{v_x - \mathrm{Q}\rho^x(\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n})}; \tag{206} $$

gdy kapitał wypłaca się zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej

$$ {}_{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}{}'_{x} = \frac{r^{\frac{1}{2}}\Sigma m_{x+n}}{v_x - \mathrm{Q}\rho^x(\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n})}. \tag{206'} $$

Dla rocznych premij netto.

1. Jeżeli premie zwracają się bez procentu i zwrot ich oraz wypłata kapitału następuje przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej zajdzie

$$ {}^{n}p\left\{{}_{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_{x}\right\} = \frac{\Sigma m_{x+n}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - q(\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n} - n\,\Sigma m_{x+n})}; \tag{207} $$

gdy zwrot premij oraz wypłata kapitału następuje zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej

$$ {}^{n}p\left\{{}_{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}{}'_{x}\right\} = \frac{r^{\frac{1}{2}}\Sigma m_{x+n}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - q\,r^{\frac{1}{2}}(\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n} - n\,\Sigma m_{x+n})}. \tag{207'} $$

2. Jeżeli premie zwracają się z procentem składanym i zwrot ich następuje kiedykolwiek, a wypłata kapitału ma mieć miejsce przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej zajdzie

$$ {}^{n}p\left\{{}_{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_{x}\right\} = \frac{\Sigma m_{x+n}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - \frac{qr}{r-1}[\rho^x(\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n}) - (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})]}; \tag{208} $$

gdy kapitał wypłaca się zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej

$$ {}^{n}p\left\{{}_{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}{}'_{x}\right\} = \frac{r^{\frac{1}{2}}\Sigma m_{x+n}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - \frac{qr}{r-1}[\rho^x(\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n}) - (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})]}. \tag{208'} $$

Gdyby premie miały być wnoszone przez całe życie osoby ubezpieczonej, należałoby w ostatnich czterech wzorach podstawić $\Sigma v_{x+n} = 0$.

W razie zwracania premij netto, trzeba w powyższych wzorach podstawić Q resp. $q = 1$.

W art. 63 powiedzieliśmy, że do odroczonych ubezpieczeń kapitałów pośmiertnych kwalifikują się osoby słabsze, nie wytrzymujące ścisłej rewizyi lekarskiej; ubezpieczenia te jednak są o tyle niedogodne, iż przez czas odroczenia byt rodziny osoby ubezpieczonej nie jest zapewniony. Otóż tej słabej stronie zapobiega w części ubezpieczenie ze zwrotem premij, na przypadek bowiem przedwczesnej śmierci osoby ubezpieczonej, pozostała rodzina otrzymuje chociaż opłacone premie.

Czasowe ubezpieczenia kapitałów pośmiertnych nadają się także do skombinowania ich ze zwrotem premij; albowiem gdy ubezpieczony przeżyje termin ubezpieczenia, a tem samem nie odnosi żadnej z niego korzyści, niech przynajmniej nie traci wniesionych premij.

Osoba x letnia ubezpiecza 1-kę kapitału pośmiertnego, płatnego w razie, jeżeli umrze w ciągu n lat, bezpośrednio po zawarciu umowy następujących; jeżeli zaś osoba ubezpieczona przeżyje termin rzeczony, to jej zostaną zwrócone wszystkie wniesione premie brutto.

1. Premie zwracają się bez procentu,

a) Premia jednorazowa.

Oznaczywszy jednorazową premię netto za pomienione ubezpieczenie przez ${}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x$ i założywszy, że jednocześnie ubezpiecza się λ_x osób x letnich oraz że ubezpieczony kapitał pośmiertny wypłaca się przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi, jednorazowy wpływ netto wyniesie

$${}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x \,.\, \lambda_x.$$

Jednoczesna wartość matematyczna spodziewanych wypłat równa się

$$(\tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \ldots + \tau_{x+n-1}\rho^n) + {}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x \,.\, \mathrm{Q} \,.\, \lambda_{x+n}\rho^n;$$

powinno więc być

$${}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x \,.\, \lambda_x = (\tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \ldots + \tau_{x+n-1}\rho^n) + {}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x \,.\, \mathrm{Q} \,.\, \lambda_{x+n} \,.\, \rho^n.$$

Pomnożywszy obie strony przez ρ^x

$${}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x \,.\, v_x = (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}) + {}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x \,.\, \mathrm{Q} \,.\, v_{x+n}, \text{ skąd}$$

$$(209) \qquad {}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}}{v_x - \mathrm{Q} \,.\, v_{x+n}}.$$

Gdy kapitał ma się wypłacać zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej

$$(209') \qquad {}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}'}_x = \frac{r^{\frac{1}{2}}(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})}{v_x - \mathrm{Q} \,.\, v_{x+n}}.$$

b) Premie roczne.

Oznaczywszy, na czas rozumowań, podobnie jak w poprzednim artykule, roczną premię netto przez p, teraźniejsza wartość matematyczna oczekiwanych wpływów netto wynosi

$$p(\lambda_x + \lambda_{x+1}\rho + \ldots + \lambda_{x+n-1}\rho^{n-1}).$$

Jednoczesna wartość matematyczna spodziewanych wypłat równa się

$$(\tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \ldots + \tau_{x+x-1}\rho^n) + n \,.\, pq \,.\, \lambda_{x+n} \,.\, \rho^n.$$

Jest więc

$$p(\lambda_x + \lambda_{x+1}\rho + \ldots + \lambda_{x+n-1}\rho^{n-1}) = (\tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \ldots + \tau_{x+n-1}\rho^n) + npq\lambda_{x+n}\rho^n.$$

Po pomnożeniu obu stron przez ρ^x i wprowadzeniu symbolicznych oznaczeń

$$p(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) = (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}) + n.pq v_{x+n};\text{ stąd}$$

(210)
$$^{n}p\left\{{}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - nqv_{x+n}},$$

(210′)
$$^{n}p\left\{{}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}{}'_x\right\} = \frac{r^{\frac{1}{2}}(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - n.q.v_{x+n}}.$$

2. Premie zwracają się z procentem składanym.

a) Premia jednorazowa.

Jednorazowy wpływ netto $= {}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x \,.\, \lambda_x$.

Jednoczesna wartość spodziewanych wypłat wynosi

$$(\tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \ldots + \tau_{x+n-1}\rho^n) + {}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x . \mathrm{Q} . r^n . \lambda_{x+n} . \rho^n.$$

Powinno być

$${}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x . \lambda_x = (\tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \ldots + \tau_{x+n-1}\rho^n) + {}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x . \mathrm{Q} . r^n . \lambda_{x+n} . \rho^n.$$

Pomnożywszy obie strony przez ρ^x

$${}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x . v_x = (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}) + {}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x . \mathrm{Q} . r^n . v_{x+n},\text{ skąd}$$

(211)
$${}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}}{v_x - \mathrm{Q} . r^n . v_{x+n}},$$

(211′)
$${}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}{}'_x = \frac{r^{\frac{1}{2}}(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})}{v_x - \mathrm{Q} . r^n . v_{x+n}}.$$

b) Premie roczne.

Teraźniejsza wartość oczekiwanych wpływów netto wynosi

$$p(\lambda_x + \lambda_{x+1}\rho + \ldots + \lambda_{x+n-1}\rho^{n-1}).$$

Jednoczesna wartość spodziewanych wypłat:

z tytułu ubezp. kapitału $= (\tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \ldots + \tau_{x+n-1}\rho^n)$,

z tytułu zwrotu premij $= pq(r^n + r^{n-1} + \ldots + r)\lambda_{x+n}\rho^n =$

$$= pqr(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1})\lambda_{x+n}\rho^n = pqr . \frac{r^n - 1}{r - 1}\lambda_{x+n}\rho^n.$$

Wypada więc

$$p(\lambda_x + \lambda_{x+1}\rho + \ldots + \lambda_{x+n-1}\rho^{n-1}) = (\tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \ldots + \tau_{x+n-1}\rho^n) + pqr . \frac{r^n - 1}{r - 1}\lambda_{x+n}\rho^n,$$

a po pomnożeniu obu stron przez ρ^x i wprowadzeniu symbolicznych oznaczeń, otrzymujemy

$$p(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) = (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}) + pqr . \frac{r^n - 1}{r - 1} v_{x+n}.$$

Stąd

$$(212)\qquad {}^{n}p\left\{{}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - qr\,\frac{r^n - 1}{r - 1}v_{x+n}},$$

$$(212')\qquad {}^{n}p\left\{{}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K'}}_x\right\} = \frac{r^{\frac{1}{2}}(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - qr\,\frac{r^n - 1}{r - 1}v_{x+n}}.$$

W razie zwrotu premij netto, potrzeba we wszystkich powyższych wzorach podstawić Q resp. $q = 1$.

Dla $x = 30$, $n = 10$, przy zwrocie premij bez procentu, według wzoru (210), powinno być $q < 1{,}3$; załóżmy $q = 1{,}2$. Wówczas

$$(210)\qquad {}^{10}p\left\{{}^{10}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}_{30}\right\} = \frac{\Sigma m_{30} - \Sigma m_{40}}{(\Sigma v_{30} - \Sigma v_{40}) - 10 \times 1{,}2 \times v_{40}} =$$

$$\frac{10\,664{,}17 - 8\,407{,}969}{(593\,788{,}92 - 338\,818{,}12) - 10 \times 1{,}2 \times 19\,865{,}58} = 0{,}136\,048.$$

Premia brutto $0{,}136\,048 \times 1{,}2 = 0{,}163\,258$. Od 5000 fr. $0{,}163\,258 \times 5\,000 = 816{,}29$ fr. rocznie.

Przy zwrocie premij z procentem składanym powinno być $q < 1{,}06$. Taki dodatek jest niemożliwie nizki, a ponieważ i premie wypadają tu niezmiernie wysokie (przy krótszych terminach nawet wyższe od ubezpieczonego kapitału), zatem tego rodzaju ubezpieczenia, jako chybiające celu, nie mają racyi bytu.

77. UBEZPIECZENIE KAPITAŁÓW NA DOŻYCIE ZE ZWROTEM PREMIJ. Najbardziej rozpowszechnionym rodzajem ubezpieczeń ze zwrotem premij są ubezpieczenia kapitałów na dożycie.

Osoba ubezpieczona otrzymuje kapitał, jeżeli dożyje z góry ściśle oznaczonego terminu, w razie zaś wcześniejszej śmierci zostają zwrócone, komu należy, wszystkie, wniesione do chwili śmierci osoby ubezpieczonej, premie bez procentu lub z procentem, stosownie do umowy.

I tutaj warunki zwrotu premij mogą być zupełnie takie same, jak przy rentach odroczonych (art. 75), resp. jak przy odroczonych ubezpieczeniach kapitałów pośmiertnych (art. 76). Rozumowania również pozostają te same — tak, że i obecnie możemy użyć tych samych, co i we wzmiankowanych artykułach, wzorów, zastępując tylko: we wzorach na renty Σv_{x+n} przez v_{x+n}, albo we wzorach na kapitały odroczone Σm_{x+n} przez v_{x+n}. Tym sposobem przychodzimy do następujących wyrażeń:

Dla jednorazowej premii netto. Za ubezpieczenie 1-ki kapitału na dożycie, płatnego w razie przeżycia przez osobę ubezpieczoną n lat, ze zwrotem wniesionej premii brutto, gdy ubezpieczony umrze przed upływem n lat:

1. Jeżeli premia zwraca się bez procentu, przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi

(213) $$\overset{d(z)}{{}_n\mathrm{K}_x} = \frac{v_{x+n}}{v_x - \mathrm{Q}(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})};$$

gdy zwrot premii ma nastąpić zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej

(213') $$\overset{d(z)}{{}_n\mathrm{K}'_x} = \frac{v_{x+n}}{v_x - \mathrm{Q}\,.\,r^{\frac{1}{2}}(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})}.$$

2. Jeżeli premia zwraca się z procentem składanym

(214) $$\overset{d(z)}{{}_n\mathrm{K}_x} = \frac{v_{x+n}}{v_x - \mathrm{Q}.\rho^x(\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n})}.$$

Dla rocznych premij netto.

1. Jeżeli premie zwracają się bez procentu, przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi

(215) $${}^n p\left\{\overset{d(z)}{{}_n\mathrm{K}_x}\right\} = \frac{v_{x+n}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - q(\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n} - n\Sigma m_{x+n})}.$$

Gdy zwrot premij ma nastąpić zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej

(215') $${}^n p\left\{\overset{d(z)}{{}_n\mathrm{K}'_x}\right\} = \frac{v_{x+n}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - q\,.\,r^{\frac{1}{2}}(\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n} - n\Sigma m_{x+n})}.$$

2. Jeżeli premie zwracają się z procentem składanym

(216) $${}^n p\left\{\overset{d(z)}{{}_n\mathrm{K}_x}\right\} = \frac{v_{x+n}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - \frac{qr}{r-1}[\rho^x(\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n}) - (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})]}.$$

W razie zwracania premij netto, należy w powyższych wzorach podstawić Q resp. $q = 1$.

Przykład. Osoba 30-o letnia ubezpiecza kapitał, płatny po dożyciu przez nią 50 lat — z tem, że jeżeli umrze przed upływem rzeczonego terminu, sukcesorom jej, przy końcu roku, w którym śmierć pomienionej osoby nastąpi, zostaną zwrócone wszystkie wniesione premie. Jakie opłaty osoba ubezpieczona wnosić powinna, gdy premie mają się zwrócić bez procentu lub z procentem składanym?

Dla premii jednorazowej powinno być $\mathrm{Q} < 7{,}4$ resp. od 5,2; dla premij rocznych $q < 10{,}1$ resp. od 7,8; na dodatek więc dla wszystkich czterech przypadków przyjmijmy 20% premii netto.

Gdy premia jednorazowa zwraca się bez procentu

$$\overset{d(z)}{{}_{20}\mathrm{K}_{30}} = \frac{v_{50}}{v_{30} - 1{,}2(\Sigma m_{30} - \Sigma m_{50})} = 0{,}483\,325.$$ Premia brutto $0{,}483\,325 \times 1{,}2 = 0{,}579\,990$; od 5000 fr. $0{,}579\,990 \times 5\,000 = 2\,899{,}95$ fr.

Gdy premia jednorazowa zwraca się z procentem składanym

$$\overset{d(z)}{{}_{20}\mathrm{K}_{30}} = \frac{v_{50}}{v_{30} - 1{,}2 \times \left(\frac{1}{1{,}035}\right)^{30}(\Sigma\tau_{30} - \Sigma\tau_{50})} = 0{,}528\,051.$$ Premia brutto $0{,}528\,051 \times 1{,}2 = 0{,}633\,661$; od 5000 fr. $0{,}633\,661 \times 5\,000 = 3\,168{,}31$ fr.

Gdy premie roczne zwracają się bez procentu

$$ {}^{20}p\left\{ {}_{20}\overset{d(z)}{\mathrm{K}}_{30} \right\} = \frac{v_{50}}{(\Sigma v_{30} - \Sigma v_{50}) - 1{,}2\,(\Sigma\Sigma m_{30} - \Sigma\Sigma m_{50} - 20\,\Sigma m_{50})} = 0{,}033\,788. $$

Premia brutto 0,033 788 × 1,2 = 0,040 546; od 5 000 fr. 0,040 546 × 5 000 = = 202,73 fr.

Gdy premie roczne zwracają się z procentem składanym

$$ {}^{20}p\left\{ {}_{20}\overset{d(z)}{\mathrm{K}}_{30} \right\} = \frac{v_{50}}{(\Sigma v_{30} - \Sigma v_{50}) - \frac{1{,}2 \times 1{,}035}{0{,}035}\left[\left(\frac{1}{1{,}035}\right)^{30}(\Sigma\tau_{30} - \Sigma\tau_{50}) - (\Sigma m_{30} - \Sigma m_{50})\right]} = $$

= 0,035 204. Premia brutto 0,035 204 × 1,2 = 0,042 245; od 5 000 fr. 0,042 245 × 5 000 = 211,23 fr.

Można także, w ubezpieczeniach ze zwrotem premij, łączyć różne kombinacye ze sobą.

Przypuśćmy np., że się zawiera ubezpieczenie odroczone na kapitał pośmiertny, płatny, jeżeli osoba ubezpieczona umrze po upływie n lat; nadto osoba ubezpieczona otrzyma połowę kapitału w razie przeżycia n lat, a jeżeli umrze przed upływem terminu odroczenia, sukcesorowie otrzymają wszystkie wniesione premie brutto bez procentu lub z procentem składanym, stosownie do umowy.

Weźmy pod uwagę jednorazową premię. Premia brutto zwraca się bez procentu i jej zwrot resp. wypłata kapitału pośmiertnego nastąpi przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej zajdzie.

Jednorazowy wpływ netto = ${}_n\overset{d/_2+s(z)}{\mathrm{K}}_x \,.\, \lambda_x$.

Wartość matematyczna spodziewanych wypłat, obliczona na chwilę zawierania umowy, wynosi:

z tytułu zwrotu premij ${}_n\overset{d/_2+s(z)}{\mathrm{K}}_x \,.\, \mathrm{Q}.(\tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \ldots + \tau_{x+n-1}\rho^n)$,

„ ubezp. na dożycie $\frac{1}{2}\cdot\lambda_{x+n}\cdot\rho^n$,

„ ubezp. kap. pośm. $(\tau_{x+n}\rho^{n+1} + \tau_{x+n+1}\rho^{n+2} + \ldots)$.

Powinno więc być

$$ {}_n\overset{d/_2+s(z)}{\mathrm{K}}_x \,.\, \lambda_x = {}_n\overset{d/_2+s(z)}{\mathrm{K}}_x \,.\, \mathrm{Q}.(\tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \ldots + \tau_{x+n-1}\rho^n) + \frac{1}{2}.\lambda_{x+n}\rho^n + (\tau_{x+n}\rho^{n+1} + $$
$$ + \tau_{x+n+1}\rho^{n+2} + \ldots). $$

Pomnożywszy obie strony przez ρ^x, wypada

$$ {}_n\overset{d/_2+s(z)}{\mathrm{K}}_x \,.\, v_x = {}_n\overset{d/_2+s(z)}{\mathrm{K}}_x \,.\, \mathrm{Q}.(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}) + \frac{1}{2}\,v_{x+n} + \Sigma m_{x+n}. $$ Stąd

$$ (217) \qquad {}_n\overset{d/_2+s(z)}{\mathrm{K}}_x = \frac{\frac{1}{2}\,v_{x+n} + \Sigma m_{x+n}}{v_x - \mathrm{Q}.(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})}. $$

Gdy zwrot premii resp. wypłata kapitału pośmiertnego następują zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej

$$(217') \qquad {}_{n}\overset{d/_2+s(z)}{\mathrm{K}'_x} = \frac{\frac{1}{2} v_{x+n} + r^{\frac{1}{2}} \Sigma m_{x+n}}{v_x - \mathrm{Q}.r^{\frac{1}{2}} (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})}.$$

Z porównania (217) i (217') z (213) i (213') okazuje się, że różnica pomiędzy tymi wzorami zachodzi tylko w licznikach, mianowicie w (213) resp. (213') w miejsce licznika v_{x+n} podstawić trzeba $\frac{1}{2} v_{x+n} + \Sigma m_{x+n}$ resp. $\frac{1}{2} v_{x+n} + r^{\frac{1}{2}} \Sigma m_{x+n}$. I tak być istotnie powinno, albowiem obecna kombinacya jest połączeniem dwóch innych: ubezpieczenia połowy kapitału na dożycie, t. j. połowy (213) resp. (213'), z ubezpieczeniem odroczonem całego kapitału na przypadek śmierci po upływie n lat, t. j. z (205) resp. (205').

Wypada stąd, że wszystkie inne wzory, odnoszące się do rozróżnionych w niniejszym artykule warunków zwrotu premij, wprost wypisać można ze wzorów (214), (215), (215') i (216), podstawiając w ich liczniki $\frac{1}{2} v_{x+n} + \Sigma m_{x+n}$ resp. $\frac{1}{2} v_{x+n} + r^{\frac{1}{2}} \Sigma m_{x+n}$ w miejsce v_{x+n}.

Manipulacya to tak prosta, że odnośnych wzorów podawać nie potrzebujemy.

78. UBEZPIECZENIE OD NIESZCZĘŚLIWYCH WYPADKÓW ZE ZWROTEM PREMIJ. Od czasu pewnego rozpowszechniają się ubezpieczenia od nieszczęśliwych wypadków ze zwrotem premij. Aczkolwiek ubezpieczenia od nieszczęśliwych wypadków nie wchodzą w zakres niniejszej książki, niemniej jednak połączenia tych ubezpieczeń ze zwrotem premij nie możemy w tem miejscu pominąć, gdyż do pewnego stopnia wchodzi do nich pierwiastek ubezpieczeń życiowych.

W jaki sposób oblicza się premia za ubezpieczenie materyalnych strat, wywołanych utratą życia lub zdrowia człowieka skutkiem zajścia z nim nieszczęśliwego wypadku, bliżej opisywać tu nie będziemy; nadmienimy tylko, że w ogóle—z przyczyny braku dostatecznie ścisłych danych statystycznych—używane obecnie premie są bardzo problematycznej natury i, jak dotąd, nie zależą od wieku ubezpieczających się, czyli są stałe dla wszystkich w jednakowym stopniu niebezpieczeństwa żyjących osób. Premię taką, płatną rocznie, oznaczmy przez a.

Jeżeli ubezpieczenie jest zawarte bez zwrotu premij, to po wyekspirowaniu okresu, na jaki ubezpieczenie zostało zawarte, wniesione premie przepadają, czyli przechodzą na własność instytucyi. Przy ubezpieczeniu ze zwrotem premij, takowe, w razie śmierci ubezpieczonego (bez względu na przyczynę) lub w razie przeżycia przezeń N lat, zwracają się bez procentu. Chodzi o to, jak wysoką ma być roczna premia w tym ostatnim razie.

Przypuśćmy, że osoba x letnia ubezpiecza się od nieszczęśliwych wypadków na okres n letni ($n < \mathrm{N}$) i że wniesione premie zwracają się zaraz po ewentualnej śmierci osoby ubezpieczonej resp. w połowie roku, w którym śmierć jej nastąpi.

Oznaczmy przez ${}^{n}_{\mathrm{N}}\mathrm{P}_x$ liczbę, wyrażającą ile razy większą od a premię pobierać należy, przy ubezpieczeniu ze zwrotem — tak, że szukaną roczną premię stanowi $a.{}^{n}_{\mathrm{N}}\mathrm{P}_x$.

Instytucya, oczywiście, z każdorocznej premii przedewszystkiem strącić musi kwotę a na nieszczęśliwe wypadki, pozostałą zaś część

$$a.{}^{n}_{\mathrm{N}}\mathrm{P}_x - a = a\left({}^{n}_{\mathrm{N}}\mathrm{P}_x - 1\right)$$

oprocentowuje, celem zebrania funduszu, potrzebnego na zwrot wszystkich w całości wniesionych premij.

Tym sposobem, teraźniejsza wartość spodziewanych wpływów, na rachunek zwrotu premij, wynosi

$$(\alpha) \qquad a\left({}^{n}_{\mathrm{N}}\mathrm{P}_x - 1\right).(\lambda_x + \lambda_{x+1}\rho + \ldots + \lambda_{x+n-1}\rho^{n-1}).$$

Jednoczesna wartość spodziewanych wypłat równa się

$$(\beta) \qquad a.{}^{n}_{\mathrm{N}}\mathrm{P}_x.[(\tau_x.\rho^{\frac{1}{2}} + 2\tau_{x+1}\rho^{\frac{3}{2}} + \ldots + n\tau_{x+n-1}\rho^{n-\frac{1}{2}}) +$$

$$+ n(\tau_{x+n}\rho^{n+\frac{1}{2}} + \ldots + \tau_{x+\mathrm{N}-1}\rho^{\mathrm{N}-\frac{1}{2}}) + n\lambda_{x+\mathrm{N}}\rho^{\mathrm{N}}].$$

Po zrównaniu (α) z (β), zniesieniu spólnego czynnika a, pomnożeniu obu stron przez ρ^x i podstawieniu symbolicznych oznaczeń, wypada

$$\left({}^{n}_{\mathrm{N}}\mathrm{P}_x - 1\right).(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) = {}^{n}_{\mathrm{N}}\mathrm{P}_x[r^{\frac{1}{2}}\{(\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n} - n\,\Sigma m_{x+n}) +$$

$$+ n(\Sigma m_{x+n} - \Sigma m_{x+\mathrm{N}})\} + n v_{x+\mathrm{N}}].$$

Stąd

$${}^{n}_{\mathrm{N}}\mathrm{P}_x = \frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - r^{\frac{1}{2}}(\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n} - n\,\Sigma m_{x+\mathrm{N}}) - n\,v_{x+\mathrm{N}}},$$

albo

$$(218) \quad {}^{n}_{\mathrm{N}}\mathrm{P}_x = \frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n} - n v_{x+\mathrm{N}}) - r^{\frac{1}{2}}(\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n} - n\,\Sigma m_{x+\mathrm{N}})}.$$

Gdy premie mają być zwrócone przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi, będzie

$$(218') \quad {}^{n}_{\mathrm{N}}\mathrm{P}_x = \frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n} - n\,v_{x+\mathrm{N}}) - (\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+n} - n\,\Sigma m_{x+\mathrm{N}})}.$$

Dla $x = 30$, $n = 5$, $\mathrm{N} = 35$

$${}^{5}_{35}\mathrm{P}_{30} = \frac{\Sigma v_{30} - \Sigma v_{35}}{(\Sigma v_{30} - \Sigma v_{35} - 5\,v_{65}) - (\Sigma\Sigma m_{30} - \Sigma\Sigma m_{35} - 5\,\Sigma m_{65})} = 1{,}7,$$

t. j. premia ze zwrotem winna być 1,7 razy większą od premii zwyczajnej, czyli bez zwrotu.

W obecnym przykładzie ubezpieczenie od nieszczęśliwych wypadków zawiera się na czas 5-o letni, przez który premia roczna pozostaje niezmienną. Gdyby ta sama osoba po 5-u latach chciała w dalszym ciągu być ubezpieczoną, w ten sam sposób na następne 5 lat, premia uległaby zmianie; należałoby ją obliczyć przy założeniu $x = 35$, $n = 5$, $N = 30$.

Gdyby ubezpieczenie było roczne, we wzorach (218) i (218′) trzebaby podstawić $n = 1$; wtedy premie przy corocznych wznowieniach corocznym ulegałyby zmianom.

Gdyby ubezpieczenie było zawarte na okres 10-o letni, należałoby podstawić $n = 10$; wówczas premia byłaby przez 10 lat stałą, lecz ulegałaby zmianom w razie wznawiania umowy co lat 10 na dalsze okresy.

⁂

Uwaga. W art. 74 przypisaliśmy ubezpieczeniom ze zwrotem premij znaczenie względne — dla tego, że warunek zwrotu premij obciąża ubezpieczenie główne, czyli podnosi należne zań premie, jeżeli zaś za daną kombinacyę premie wzrastają nadmiernie, ubezpieczenie traci wartość praktyczną. Położenie takie, naturalnie, może się częściej trafić w ubezpieczeniach ze zwrotem premij z procentem składanym, aniżeli bez procentu, skutkiem czego zapewne dotąd, o ile nam wiadomo, ten pierwszy rodzaj ubezpieczeń nie jest używany, a nawet w podręcznikach zazwyczaj nie bywa uwzględniony. My jednak wprowadziliśmy go do wykładu, raz dla tego, że w każdym razie jest to przedmiot teoretycznie bardzo ciekawy, a następnie — ponieważ publiczność miewa często bardzo dziwne wymagania, niech więc posiada sposób przekonania się, że towarzystwa wiele uczynić mogą, ale za wszystko trzeba niestety płacić, co nie zawsze wychodzi ubezpieczonym na korzyść. W ogóle, przy wprowadzaniu w życie ubezpieczeń ze zwrotem premij należy postępować bardzo ostrożnie, trzeba dokładnie zbadać wszystkie ewentualności, jakie w danej kombinacyi trafić się mogą, aby nie stworzyć dzieła, które, acz teoretycznie możliwe, dla praktyki wszakże nie posiada żadnej wartości.

ROZDZIAŁ VII.

UBEZPIECZENIA OPARTE NA ŻYCIU DWÓCH I WIĘCEJ OSÓB.

79. Przygotowanie statystyczne. W art. 30 podaliśmy prawdopodobieństwa rozmaitych kombinacyj, wynikających ze spólnego życia 2-ch i 3-ch osób; na podstawie tych prawdopodobieństw możnaby wyprowadzić wzory na premie dla różnego rodzaju ubezpieczeń, opartych na życiu 2-ch i 3-ch osób. Sposobu tego jednak nie użyjemy, chcemy bowiem przyjętą przez nas metodę konsekwentnie do końca przeprowadzić, gwoli czemu musimy przedewszystkiem cyfrom statystycznym nadać kształt odpowiedni.

Niech będzie $\lambda_y\lambda_x$ par, złożonych z $\lambda_y\lambda_x$ osób y letnich i $\lambda_y\lambda_x$ osób x letnich, razem osób $2\lambda_y\lambda_x$. Osoby składające te pary mogą pozostawać w dowolnym ze sobą stosunku: mogą być samymi tylko mężczyznami lub samemi kobietami, mogą być obojętne względem siebie, mogą być przyjaciołmi albo osobami spowinowaconemi, mogą być ojcowie lub matki z synami albo córkami, wreszcie mogą stanowić pary małżeńskie. Dla ułatwienia sobie wyrażeń i zwrotów — przypuśćmy, że są to pary małżeńskie, złożone z $\lambda_y\lambda_x$ mężczyzn y letnich i $\lambda_y\lambda_x$ kobiet x letnich. Na założeniu takiem ogólność rozumowań oczywiście nic nie straci.

Ponieważ z pośród λ_y mężczyzn y letnich umiera w ciągu roku τ_y jednostek, zatem z pośród $\lambda_y \times \lambda_x$ mężczyzn tegoż wieku umrze jednostek $\tau_y \times \lambda_x = \tau_y\lambda_x$; podobnie z pośród $\lambda_y\lambda_x$ kobiet x letnich umrze w ciągu roku $\lambda_y\tau_x$, tak, że z pośród $\lambda_y\lambda_x$ wziętych pod uwagę par, w ciągu pierwszego roku, umrze ogółem osób

$$(\alpha) \qquad \tau_y\lambda_x + \lambda_y\tau_x.$$

Nie znaczy to, aby (α) par, w ciągu pierwszego roku, zostało przez śmierć zerwanych, gdyż pomiędzy (α) zmarłemi osobami są mężczyźni i kobiety, pochodzące z par zupełnie wygasłych. Istotnie—z pośród np. kobiet, połączonych związkiem małżeńskim z $\tau_y\lambda_x$ zmarłymi w ciągu roku mężczyznami, umiera w ciągu tegoż roku $\tau_y\tau_x$ osób, tak samo, jak z pośród mężczyzn, połączonych związkiem małżeńskim z $\lambda_y\tau_x$ zmarłemi w ciągu roku kobietami, umiera osób $\tau_y\tau_x$. Liczba ostatnio omówionych kobiet zmarłych mieści się w iloczynie $\lambda_y\tau_x$, liczba do nich należących mężów zmarłych mieści się w iloczynie $\tau_y\lambda_x$, czyli liczba całkiem wygasłych par jest w (α) dwa razy policzona, skutkiem czego, odjąwszy $\tau_y\tau_x$ od (α), otrzymujemy, na liczbę zerwanych w pierwszym roku przez śmierć par, wyrażenie

$$\tau_y\lambda_x + \lambda_y\tau_x - \tau_y\tau_x.$$

Wynika z powyższego, że w końcu roku pozostaje przy życiu par

$$\lambda_y\lambda_x - (\tau_y\lambda_x + \lambda_y\tau_x - \tau_y\tau_x) = \lambda_y\lambda_x - \tau_y\lambda_x - \lambda_y\tau_x + \tau_y\tau_x =$$
$$= \lambda_y\lambda_x - (\lambda_y - \lambda_{y+1})\lambda_x - \lambda_y(\lambda_x - \lambda_{x+1}) + (\lambda_y - \lambda_{y+1}).(\lambda_x - \lambda_{x+1}) = \lambda_{y+1}\lambda_{x+1}.$$

Pozostałych w końcu 1-go roku przy życiu wdów jest

$$\tau_y\lambda_x - \tau_y\tau_x = \tau_y\lambda_x - \tau_y(\lambda_x - \lambda_{x+1}) = \tau_y\lambda_{x+1} = (\lambda_y - \lambda_{y+1})\lambda_{x+1};$$

pozostałych w końcu 1-go roku przy życiu wdowców jest

$$\lambda_y\tau_x - \tau_y\tau_x = \lambda_y\tau_x - (\lambda_y - \lambda_{y+1})\tau_x = \lambda_{y+1}\tau_x = \lambda_{y+1}(\lambda_x - \lambda_{x+1}).$$

W podobny sposób rozumując dalej, przekonamy się, że przy końcu 2-go roku pozostaje żyjących par $\lambda_{y+2}\lambda_{x+2}$. Z pośród owdowiałych w ciągu 2-go roku kobiet żyje przy końcu 2-go roku $\tau_{y+1}\lambda_{x+2}$, wdowców $\lambda_{y+2}\tau_{x+1}$, całkiem wymiera par $\tau_{y+1}\tau_{x+1}$. Że zaś z pośród żyjących przy końcu 1-go roku $\tau_y\lambda_{x+1}$ wdów umiera w ciągu 2-go roku $\tau_y\tau_{x+1}$, zatem pozostaje przy życiu

$$\tau_y\lambda_{x+1} - \tau_y\tau_{x+1} = \tau_y(\lambda_{x+1} - \lambda_{x+1} + \lambda_{x+2}) = \tau_y\lambda_{x+2},$$

czyli przy końcu 2-go roku jest razem żyjących wdów

$\tau_{y+1}\lambda_{x+2} + \tau_y\lambda_{x+2} = (\tau_y + \tau_{y+1})\lambda_{x+2} = (\lambda_y - \lambda_{y+2})\lambda_{x+2}$; wdowców $\lambda_{y+2}(\lambda_x - \lambda_{x+2})$.

I w ogóle, po m latach pozostaje przy życiu

$$(219) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \text{par} & \lambda_{y+m}.\lambda_{x+m}, \\ \text{wdów} & (\lambda_y - \lambda_{y+m}).\lambda_{x+m}, \\ \text{wdowców} & \lambda_{y+m}(\lambda_x - \lambda_{x+m}); \end{array}\right.$$

z m-go roku przybywa nowych, żyjących przy końcu roku,

$$(220) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \text{wdów} & \tau_{y+m-1}.\lambda_{x+m}, \\ \text{wdowców} & \lambda_{y+m}.\tau_{x+m-1}; \end{array}\right.$$

zupełnie wymiera w ciągu m-go roku

$$(221) \qquad \text{par} \quad \tau_{y+m-1}\tau_{x+m-1}.$$

---

80. PREMIA JEDNORAZOWA ZA UBEZPIECZENIE RENTY ROCZNEJ, PŁATNEJ DWU OSOBOM DO ŚMIERCI JEDNEJ Z NICH. Podstawową kombinacyą rentową dla dwóch osób jest ubezpieczenie renty, płatnej corocznie z góry od chwili zawarcia umowy aż do śmierci jednej z dwóch ubezpieczonych osób, bez względu na to, która wprzód umrze.

Oznaczmy wiek jednej osoby przez y, drugiej przez x, i przypuśćmy, że tego rodzaju rentę, w wysokości po 1-ce rocznie, zabezpiecza sobie $\lambda_y\lambda_x$ par. Zachodzi pytanie, jaka jest teraźniejsza wartość matematyczna takiej renty, resp. czemu się równa jednorazowa premia netto za pomienione ubezpieczenie.

Jeżeli przez $\overset{\text{I}}{R}_{y,x}$ oznaczymy rzeczoną premię jednorazową (*), to jednorazowym wpływem netto instytucyi jest

$$\overset{\text{I}}{R}_{y,x}\,.\,\lambda_y\lambda_x. \tag{α}$$

Ponieważ w chwili zawierania umowy żyje $\lambda_y\lambda_x$ par, po roku $\lambda_{y+1}\lambda_{x+1}$, po 2-ch latach $\lambda_{y+2}\lambda_{x+2}$ i t. d., przeto teraźniejsza wartość matematyczna spodziewanych wypłat wynosi

$$\lambda_y\lambda_x + \lambda_{y+1}\lambda_{x+1}\rho + \lambda_{y+2}\lambda_{x+2}\rho^2 + \ldots \text{ do końca tablicy śmiertelności.} \tag{β}$$

Dla wzajemnej równowagi powinno być $(\alpha) = (\beta)$, czyli

$$\overset{\text{I}}{R}_{y,x}.\lambda_y\lambda_x = \lambda_y\lambda_x + \lambda_{y+1}\lambda_{x+1}\rho + \lambda_{y+2}\lambda_{x+2}\rho^2 + \ldots \tag{γ}$$

Gdy obie strony pomnożymy przez ρ^y, wypadnie

$$\overset{\text{I}}{R}_{y,x}.\lambda_y\lambda_x.\rho^y = \lambda_y\lambda_x\rho^y + \lambda_{y+1}\lambda_{x+1}\rho^{y+1} + \lambda_{y+2}\lambda_{x+2}\rho^{y+2} + \ldots,$$

albo

$$\overset{\text{I}}{R}_{y,x}v_y\lambda_x = v_y\lambda_x + v_{y+1}\lambda_{x+1} + v_{y+2}\lambda_{x+2} + \ldots = \Sigma v_y\lambda_x. \tag{δ}$$

Gdy obie strony (γ) pomnożymy przez ρ^x, otrzymamy

$$\overset{\text{I}}{R}_{y,x}\lambda_y v_x = \lambda_y v_x + \lambda_{y+1}v_{x+1} + \lambda_{y+2}v_{x+2} + \ldots = \Sigma\lambda_y v_x. \tag{δ'}$$

Z (δ) i (δ') wypada na jednorazową premię netto

$$\overset{\text{I}}{R}_{y,x} = \frac{\Sigma v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x} = \frac{\Sigma\lambda_y v_x}{\lambda_y v_x}. \tag{222}$$

Iloczyny $v_y\lambda_x$ resp. $\lambda_y v_x$, jak nam wiadomo z art. 44, nazywają się zdyskontowanemi liczbami żyjących par.

Porównywając wzór (222) z (112) dostrzegamy łatwo, że wyrażenie na jednorazową premię za ubezpieczenie renty natychmiastowej, płatnej dwu osobom do śmierci jednej z nich, jest bardzo podobne do wyrażenia na jednorazową premię za ubezpieczenie dożywotniej renty natychmiastowej, płatnej pojedynczej osobie, gdyż dość jest we wzorze (112), w miejsce zdyskontowanych liczb osób żyjących, podstawić zdyskontowane liczby żyjących par, aby otrzymać wzór (222).

Ze wzoru (222) widzimy jeszcze, że wszystko jest jedno, czy, dla otrzymania zdyskontowanej liczby żyjących par, mnożymy v_y przez λ_x, czy λ_y przez v_x, byle trzymać się tego samego porządku w liczniku i mianowniku. Ponie-

---

(*) Rzymska jednostka (I), umieszczona nad R, wskazuje, że renta wypłaca się do chwili śmierci pierwszej (którejkolwiek) z dwóch ubezpieczonych osób.

waż zaś w praktyce są dogodniejsze liczby mniejsze, zatem lepiej jest dyskontować liczby osób żyjących w wieku starszym. W dalszym ciągu, zdyskontowane liczby osób starszych stale pomieszczać będziemy na pierwszem miejscu. W taki właśnie sposób ułożone zostały nasze tablice pomocnicze (Tab. IX, kol. 14 i dalsze).

Gdy we wzorze (222) założymy $x = 20$, $y = 30 = x + 10$, otrzymamy z tab. IX, kol. 14 i 15

$$\overset{\text{I}}{\mathrm{R}}_{30;20} = \frac{\Sigma v_{30} \lambda_{20}}{v_{30} \lambda_{20}} = \frac{48\,581\,611\,796}{2\,867\,429\,126} = 16{,}942\,57.$$

Tak samo można obliczyć wartość renty dla każdej innej różnicy w wieku dwóch osób, co uczyniliśmy, dla $y = x$, $y = x + 10$ i $y = x + 25$, w tabl. X, kol. 4, 5 i 6.

Do sformowania naszych tablic rent użyliśmy tej samej tablicy śmiertelności dla obu osób; wszakże, gdy chodzi o zupełną ścisłość, dla pary złożonej z mężczyzny i kobiety użyć należy tablic śmiertelności, ułożonych oddzielnie dla samych mężczyzn i oddzielnie dla samych kobiet, i z nich brać odpowiednie wartości na λ_y resp. v_y oraz na λ_x.

Nadmieniliśmy już, na początku niniejszego artykułu, że wartość rent natychmiastowych, płatnych dwu osobom aż do chwili śmierci pierwszej z nich, stanowi podstawę dla wielu innych kombinacyj. Skutkiem tego ważną i bardzo praktyczną jest rzeczą posiadać liczebne wartości pomienionych rent dla wszystkich możliwych różnic, jakie pomiędzy wiekiem dwóch osób zachodzić mogą. Różnic takich, oczywiście, jest około 100 ($y - x$ może być równe 0, 1, 2, 3, . . .), t. j. powinniśmy mieć gotowych około 100 tablic wartości rent (*), do sformowania których potrzeba wprzód przygotować około 200 kolumn takich, jak w tab. IX kol. 14 i 15.

Łatwo pojąć, ile pracy włożyć trzeba dla dojścia do takiego zasobu tablic— pracy, która ostatecznie instytucyom mało się opłaca, ponieważ ubezpieczenia oparte na życiu dwóch osób stosunkowo nie często się trafiają.

Aby ominąć ten nawał mozolnej pracy, próbowano używać metod przybliżonych, opierając się na wzorze Gompertz'a i Makeham'a.

Wzory te (art. 27) służą do wyrównywania tablic śmiertelności i dla tego, przed użyciem wzmiankowanych metod przybliżonych, potrzeba sobie przygotować tablice śmiertelności, wyrównane według wzoru Gompertz'a resp. Makeham'a.

W tablicy wyrównanej według wzoru Gompertz'a, liczba żyjących, w wieku lat y, wyraża się przez wzór

$$\lambda_y = d . g^{q^y}, \tag{49}$$

gdzie stałe d, g i q posiadają znane nam z art. 27 wartości.

(*) W naszej tabl. X (kol. 4, 5, 6) posiadamy ich trzy tylko.

Dla wieku x lat

$$\lambda_x = d.g^{q^x}. \tag{49'}$$

Chodzi o oznaczenie takiego wieku z, żeby wartość natychmiastowej renty dożywotniej, obliczona dla pojedynczej osoby w wieku lat z, równała się wartości renty natychmiastowej, płatnej dwu osobom, w wieku lat y i x, do śmierci którejkolwiek z nich.

Wartość renty, jak wiadomo, zależy od prawdopodobieństwa życia osób pobierających takową. Otóż prawdopodobieństwo przeżycia n lat, przez osobę z letnią, równa się, według wzoru Gompertz'a,

$$\frac{\lambda_{z+n}}{\lambda_z} = g^{q^z(q^n - 1)}. \tag{ε}$$

Prawdopodobieństwo, że para, złożona z osoby y i x letniej, żyć będzie po n latach, według tegoż wzoru, równa się

$$\frac{\lambda_{y+n}\lambda_{x+n}}{\lambda_y\lambda_x} = g^{(q^y + q^x)(q^n - 1)}. \tag{ε'}$$

Wartość renty, płaconej osobie z letniej, będzie równa wartości renty, płaconej dwu osobom w wieku lat y i x, gdy (ε) = (ε') przy każdej wartości n, t. j. gdy

$$q^z = q^y + q^x, \tag{ς}$$

stąd na szukane z wypada

$$z = \frac{\log(q^y + q^x)}{\log q}. \tag{223}$$

Tym sposobem obliczenie wartości renty dla dwóch osób sprowadzamy do obliczenia wartości renty płaconej jednej osobie, co — gdyby dawało dokładne rezultaty — stanowiłoby ogromne uproszczenie rachunków i skrócenie pracy. Ale, z przyczyny niedokładności wzoru Gompertz'a, dokładność jest tu bardzo niedostateczna; sprawdzić jej, co prawda, nie możemy, nie posiadając odpowiednio wyrównanej tablicy śmiertelności, używając zaś, dla przykładu, tablicy 17-u towarzystw angielskich, dochodzimy do następującego rezultatu dla $y = 30$, $x = 20$.

Z art. 27 wiadomo, że według oznaczeń Edmonds'a, dla wieku od 9 do 55 lat, $q = 1{,}0297117$, wypada więc

$$z = \frac{\log(1{,}0297117^{30} + 1{,}0297117^{20})}{\log 1{,}0297117} = 49.$$

Wartość renty dla 49-o letniej osoby, według tab. X, kol. 1, wynosi 14,43366, podczas gdy ścisła wartość renty dla dwóch osób w wieku lat 30 i 20, według tejże tablicy (kol. 5) równa się 16,94257, czyli jest większa od poprzedniej o 2,50891. Jest to różnica bardzo duża, lecz znaczną jej część złożyć trzeba na karb niezastosowania do naszych obliczeń tablicy wyrównanej według wzoru Gompertz'a.

Lepsze rezultaty daje zastosowanie wzoru Makeham'a.

Za pomocą wzoru Makeham'a można wartość renty dla dwóch osób różnego wieku sprowadzić do wartości renty dla dwóch osób równego wieku, czyli wszystkie (około 200) tablice pomocnicze sprowadzić do dwóch (Tabl. IX, kol. 11 i 12).

Wzór Makeham'a posiada kształt:
dla osoby y letniej

(50) $$\lambda_y = \frac{k}{a^y} \cdot g^{q^y},$$

dla osoby x letniej

(50') $$\lambda_x = \frac{k}{a^x} \cdot g^{q^x}.$$

Stąd prawdopodobieństwo przeżycia n lat przez obie osoby równa się

(η) $$\frac{\lambda_{y+n}\lambda_{x+n}}{\lambda_y\lambda_x} = \frac{1}{a^{2n}} \cdot g^{(q^y+q^x)\cdot(q^n-1)}.$$

Oznaczmy przez z wspólny wiek dwóch osób, dla których wartość renty równa się wartości renty poprzednich dwóch osób w wieku lat y i x; powinno być

(η') $$\frac{\lambda_{z+n}\lambda_{z+n}}{\lambda_z\lambda_z} = \frac{1}{a^{2n}} \cdot g^{2q^z(q^n-1)}$$

Ażeby (η) było równe (η'), winno być

$$2q^z = q^y + q^x, \text{ skąd}$$

(224) $$z = \frac{\log(q^y + q^x) - \log 2}{\log q}.$$

Żeby módz zastosować wzór (224), należy posiadać tablicę śmiertelności wyrównaną według wzoru Makeham'a; lecz stosując nawet tablicę zwyczajną, przychodzimy do dość przybliżonych rezultatów.

Np. dla $y = 30$, $x = 20$, przy $q = 1{,}09648$ (art. 27), znajdujemy

$$z = \frac{\log(1{,}09648^{30} + 1{,}09648^{20}) - \log 2}{\log(1{,}09648)} = 26{,}11.$$

Otóż z tabl. X, kol. 4

$$\overset{\mathrm{I}}{R}_{26;26} = 16{,}95258$$
$$\overset{\mathrm{I}}{R}_{27;27} = \underline{16{,}77447}$$
$$0{,}17811,$$

wypada stąd

$$\overset{\mathrm{I}}{R}_{26{,}11;26{,}11} = 16{,}95258 - 0{,}17811 \times 0{,}11 = 16{,}93299,$$

podczas gdy $\overset{\mathrm{I}}{R}_{30;20}$, jak nam wiadomo, równa się 16,94257, czyli jest większe od przybliżonej o 0,00958, co stanowi względnie nieznaczną różnicę.

Jeżeli renta ma być płacona rocznie z dołu, należy oczywiście od (222) odjąć jednostkę, gdyż wówczas w wyrażeniu (β) odpada pierwszy wyraz. Otrzymujemy zatem

$$(222') \qquad {}_{1}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} = \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} - 1 = \frac{\Sigma v_{y+1}\lambda_{x+1}}{v_y\lambda_x}.$$

Dla otrzymania wartości rent wypłacanych co m-a część roku po $\frac{1}{m}$ jednostki, można, z pewnem przybliżeniem, zastosować prawidła podane w art. 49.

81. RENTY ODROCZONE I CZASOWE, PŁATNE DWU OSOBOM DO ŚMIERCI KTÓREJKOLWIEK Z NICH. Załóżmy teraz, że renta jest odroczoną na lat n, t. j. zaczyna się wypłacać dopiero po upływie n lat od chwili zawarcia umowy, jeżeli wówczas jeszcze ubezpieczona para osób pozostawać będzie przy życiu, i trwa do chwili śmierci jednej z nich.

Jednorazowy wpływ netto instytucyi, w chwili zawierania umowy, wynosi

$${}_{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} \,.\, \lambda_y\lambda_x.$$

Jednoczesna wartość matematyczna spodziewanych wypłat równa się

$$\lambda_{y+n}\lambda_{x+n}\rho^n + \lambda_{y+n+1}\lambda_{x+n+1}\rho^{n+1} + \ldots$$

Powinno więc być

$${}_{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} \,.\, \lambda_y\lambda_x = \lambda_{y+n}\lambda_{x+n}\rho^n + \lambda_{y+n+1}\lambda_{x+n+1}\rho^{n+1} + \ldots$$

Po pomnożeniu obu stron przez ρ^y, podzieleniu przez $v_y\lambda_x$ i wprowadzeniu symbolicznych oznaczeń, wypada

$$(225) \qquad {}_{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} = \frac{\Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x}.$$

Jeżeli licznik i mianownik strony drugiej pomnożymy przez $v_{y+n}\lambda_{x+n}$, będzie

$$(225') \qquad {}_{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} = \frac{v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x} \cdot \frac{\Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_{y+n}\lambda_{x+n}} = \frac{v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+n,x+n}.$$

Renta natychmiastowa czasowa, płatna z góry przez lat n, jest oczywiście różnicą pomiędzy dożywotnią rentą natychmiastową i odroczoną na lat n, t. j.

$$(226) \qquad {}^{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} = \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} - {}_{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} = \frac{\Sigma v_y\lambda_x - \Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x}.$$

Wreszcie renta odroczona na lat n i płatna czasowo przez lat $\mathrm{N}-n$ jest różnicą pomiędzy rentą odroczoną na lat n i na lat N, t. j.

$$(227) \qquad {}^{\mathrm{N}}_{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} = {}_{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} - {}_{\mathrm{N}}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} = \frac{\Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n} - \Sigma v_{y+\mathrm{N}}\lambda_{x+\mathrm{N}}}{v_y\lambda_x}.$$

Nie trudno zauważyć podobieństwo wzorów (225), (226) i (227) do wzorów (119), (122) i (124).

Gdyby chodziło o renty rosnące lub malejące, wzorować się należy na art. 54 i 55.

Renty odroczone mogą być także ubezpieczane za pomocą premij peryodycznych, np. rocznych, płatnych przez czas odroczenia (albo krócej) lub do wcześniejszej śmierci jednej z dwóch ubezpieczonych osób. Wówczas, jak wiadomo, premie peryodyczne odgrywają rolę rent czasowych, natychmiast z góry płaconych instytucyi. Odnośne prawidła są podobne do podanych w art. 56.

Posiłkując się rzeczonemi prawidłami, na premie roczne, płatne przez lat l, za ubezpieczenie dwu osobom 1-ki renty odroczonej na lat n, otrzymujemy wzór

$$(228)\qquad {}^{l}p\left\{{}_{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right\} = \frac{{}_{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}{{}^{l}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}} = \frac{\Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n}}{\Sigma v_y\lambda_x - \Sigma v_{y+l}\lambda_{x+l}};$$

gdy $l = n$

$$(229)\qquad {}^{n}p\left\{{}_{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right\} = \frac{\Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n}}{\Sigma v_y\lambda_x - \Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n}}.$$

Dla renty odroczonej na lat n i czasowo płatnej przez lat $\mathrm{N} - n$ jest

$$(230)\qquad {}^{l}p\left\{{}^{\mathrm{N}}_{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right\} = \frac{\Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n} - \Sigma v_{y+\mathrm{N}}\lambda_{x+\mathrm{N}}}{\Sigma v_y\lambda_x - \Sigma v_{y+l}\lambda_{x+l}};$$

gdy $l = n$

$$(231)\qquad {}^{n}p\left\{{}^{\mathrm{N}}_{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right\} = \frac{\Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n} - \Sigma r_{y+\mathrm{N}}\lambda_{x+\mathrm{N}}}{\Sigma v_y\lambda_x - \Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n}}.$$

82. RENTY PŁATNE DWU OSOBOM DO ŚMIERCI OSTATNIEJ Z NICH. Załóżmy, że renta przestaje się wypłacać nie z chwilą śmierci pierwszej z dwóch ubezpieczonych osób, lecz z chwilą śmierci drugiej, czyli po śmierci pierwszej osoby renta wypłaca się dalej aż do śmierci osoby drugiej.

Wartość tego rodzaju renty natychmiastowej, płaconej z góry w wysokości 1-ki rocznie, oznaczmy przez $\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y,x}$, gdzie dwójka rzymska (II) cechuje właśnie okoliczność, iż renta ustaje dopiero ze śmiercią drugiej osoby.

Ażeby nie powtarzać w całej rozciągłości rozumowań, podobnych do poprzednich, i możliwie skrócić wykład, do wyprowadzenia dalszych wzorów użyjemy sposobu krótszego, lecz po tem, cośmy dotąd powiedzieli, dostatecznie zrozumiałego.

Według wzoru (219), po m latach pozostaje przy życiu:

par	$\lambda_{y+m}\lambda_{x+m}$,
osieroconych osób $y + m$ letnich	$\lambda_{y+m}(\lambda_x - \lambda_{x+m})$,
„ „ $x + m$ „	$(\lambda_y - \lambda_{y+m})\lambda_{x+m}$,

razem po m latach wypłaca instytucya jednostek

$$\lambda_{y+m}\lambda_{x+m}+\lambda_{y+m}(\lambda_x-\lambda_{x+m})+(\lambda_y-\lambda_{y+m})\lambda_{x+m}=\lambda_{y+m}\lambda_x+\lambda_y\lambda_{x+m}-\lambda_{y+m}\lambda_{x+m},$$

które, w chwili zawierania umowy, są warte

$$\lambda_{y+m}\lambda_x\rho^m+\lambda_y\lambda_{x+m}\rho^m-\lambda_{y+m}\lambda_{x+m}\rho^m$$

licząc na wszystkie ubezpieczone pary; na każdą pojedynczą parę wypada zatem

$$\frac{\lambda_{y+m}\lambda_x\rho^m}{\lambda_y\lambda_x}+\frac{\lambda_y\lambda_{x+m}\rho^m}{\lambda_y\lambda_x}-\frac{\lambda_{y+m}\lambda_{x+m}\rho^m}{\lambda_y\lambda_x}=\frac{\lambda_{y+m}\rho^m}{\lambda_y}+\frac{\lambda_{x+m}\rho^m}{\lambda_x}-\frac{\lambda_{y+m}\lambda_{x+m}\rho^m}{\lambda_y\lambda_x}.$$

Mnożąc licznik i mianownik pierwszego i ostatniego wyrazu strony drugiej przez ρ^y, drugiego przez ρ^x, otrzymujemy

$$(\alpha) \qquad \frac{v_{y+m}}{v_y}+\frac{v_{x+m}}{v_x}-\frac{v_{y+m}\lambda_{x+m}}{v_y\lambda_x}$$

jako teraźniejszą wartość raty, mającej się wypłacić po m latach.

Zakładając w (α) $m=0, 1, 2, 3, \ldots$ (*) i biorąc sumę wypadających stąd wartości do końca tablicy śmiertelności, otrzymamy teraźniejszą wartość matematyczną corocznie płaconej renty aż do śmierci drugiej osoby, czyli szukana wartość omawianej renty wynosi

$$(232) \qquad \overset{\text{II}}{R}_{y,x}=\frac{\Sigma v_y}{v_y}+\frac{\Sigma v_x}{v_x}-\frac{\Sigma v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x}=R_y+R_x-\overset{\text{I}}{R}_{y,x}.$$

Widzimy z powyższego wzoru, że wartość omawianej renty równa się sumie wartości rent natychmiastowych, płaconych każdej osobie oddzielnie, minus wartość renty płaconej parze osób do śmierci jednej z nich. I tak być istotnie powinno, albowiem płacąc każdej osobie oddzielnie po 1-ce renty, wypłacalibyśmy ubezpieczonej parze po 2-ie jednostki rocznie do chwili śmierci jednej z dwóch osób składających parę, w dalszym zaś ciągu po 1-ce pozostałej przy życiu osobie aż do jej śmierci. Chcąc zatem, aby przez cały czas spólnego pożycia ubezpieczona para pobierała po 1-ce renty rocznie, trzeba od R_y+R_x odjąć $\overset{\text{I}}{R}_{y,x}$.

Dla $y=30$, $x=20$, z tab. X, kol. 1 i 5, wypada

$$\overset{\text{II}}{R}_{30;20}=R_{30}+R_{20}-\overset{\text{I}}{R}_{30,20}=23{,}37886.$$

Jeżeli $y=x$

$$(232') \qquad \overset{\text{II}}{R}_{x,x}=2R_x-\overset{\text{I}}{R}_{x,x}.$$

Gdybyśmy ubezpieczonej parze płacili po 1-ce renty do śmierci pierwszej z dwóch składających parę osób, następnie zaś pozostałej przy życiu osobie po $\frac{1}{2}$ jednostki rocznie, to taką kombinacyę można uważać: albo za sumę dwóch

---

(*) $m=0$ oznacza 1-ę renty, wypłaconą parze w chwili zawierania umowy, i rzeczywiście (α) przy $m=0$ przybiera wartość $1+1-1=1$.

oddzielnych rent, ubezpieczonych każdej osobie po $\frac{1}{2}$ jednostki rocznie i wtedy jej wartość wynosi

$$\frac{1}{2}(\mathrm{R}_y + \mathrm{R}_x);$$

albo za sumę dwóch rent, płaconych parze osób po $\frac{1}{2}$ jednostki rocznie: jednej renty, płaconej do śmierci pierwszej osoby, i drugiej, płaconej do śmierci drugiej z dwóch osób składających ubezpieczoną parę; wartość tak rozumianej renty wynosi

$$\frac{1}{2}\left(\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} + \overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right) = \frac{1}{2}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{R}_y + \mathrm{R}_x - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{R}_y + \mathrm{R}_x).$$

Jeżeli w tym rodzaju renty założymy $y = x$, wypadnie na jej wartość, czyli na premię jednorazową

$$\frac{1}{2}(\mathrm{R}_x + \mathrm{R}_x) = \mathrm{R}_x.$$

Dla renty odroczonej na n lat trzeba w (α) za m podstawić kolejno n, $n + 1, n + 2, \ldots$ do końca tablicy śmiertelności i rezultaty zsumować, przez co otrzymuje się

$$(233) \qquad {}_n\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y,x} = {}_n\mathrm{R}_y + {}_n\mathrm{R}_x - {}_n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}.$$

Dla renty czasowej

$$\begin{gathered} {}^n\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y,x} = \overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y,x} - {}_n\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y,x} = \\ = (\mathrm{R}_y + \mathrm{R}_x - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}) - ({}_n\mathrm{R}_y + {}_n\mathrm{R}_x - {}_n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}), \text{ czyli} \end{gathered}$$

$$(234) \qquad {}^n\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y,x} = {}^n\mathrm{R}_y + {}^n\mathrm{R}_x - {}^n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}.$$

Wypada stąd na roczną premię, płatną przez n lat, za ubezpieczenie jednostki renty odroczonej na tyleż lat

$$(235) \qquad {}^n p\left\{{}_n\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right\} = \frac{{}_n\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y,x}}{{}^n\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y,x}} = \frac{{}_n\mathrm{R}_y + {}_n\mathrm{R}_x - {}_n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}{{}^n\mathrm{R}_y + {}^n\mathrm{R}_x - {}^n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}.$$

83. RENTY NA PRZEŻYCIE. Rentą na przeżycie dwóch osób nazywać będziemy taką rentę, która, po śmierci jednej osoby, zaczyna się wypłacać drugiej, pozostałej przy życiu osobie, i trwa aż do śmierci tej ostatniej. Teraźniejszą wartość takiej renty, płatnej w wysokości 1-ki rocznie, oznaczmy przez $\mathrm{R}_{y,x}$.

Jeżeli w podobny sposób ubezpiecza się $\lambda_y\lambda_x$ par, to ponieważ po m latach żyć będzie osób osieroconych

$\lambda_{y+m}(\lambda_x - \lambda_{x+m})$ w wieku lat $y + m$,
$(\lambda_y - \lambda_{y+m})\lambda_{x+m}$ „ „ $x + m$, razem osób
$\lambda_{y+m}(\lambda_x - \lambda_{x+m}) + (\lambda_y - \lambda_{y+m})\lambda_{x+m} = \lambda_{y+m}\lambda_x + \lambda_y\lambda_{x+m} - 2\lambda_{y+m}\lambda_{x+m},$

przeto po m latach wypłaci instytucya

$$\lambda_{y+m}\lambda_x + \lambda_y\lambda_{x+m} - 2\lambda_{y+m}\lambda_{x+m}$$

jednostek, które w chwili zawierania umowy są warte

$$\lambda_{y+m}\lambda_x\rho^m + \lambda_y\lambda_{x+m}\rho^m - 2\lambda_{y+m}\lambda_{x+m}\rho^m,$$

z czego na każdą parę przypada

$$\frac{\lambda_{y+m}\lambda_x\rho^m}{\lambda_y\lambda_x} + \frac{\lambda_y\lambda_{x+m}\rho^m}{\lambda_y\lambda_x} - 2\,.\,\frac{\lambda_{y+m}\lambda_{x+m}\rho^m}{\lambda_y\lambda_x},$$

albo, po pomnożeniu licznika i mianownika dwóch skrajnych wyrazów przez ρ^y, średniego przez ρ^x, na każdą parę przypada

$$(\alpha) \qquad \frac{v_{y+m}}{v_y} + \frac{v_{x+m}}{v_x} - 2\,.\,\frac{v_{y+m}\lambda_{x+m}}{v_y\lambda_x}.$$

Zakładając w (α) $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (*) i biorąc sumę stąd wypadłych wartości, otrzymujemy

$$(236) \qquad R_{y,x} = \frac{\Sigma v_y}{v_y} + \frac{\Sigma v_x}{v_x} - 2\,.\,\frac{\Sigma v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x} = R_y + R_x - 2\,.\,\overset{\mathrm{I}}{R}_{y,x}.$$

Rezultat ten można było przewidzieć z góry, albowiem $R_y + R_x$ oznacza wartość dwóch rent natychmiast z góry płatnych po 1-ce rocznie, z osobna każdej z dwóch osób składających parę. Skoro zaś, dokąd obie osoby żyją, renty wcale się nie wypłacają aż do śmierci jednej z dwóch ubezpieczonych osób, zatem od $R_y + R_x$ trzeba odjąć podwójną wartość renty płaconej dwu osobom przez czas ich spólnego życia, t. j. $2\overset{\mathrm{I}}{R}_{y,x}$.

Premia roczna, płacona do śmierci jednej z dwóch ubezpieczonych osób, równa się

$$(236') \qquad p(R_{y,x}) = \frac{R_{y,x}}{\overset{\mathrm{I}}{R}_{y,x}} = \frac{R_y + R_x - 2\overset{\mathrm{I}}{R}_{y,x}}{\overset{\mathrm{I}}{R}_{y,x}} = \frac{R_y + R_x}{\overset{\mathrm{I}}{R}_{y,x}} - 2.$$

Np. dla $y = 30$, $x = 20$

$$R_{30,20} = R_{30} + R_{20} - 2\overset{\mathrm{I}}{R}_{30,20} = 6{,}43629 \text{ za 1-kę renty;}$$

za 1000 fr. rocznej renty 6,43629 × 1000 = 6436,29 fr. jednorazowo netto.

Premia roczna wynosi

$$p(R_{30,20}) = \frac{R_{30} + R_{20}}{\overset{\mathrm{I}}{R}_{30,20}} - 2 = 0{,}37989 \text{ za 1-kę renty;}$$

za 1000 fr. rocznej renty po 0,37989 × 1000 = 379,89 fr. rocznie netto do śmierci jednej z dwóch ubezpieczonych osób.

(*) Właściwie, w obecnym przypadku, nie należy zakładać $m = 0$; czynimy to jednak, ponieważ (α) przy $m = 0$ przybiera wartość $1 + 1 - 2 = 0$, czyli rezultatu nie zmienia.

Renta na przeżycie może być ubezpieczoną w ten sposób, że się wypłaca tylko w takim razie, gdy wyraźnie wskazana osoba (zabezpieczona) przeżyje drugą (ubezpieczyciela). W takim razie renta nosi nazwę jednostronnej renty na przeżycie i oznacza się symbolem $R_{(y),x}$, jeżeli osoba x letnia otrzymuje rentę, gdy przeżyje osobę y letnią. Gdyby osoba y letnia przeżyła osobę x letnią, renta się wcale nie wypłaca i wniesione premie przechodzą na własność instytucyi.

Z pośród $\lambda_y \lambda_x$ par, zawierających tego rodzaju ubezpieczenie, po m latach pozostaje przy życiu $x+m$ letnich osób osieroconych

$$(\lambda_y - \lambda_{y+m})\lambda_{x+m} = \lambda_y \lambda_{x+m} - \lambda_{y+m}\lambda_{x+m};$$

instytucya wypłaca im tyleż jednostek, które w chwili zawierania umowy są warte

$$\lambda_y \lambda_{x+m} \rho^m - \lambda_{y+m}\lambda_{x+m}\rho^m,$$

z czego na każdą parę przypada

$$\frac{\lambda_y \lambda_{x+m} \rho^m}{\lambda_y \lambda_x} - \frac{\lambda_{y+m}\lambda_{x+m}\rho^m}{\lambda_y \lambda_x},$$

a po pomnożeniu licznika i mianownika pierwszego wyrazu przez ρ^x, drugiego przez ρ^y, wypada

$$(\beta) \qquad \frac{v_{x+m}}{v_x} - \frac{v_{y+m}\lambda_{x+m}}{v_y \lambda_x}.$$

Zakładając w (β) kolejno $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (*) i sumując rezultaty, otrzymujemy

$$(237 \qquad R_{(y),x} = \frac{\Sigma v_x}{v_x} - \frac{\Sigma v_y \lambda_x}{v_y \lambda_x} = R_x - \overset{\mathrm{I}}{R}_{y,x},$$

t. j. rezultat dający się bezpośrednio z łatwością objaśnić.

Premia roczna, płatna do śmierci jednej z dwóch ubezpieczonych osób, wynosi

$$(237') \qquad p(R_{(y),x}) = \frac{R_{(y),x}}{\overset{\mathrm{I}}{R}_{y,x}} = \frac{R_x - \overset{\mathrm{I}}{R}_{y,x}}{\overset{\mathrm{I}}{R}_{y,x}} = \frac{R_x}{\overset{\mathrm{I}}{R}_{y,x}} - 1.$$

Gdy premie roczne mają być płacone do śmierci jednej z dwóch ubezpieczonych osób, ale nie dłużej jak przez lat n, należy $R_{(y)x}$ podzielić nie przez $\overset{\mathrm{I}}{R}_{y,x}$ lecz przez ${}^{n}\overset{\mathrm{I}}{R}_{y,x}$ (wzór 226), wtedy otrzymamy

$$(237'') \qquad {}^{n}p(R_{(y),x}) = \frac{R_{(y),x}}{{}^{n}\overset{\mathrm{I}}{R}_{y,x}}.$$

(*) Zakładamy $m = 0$ dla tej samej przyczyny, jaką podaliśmy w poprzednim dopisku.

Np. dla $y = 30$, $x = 20$

$$R_{(30),20} = R_{20} - \overset{\text{I}}{R}_{30,20} = 4{,}06487 \text{ za 1-ę renty;}$$

za 1000 fr. rocznej renty 4,06487 × 1000 = 4064,87 fr. jednorazowo netto.

Premia roczna wynosi

$$p\,(R_{(30),20}) = \frac{R_{20}}{\overset{\text{I}}{R}_{30,20}} - 1 = 0{,}23992 \text{ za 1-kę renty;}$$

za 1000 fr. rocznej renty po 0,23992 × 1000 = 239,92 fr. rocznie do śmierci jednej z dwóch ubezpieczonych osób.

Renty jednostronne na przeżycie najczęściej bywają ubezpieczane przez męża na korzyść żony, albo przez jedno z rodziców na korzyść dziecka i w takich wypadkach zowią się rentami wdowiemi resp. sierocemi (Wittwen- und Waisen-Pensionen).

84. Jednostronne renty na przeżycie ze zwrotem premij. W ostatnio rozpatrywanej kombinacyi, jeżeli osoba zabezpieczona umrze przed ubezpieczycielem, wniesione premie przechodzą na własność instytucyi. Można jednak zawrzeć ubezpieczenie i pod warunkiem, aby w podobnym przypadku wniesione premie (zazwyczaj bez procentu) zostały zwrócone ubezpieczycielowi.

Niech $\overset{(z)}{R}_{(y),x}$ wyobraża jednorazową premię netto, resp. teraźniejszą wartość jednostronnej renty na przeżycie osoby y letniej przez x letnią—z tem, że jeżeli osoba x letnia umrze przed osobą y letnią, to tej ostatniej zostanie zwrócona premia brutto przy końcu roku, w którym śmierć osoby x letniej nastąpi—o tyle, o ile przy końcu tegoż roku osoba y letnia pozostawać będzie przy życiu.

Z $\lambda_y \lambda_x$ par w ten sposób jednocześnie ubezpieczonych, przy końcu $m-1$ roku istnieć jeszcze będzie par $\lambda_{y+m-1} \lambda_{x+m-1}$. W ciągu m-go roku z rzeczonych par umrze zabezpieczonych osób $\lambda_{y+m-1}(\lambda_{x+m-1} - \lambda_{x+m})$, a z ich ubezpieczycieli pozostanie, w końcu m-go roku, przy życiu osób $\lambda_{y+m}(\lambda_{x+m-1} - \lambda_{x+m})$.

Każdy z tych ubezpieczycieli otrzyma zwrot jednorazowej premii brutto w wysokości

$$\overset{(z)}{R}_{(y),x} \, . \, Q,$$

czyli wartość spodziewanych po m latach zwrotów, obliczona na chwilę zawierania umowy i na na każdą parę oddzielnie, wynosi

$$\left(\frac{\lambda_{y+m}\lambda_{x+m-1}\rho^m}{\lambda_y\lambda_x} - \frac{\lambda_{y+m}\lambda_{x+m}\rho^m}{\lambda_y\lambda_x}\right) \cdot \overset{(z)}{R}_{(y),x} \, . \, Q =$$

$$(\alpha) \qquad = \left(\frac{v_{y+m}\lambda_{x+m-1}}{v_y\lambda_x} - \frac{v_{y+m}\lambda_{x+m}}{v_y\lambda_x}\right) \cdot \overset{(z)}{R}_{(y),x} \, . \, Q.$$

Podstawiwszy w (α) kolejno $m = 1, 2, 3, \ldots$ i zsumowawszy rezultaty, otrzymujemy, na teraźniejszą wartość zwrotów, wyrażenie

$$(\beta) \qquad \left(\frac{\Sigma v_{y+1}\lambda_x}{v_y\lambda_x} - \frac{\Sigma v_{y+1}\lambda_{x+1}}{v_y\lambda_x}\right) \cdot \overset{(z)}{R}_{(y),x} \, . \, Q.$$

Mnożąc pierwszy wyraz w nawiasie przez $\frac{v_{y+1}}{v_{y+1}}=1$ i dodając $1-\frac{v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x}=0$, wypada

$$\left(\frac{v_{y+1}}{v_y}\cdot\frac{\Sigma v_{y+1}\lambda_x}{v_{y+1}\lambda_x}+1-\frac{\Sigma v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x}\right)\cdot\overset{(z)}{\mathrm{R}}_{(y),x}.\mathrm{Q}=\left(\frac{v_{y+1}}{v_y}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+1,x}+1-\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right)\cdot\overset{(z)}{\mathrm{R}}_{(y),x}.\mathrm{Q}$$

jako wartość zwrotów, do której dodawszy wartość jednostronnej renty na przeżycie, t. j. $\mathrm{R}_x-\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}$, powinno być

$$\overset{(z)}{\mathrm{R}}_{(y),x}=\left(\frac{v_{y+1}}{v_y}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+1,x}+1-\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right)\cdot\overset{(z)}{\mathrm{R}}_{(y),x}.\mathrm{Q}+(\mathrm{R}_x-\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}).$$

Stąd

$$\overset{(z)}{\mathrm{R}}_{(y),x}=\frac{\mathrm{R}_x-\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}{1-\mathrm{Q}\left(\frac{v_{y+1}}{v_y}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+1,x}+1-\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right)}.\tag{238}$$

Gdybyśmy zwracali premie netto, należałoby podstawić $\mathrm{Q}=1$, wtedy

$$\overset{(z)}{\mathrm{R}}_{(y),x}=\frac{\mathrm{R}_x-\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}{\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}-\frac{v_{y+1}}{v_y}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+1,x}}.\tag{238'}$$

Dla premii rocznej, którą chwilowo, na czas rozumowania, oznaczmy przez *p*, wartość zwrotu po *m* latach, według (α), wynosi

$$\left(\frac{v_{y+m}\lambda_{x+m-1}}{v_y\lambda_x}-\frac{v_{y+m}\lambda_{x+m}}{v_y\lambda_x}\right)mpq=$$

$$=\left(\frac{v_{y+1}}{v_y}\cdot\frac{m\,v_{y+m}\lambda_{x+m-1}}{v_{y+1}\lambda_x}-\frac{m\,v_{y+m}\lambda_{x+m}}{v_y\lambda_x}\right)pq.\tag{α'}$$

Zakładając w (α') $m=1, 2, 3, \ldots$ i sumując rezultaty, otrzymujemy: ze zmiennej części pierwszego wyrazu w nawiasie

$$v_{y+1}\lambda_x+2v_{y+2}\lambda_{x+1}+3v_{y+3}\lambda_{x+2}+\ldots=\Sigma\Sigma v_{y+1}\lambda_x,$$

ze zmiennej części drugiego wyrazu w nawiasie

$$v_{y+1}\lambda_{x+1}+2v_{y+2}\lambda_{x+2}+3v_{y+3}\lambda_{x+3}+\ldots=\Sigma\Sigma v_{y+1}\lambda_{x+1},$$

czyli razem

$$\left(\frac{v_{y+1}}{v_y}\cdot\frac{\Sigma\Sigma v_{y+1}\lambda_x}{v_{y+1}\lambda_x}-\frac{\Sigma\Sigma v_{y+1}\lambda_{x+1}}{v_y\lambda_x}\right)pq=\left(\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}+\frac{v_{y+1}}{v_y}\overset{\triangleleft\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+1,x}-\overset{\triangleleft\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right)pq\,(*).\tag{α''}$$

(*) Ponieważ $\frac{\Sigma\Sigma v_{y+1}\lambda_{x+1}}{v_y\lambda_x}=\frac{\Sigma\Sigma v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x}-\frac{\Sigma v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x}$, a $\frac{\Sigma\Sigma v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x}$ oznacza rentę stale co rok o 1-kę rosnącą.

Gdy do jednego z dwóch ostatnich wyrażeń dodamy wartość jednostronnej renty na przeżycie dwóch osób, t. j. $\mathrm{R}_x - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}$, otrzymamy teraźniejszą wartość spodziewanych wypłat, podczas gdy wartość spodziewanych wpływów netto wynosi

$$p.\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} = p.\frac{\Sigma v_y \lambda_x}{v_y \lambda_x}.$$

Powinno więc być

$$p\frac{\Sigma v_y \lambda_x}{v_y \lambda_x} = \left(\frac{v_{y+1}}{v_y}\cdot\frac{\Sigma\Sigma v_{y+1}\lambda_x}{v_{y+1}\lambda_x} - \frac{\Sigma\Sigma v_{y+1}\lambda_{x+1}}{v_y\lambda_x}\right)pq + (\mathrm{R}_x - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}),$$

skąd

$$(239)\qquad p\left\{\overset{(z)}{\mathrm{R}}_{(y),x}\right\} = \frac{\mathrm{R}_x - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}{\dfrac{\Sigma v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x} - q\left(\dfrac{v_{y+1}}{v_y}\cdot\dfrac{\Sigma\Sigma v_{y+1}\lambda_x}{v_{y+1}\lambda_x} - \dfrac{\Sigma\Sigma v_{y+1}\lambda_{x+1}}{v_y\lambda_x}\right)},$$

lub

$$(239')\qquad p\left\{\overset{(z)}{\mathrm{R}}_{(y),x}\right\} = \frac{\mathrm{R}_x - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}{\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} - q\left(\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} + \dfrac{v_{y+1}}{v_y}\overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+1,x} - \overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right)}.$$

Gdyby się zwracało premie netto, należałoby w (239) i (239′) podstawić $q = 1$, wtedy

$$(239'')\qquad p\left\{\overset{(z)}{\mathrm{R}}_{(y),x}\right\} = \frac{\mathrm{R}_x - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}{\dfrac{\Sigma v_y\lambda_x + \Sigma\Sigma v_{y+1}\lambda_{x+1}}{v_y\lambda_x} - \dfrac{v_{y+1}}{v_y}\cdot\dfrac{\Sigma\Sigma v_{y+1}\lambda_x}{v_{y+1}\lambda_x}} =$$

$$= \frac{\mathrm{R}_x - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}{\overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} - \dfrac{v_{y+1}}{v_y}\overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+1,x}}.$$

Jeżeli zwrot premij ma się uskutecznić przy końcu roku ubezpieczeniowego, ale nie tylko tym ubezpieczycielom, którzy końca roku dożyli, lecz w ogóle pod warunkiem, że zabezpieczony umarł przed ubezpieczycielem, to oprócz poprzednich przypadków uwzględnić trzeba i te, w których ubezpieczyciel i zabezpieczony w tym samym roku zmarli.

Otóż z $\lambda_y\lambda_x$ par w m-ym roku wymiera zupełnie par $(\lambda_{y+m-1} - \lambda_{y+m}) \times (\lambda_{x+m-1} - \lambda_{x+m})$, pomiędzy któremi są takie, w których ubezpieczyciel przed zabezpieczonym i zabezpieczony przed ubezpieczycielem umierają. Przypuściwszy, że obu przypadków jest po równo, na liczbę zwrotów wypada połowa poprzedniego wyrażenia, t. j.

$$\frac{1}{2}(\lambda_{y+m-1} - \lambda_{y+m})(\lambda_{x+m-1} - \lambda_{x+m}),$$

czyli całkowita liczba zwrotów przy końcu roku sprowadza się do

$$\lambda_{y+m}(\lambda_{x+m-1}-\lambda_{x+m})+\frac{1}{2}(\lambda_{y+m-1}-\lambda_{y+m})(\lambda_{x+m-1}-\lambda_{x+m})=$$

$$=\frac{1}{2}(\lambda_{y+m-1}+\lambda_{y+m})(\lambda_{x+m-1}-\lambda_{x+m})=$$

$$=\frac{1}{2}(\lambda_{y+m-1}\lambda_{x+m-1}+\lambda_{y+m}\lambda_{x+m-1}-\lambda_{y+m-1}\lambda_{x+m}-\lambda_{y+m}\lambda_{x+m}),$$

a teraźniejsza wartość wypłat, mających się dokonać przy końcu roku, obliczona jedną parę, wynosi

$$(\gamma)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{v_{y+m-1}\lambda_{x+m-1}}{v_y\lambda_x r}+\frac{v_{y+m}\lambda_{x+m-1}}{v_y\lambda_x}-\frac{v_{y+m-1}\lambda_{x+m}}{v_y\lambda_x r}-\frac{v_{y+m}\lambda_{x+m}}{v_y\lambda_x}\right).$$

Ten rezultat trzeba pomnożyć, w przypadku premii jednorazowej przez $\overset{(z)}{R'}_{(y),x}\,.\,Q$, w przypadku premii rocznej — przez $m.pq$; w iloczynie podstawić $m=1, 2, 3, \ldots$ i zsumować.

Tak postępując, jako wartość zwrotu jednorazowej premii brutto otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Sigma v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x r}+\frac{\Sigma v_{y+1}\lambda_x}{v_y\lambda_x}-\frac{\Sigma v_y\lambda_{x+1}}{v_y\lambda_x r}-\frac{\Sigma v_{y+1}\lambda_{x+1}}{v_y\lambda_x}\right)\cdot\overset{(z)}{R'}_{(y),x}\cdot Q=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\Sigma v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x r}+\frac{\Sigma v_{y+1}\lambda_x}{v_y\lambda_x}-\frac{\Sigma\lambda_y v_{x+1}}{\lambda_y v_x}-\frac{\Sigma v_{y+1}\lambda_{x+1}}{v_y\lambda_x}\right)\overset{(z)}{R'}_{(y),x}\cdot Q=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\overset{I}{R}_{y,x}}{r}+\frac{v_{y+1}}{v_y}\overset{I}{R}_{y+1,x}-\frac{v_{x+1}}{v_x}\overset{I}{R}_{y,x+1}-\overset{I}{R}_{y,x}+1\right)\cdot\overset{(z)}{R'}_{(y),x}\cdot Q=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{r-1}{r}\overset{I}{R}_{y,x}+\frac{v_{y+1}}{v_y}\overset{I}{R}_{y+1,x}-\frac{v_{x+1}}{v_x}\overset{I}{R}_{y,x+1}\right)\cdot\overset{(z)}{R'}_{(y),x}\cdot Q.$$

Po dodaniu do ostatniego wyrażenia $R_x-\overset{I}{R}_{y,x}$ i zrównaniu z $\overset{(z)}{R'}_{(y),x}$, wypada

$$(240)\qquad \overset{(z)}{R'}_{(y),x}=\frac{R_x-\overset{I}{R}_{y,x}}{1-\frac{1}{2}Q\left(1-\frac{r-1}{r}\overset{I}{R}_{y,x}+\frac{v_{y+1}}{v_y}\overset{I}{R}_{y+1,x}-\frac{v_{x+1}}{v_x}\overset{I}{R}_{y,x+1}\right)}.$$

Gdy $Q=1$, czyli gdy się zwraca premię netto

$$(240')\qquad \overset{(z)}{R'}_{(y),x}=\frac{R_x-\overset{I}{R}_{y,x}}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{r-1}{r}\overset{I}{R}_{y,x}-\frac{v_{y+1}}{v_y}\overset{I}{R}_{y+1,x}+\frac{v_{x+1}}{v_x}\overset{I}{R}_{y,x+1}\right)}.$$

Dla premij rocznych z (γ) otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Sigma\Sigma v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x r}+\frac{\Sigma\Sigma v_{y+1}\lambda_x}{v_y\lambda_x}-\frac{\Sigma\Sigma v_y\lambda_{x+1}}{v_y\lambda_x r}-\frac{\Sigma\Sigma v_{y+1}\lambda_{x+1}}{v_y\lambda_x}\right).pq=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\Sigma\Sigma v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x r}+\frac{\Sigma\Sigma v_{y+1}\lambda_x}{v_y\lambda_x}-\frac{\Sigma\Sigma\lambda_y v_{x+1}}{\lambda_y v_x}-\frac{\Sigma\Sigma v_{y+1}\lambda_{x+1}}{v_y\lambda_x}\right).pq;$$

albo, ponieważ

$$\frac{\Sigma\Sigma v_{y+1}\lambda_{x+1}}{v_y\lambda_x}=\frac{\Sigma\Sigma v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x}-\frac{\Sigma v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x},$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}-\frac{r-1}{r}\overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}+\frac{v_{y+1}}{v_y}\overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+1,x}-\frac{v_{x+1}}{v_x}\overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x+1}\right).pq.$$

Dodawszy do ostatniego wyrażenia $\mathrm{R}_x-\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}$ i zrównawszy sumę z wartością spodziewanych wpływów, czyli z $p\,.\,\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}$, wypada, po rozwiązaniu równania,

$$(241)\quad p\left\{\overset{(z)}{\mathrm{R}}'_{(y),x}\right\}=\frac{\mathrm{R}_x-\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}{\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}-\frac{1}{2}q\left(\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}-\frac{r-1}{r}\overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}+\frac{v_{y+1}}{v_y}\overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+1,x}-\frac{v_{x+1}}{v_x}\overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x+1}\right)}.$$

Jeżeli $q=1$, czyli gdy się zwraca premie netto

$$p\left\{\overset{(z)}{\mathrm{R}}'_{(y),x}\right\}=\frac{\mathrm{R}_x-\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}{\frac{1}{2}\left(\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}+\frac{r-1}{r}\overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}-\frac{v_{y+1}}{v_y}\overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+1,x}+\frac{v_{x+1}}{v_x}\overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x+1}\right)}.$$

85. RENTY WDOWIE ODROCZONE I Z LATAMI PRÓBY. — RENTY NA WYCHOWANIE DZIECI. Jeżeli jednostronna renta na przeżycie dwóch osób ma się zacząć wypłacać osobie zabezpieczonej dopiero po n latach od roku, w którym ubezpieczyciel umarł, wtedy renta zowie się *odroczoną* i oznacza się symbolem ${}_n\mathrm{R}_{(y),x}$.

Gdy tego rodzaju rentę ubezpiecza mąż żonie, co, dla ułatwienia sobie wyrażeń, zakładamy, to przybiera ona nazwę *renty wdowiej odroczonej* (Aufgeschobene Wittwen-Pension).

Z określenia omawianej renty wypada, że przy jednoczesnem ubezpieczeniu $\lambda_y\lambda_x$ par, pierwsza wypłata nastąpi w $n+1$ lat po zawarciu umowy tym żyjącym jeszcze wówczas wdowom, które straciły mężów w pierwszym roku po zawarciu umowy. Otóż przy końcu 1-go roku żyjących wdów jest $(\lambda_y-\lambda_{y+1})\lambda_{x+1}$, a z tych w n lat później żyje jeszcze wdów $(\lambda_y-\lambda_{y+1})\lambda_{x+n+1}$.

Po $n+2$ latach żyje wdów $(\lambda_y-\lambda_{y+1})\lambda_{x+n+2}$ z pośród tych, które straciły mężów w 1-ym roku i $(\lambda_{y+1}-\lambda_{y+2})\lambda_{x+n+2}$ z pośród tych, które owdowiały w 2-im roku; razem żyje wdów

$$(\lambda_y-\lambda_{y+1})\lambda_{x+n+2}+(\lambda_{y+1}-\lambda_{y+2})\lambda_{x+n+2}=(\lambda_y-\lambda_{y+2})\lambda_{x+n+2}.$$

Po $n+3$ latach żyje wdów $(\lambda_y-\lambda_{y+3})\lambda_{x+n+3}$ i t. d., po $n+m$ latach

$$(\lambda_y-\lambda_{y+m})\lambda_{x+n+m}.$$

Tyle właśnie jednostek monetarnych wypłaci instytucya po $n+m$ latach; ich wartość, w chwili zawierania umowy, wynosi $(\lambda_y-\lambda_{y+m})\,.\,\lambda_{x+n+m}\rho^{n+m}$, z czego na jedną parę wypada

$$(\alpha)\qquad\frac{(\lambda_y-\lambda_{y+m})\lambda_{x+n+m}\rho^{n+m}}{\lambda_y\lambda_x}=\frac{\lambda_{x+n+m}\rho^{n+m}}{\lambda_x}-\frac{\lambda_{y+m}\lambda_{x+n+m}\rho^{n+m}}{\lambda_y\lambda_x}.$$

Mnożąc licznik i mianownik obu wyrazów strony drugiej w (α) przez ρ^x, otrzymujemy

$$\frac{v_{x+n+m}}{v_x} - \frac{\lambda_{y+m} v_{x+n+m}}{\lambda_y v_x},$$

skąd, zakładając kolejno $m = 1, 2, 3, \ldots$ i sumując rezultaty, wypada

$$(\beta) \qquad {}_n\mathrm{R}_{(y),x} = \frac{\Sigma v_{x+n+1}}{v_x} - \frac{\Sigma \lambda_{y+1} v_{x+n+1}}{\lambda_y v_x}.$$

Do strony drugiej w (β) dodajmy

$$0 = \frac{v_{x+n}}{v_x} - \frac{\lambda_y v_{x+n}}{\lambda_y v_x}, \text{ wtedy będzie}$$

$$(242) \quad {}_n\mathrm{R}_{(y),x} = \frac{v_{x+n}}{v_x} \cdot \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_{x+n}} - \frac{v_{x+n}}{v_x} \cdot \frac{\Sigma \lambda_y v_{x+n}}{\lambda_y v_{x+n}} = \frac{v_{x+n}}{v_x}(\mathrm{R}_{x+n} - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x+n}), \text{ albo krócej}$$

$$(242') \qquad {}_n\mathrm{R}_{(y),x} = \frac{v_{x+n}}{v_x} \mathrm{R}_{(y),x+n}.$$

Renta wdowia może być także ubezpieczoną z latami próby (mit Carenzzeit), t. j. że się zaczyna wypłacać dopiero po śmierci męża, ale w każdym razie nie wcześniej, jak po upływie n lat od chwili zawarcia umowy, przytem: może być wypłacaną choćby mąż (ubezpieczyciel) umarł przed upływem lat próby, albo tylko wtedy, jeżeli mąż (ubezpieczyciel) lata próby przeżyje.

W pierwszym przypadku wartość wypłaconej po m latach raty, licząc na jedną parę, według art. 83 wzór (β), wynosi

$$\frac{v_{x+m}}{v_x} - \frac{v_{y+m} \lambda_{x+m}}{v_y \lambda_x}.$$

Podstawiając w powyższem wyrażeniu kolejno $m = n, n+1, \ldots$ i sumując rezultaty, otrzymujemy na jednorazową premię netto

$$(243) \qquad \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_x} - \frac{\Sigma v_{y+n} \lambda_{x+n}}{v_y \lambda_x} = {}_n\mathrm{R}_x - {}_n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x},$$

albo

$$(243') \qquad \frac{v_{x+n}}{v_x} \cdot \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_{x+n}} - \frac{v_{y+n} \lambda_{x+n}}{v_y \lambda_x} \cdot \frac{\Sigma v_{y+n} \lambda_{x+n}}{v_{y+n} \lambda_{x+n}} =$$

$$= \frac{v_{x+n}}{v_x} \cdot \mathrm{R}_{x+n} - \frac{v_{y+n} \lambda_{x+n}}{v_y \lambda_x} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+n,x+n} = \frac{v_{x+n}}{v_x}\left(\mathrm{R}_{x+n} - \frac{\lambda_{y+n}}{\lambda_y} \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+n,x+n}\right).$$

W przypadku drugim, oczywiście, wartość renty, dla każdej żyjącej po n latach pary, wynosi

$$\mathrm{R}_{x+n} - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+n,x+n},$$

która w chwili zawierania umowy przedstawia wartość

$$\frac{\lambda_{y+n} \lambda_{x+n} \rho^n}{\lambda_y \lambda_x} (\mathrm{R}_{x+n} - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+n,x+n}) =$$

(244)
$$=\frac{v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x}\cdot \mathrm{R}_{(y+n),x+n}.$$

Gdyby jednostronna renta na przeżycie miała być czasowo płatną, jak to np. bywa przy ubezpieczaniu renty dzieciom na wychowanie, wtedy należałoby w (237) podstawić wartość rent czasowych w miejsce tam stojących. Wówczas po upływie z góry oznaczonej liczby lat, od chwili zawarcia umowy, wypłata renty ustaje.

Gdy jednostronna renta na przeżycie ma być płacona osobie zabezpieczonej nie dłużej, jak przez lat *n* od chwili śmierci ubezpieczyciela, należy od jednostronnej renty na przeżycie dożywotnio płatnej, czyli od (237) odjąć (242), skutkiem czego na jednorazową premię netto, za ubezpieczenie tego rodzaju renty, otrzymujemy wyrażenie

$$\mathrm{R}_x-\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}-\frac{v_{x+n}}{v_x}(\mathrm{R}_{x+n}-\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x+n})=$$

(245)
$$={}^{n}\mathrm{R}_x-\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}+\frac{v_{x+n}}{v_x}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x+n}.$$

Wzory na premie roczne za ubezpieczenie rozpatrywanych w niniejszym artykule rent, łatwo już sami czytelnicy ułożyć sobie potrafią.

86. Renty oparte na życiu trzech osób. Rozumując w podobny sposób, jak dla dwóch osób, łatwo przekonać się można, że teraźniejszą wartością, czyli jednorazową premią netto za ubezpieczenie 1-ki renty, płatnej natychmiast z góry trzem osobom w wieku lat *z*, *y*,*x* aż do śmierci którejkolwiek z nich, jest

(246)
$$\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x}=\frac{\Sigma v_z\lambda_y\lambda_x}{v_z\lambda_y\lambda_x}=\frac{\Sigma\lambda_z v_y\lambda_x}{\lambda_z v_y\lambda_x}=\frac{\Sigma\lambda_z\lambda_y v_x}{\lambda_z\lambda_y v_x}.$$

Jeżeli renta ma być wypłacaną jeszcze po śmierci jednej z trzech osób ubezpieczonych i ma trwać do śmierci drugiej — którejkolwiek, to przypuśćmy na chwilę, że z owych 3-ch osób układamy trzy pary: *z* i *y* letnią, *z* i *x* letnią oraz *y* i *x* letnią

Każdej parze ubezpieczamy oddzielnie 1-kę renty, płatną do śmierci jednej z dwóch osób parę składających, wartość tych rent równa się sumie

(α)
$$\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y}+\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,x}+\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}.$$

Gdy umiera jedna z trzech osób, przestajemy płacić dwie renty, a trzecią płacimy do śmierci drugiej, którejkolwiek osoby; widocznie więc (α) różni się od określonej renty tylko dwu jednostkami renty, płatnemi do śmierci jednej z trzech ubezpieczonych osób, czyli

(247)
$$\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{z,y,x}=\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y}+\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,x}+\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}-2\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x}.$$

Jeżeli renta ma być płaconą do śmierci ostatniej z trzech ubezpieczonych osób, w takim razie wyobraźmy sobie najprzód trzy renty, płacone każdej oddzielnie osobie, ich wartość wynosi

(β)
$$\mathrm{R}_z+\mathrm{R}_y+\mathrm{R}_x.$$

Do chwili śmierci jednej z tych osób, płacimy, według (β), 3 jednostki renty, w dalszym zaś ciągu po 2-ie jednostki do chwili śmierci drugiej osoby; później, aż do śmierci ostatniej osoby, wypłacamy po 1-ce rocznie. Znaczy to, że (β) od założonej renty różni się o 1-kę renty, płaconej do pierwszej śmierci i o 1-kę renty, płaconej do drugiej śmierci, czyli

$$(248)\qquad \begin{cases} \overset{\mathrm{III}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} = \mathrm{R}_z + \mathrm{R}_y + \mathrm{R}_x - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} - \overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} = \\ = \mathrm{R}_z + \mathrm{R}_y + \mathrm{R}_x - (\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}) + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x}. \end{cases}$$

Oznaczywszy wreszcie przez

$$\overset{\mathrm{I,II}}{\mathrm{R}}_{z,y,x};\ \overset{\mathrm{I,III}}{\mathrm{R}}_{z,y,x};\ \overset{\mathrm{II,III}}{\mathrm{R}}_{z,y,x}$$

wartości 1-ek rent, płatnych od śmierci jednej resp. dwóch osób, do śmierci drugiej resp. trzeciej osoby; ze skombinowania wzorów (246), (247) i (248) wypada

$$(249)\qquad \overset{\mathrm{I,II}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} = \overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} = \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} - 3\,\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x}$$

$$(250)\qquad \overset{\mathrm{I,III}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} = \overset{\mathrm{III}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} = (\mathrm{R}_z + \mathrm{R}_y + \mathrm{R}_x) - (\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}).$$

$$(251)\qquad \overset{\mathrm{II,III}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} = \overset{\mathrm{III}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} - \overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} =$$

$$= \mathrm{R}_z + \mathrm{R}_y + \mathrm{R}_x - 2\,(\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}) + 3\,\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x}.$$

87. RENTY OPARTE NA ŻYCIU CZTERECH I WIĘCEJ OSÓB. Ze wzorów (248) i (247) otrzymujemy związki

$$(248')\qquad \mathrm{R}_z + \mathrm{R}_y + \mathrm{R}_x = \overset{\mathrm{III}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} + \overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x}$$

$$(247')\qquad \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} = \overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} + 2\,\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x},$$

t. j. suma wartości rent płaconych dożywotnio, oddzielnie każdej z trzech ubezpieczonych osób, równa się wartości renty: płaconej wspólnie trzem osobom do śmierci ostatniej + płaconej trzem osobom do śmierci drugiej + płaconej trzem osobom do śmierci pierwszej. Oraz suma wartości rent płaconych oddzielnie każdej parze, jakie z trzech osób ułożyć można, do śmierci jednej z dwóch osób składających parę, równa się wartości renty płaconej wspólnie trzem osobom do śmierci drugiej + wartości dwóch rent płaconych trzem osobom do śmierci pierwszej.

Związki te, łatwo dające się objaśnić bezpośrednio, na podstawie rozumowań przeprowadzonych przy wywodzie wzorów (247) i (248), bez trudności mogą być także zastosowane i do czterech ubezpieczonych osób.

Wziąwszy np. cztery osoby w wieku lat u, z, y, x, zobaczmy, czemu się równa suma rent

$$(\alpha)\qquad \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}.$$

Dokąd wszystkie osoby żyją, instytucya płaci rocznie 6 jednostek renty; gdy umrze pierwsza osoba, np. u letnia, instytucya płaci tylko 3 jednostki rocznie

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}$$

aż do śmierci drugiej. Gdy umrze druga osoba, np. z letnia, instytucya płaci już tylko jednostkę renty y, x letniej parze do śmierci trzeciej osoby; poczem, gdy umrze trzecia osoba, wypłata renty ustaje. Albo inaczej, instytucya płaci 1-kę renty do śmierci trzeciej osoby + 2-ie jednostki renty do śmierci drugiej + 3 jednostki rocznie do śmierci pierwszej, t. j. (α) równa się

$$\overset{\mathrm{III}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x} + 2\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x} + 3\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x}.$$

Zupełnie w taki sam sposób można sprowadzić renty, płacone pojedynczym osobom lub po dwie, albo po trzy wspólnie ubezpieczonym, do rent płaconych czterem osobom; otrzymujemy mianowicie:

$$(252)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{R}_u + \mathrm{R}_z + \mathrm{R}_y + \mathrm{R}_x &= \overset{\mathrm{IV}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x} + \overset{\mathrm{III}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x} + \overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x} \\ \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} &= \overset{\mathrm{III}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x} + 2\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x} + 3\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x} \\ \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,y,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} &= \overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x} + 3\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x}. \end{aligned}\right.$$

Prawidła te można rozciągnąć na ilekolwiek osób. Oznaczywszy np. przez $\Sigma\mathrm{R}(k,n)$ sumę wartości rent, płaconych każdej oddzielnie grupie, jakie z n osób po k ułożyć się dają, po 1-ce rocznie każdej grupie aż do pierwszej śmierci; przez $\overset{(i)}{\mathrm{R}}_{(n)}$ wartość 1-ki renty płaconej n osobom aż do śmierci i-ej, otrzymujemy

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma\mathrm{R}(1,n) &= \overset{(n)}{\mathrm{R}}_{(n)} + \overset{(n-1)}{\mathrm{R}}_{(n)} + \overset{(n-2)}{\mathrm{R}}_{(n)} + \quad . \quad . \quad . \quad + \overset{(1)}{\mathrm{R}}_{(n)} \\ \Sigma\mathrm{R}(2,n) &= \overset{(n-1)}{\mathrm{R}}_{(n)} + 2\overset{(n-2)}{\mathrm{R}}_{(n)} + 3\overset{(n-3)}{\mathrm{R}}_{(n)} + \quad . \quad . \quad . \quad + (n-1)\overset{(1)}{\mathrm{R}}_{(n)} \\ \Sigma\mathrm{R}(3,n) &= \overset{(n-2)}{\mathrm{R}}_{(n)} + 3\overset{(n-3)}{\mathrm{R}}_{(n)} + 6\overset{(n-4)}{\mathrm{R}}_{(n)} + \quad . \quad . \quad . \quad + \frac{(n-2)(n-1)}{1\cdot 2}\overset{(1)}{\mathrm{R}}_{(n)} \\ \Sigma\mathrm{R}(4,n) &= \overset{(n-3)}{\mathrm{R}}_{(n)} + 4\overset{(n-4)}{\mathrm{R}}_{(n)} + 10\overset{(n-5)}{\mathrm{R}}_{(n)} + \; . \; . \; . \; + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\overset{(1)}{\mathrm{R}}_{(n)} \end{aligned}\right.$$

i t. d. Ogólnie, bacząc że spółczynniki przy R są liczbami kombinacyj, jakie można ułożyć po $k-1$ przedmiotów z $k-1$, k, $k+1, \ldots$, z $n-1$, mamy

$$\Sigma\mathrm{R}(k,n) = \overset{(n-k+1)}{\mathrm{R}}_{(n)} + \frac{k.(k-1)\ldots[k-(k-2)]}{1.2.3\ldots(k-1)}\overset{(n-k)}{\mathrm{R}}_{(n)} +$$

$$+ \frac{(k+1).k.(k-1)\ldots[(k+1)-(k-2)]}{1.2.3\ldots(k-1)}\overset{(n-k-1)}{\mathrm{R}}_{(n)} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots[(n-1)-(k-2)]}{1.2.3\ldots(k-1)}\overset{(1)}{\mathrm{R}}_{(n)}$$

albo, poczyniwszy skrócenia i uwzględniając, że

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1,2,3\ldots(k-1)} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{k.(k+1)\ldots(n-1)}{1.2.3\ldots(n-k)},$$

otrzymujemy

$$(253)\ \Sigma \mathrm{R}(k,n) = \overset{(n-k+1)}{\mathrm{R}}_{(n)} + \frac{k}{1}\cdot \overset{(n-k)}{\mathrm{R}}_{(n)} + \frac{k.(k+1)}{1.2}\overset{(n-k-1)}{\mathrm{R}}_{(n)} + \frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3}\overset{(n-k-2)}{\mathrm{R}}_{(n)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{k(k+1)(k+2)\ldots(n-1)}{1.2.3\ldots(n-k)}\overset{(1)}{\mathrm{R}}_{(n)}.$$

Ze wzorów (252) wypada,

$$(252')\ \begin{cases} \overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x} = \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,y,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} - 3\,\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x} \\ \overset{\mathrm{III}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x} = \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} \\ \qquad - 2(\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u\,y,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x}) \\ \qquad + 3\,\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x} \\ \overset{\mathrm{IV}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x} = \mathrm{R}_u + \mathrm{R}_z + \mathrm{R}_y + \mathrm{R}_x \\ \qquad - (\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}) \\ \qquad + (\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,y,x} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x}) \\ \qquad - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{u,z,y,x}; \end{cases}$$

a dla n osób, utrzymując dawne oznaczenia,

$$(\beta')\ \begin{cases} \overset{(n)}{\mathrm{R}}_{(n)} = \Sigma \mathrm{R}(1,n) - \Sigma \mathrm{R}(2,n) + \Sigma \mathrm{R}(3,n) - \ .\ \ .\ \ . + (-1)^{n-1}\Sigma \mathrm{R}(n,n) \\ \overset{(n-1)}{\mathrm{R}}_{(n)} = \Sigma \mathrm{R}(2,n) - 2\Sigma \mathrm{R}(3,n) + 3\Sigma \mathrm{R}(4,n) - \ .\ .\ . + (-1)^{n-2}(n-1)\Sigma \mathrm{R}(n,n) \\ \overset{(n-2)}{\mathrm{R}}_{(n)} = \Sigma \mathrm{R}(3,n) - 3\Sigma \mathrm{R}(4,n) + 6\Sigma \mathrm{R}(5,n) - \ldots + (-1)^{n-3}\frac{(n-2)(n-1)}{1\cdot 2}\Sigma \mathrm{R}(n,n) \\ \overset{(n-3)}{\mathrm{R}}_{(n)} = \Sigma \mathrm{R}(4,n) - 4\Sigma \mathrm{R}(5,n) + 10\Sigma \mathrm{R}(6,n) - \ldots + (-1)^{n-4}\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\Sigma \mathrm{R}(n,n) \end{cases}$$

i t. d.; ogólnie, na tej samej zasadzie co i wzór (253),

$$(253')\ \overset{(n-k+1)}{\mathrm{R}}_{(n)} = \Sigma \mathrm{R}(k,n) - k.\Sigma \mathrm{R}(k+1,n) + \frac{k(k+1)}{1.2}\Sigma \mathrm{R}(k+2,n) -$$

$$- \frac{k.(k+1).(k+2)}{1.2.3}\Sigma \mathrm{R}(k+3,n) + \ldots + (-1)^{n-k}.\frac{k(k+1)(k+2)\ldots(n-1)}{1.2.3\ldots(n-k)}\Sigma \mathrm{R}(n,n).$$

88. KILKA ZAGADNIEŃ NA RENTY. Podano w poprzednich artykułach wzory posiadają znaczenie zasadnicze, gdyż stanowią podstawę do rozwiązywania różnego rodzaju zagadnień rentowych. Podamy tu kilka takich zagadnień.

I) Renta wypłaca się trzem osobom do śmierci z letniej, albo do śmierci obu pozostałych osób w wieku lat y i x.

Tego rodzaju renta, zwiększona o rentę płaconą trzem osobom do śmierci ostatniej, równoważy się z dwoma rentami: z płaconą oddzielnie osobie z letniej do jej śmierci + płaconą oddzielnie dwu osobom, y i x letniej, do śmierci ostatniej.

Wypada stąd, na szukaną wartość określonej w zagadnieniu renty, wyrażenie

$$R_z + \overset{\text{II}}{R}_{y,x} - \overset{\text{III}}{R}_{z,y,x}, \tag{254}$$

albo, po podstawieniu odpowiednich wyrażeń za $\overset{\text{II}}{R}_{y,x}$ i $\overset{\text{III}}{R}_{z,y,x}$,

$$\overset{\text{I}}{R}_{z,y} + \overset{\text{I}}{R}_{z,x} - \overset{\text{I}}{R}_{z,y,x}. \tag{254'}$$

II) Renta wypłaca się czterem osobom, w wieku lat u, z, y i x, do śmierci osoby u letniej lub do śmierci trzech pozostałych osób z, y i x letniej.

Tutaj, podobnie jak poprzednio, określona w zagadnieniu renta, zwiększona o rentę płaconą do śmierci wszystkich czterech osób, równoważy się z rentą płaconą oddzielnie osobie u letniej do jej śmierci + płaconą trzem pozostałym osobom do śmierci ostatniej. Stąd na wartość naszej renty wypada

$$R_u + \overset{\text{III}}{R}_{z,y,x} - \overset{\text{IV}}{R}_{u,z,y,x}, \tag{255}$$

albo, po podstawieniu odpowiednich wartości za $\overset{\text{III}}{R}_{z,y,x}$ i $\overset{\text{IV}}{R}_{u,z,y,x}$,

$$\overset{\text{I}}{R}_{u,z} + \overset{\text{I}}{R}_{u,y} + \overset{\text{I}}{R}_{u,x} - \overset{\text{I}}{R}_{u,z,y} - \overset{\text{I}}{R}_{u,z,x} - \overset{\text{I}}{R}_{u,y,x} + \overset{\text{I}}{R}_{u,z,y,x}. \tag{255'}$$

III) Renta wypłaca się po śmierci osoby y letniej dotąd, póki jednocześnie żyją osoby z i x letnia, t. j. do śmierci pierwszej z tych dwóch ostatnich.

$\overset{\text{I}}{R}_{z,x}$ oznacza wartość renty natychmiastowej, płatnej do śmierci pierwszej z 2-ch ubezpieczonych osób z lub x letniej. Gdy więc od wartości tej renty odejmiemy wartość renty płatnej wszystkim trzem osobom do pierwszej śmierci, otrzymamy, na wartość w zagadnieniu określonej renty, wyrażenie

$$\overset{\text{I}}{R}_{z,x} - \overset{\text{I}}{R}_{z,y,x}. \tag{256}$$

Gdyby renta wypłacała się po śmierci osoby x letniej—dotąd, póki jednocześnie żyją osoby w wieku lat z i y, mielibyśmy

$$\overset{\text{I}}{R}_{z,y} - \overset{\text{I}}{R}_{z,y,x}. \tag{256'}$$

Suma obu wyrażeń (256) i (256'), t. j.

$$\overset{\text{I}}{R}_{z,y} + \overset{\text{I}}{R}_{z,x} - 2\,\overset{\text{I}}{R}_{z,y,x} \tag{257}$$

stanowi oczywiście wartość renty, płaconej, po śmierci osoby y lub x letniej, dwu pozostałym przy życiu osobom z i x letniej lub z i y letniej do śmierci jednej z nich.

IV) Renta ma być płacona osobie z letniej po śmierci osoby y i x letniej.

Wartość tej renty widocznie równa się wartości renty płaconej natychmiast osobie z letniej, t. j. R_z, zmniejszonej o wartość renty określonej zagadnieniem I-em, czyli równa się

$$(258) \qquad R_z + \overset{I}{R}_{z,y,x} - \overset{I}{R}_{z,y} - \overset{I}{R}_{z,x}.$$

Premia roczna otrzymuje się z podzielenia (258) przez (254).

V) Renta wypłaca się czterem osobom do wymarcia pary u i z letniej lub do wymarcia pary y i x letniej.

Rozumując podobnie, jak w dwóch pierwszych zagadnieniach, otrzymujemy na szukaną wartość

$$(259) \qquad \overset{II}{R}_{u,z} + \overset{II}{R}_{y,x} - \overset{IV}{R}_{u,z,y,x}.$$

Gdyby renta miała być płaconą 5-u osobom do wymarcia pary t i u letniej, albo trójki z, y i x letniej, mielibyśmy wyrażenie

$$(260) \qquad \overset{II}{R}_{t,u} + \overset{III}{R}_{z,y,x} - \overset{V}{R}_{t,u,z,y,x}.$$

VI) Renta wypłaca się do śmierci ostatniej z dwóch osób y i x letniej, ale zaczyna się wypłacać dopiero po śmierci trzeciej osoby z letniej.

Wartość rzeczonej renty, widocznie, równa się

$$(261) \qquad \overset{III}{R}_{z,y,x} - R_z = R_y + R_x - \overset{I}{R}_{y,x} - (\overset{I}{R}_{z,y} + \overset{I}{R}_{z,x} - \overset{I}{R}_{z,y,x}).$$

Premia roczna, za ubezpieczenie obecnie omawianej renty, otrzymuje się z podzielenia (261) przez (254′).

Gdy renta ma być płaconą trzem osobom z, y i x letniej do śmierci ostatniej z nich, ale dopiero po śmierci czwartej osoby, u letniej, to jej wartość wynosi

$$(262) \qquad \overset{IV}{R}_{u,z,y,x} - R_u.$$

Premia roczna otrzymuje się z podzielenia (262) przez (255′).

VII) Renta zaczyna się wypłacać po śmierci obu osób u i z letniej i trwa do śmierci dwóch innych y i x letniej.

Wartość tej renty wypada z odjęcia od $\overset{II}{R}_{y,x}$ wyrażenia (259), t. j. równa się

$$(263) \qquad \overset{II}{R}_{y,x} - (\overset{II}{R}_{u,z} + \overset{II}{R}_{y,x} - \overset{IV}{R}_{u,z,y,x}) = \overset{IV}{R}_{u,z,y,x} - \overset{II}{R}_{u,z}.$$

Dla otrzymania premii rocznej, należy podzielić (263) przez (259).

VIII) Weźmy jeszcze jedno, bardzo ciekawe zagadnienie, jakich zresztą wiele ułożyćby można.

Trzy osoby, w wieku lat z, y i x ubezpieczają sobie 1-kę renty, płatnej do śmierci ostatniej osoby i dzielonej zawsze na równe części pomiędzy osoby żyjące. Zachodzi pytanie, jaką jednorazową premię netto każda z tych osób zapłacić powinna?

Osoba z letnia pobiera $\frac{1}{3}$ rocznej renty dotąd, póki wszystkie trzy osoby żyją; wartość tej renty wynosi

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{3}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x}.$$

Po śmierci osoby y lub x letniej, osoba z letnia otrzymuje po $\frac{1}{2}$ rocznej renty przez czas jednoczesnego jej życia z osobą x lub y letnią; wartość tej renty, według (257), równa się

$$(\beta) \qquad \frac{1}{2}(\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,x} - 2\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x}).$$

Po śmierci obu osób y i x letniej, osoba z letnia pobierać będzie całkowitą rentę, której wartość, w chwili zawierania umowy, według (258), jest

$$(\gamma) \qquad \mathrm{R}_z + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x} - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y} - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,x}.$$

Wartość zatem renty, do jakiej osoba z letnia ma prawo, czyli jednorazowa premia netto, jaką pomieniona osoba zapłacić za swoje ubezpieczenie powinna, wyraża się przez sumę $(\alpha) + (\beta) + (\gamma)$, czyli wynosi

$$(264) \qquad \mathrm{R}_z - \frac{1}{2}(\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,x}) + \frac{1}{3}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{z,y,x}.$$

Podobne wyrażenia otrzymalibyśmy dla każdej z dwóch pozostałych osób, a suma owych trzech wyrażeń da nam wyrażenie (248), t. j. wartość renty płaconej do śmierci ostatniej z trzech ubezpieczonych osób, jak to, według treści zagadnienia, istotnie być powinno.

---

89. WZAJEMNE UBEZPIECZENIE KAPITAŁU NA PRZEŻYCIE. Przechodzimy do ubezpieczeń kapitałów na przeżycie.

Dwie osoby, w wieku lat y i x, ubezpieczają 1-kę kapitału, płatnego przy końcu roku, w którym pierwsza z dwóch ubezpieczonych osób umrze — bez względu na to, czy w chwili płatności kapitału druga osoba, składająca parę, żyje lub nie.

Teraźniejszą wartość takiego ubezpieczenia czyli jednorazową premię za takowe oznaczmy przez $\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x}$ i przypuśćmy, że podobne ubezpieczenie zawiera jednocześnie $\lambda_y\lambda_x$ par.

Po upływie roku pozostanie przy życiu $\lambda_{y+1}\lambda_{x+1}$ par, czyli w ciągu pierwszego roku śmierć zerwie par $\lambda_y\lambda_x - \lambda_{y+1}\lambda_{x+1}$. Ta liczba zerwanych par stanowi zarazem liczbę mających się wypłacić jednostek kapitału, których wartość, w chwili zawierania umowy, wynosi

$$(\lambda_y\lambda_x - \lambda_{y+1}\lambda_{x+1})\rho.$$

Podobnie, teraźniejsza wartość jednostek kapitału, mających się wypłacić przy końcu 2-go roku, wynosi

$$(\lambda_{y+1}\lambda_{x+1} - \lambda_{y+2}\lambda_{x+2})\rho^2 \text{ i t. d.}$$

Wypada stąd na jednorazową premię dla każdej pary

$$(\alpha)\qquad \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x}=\frac{(\lambda_y\lambda_x-\lambda_{y+1}\lambda_{x+1})\rho+(\lambda_{y+1}\lambda_{x+1}-\lambda_{y+2}\lambda_{x+2})\rho^2+\dots}{\lambda_y\lambda_x}=$$

$$=\frac{1}{\lambda_y\lambda_x}[\lambda_y\lambda_x\rho-(1-\rho)\lambda_{y+1}\lambda_{x+1}\rho-(1-\rho)\lambda_{y+2}\lambda_{x+2}\rho^2-\dots].$$

Dodawszy do wyrażenia w klamrach $\lambda_y\lambda_x-\lambda_y\lambda_x=0$, otrzymujemy

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x}=\frac{1}{\lambda_y\lambda_x}[\lambda_y\lambda_x-(1-\rho)(\lambda_y\lambda_x+\lambda_{y+1}\lambda_{x+1}\rho+\lambda_{y+2}\lambda_{x+2}\rho^2+\dots)]=$$

$$=1-\frac{r-1}{r}\cdot\frac{\lambda_y\lambda_x+\lambda_{y+1}\lambda_{x+1}\rho+\lambda_{y+2}\lambda_{x+2}\rho^2+\dots}{\lambda_y\lambda_x},$$ albo, pomnożywszy licznik i mianownik drugiego wyrazu ostatniego wyrażenia przez ρ^y,

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x}=1-\frac{r-1}{r}\cdot\frac{v_y\lambda_x+v_{y+1}\lambda_{x+1}+v_{y+2}\lambda_{x+2}+\dots}{v_y\lambda_x},$$ t. j.

$$(265)\qquad \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x}=1-\frac{r-1}{r}\cdot\frac{\Sigma v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x}=1-\frac{r-1}{r}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}.$$ Wzór ten jest podobny do wzoru (146′).

Premia roczna, płatna do śmierci pierwszej z dwóch ubezpieczonych osób, wynosi

$$(265')\qquad p\left\{\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x}\right\}=\frac{\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x}}{\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}=\frac{1}{\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}-\frac{r-1}{r}.$$

Gdy premia roczna ma być płacona najwyżej przez *n* lat

$$^{n}p\left\{\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x}\right\}=\frac{\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x}}{^{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}=\frac{1-\frac{r-1}{r}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}{\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}-{}_{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}=\frac{v_y\lambda_x-\frac{r-1}{r}\Sigma v_y\lambda_x}{\Sigma v_y\lambda_x-\Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n}}.$$

Np. dla $y=30$, $x=20$

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{30,20}=1-\frac{0{,}035}{1{,}035}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{30,20}=1-\frac{35}{1035}\times 16{,}942\,57=0{,}427\,06;$$

od 5000 fr. 0,42706 × 5000 = 2135,30 fr. jednorazowo.

$$p\left\{\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{30,20}\right\}=\frac{1}{\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{30,20}}-\frac{0{,}035}{1{,}035}=\frac{1}{16{,}942\,57}-\frac{35}{1035}=0{,}025\,20;$$

od 5000 fr. 0,02520 × 5000 = 126 fr. rocznie

Tego rodzaju ubezpieczenie nazywa się ubezpieczeniem kapitału na krótsze życie jednej z dwóch osób (Versicherung auf das kürzeste zweier Leben), albo wzajemnem ubezpieczeniem kapitału na przeżycie (Gegenseitige Ueberlebens-Versicherung).

90. ODROCZONE, CZASOWE I MIESZANE UBEZPIECZENIA KAPITAŁÓW NA PRZEŻYCIE. Gdy kapitał wypłaca się tylko w takim razie, jeżeli śmierć jednej z dwóch osób, parę składających, następuje dopiero po upływie n lat od chwili zawarcia umowy, to takie ubezpieczenie, jak wiadomo, nazywa się odroczonem. Odnośna wartość otrzymuje się, opuszczając, w liczniku wyrażenia (α) poprzedniego artykułu, n pierwszych składników, czyli

$${}_n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x} = \frac{(\lambda_{y+n}\lambda_{x+n} - \lambda_{y+n+1}\lambda_{x+n+1})\rho^{n+1} + (\lambda_{y+n+1}\lambda_{x+n+1} - \lambda_{y+n+2}\lambda_{x+n+2})\rho^{n+2} + \ldots}{\lambda_y\lambda_x},$$

albo, dodając $\dfrac{\lambda_{y+n}\lambda_{x+n}\rho^n}{\lambda_y\lambda_x} - \dfrac{\lambda_{y+n}\lambda_{x+n}\rho^n}{\lambda_y\lambda_x} = 0,$

$${}_n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x} = \frac{\lambda_{y+n}\lambda_{x+n}\rho^n}{\lambda_y\lambda_x} - \frac{r-1}{r} \cdot \frac{\lambda_{y+n}\lambda_{x+n}\rho^n + \lambda_{y+n+1}\lambda_{x+n+1}\rho^{n+1} + \ldots}{\lambda_y\lambda_x}.$$

Po pomnożeniu liczników i mianowników obu części strony drugiej przez ρ^y

$${}_n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x} = \frac{v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x} - \frac{r-1}{r} \cdot \frac{v_{y+n}\lambda_{x+n} + v_{y+n+1}\lambda_{x+n+1} + \ldots}{v_y\lambda_x}, \text{ czyli}$$

$$(266)\quad {}_n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x} = \frac{v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x} - \frac{r-1}{r} \cdot \frac{\Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x} = \frac{v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x}\left(1 - \frac{r-1}{r} \cdot \frac{\Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_{y+n}\lambda_{x+n}}\right);$$

albo inaczej

$$(266')\quad {}_n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x} = \frac{v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x} - \frac{r-1}{r}\,{}_n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} = \frac{v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x}\left(1 - \frac{r-1}{r} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+n,x+n}\right) =$$

$$= \frac{v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y+n,x+n}.$$

Premię roczną, płatną przez czas odroczenia, otrzymamy, dzieląc (266) resp. (266′) przez ${}^n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}$.

Dla czasowego ubezpieczenia

$$(267)\quad {}^n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x} = \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x} - {}_n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x}.$$

Gdy ubezpieczenie jest mieszane, t. j. gdy kapitał jest płatny po śmierci jednej z 2-ch ubezpieczonych osób w ciągu pierwszych n lat, albo po przeżyciu takowych przez obie osoby, do (267) należy dodać

$$\frac{\lambda_{y+n}\lambda_{x+n}\rho^n}{\lambda_y\lambda_x} = \frac{v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x}.$$

Uczyniwszy to, wypada

$$(268)\quad {}^n\overset{\mathrm{I}/m}{\mathrm{K}}_{y,x} = \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x} - {}_n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x} + \frac{v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x} =$$

$$= 1 - \frac{r-1}{r} \cdot \frac{\Sigma v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x} - \left(\frac{v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x} - \frac{r-1}{r} \cdot \frac{\Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x}\right) + \frac{v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x} =$$

$$= 1 - \frac{r-1}{r} \cdot \frac{\Sigma v_y\lambda_x - \Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x} = 1 - \frac{r-1}{r} \cdot {}^n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}.$$

Dla premii rocznej

$$(268') \qquad {}^{n}p\left\{{}^{n}\overset{\mathrm{I}/m}{\mathrm{K}}_{y,x}\right\} = \frac{1}{{}^{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}} - \frac{r-1}{r}.$$

91. UBEZPIECZENIE KAPITAŁU NA DŁUŻSZE ŻYCIE JEDNEJ Z DWÓCH OSÓB. Zobaczmy teraz, jaka będzie premia za ubezpieczenie 1-ki kapitału, płatnego przy końcu roku, w którym śmierć drugiej osoby nastąpi.

Ubezpieczenie takie bywa nazywane ubezpieczeniem kapitału na dłuższe życie dwóch osób (Versicherung auf das längste von zwei verbundenen Leben). Odnośną premię jednorazową oznaczmy przez $\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{K}}_{y,x}$.

Z pośród $\lambda_y \lambda_x$ par, przy końcu m — 1-go, czyli na początku m-go roku pozostaje przy życiu $\lambda_{y+m-1}\lambda_{x+m-1}$ par; z osieroconych osób y letnich (*) żyje $\lambda_{y+m-1}(\lambda_x - \lambda_{x+m-1})$, z osieroconych osób x letnich żyje $(\lambda_y - \lambda_{y+m-1})\lambda_{x+m-1}$. W ciągu roku m-go wymiera całkowicie par $\tau_{y+m-1}\tau_{x+m-1}$; z osieroconych osób y letnich, żyjących na początku m-go roku, umiera $\tau_{y+m-1}(\lambda_x - \lambda_{x+m-1})$; z osieroconych osób x letnich umiera $(\lambda_y - \lambda_{y+m-1})\tau_{x+m-1}$.

Przy końcu zatem m-go roku wypłaci instytucya 1-ek kapitału

$$\tau_{y+m-1}(\lambda_x - \lambda_{x+m-1}) + (\lambda_y - \lambda_{y+m-1})\tau_{x+m-1} + \tau_{y+m-1}\tau_{x+m-1},$$

których wartość matematyczna, w chwili zawierania umowy, obliczona na każdą parę oddzielnie, wynosi

$$\frac{\tau_{y+m-1}(\lambda_x - \lambda_{x+m-1})\rho^m + (\lambda_y - \lambda_{y+m-1})\tau_{x+m-1}\rho^m + \tau_{y+m-1}\tau_{x+m-1}\rho^m}{\lambda_y \lambda_x} =$$

$$= \frac{\tau_{y+m-1}\rho^m}{\lambda_y} + \frac{\tau_{x+m-1}\rho^m}{\lambda_x} - \frac{\tau_{y+m-1}\lambda_{x+m-1}\rho^m + \lambda_{y+m-1}\tau_{x+m-1}\rho^m - \tau_{y+m-1}\tau_{x+m-1}\rho^m}{\lambda_y \lambda_x},$$

albo, podstawiwszy w liczniku ostatniego ułamku w miejsce τ_{y+m-1} i τ_{x+m-1} odpowiednie różnice z liczb osób żyjących, wypada

$$(\alpha) \qquad \frac{\tau_{y+m-1}\rho^m}{\lambda_y} + \frac{\tau_{x+m-1}\rho^m}{\lambda_x} - \frac{(\lambda_{y+m-1}\lambda_{x+m-1} - \lambda_{y+m}\lambda_{x+m})\rho^m}{\lambda_y \lambda_x}.$$

Podstawiając w (α) kolejno $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$ i sumując rezultaty, otrzymujemy

$$\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{K}}_{y,x} = \frac{\Sigma \tau_y \rho}{\lambda_y} + \frac{\Sigma \tau_x \rho}{\lambda_x} - \frac{\Sigma(\lambda_y \lambda_x - \lambda_{y+1}\lambda_{x+1})\rho}{\lambda_y \lambda_x}.$$

Lecz $$\frac{\Sigma \tau_y \rho}{\lambda_y} = \frac{\Sigma m_y}{v_y} = \overset{s}{\mathrm{K}}_y, \quad \frac{\Sigma \tau_x \rho}{\lambda_x} = \frac{\Sigma m_x}{v_x} = \overset{s}{\mathrm{K}}_x,$$

zaś, według (α) art. 89, $$\frac{\Sigma(\lambda_y \lambda_x - \lambda_{y+1}\lambda_{x+1})\rho}{\lambda_y \lambda_x} = \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x};$$ jest więc

$$(269) \qquad \overset{\mathrm{II}}{\mathrm{K}}_{y,x} = \overset{s}{\mathrm{K}}_y + \overset{s}{\mathrm{K}}_x - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x}.$$

(*) Właściwie: „posiadających, w chwili zawierania umowy, y lat".

Wyrażenie to łatwo można i bezpośrednio otrzymać, albowiem suma wartości 1-ki kapitału: płatnego oddzielnie po śmierci jednej z dwóch osób ubezpieczonych i oddzielnie po śmierci obu osób, równa się widocznie sumie wartości 1-ki kapitału: ubezpieczonego oddzielnie na przypadek śmierci osoby y letniej i oddzielnie na przypadek śmierci osoby x letniej, t. j.

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{K}}_{y,x}+\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{K}}_{y,x}=\overset{s}{\mathrm{K}}_y+\overset{s}{\mathrm{K}}_x,$$

skąd wypada wzór (269).

Podstawiwszy po prawej stronie wzoru (269) za K odpowiednie wyrażenia (146') i (265), otrzymujemy

$$(269')\qquad \overset{\mathrm{II}}{\mathrm{K}}_{y,x}=1-\frac{r-1}{r}(\mathrm{R}_y+\mathrm{R}_x-\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x})=1-\frac{r-1}{r}\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y,x}.$$

Premia roczna, płatna do śmierci obu ubezpieczonych osób, równa się

$$(269'')\qquad p\left\{\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{K}}_{y,x}\right\}=\frac{\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{K}}_{y,x}}{\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y,x}}=\frac{1}{\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y,x}}-\frac{r-1}{r}.$$

Gdy premia roczna ma być płaconą tylko do śmierci pierwszej osoby, należy (269') podzielić przez $\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}$; gdy ma być płaconą do śmierci osoby y letniej, (269') trzeba podzielić przez R_y.

92. JEDNOSTRONNE UBEZPIECZENIE KAPITAŁU NA PRZEŻYCIE. — WZÓR WIEGAND'A I BAILY-MILNE'A. Gdy ubezpieczony kapitał wypłaca się osobie x letniej (zabezpieczonej) w razie, jeżeli osoba y letnia (ubezpieczyciel) umrze przed osobą x letnią, to takie ubezpieczenie nazywa się jednostronnem ubezpieczeniem kapitału na przeżycie; jego teraźniejszą wartość matematyczną oznaczać będziemy symbolem $\mathrm{K}_{(y),x}$.

Przypuśćmy najprzód, że ubezpieczony kapitał wypłaca się przy końcu roku, w którym osoba y letnia umrze — o tyle, o ile wówczas osoba x letnia pozostawać będzie przy życiu. Gdyby osoba x letnia umarła przed osobą y letnią, albo gdyby końca roku, w którym śmierć osoby y letniej nastąpi, nie dożyła, ani ubezpieczony kapitał się nie wypłaca, ani wniesione premie się nie zwracają.

Z pośród $\lambda_y\lambda_x$ par w ten sposób jednocześnie ubezpieczonych, przy końcu m — 1-go, resp. na początku m-go roku żyje par $\lambda_{y+m-1}\lambda_{x+m\;1}$.

Z tych par w ciągu m-go roku umiera $(\lambda_{y+m-1}-\lambda_{y+m})\lambda_{x+m-1}$ ubezpieczycieli, a z należących do nich osób zabezpieczonych dożywa końca roku

$$(\lambda_{y+m-1}-\lambda_{y+m})\lambda_{x+m-1}\times\frac{\lambda_{x+m}}{\lambda_{x+m-1}}=(\lambda_{y+m-1}-\lambda_{y+m})\lambda_{x+m}.$$

Tyle właśnie jednostek kapitału wypłaci instytucya pozostałym przy życiu zabezpieczonym; wartość tych jednostek kapitału w chwili zawierania umowy, obliczona na jedną parę, wynosi

$$\frac{\lambda_{y+m-1}\lambda_{x+m}\rho^m}{\lambda_y\lambda_x} - \frac{\lambda_{y+m}\lambda_{x+m}\rho^m}{\lambda_y\lambda_x} =$$

$$(\alpha) \qquad = \frac{\lambda_{y+m-1}v_{x+m}}{\lambda_y v_x} - \frac{\lambda_{y+m}v_{x+m}}{\lambda_y v_x}.$$

Zakładając w (α) $m = 1, 2, 3, \ldots$ i biorąc sumę otrzymanych rezultatów, wypada

$$(270) \qquad \mathrm{K}_{(y),x} = \frac{\Sigma\lambda_y v_{x+1}}{\lambda_y v_x} - \frac{\Sigma\lambda_{y+1}v_{x+1}}{\lambda_y v_x},$$

albo, dodawszy $\frac{\lambda_y v_x}{\lambda_y v_x} - \frac{\lambda_y v_x}{\lambda_y v_x} = 0,$

$$\mathrm{K}_{(y),x} = \frac{v_{x+1}}{v_x}\cdot\frac{\Sigma\lambda_y v_{x+1}}{\lambda_y v_{x+1}} - \frac{\Sigma\lambda_y v_x}{\lambda_y v_x} + 1, \text{ czyli}$$

$$(270') \qquad \mathrm{K}_{(y),x} = 1 - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} + \frac{v_{x+1}}{v_x}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x+1}.$$

Gdyby ubezpieczony kapitał wypłacał się wszystkim zabezpieczonym osobom (albo ich sukcesorom), jakie żyły na początku roku, w którym ubezpieczyciel umarł, przy końcu m-go roku instytucya wypłaciłaby $(\lambda_{y+m-1}-\lambda_{y+m})\lambda_{x+m-1}$ jednostek, posiadających w chwili zawierania umowy, licząc na pojedynczą parę, wartość

$$(\beta) \qquad \frac{\lambda_{y+m-1}\lambda_{x+m-1}\rho^m}{\lambda_y\lambda_x} - \frac{\lambda_{y+m}\lambda_{x+m-1}\rho^m}{\lambda_y\lambda_x} = \frac{\lambda_{y+m-1}v_{x+m-1}}{\lambda_y v_x r} - \frac{\lambda_{y+m}v_{x+m-1}}{\lambda_y v_x r}.$$

Podstawiając kolejno $m = 1, 2, 3, \ldots$ i sumując rezultaty, otrzymujemy

$$(271) \qquad \mathrm{K}_{(y),x} = \frac{\Sigma\lambda_y v_x}{\lambda_y v_x r} - \frac{\Sigma\lambda_{y+1}v_x}{\lambda_y v_x r} = \frac{\Sigma\lambda_y v_x}{\lambda_y v_x r} - \frac{\lambda_{y+1}r^y}{\lambda_y r^{y+1}}\cdot\frac{\Sigma\lambda_{y+1}v_x}{\lambda_{y+1}v_x}, \text{ czyli}$$

$$(271') \qquad \mathrm{K}_{(y),x} = \frac{\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}{r} - \frac{v_{y+1}}{v_y}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+1,x}.$$

Wzór (271′) daje premię wyższą od (270′) o wartość kapitałów, wypłaconych sukcesorom tych osób zabezpieczonych, które zmarły w tym samym roku co i ich ubezpieczyciele. Gdy więc przypuścimy, że w ciągu roku połowa ubezpieczycieli umiera przed osobami zabezpieczonemi i naodwrót — połowa osób zabezpieczonych umiera przed ubezpieczycielami i skoro założymy, że kapitał wypłaca się przy końcu roku, w którym śmierć ubezpieczyciela nastąpi, w każdym przypadku gdy ubezpieczyciel umiera przed zabezpieczonym, to odpowiednia wartość ubezpieczenia, czyli premia jednorazowa za takowe stanowi połowę sumy (271′) i (270′), t. j.

$$(272) \qquad \mathrm{K}_{(y),x} = \frac{1}{2}\left(1 - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} + \frac{v_{x+1}}{v_x}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x+1} + \frac{\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}}{r} - \frac{v_{y+1}}{v_y}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+1,x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r-1}{r}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} - \frac{v_{y+1}}{v_y}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+1,x} + \frac{v_{x+1}}{v_x}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x+1}\right),$$

albo inaczej

$$(272') \qquad K_{(y),x} = \frac{1}{2}\left(\overset{I}{K}_{y,x} - \frac{v_{y+1}}{v_y}\overset{I}{R}_{y+1,x} + \frac{v_{x+1}}{v_x}\overset{I}{R}_{y,x+1}\right).$$

Jest to wzór znany w teoryi ubezpieczeń życiowych pod nazwą wzoru Baily-Milne'a, podczas gdy (270') odpowiada wzorowi wyprowadzonemu przez Wiegand'a.

Gdyby ubezpieczony kapitał miał być wypłacony nie przy końcu roku ubezpieczeniowego, tylko w połowie resp. zaraz po śmierci ubezpieczyciela, należałoby (272') pomnożyć przez $r^{\frac{1}{2}}$.

Premia roczna, płatna do śmierci jednej z dwóch osób ubezpieczonych, otrzymuje się z podzielenia (272') przez $\overset{I}{R}_{y,x}$.

Gdyby wreszcie ubezpieczycielom, którzy przeżyją osoby zabezpieczone, miały być zwrócone wszystkie wniesione premie, bez procentu, postępować należy podobnie, jak przy rentach w art. 84; otrzymamy wtedy na odnośne premie podobne jak tam wzory z odpowiednią tylko zmianą liczników.

93. JEDNOSTRONNE ODROCZONE UBEZPIECZENIE KAPITAŁU NA PRZEŻYCIE. Jeżeli jednostronne ubezpieczenie kapitału na przeżycie ma być odroczone na lat n, należy w (α) resp. w (β) poprzedniego artykułu podstawić $m = n + 1, n + 2, n + 3, \ldots$ i dalej postępować tak samo, jak w rzeczonym artykule. Wówczas otrzymamy wzory odpowiednie wzorom (270) i (271), a biorąc połowę ich sumy, wypadnie

$${}_nK_{(y),x} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma\lambda_{y+n}v_{x+n+1}}{\lambda_y v_x} - \frac{\Sigma\lambda_{y+n+1}v_{x+n+1}}{\lambda_y v_x} + \frac{\Sigma\lambda_{y+n}v_{x+n}}{\lambda_y v_x r} - \frac{\Sigma\lambda_{y+n+1}v_{x+n}}{\lambda_y v_x r}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_{y+n}v_{x+n+1}}{\lambda_y v_x}\cdot\frac{\Sigma\lambda_{y+n}v_{x+n+1}}{\lambda_{y+n}v_{x+n+1}} - \frac{\lambda_{y+n}v_{x+n}}{\lambda_y v_x}\cdot\frac{\Sigma\lambda_{y+n+1}v_{x+n+1}}{\lambda_{y+n}v_{x+n}} +\right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_{y+n}v_{x+n}}{\lambda_y v_x r}\cdot\frac{\Sigma\lambda_{y+n}v_{x+n}}{\lambda_{y+n}v_{x+n}} - \frac{\lambda_{y+n+1}v_{x+n}}{\lambda_y v_x r}\cdot\frac{\Sigma\lambda_{y+n+1}v_{x+n}}{\lambda_{y+n+1}v_{x+n}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_{y+n}v_{x+n+1}}{\lambda_y v_x}\overset{I}{R}_{y+n,x+n+1} - \frac{\lambda_{y+n}v_{x+n}}{\lambda_y v_x}(\overset{I}{R}_{y+n,x+n} - 1) +\right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_{y+n}v_{x+n}}{\lambda_y v_x}\cdot\frac{\overset{I}{R}_{y+n,x+n}}{r} - \frac{\lambda_{y+n+1}v_{x+n}}{\lambda_y v_x r}\overset{I}{R}_{y+n+1,x+n}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda_{y+n}v_{x+n}}{\lambda_y v_x}\left[1 - \frac{r-1}{r}\overset{I}{R}_{y+n,x+n} - \frac{v_{y+n+1}}{v_{y+n}}\overset{I}{R}_{y+n+1,x+n} + \frac{v_{x+n+1}}{v_{x+n}}\overset{I}{R}_{y+n,x+n+1}\right],$$

albo, ponieważ wyrażenie w klamrze odpowiada wzorowi (272), mamy ostatecznie

$$(273) \qquad {}_nK_{(y),x} = \frac{\lambda_{y+n}v_{x+n}}{\lambda_y v_x}\cdot K_{(y+n),x+n}.$$

Premia roczna, płatna przez czas odroczenia, względnie do śmierci jednej z dwóch osób ubezpieczonych, otrzymuje się z podzielenia (273) przez ${}^{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y.x} = \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} - {}_{n}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}$.

94. JEDNOCZESNE UBEZPIECZENIE DZIECIOM RENTY NA WYCHOWANIE I KAPITAŁU NA DOŻYCIE. Podobnie, jak w ubezpieczeniach opartych na życiu jednej osoby, można i w ubezpieczeniach opartych na życiu dwóch lub więcej osób tworzyć rozmaite więcej lub mniej skomplikowane kombinacye. Kombinacyj takich można pomyśleć bardzo wiele i dla tego ograniczyć się musimy do przytoczenia tylko paru przykładów, dających pojęcie, jak w podobnych razach postępować trzeba.

Ojciec y letni, na korzyść swego x letniego dziecka, zawiera następujące ubezpieczenie: Jeżeli w ciągu n lat, bezpośrednio po zawarciu umowy następujących, ojciec umrze, dziecko otrzymuje $\frac{a}{b}$ jednostki renty rocznej, której wypłata uskuteczniać się będzie rocznie z góry, począwszy od pierwszej rocznicy zawarcia ubezpieczenia, bezpośrednio po śmierci ojca następującej, i trwa do upływu terminu n letniego, t. j. do chwili ukończenia przez dziecko $x + n$ lat; wtedy dziecko otrzymuje jeszcze 1-kę kapitału. Gdyby jednak dziecko umarło przed upływem rzeczonej liczby n lat, albo ojciec razem z dzieckiem dożył terminu n letniego, wszelkie zobowiązania instytucyi ustają.

Premie wnoszą się jednorazowo, albo rocznie przez lat n lub do czasu wcześniejszej śmierci ojca, albo dziecka.

Jeżeli taką umowę zawiera jednocześnie $\lambda_y \lambda_x$ ojców, to po upływie m lat, z pośród $\lambda_y \lambda_x$ dzieci x letnich, pozostaje przy życiu $\lambda_y \lambda_{x+m}$, z których jedne są sierotami, a inne posiadają jeszcze żyjących ojców.

Tych ostatnich jest $\lambda_{y+m}\lambda_{x+m}$, pozostałe więc, w liczbie $\lambda_y\lambda_{x+m} - \lambda_{y+m}\lambda_{x+m} = (\lambda_y - \lambda_{y+m})\lambda_{x+m}$, dzieci są sierotami, mającemi prawo do $\frac{a}{b}$ renty rocznej każde, t. j. po m latach instytucya, tytułem renty, wypłaca $\frac{a}{b}(\lambda_y - \lambda_{y+m})\lambda_{x+m}$ jednostek, których wartość, w chwili zawierania umowy, wynosi

$$(\alpha) \qquad \frac{a}{b}(\lambda_y - \lambda_{y+m})\lambda_{x+m}\rho^m.$$

Zakładając w (α) $m = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$, otrzymujemy na wartość mających się wypłacić rent, obliczoną na każdą pojedynczo wziętą parę, wyrażenie

$$\frac{\frac{a}{b}}{\lambda_y\lambda_x}\left[(\lambda_y - \lambda_{y+1})\lambda_{x+1}\rho + (\lambda_y - \lambda_{y+2})\lambda_{x+2}\rho^2 + \ldots + (\lambda_y - \lambda_{y+n-1})\lambda_{x+n-1}\rho^{n-1}\right] =$$

$$= \frac{a}{b}\left[\frac{\lambda_{x+1}\rho + \lambda_{x+2}\rho^2 + \ldots + \lambda_{x+n-1}\rho^{n-1}}{\lambda_x} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_{y+1}\lambda_{x+1}\rho + \lambda_{y+2}\lambda_{x+2}\rho^2 + \ldots + \lambda_{y+n-1}\lambda_{x+n-1}\rho^{n-1}}{\lambda_y\lambda_x}\right].$$

Mnożąc licznik i mianownik pierwszego wyrażenia w nawiasie przez ρ^x, drugiego przez ρ^y, oraz dodając

$$\frac{v_x}{v_x}-\frac{v_y\lambda_x}{v_y\lambda_x}=0,$$

wypada na wartość mających się wypłacić rent

$$\frac{a}{b}\left[\frac{v_x+v_{x+1}+\ldots+v_{x+n-1}}{v_x}-\frac{v_y\lambda_x+v_{y+1}\lambda_{x+1}+\ldots+v_{y+n-1}\lambda_{x+n-1}}{v_y\lambda_x}\right]=$$

$$(\beta)\qquad =\frac{a}{b}\left[\frac{\Sigma v_x-\Sigma v_{x+n}}{v_x}-\frac{\Sigma v_y\lambda_x-\Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x}\right]=$$

$$=\frac{a}{b}[(\mathrm{R}_x-{}_n\mathrm{R}_x)-(\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}-{}_n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x})]=\frac{a}{b}({}^n\mathrm{R}_x-{}^n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}).$$

Po n latach pozostaje przy życiu $(\lambda_y-\lambda_{y+n})\lambda_{x+n}$ sierot i tyle jednostek kapitału wypłaci im instytucya.

Teraźniejsza wartość tych kapitałów, obliczona na pojedynczą parę, wynosi

$$(\gamma)\qquad \frac{(\lambda_y-\lambda_{y+n})\lambda_{x+n}\rho^n}{\lambda_y\lambda_x}=\frac{v_{x+n}}{v_x}-\frac{v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x}.$$

(β) + (γ) stanowi obecną wartość całego ubezpieczenia, czyli jednorazową zań premię netto, która się zatem wyraża przez wzór

$$(274)\qquad \frac{\frac{a}{b}\cdot(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+n})+v_{x+n}}{v_x}-\frac{\frac{a}{b}\cdot(\Sigma v_y\lambda_x-\Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n})+v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x}.$$

Premia roczna, płatna przez lat n, albo do wcześniejszej śmierci ojca lub dziecka, otrzymuje się z podzielenia (274) przez ${}^n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}=\frac{\Sigma v_y\lambda_x-\Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x}$.

Jeżeli np. $y=30$, $x=5$, $n=16$, $\frac{a}{b}=\frac{1}{20}$, czyli 5% ubezpieczonego kapitału, to jednorazowa premia netto wynosi

$$\frac{\frac{1}{20}(\Sigma v_5-\Sigma v_{21})+v_{21}}{v_5}-\frac{\frac{1}{20}(\Sigma v_{30}\lambda_5-\Sigma v_{46}\lambda_{21})+v_{46}\lambda_{21}}{v_{30}\lambda_5}=0{,}109\,338;$$

od 5000 fr. kapitału i 250 fr. rocznej renty 0,109 338×5000=546,69 fr.

Premia roczna otrzymuje się z podzielenia 0,109 338 przez

$$\frac{\Sigma v_{30}\lambda_5-\Sigma v_{46}\lambda_{21}}{v_{30}\lambda_5}=11{,}087\,684,\ \text{t. j. wynosi } 0{,}009\,861;$$

od 5000 fr. kapitału i 250 fr. rocznej renty 0,009 861 × 5000 = 49,305 fr.

95. UBEZPIECZENIE POSAGOWE OPARTE NA ŻYCIU DWÓCH OSÓB. Ojciec y letni ubezpiecza x letniemu dziecku 1-kę kapitału płatnego w razie, jeżeli dziecko przeżyje n lat. Premie roczne opłacają się przez lat n, albo do wcześniejszej śmierci ojca lub dziecka. Jeżeli w ciągu rzeczonych n lat umrze ojciec, to chociaż premie nie opłacają się dalej, kapitał zostanie w terminie wypłacony dziecku; jeżeli zaś dziecko umrze przed upływem n lat, wszystkie wniesione premie brutto, bez procentu, będą przez instytucyę zwrócone, komu należy, przy końcu roku, w którym śmierć dziecka nastąpi, bez względu na to, czy wówczas jeszcze ojciec żyć będzie, czy też nie.

Oznaczmy szukaną roczną premię netto przez p, premię brutto przez pq.

Wartość mających się wnieść premij netto, obliczona na jedną parę (ojca z dzieckiem), równa się

$$(\alpha) \qquad p(\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x} - {}_n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}) = p.\frac{\Sigma v_y\lambda_x - \Sigma v_{y+n}\lambda_{x+n}}{v_y\lambda_x} = p.\frac{\Sigma\lambda_y v_x - \Sigma\lambda_{y+n}v_{x+n}}{\lambda_y v_x}.$$

Gdy jednocześnie zawiera takie ubezpieczenie $\lambda_y\lambda_x$ par, to wartość wypłat spodziewanych, z tytułu wypłaty kapitału po n latach, wynosi na jedną parę

$$(\beta) \qquad \frac{\lambda_y\lambda_{x+n}\rho^n}{\lambda_y\lambda_x} = \frac{\lambda_y v_{x+n}}{\lambda_y v_x}.$$

Wartość wypłat spodziewanych z tytułu zwrotu premij otrzymamy drogą następującego rozumowania:

Za każde dziecko, zmarłe w ciągu n lat, za które pierwsza premia została wniesioną, instytucya zapłaci pq. Zmarłych dzieci będzie najprawdopodobniej $\lambda_y(\lambda_x - \lambda_{x+n}) = \lambda_y(\tau_x + \tau_{x+1} + \ldots + \tau_{x+n-1})$.

Wartość tych zwrotów, w chwili zawierania umowy, obliczona na jedną parę, wynosi

$$\frac{pq\lambda_y(\tau_x\rho + \tau_{x+1}\rho^2 + \ldots + \tau_{x+n-1}\rho^n)}{\lambda_y\lambda_x} = pq.\frac{(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})}{v_x}.\frac{\lambda_y}{\lambda_y}.$$

Oprócz tego, za każde dziecko zmarłe w ciągu $n - 1$ lat, począwszy od 2-go roku trwania ubezpieczeń, za które druga premia została wniesioną, czyli którego ojciec żył na początku 2-go roku, zwraca instytucya drugie pq. Takich zmarłych dzieci będzie

$$\lambda_{y+1}(\lambda_{x+1} - \lambda_{x+n}) = \lambda_{y+1}(\tau_{x+1} + \tau_{x+2} + \ldots + \tau_{x+n-1}).$$

Wartość tych drugich zwrotów, w chwili zawierania umowy, obliczona na jedną parę, równa się

$$pq.\frac{\lambda_{y+1}(\tau_{x+1}\rho^2 + \tau_{x+2}\rho^3 + \ldots + \tau_{x+n-1}\rho^n)}{\lambda_y\lambda_x} = pq.\frac{\Sigma m_{x+1} - \Sigma m_{x+n}}{v_x}.\frac{\lambda_{y+1}}{\lambda_y}.$$

Dalej, za każde dziecko, zmarłe w ciągu $n - 2$ lat, począwszy od 3-go roku trwania umowy, za które trzecia premia została wniesioną, czyli którego ojciec żył na początku 3-go roku, instytucya, oprócz dwóch poprzednich zwrotów, wypłaci jeszcze jedno pq. Wartość tych trzecich zwrotów, obliczona jak poprzednio, przedstawia wyrażenie

$$pq.\frac{\Sigma m_{x+2} - \Sigma m_{x+n}}{v_x}.\frac{\lambda_{y+2}}{\lambda_y} \text{ i t. d.}$$

Wartość wszystkich zwrotów wynosi

$$\frac{pq}{\lambda_y v_x}[(\lambda_y \Sigma m_x + \lambda_{y+1}\Sigma m_{x+1} + \ldots + \lambda_{y+n-1}\Sigma m_{x+n-1}) - (\lambda_y + \lambda_{y+1} + \ldots + \lambda_{y+n-1})\Sigma m_{x+n}]$$

$$(\gamma) \qquad = \frac{pq}{\lambda_y v_x} \cdot [(\Sigma\lambda_y \Sigma m_x - \Sigma\lambda_{y+n}\Sigma m_{x+n}) - (\Sigma\lambda_y - \Sigma\lambda_{y+n})\Sigma m_{x+n}],$$

a wartość wszystkich wypłat, razem z wypłatą kapitału po n latach, otrzymuje się z dodania (β) do (γ), t. j. wyraża się przez wzór

$$\frac{\lambda_y v_{x+n}}{\lambda_y v_x} + \frac{pq}{\lambda_y v_x} \cdot [(\Sigma\lambda_y \Sigma m_x - \Sigma\lambda_{y+n}\Sigma m_{x+n}) - (\Sigma\lambda_y - \Sigma\lambda_{y+n})\Sigma m_{x+n}].$$

Powinno więc być

$$p.(\Sigma\lambda_y v_x - \Sigma\lambda_{y+n} v_{x+n}) = \lambda_y v_{x+n} + pq.[(\Sigma\lambda_y \Sigma m_x - \Sigma\lambda_{y+n}\Sigma m_{x+n}) - (\Sigma\lambda_y - \Sigma\lambda_{y+n})\Sigma m_{x+n}],$$

skąd wypada

$$(275)\; p = \frac{\lambda_y v_{x+n}}{(\Sigma\lambda_y v_x - \Sigma\lambda_{y+n} v_{x+n}) - q.[(\Sigma\lambda_y \Sigma m_x - \Sigma\lambda_{y+n}\Sigma m_{x+n}) - (\Sigma\lambda_y - \Sigma\lambda_{y+n})\Sigma m_{x+n}]}$$

Gdyby premie miały być zwracane zaraz po śmierci dziecka, resp. w połowie roku, w którym dziecko umrze, w mianowniku wzoru (275) należałoby w miejsce q podstawić $q.r^{\frac{1}{2}}$.

W ogóle, każde skomplikowane ubezpieczenie daje się rozłożyć na pewną liczbę ubezpieczeń pojedynczych. Chcąc zatem obliczyć premię za daną kombinacyę, należy obrachować wartość matematyczną każdego pojedynczego ubezpieczenia, wchodzącego w skład danej kombinacyi złożonej, i otrzymane wartości połączyć ze sobą w taki sam sposób, w jaki sposób są ze sobą połączone pojedyncze kombinacye tworzące dane ubezpieczenie złożone.

Gdy tak otrzymaną wartość danego ubezpieczenia zrównamy z jednoczesną wartością mających się wnieść premij, wypadnie równanie, z którego łatwo można wyprowadzić wzór na szukaną premię.

ROZDZIAŁ VIII.

REZERWA PREMIOWA.

96. Określenie rezerwy premiowej. Przypuśćmy, że 1 000 osób 90-o letnich ubezpiecza swym sukcesorom po 1 000 fr. kapitału, płatnego przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi.

W praktyce wypadek taki zdarzyć się nie może, gdyż żadna instytucya osób w tak późnym wieku nie ubezpiecza. Ponieważ jednak w tej chwili nie chodzi nam o praktykę, tylko o teoryę, a wiek młodszy pociągnąłby za sobą bardzo długi rachunek, bierzemy więc pod uwagę 90-o letnie osoby, co dla celu, jaki mamy na myśli, jest rzeczą zupełnie obojętną.

Każda z pomienionych osób wnosić powinna corocznie, do śmierci, po 0,366 115 tytułem premii netto za ubezpieczenie 1-ki kapitału, czyli po 366,115 fr. za ubezpieczenie 1 000 fr. kapitału pośmiertnego. Stosujemy tu premię netto, nie brutto, gdyż zakładamy, że dodatek do premii netto rozchodzi się na potrzeby administracyjne, a tem samem, że na pokrycie zobowiązań względem osób ubezpieczonych pozostają instytucyi tylko premie netto.

Zobaczmy, jaki będzie ruch funduszów, dostarczonych pod postacią premij przez osoby ubezpieczone.

Tysiąc osób ubezpieczonych wniesie na początku 1-go roku 366 115 fr., które po roku, przy stopie $3^1/_2{}^0/_0$, zamienią się na 378 929,03 fr. Że zaś w ciągu tegoż roku umrze osób $1\,000 \times 0{,}323\,73 = 323{,}73$ (*), zatem instytucya, przy końcu 1-go roku, wypłaci sukcesorom po osobach zmarłych 323 730 fr., skutkiem czego z pobranych i oprocentowanych wpływów pozostanie na lata następne 55 199,03 fr.

Na początku 2-go roku żyje już tylko osób 676,27; wniosą one, tytułem premij netto, 247 592,59 fr., co w połączeniu z remanentem roku zeszłego czyni 302 791,62 fr., zamieniające się przy końcu roku na 313 389,33 fr. Że zaś

(*) Za podstawę rachunku przyjmujemy, podobnie jak w całym wykładzie, tablicę śmiertelności 17 tow. angielskich (Tab. III, kol. 9 i 10) i $3^1/_2{}^0/_0$ za stopę techniczną. Ułamkowe liczby osób zmarłych i żyjących zatrzymujemy dla zachowania ścisłości teoretycznej.

z 676,27 osób, żyjących na początku 2-go roku, umiera w ciągu roku 676,27 × 0,36098=244,12, więc instytucya wypłaci sukcesorom 244120 fr. i na następne lata pozostanie 69269,33 fr.

Postępując w podobny sposób dalej — do końca tablicy śmiertelności, czyli do czasu wymarcia wszystkich ubezpieczonych, otrzymujemy następujący rachunek:

1	2	3	4	5		6		7		8		9		10		11	
Rok ubezpieczenia	Wiek na początku roku ubezpieczeniowego	Liczba osób: żyjących na początku roku	Liczba osób: zmarłych w ciągu roku	Pozostałość z lat poprzednich		Wpływa tytułem premij netto na początku roku		Suma pozostałości z lat poprzednich i wpływu premij		Oboczne sumy zwiększone o $3^1/_2$%		Wypłata kapitałów pośmiertnych		Pozostaje na następne lata razem		Pozostaje na następne lata dla każdej żyjącej osoby oddzielnie	
1	90	1 000,00	323,73	—	—	366 115	—	366 115	—	378 929	03	323 730	—	55 199	03	—	—
2	91	676,27	244,12	55 199	03	247 592	59	302 791	62	313 389	33	244 120	—	69 269	33	81	62
3	92	432,15	175,13	69 269	33	158 216	60	227 485	93	235 447	94	175 130	—	60 317	94	160	29
4	93	257,02	117,52	60 317	94	94 098	88	154 416	82	159 821	41	117 520	—	42 301	41	234	68
5	94	139,50	72,02	42 301	41	51 073	04	93 374	45	96 642	56	72 020	—	24 622	56	303	24
6	95	67,48	39,43	24 622	56	24 705	44	49 328	00	51 054	48	39 430	—	11 624	48	364	89
7	96	28,05	18,19	11 624	48	10 269	53	21 894	01	22 660	30	18 190	—	4 470	30	414	42
8	97	9,86	6,83	4 470	30	3 609	89	8 080	19	8 363	00	6 830	—	1 533	00	453	38
9	98	3,03	2,27	1 533	00	1 109	33	2 642	33	2 734	81	2 270	—	464	81	505	94
10	99	0,76	0,76	464	81	278	25	743	06	769	07	760	—	9	07	611	59
11	100	0,00	—	9	07	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

który przedewszystkiem dowodzi, pomijając drobną pozostałość 9,07, że premie netto starczą na pokrycie zobowiązań instytucyi względem osób ubezpieczonych, o ile rzeczywista śmiertelność zgodzi się ze wskazaną przez tablicę śmiertelności, jakiej użyliśmy do obliczenia premii. Prawdę tę zresztą, wynikającą ze sposobu wyprowadzania wzorów na obliczanie premij, znamy już z art. 68.

Widzimy następnie z powyższej tablicy, że z każdorocznego obrotu funduszami zostaje pewna reszta (kol. 10) na lata następne, którą gdybyśmy obrócili na jakie inne cele, brakłoby nam, widocznie, funduszów na pokrycie zobowiązań względem osób ubezpieczonych. Pozostałości te zatem posiadają bardzo ważne znaczenie dla ubezpieczeń życiowych, skutkiem czego powinny być ściśle corocznie obliczane, odkładane i odpowiednio oprocentowywane. Noszą one nazwę rezerwy premiowej, którą czasami, dla krótkości, jednym wyrazem „rezerwa” nazywać będziemy.

Podane w kol. 10 resp. 5-ej rezerwy odnoszą się do wszystkich osób ubezpieczonych, żyjących przy końcu resp. na początku odpowiedniego roku ubezpieczeniowego, łatwo z nich jednak obrachować można rezerwę, jaką dla każdej osoby od 1000 lub od 1-ki ubezpieczonego kapitału każdorocznie odkładać należy.

Albowiem, skoro np. dla 676,27 osób, z których każda jest ubezpieczona na 1000 fr., mamy po roku odłożyć 55199,03 fr., to dla jednej osoby odłożyć powinniśmy $\frac{55\,199{,}03}{676{,}27} = 81{,}62$ fr. od 1000 fr. ubezpieczonego kapitału resp. 0,08162 od 1-ki. Po 2-ch latach $\frac{69\,269{,}33}{432{,}15} = 160{,}29$ od 1000 resp. 0,16029 od 1-ki i t. d., jak w kol. 11-ej.

Podobnie rzecz się ma i z ubezpieczeniami na dożycie i z rentami.

Przypuśćmy np., że 1000 osób 30-o letnich ubezpiecza sobie po 1000 fr. kapitału, wypłacalnego każdej z tych osób, która przeżyje lat 5. Premia netto od 1-ki wynosi 0,175308, a rachunek przedstawia się jak następuje:

1	2	3	4	5		6		7		8		9	
Rok ubezpieczenia	Wiek na początku roku ubezpieczen.	Liczba osób		Pozostałość z lat poprzednich		Wpływa tytułem premij netto na początku roku		Suma pozostałości z lat poprzednich i wpływu premij		Oboczne sumy zwiększone o $3^1/_2$% czyli pozostałość na rok następny		Pozostaje na rok następny dla każdej, z żyjących na początku roku, osoby	
		żyjących	zmarłych										
1	30	1000,00	8,42	—	—	175308	—	175308	00	181443	78	—	—
2	31	991,58	8,51	181443	78	173831	91	355275	69	367710	34	182	98
3	32	983,07	8,60	367710	34	172340	04	540050	38	558952	14	374	04
4	33	974,47	8,69	558952	14	170832	39	729784	53	755326	99	573	60
5	34	965,78	8,79	755326	99	169308	96	924635	95	956998	21	782	09
6	35	956,99	—	956998	21	—	—	—	—	—	—	1000	01

Kolumna 9 podaje rezerwy, jakie po roku, 2-ch, 3-ch i t. d. latach odkładać należy dla każdej żyjącej jeszcze osoby od 1 000 fr. kapitału, ubezpieczonego na przypadek przeżycia 5-u lat.

Rezerwą premiową zatem nazywa się suma pieniędzy, jaka pozostaje, gdy od wniesionych i technicznie oprocentowanych premij netto strącimy wypłaty, dokonać się mające według warunków danego ubezpieczenia i obliczone przy założeniu, że śmiertelność osób ubezpieczonych zgadza się ze wskazaną przez tablicę śmiertelności, jakiej do obliczania premij używamy.

97. Przyczyna powstawania rezerwy premiowej. Zachodzi pytanie, jaka jest przyczyna powstawania rezerwy premiowej?

Co się tyczy rezerwy w ubezpieczeniach na dożycie, przyczyna jej powstawania jest bardzo prosta. Ubezpieczony częściowo płaci premie, które instytucya gromadzi, oprocentowuje, powiększa o premie pozostałe po osobach zmarłych i, gdy nadejdzie termin, wypłaca ubezpieczonym zagwarantowany kapitał, dopłacając do rzeczywiście uzbieranego lub zyskując, stosownie do tego, czy śmiertelność rzeczywista okazała się mniejszą czy większą od przewidywanej przez tablicę śmiertelności.

Inaczej się rzecz ma w ubezpieczeniach pośmiertnych. Przy wyprowadzaniu wzorów na premie netto, dla ubezpieczeń pośmiertnych, zakładaliśmy, że premie, przez cały czas trwania ubezpieczeń, są albo stałe, albo rosnące lub malejące według pewnego z góry określonego prawa. W użytym przez nas w art. 96 przykładzie premie były stałe.

Ubezpieczenia pośmiertne wszakże możnaby jeszcze inaczej zawierać; możnaby mianowicie zawierać ubezpieczenia roczne (czasowe na rok jeden), wznawiając je co rok i obliczając za każdym razem należną za dany rok premię, odpowiednio do zmienionego z biegiem czasu wieku osoby ubezpieczonej. Takie premie, dla odróżnienia od dotychczas rozważanych, nazywać będziemy naturalnemi (ryzyko premie, p. art. 69).

Ubezpieczenie roczne jest, jak to już nadmieniliśmy, czasowem, należna więc zań premia, gdy ubezpieczony kapitał ma być wypłacony przy końcu roku ubezpieczeniowego, otrzymuje się ze wzoru (160) resp. (162) po założeniu w nich $n = 1$, t. j. wzorem na premię naturalną, za ubezpieczenie 1-ki kapitału osobie x letniej, jest

$$(276) \quad \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+1}}{v_x} = \frac{m_x}{v_x} = \frac{\tau_x}{\lambda_x}\rho = \frac{\lambda_x - \lambda_{x+1}}{\lambda_x}\rho = \left(1 - \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x}\right)\rho = (1 - p_x).\rho = q_x.\rho,$$

czyli premia naturalna równa się rocznemu prawdopodobieństwu śmierci, zdyskontowanemu, przy stopie technicznej, na rok jeden.

Np. dla $x = 90$, według tabl. III, kol. 10, przy stopie $3^1/_2\%$, premia naturalna wynosi

$$0{,}323\,73 \times \frac{1}{1{,}035} = 0{,}312\,783.$$

Obliczając w podobny sposób premie naturalne dla lat dalszych, otrzymujemy:

Dla osoby w wieku lat	Premia naturalna za ubezp. 1-ki kapitału	Dla osoby w wieku lat	Premia naturalna za ubezp. 1-ki kapitału
90	0,312 783	95	0,564 512
91	0,348 773	96	0,626 715
92	0,391 556	97	0,668 899
93	0,441 768	98	0,724 638
94	0,498 840	99	0,966 184

Przy stosowaniu tak obliczonych premij, rezerwa nie tworzy się wcale. Istotnie, przyjąwszy 1 000 osób 90-o letnich, ubezpieczonych po 1 000 fr. każda, otrzymamy premij 312 783 fr., które po roku zamieniają się na

$$312\,783 \times 1{,}035 = 323\,730 \text{ fr.};$$

a ponieważ w ciągu roku umrze osób 323,73, wypłacimy im więc 323 730 fr., czyli z zebranych i oprocentowanych premij naturalnych nic nam nie pozostaje.

Porównywając wysokość premii naturalnej (0,312 783) z premią stałą (0,366 115), widzimy, że ta ostatnia jest większą od naturalnej. I tak być musi, skoro bowiem premie stałe muszą wystarczyć na pokrycie tych samych wydatków, jakie pokrywają premie naturalne, a te ostatnie, z powodu zwiększającej się z roku na rok śmiertelności, z biegiem lat rosną, stając się po pewnym czasie większemi od stałych, więc naodwrót premie stałe muszą być większe od naturalnych w latach początkowych, gdyż inaczej jedne i te same wydatki moglibyśmy pokrywać różnymi, co do wysokości, środkami, a to jest oczywiście rzecz niemożliwa.

Skoro jednak z początku premie stałe są większe od naturalnych, zaś naturalne wystarczają na pokrywanie rocznych wydatków, zatem z premij stałych w pierwszych latach trwania umowy muszą zbywać pewne pozostałości, służące do pokrywania braków wówczas, gdy premie naturalne staną się większemi od stałych. Te pozostałości właśnie stanowią rezerwę.

Tak np. w użytym przez nas przykładzie, premia stała dla 90-o letniej osoby jest od naturalnej większą o 0,366 115 — 0,312 783 = 0,053 332, t. j. każdy z 1 000-a ubezpieczonych wnosi od 1 000 fr. o 53,332 fr. więcej, aniżeli potrzeba na wydatki pierwszego roku. Wszyscy wnoszą więcej o 53,332 × 1 000 = 53 332 fr., które przez rok zamieniają się na 53 332 × 1,035 = 55 199 fr. i taka też reszta wypadła nam w art. 96 na rezerwę po upływie 1-go roku.

Okazuje się przeto z powiedzianego, że przyczyną tworzenia się rezerwy, w ubezpieczeniach pośmiertnych, jest ustanowienie premij niezmiennych przez cały czas trwania umowy; albo ogólniej — ustanowienie premij zmieniających się, ale nie w takim stosunku, w jakim się zmieniają premie naturalne.

98. OGÓLNE WZORY NA OBLICZANIE REZERWY PREMIOWEJ. Za pomocą rachunków, podobnych do podanego w art. 96, możnaby obliczać rezerwy dla wszelkiego rodzaju ubezpieczeń; taki wszakże sposób byłby zbyt mozolny i nader niepraktyczny, skutkiem czego poszukać trzeba innego, łatwiejszego do użycia.

Zajmiemy się więc obecnie wyprowadzeniem ogólnego wzoru na rezerwę, jaką instytucya z danego ubezpieczenia po ν latach posiadać winna. Rezerwę premiową, nagromadzoną przez ν lat, oznaczać będziemy symbolem $\mathrm{Rez}(\nu)$.

Ażeby zagadnieniu naszemu nadać znaczenie ogólne, przypuśćmy λ_x osób x letnich jednocześnie ubezpieczonych i załóżmy, że każda z nich na początku pierwszego roku wnosi p_0 tytułem pierwszorocznej premii netto, na początku 2-go roku wnosi każda p_1, na początku 3-go roku p_2 i t. d.

Za każdy wypadek śmierci, zaszły w 1-ym roku, wypłaca instytucya przy końcu roku ubezpieczeniowego sumę M_0; za każdy wypadek śmierci, zaszły w ciągu 2-go roku, M_1; w ciągu trzeciego roku M_2 i t. d. Oprócz tego, każdej ubezpieczonej osobie, żyjącej na początku 2-go roku, wypłaca instytucya kwotę V_1, na początku 3-go roku V_2 i t. d.

Ilości $p_0, p_1, p_2, \ldots$; M_0, M_1, $M_2, \ldots$; V_1, V_2, $V_3, \ldots$ mogą być pomiędzy sobą równe lub różne; jedne mogą być równe, inne różne; jedne mogą rosnąć, inne maleć lub t. p.

Zachodzi pytanie, jaką rezerwę, po upływie ν lat od chwili zawarcia umowy, posiadać winna instytucya na rachunku każdej ubezpieczonej osoby, pozostającej jeszcze przy życiu w chwili obliczania rezerwy?

Zagadnienie rozwiązać można dwoma sposobami: albo uwzględniając już dokonane przez ν lat wpłaty i wypłaty, albo biorąc pod uwagę wpłaty i wypłaty dopiero po upływie ν lat uskutecznić się mające.

Zajmiemy się najprzód sposobem pierwszym.

Przy zawarciu ubezpieczenia każda osoba płaci p_0, zatem λ_x osób zapłaci $p_0\lambda_x$. W ciągu 1-go roku umiera τ_x osób, ich spadkobiercy w końcu roku ubezpieczeniowego otrzymają od instytucyi $M_0\tau_x$. Na początku 2-go roku każdy żyjący otrzyma V_1, t. j. instytucya wypłaci wszystkim żyjącym $V_1\lambda_{x+1}$ i jednocześnie pobierze od nich, tytułem premij netto, $p_1\lambda_{x+1}$.

Przy końcu 2-go roku ubezpieczeniowego wypłata instytucyi wyniesie, z powodu śmierci τ_{x+1} osób, sumę $M_1\tau_{x+1}$. Na początku 3-go roku λ_{x+2} osobom żyjącym zapłaci instytucya $V_2\lambda_{x+2}$, a otrzyma od nich $p_2\lambda_{x+2}$ i t. d.

Gdy do pobranych na początku 1-go roku premij dodamy procent roczny, od sumy stąd wypadłej odejmiemy wypłacone przy końcu roku kwoty, z powodu zaszłych w ciągu roku wypadków śmierci, na resztę otrzymamy to, cośmy w art. 96 wyrazem „rezerwa premiowa” po 1-ym roku określili.

Gdy do tej rezerwy dodamy wniesione na początku 2-go roku premie, od sumy odejmiemy wypłaty należne od instytucyi osobom żyjącym, gdy rezultat oprocentujemy całorocznie i odejmiemy wypłaty uskutecznić się mające przy końcu 2-go roku, z powodu zaszłych w ciągu roku wypadków śmierci, mieć będziemy zbiorową, dla wszystkich żyjących przy końcu 2-go roku osób, rezerwę po upływie 2-ch lat.

Zatem zbiorowa rezerwa przy końcu 1-go roku wynosi

$$\lambda_x . p_0 r - \tau_x M_0;$$

przy końcu 2-go roku

$$(\lambda_x p_0 r - \tau_x M_0 + \lambda_{x+1} p_1 - \lambda_{x+1} V_1) r - \tau_{x+1} M_1 =$$
$$= \lambda_x p_0 r^2 + \lambda_{x+1} p_1 r - \tau_x M_0 r - \tau_{x+1} M_1 - \lambda_{x+1} V_1 r;$$

przy końcu 3-go roku

$$(\lambda_x p_0 r^3 + \lambda_{x+1} p_1 r^2 + \lambda_{x+2} p_2 r) -$$
$$- (\tau_x M_0 r^2 + \tau_{x+1} M_1 r + \tau_{x+2} M_2) -$$
$$- (\lambda_{x+1} V_1 r^2 + \lambda_{x+2} V_2 r)$$

i t. d. — przy końcu ν-go roku

$$(\lambda_x p_0 r^\nu + \lambda_{x+1} p_1 r^{\nu-1} + \ldots + \lambda_{x+\nu-1} p_{\nu-1} r) -$$
$$- (\tau_x M_0 r^{\nu-1} + \tau_{x+1} M_1 r^{\nu-2} + \ldots + \tau_{x+\nu-1} M_{\nu-1}) -$$
$$- (\lambda_{x+1} V_1 r^{\nu-1} + \lambda_{x+2} V_2 r^{\nu-2} + \ldots + \lambda_{x+\nu-1} V_{\nu-1} r).$$

Jest to rezerwa zbiorowa wszystkich $\lambda_{x+\nu}$ osób, żyjących przy końcu ν go roku, rezerwa zatem każdej pojedynczej osoby wynosi

$$\mathrm{Rez}(\nu) = \frac{\lambda_x p_0 r^\nu + \lambda_{x+1} p_1 r^{\nu-1} + \ldots + \lambda_{x+\nu-1} p_{\nu-1} r}{\lambda_{x+\nu}} -$$
$$- \frac{\tau_x M_0 r^{\nu-1} + \tau_{x+1} M_1 r^{\nu-2} + \ldots + \tau_{x+\nu-1} M_{\nu-1}}{\lambda_{x+\nu}} -$$
$$- \frac{\lambda_{x+1} V_1 r^{\nu-1} + \lambda_{x+2} V_2 r^{\nu-2} + \ldots + \lambda_{x+\nu-1} V_{\nu-1} r}{\lambda_{x+\nu}},$$

albo, dzieląc liczniki i mianowniki każdego wyrażenia po stronie prawej przez $r^{x+\nu}$,

$$(277) \quad \mathrm{Rez}(\nu) = \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (v_x p_0 + v_{x+1} p_1 + v_{x+2} p_2 + \ldots + v_{x+\nu-1} p_{\nu-1}) -$$
$$- \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (m_x M_0 + m_{x+1} M_1 + m_{x+2} M_2 + \ldots + m_{x+\nu-1} M_{\nu-1}) -$$
$$- \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (v_{x+1} V_1 + v_{x+2} V_2 + \ldots + v_{x+\nu-1} V_{\nu-1}).$$

Jeżeli sumy pośmiertne mają być wypłacane zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, resp. w połowie roku ubezpieczeniowego, (277) zastąpić trzeba przez

$$(277') \quad \mathrm{Rez}(\nu)=\frac{1}{v_{x+\nu}}\cdot(v_xp_0+v_{x+1}p_1+v_{x+2}p_2+\ldots+v_{x+\nu-1}p_{\nu-1})-$$

$$-\frac{r^{\frac{1}{2}}}{v_{x+\nu}}\cdot(m_x\mathrm{M}_0+m_{x+1}\mathrm{M}_1+m_{x+2}\mathrm{M}_2+\ldots+m_{x+\nu-1}\mathrm{M}_{\nu-1})-$$

$$-\frac{1}{v_{x+\nu}}\cdot(v_{x+1}\mathrm{V}_1+v_{x+2}\mathrm{V}_2+\ldots+v_{x+\nu-1}\mathrm{V}_{\nu-1}),$$

gdyż wypłata sum M_0, M_1, M_2,... w połowie roku sprowadza się do wypłaty sum $\mathrm{M}_0r^{\frac{1}{2}}$, $\mathrm{M}_1r^{\frac{1}{2}}$, $\mathrm{M}_2r^{\frac{1}{2}}$, ... przy końcu roku ubezpieczeniowego.

Zobaczmy teraz, jak się przedstawi wzór, gdy uwzględnimy wpłaty i wypłaty dopiero po upływie ν lat dokonać się mające.

Teraźniejsza wartość wszystkich oczekiwanych przez instytucyę premij, mających się wnieść przez λ_x osób jednocześnie ubezpieczonych, przez cały czas trwania ubezpieczeń, wynosi

$$\lambda_xp_0+\frac{\lambda_{x+1}p_1}{r}+\frac{\lambda_{x+2}p_2}{r^2}+\ldots(^*)=r^x(v_xp_0+v_{x+1}p_1+v_{x+2}p_2+\ldots);$$

wartość spodziewanych wypłat równa się

$$\left(\frac{\tau_x}{r}\mathrm{M}_0+\frac{\tau_{x+1}}{r^2}\mathrm{M}_1+\frac{\tau_{x+2}}{r^3}\mathrm{M}_2+\ldots(^*)\right)+\left(\frac{\lambda_{x+1}}{r}\mathrm{V}_1+\frac{\lambda_{x+2}}{r^2}\mathrm{V}_2+\ldots(^*)\right)=$$

$$=r^x(m_x\mathrm{M}_0+m_{x+1}\mathrm{M}_1+m_{x+2}\mathrm{M}_2+\ldots)+r^x(v_{x+1}\mathrm{V}_1+v_{x+2}\mathrm{V}_2+v_{x+3}\mathrm{V}_3+\ldots).$$

Obie te wartości powinny być sobie równe. Gdy je zrównamy i zniesiemy spólny czynnik r^x, wypada

$$(v_xp_0+v_{x+1}p_1+\ldots+v_{x+\nu-1}p_{\nu-1})+(v_{x+\nu}p_\nu+v_{x+\nu+1}p_{\nu+1}+\ldots)=$$

$$=(m_x\mathrm{M}_0+m_{x+1}\mathrm{M}_1+\ldots+m_{x+\nu-1}\mathrm{M}_{\nu-1})+(m_{x+\nu}\mathrm{M}_\nu+m_{x+\nu+1}\mathrm{M}_{\nu+1}+\ldots)+$$

$$+(v_{x+1}\mathrm{V}_1+v_{x+2}\mathrm{V}_2+\ldots+v_{x+\nu-1}\mathrm{V}_{\nu-1}\}+(v_{x+\nu}\mathrm{V}_\nu+v_{x+\nu+1}\mathrm{V}_{\nu+1}+\ldots),$$

albo inaczej

$$\left.\begin{array}{l}(v_xp_0+v_{x+1}p_1+\ldots+v_{x+\nu-1}p_{\nu-1})\\-(m_x\mathrm{M}_0+m_{x+1}\mathrm{M}_1+\ldots+m_{x+\nu-1}\mathrm{M}_{\nu-1})\\-(v_{x+1}\mathrm{V}_1+v_{x+2}\mathrm{V}_2+\ldots+v_{x+\nu-1}\mathrm{V}_{\nu-1}).\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}(m_{x+\nu}\mathrm{M}_\nu+m_{x+\nu+1}\mathrm{M}_{\nu+1}+\ldots)\\+(v_{x+\nu}\mathrm{V}_\nu+v_{x+\nu+1}\mathrm{V}_{\nu+1}+\ldots)\\-(v_{x+\nu}p_\nu+v_{x+\nu+1}p_{\nu+1}+\ldots).\end{array}\right.$$

Że zaś pierwsza strona ostatniej równości podzielona przez $v_{x+\nu}$, według (277), stanowi $\mathrm{Rez}(\nu)$, temu samemu zatem równa się strona druga podzielona przez $v_{x+\nu}$, t. j.

(*) do końca trwania ubezpieczeń.

$$
\begin{aligned}
(278)\quad \mathrm{Rez}(\nu) = {} & \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (m_{x+\nu}\mathrm{M}_\nu + m_{x+\nu+1}\mathrm{M}_{\nu+1} + m_{x+\nu+2}\mathrm{M}_{\nu+2} + \ldots) + \\
& + \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (v_{x+\nu}\mathrm{V}_\nu + v_{x+\nu+1}\mathrm{V}_{\nu+1} + v_{x+\nu+2}\mathrm{V}_{\nu+2} + \ldots) - \\
& - \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (v_{x+\nu}p_\nu + v_{x+\nu+1}p_{\nu+1} + v_{x+\nu+2}p_{\nu+2} + \ldots).
\end{aligned}
$$

Gdy wypłaty pośmiertne mają się dokonywać zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, resp. w połowie roku ubezpieczeniowego, jest

$$
\begin{aligned}
(278')\quad \mathrm{Rez}(\nu) = {} & \frac{r^{\frac{1}{2}}}{v_{x+\nu}} \cdot (m_{x+\nu}\mathrm{M}_\nu + m_{x+\nu+1}\mathrm{M}_{\nu+1} + m_{x+\nu+2}\mathrm{M}_{\nu+2} + \ldots) + \\
& + \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (v_{x+\nu}\mathrm{V}_\nu + v_{x+\nu+1}\mathrm{V}_{\nu+1} + v_{x+\nu+2}\mathrm{V}_{\nu+2} + \ldots) - \\
& - \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (v_{x+\nu}p_\nu + v_{x+\nu+1}p_{\nu+1} + v_{x+\nu+2}p_{\nu+2} + \ldots),
\end{aligned}
$$

gdzie znaczenie symboli $m_{x+\nu}, m_{x+\nu+1}, \ldots; v_{x+\nu}, v_{x+\nu+1}, \ldots$ jest nam znane; z pozostałych zaś symboli: M_ν, $\mathrm{M}_{\nu+1}$, $\mathrm{M}_{\nu+2}, \ldots$ wyobrażają sumy wypłacane sukcesorom po osobach zmarłych w ciągu roku $(\nu+1)$-go, $(\nu+2)$-go, $(\nu+3)$-go i t. d.; V_ν, $\mathrm{V}_{\nu+1}$, $\mathrm{V}_{\nu+2}, \ldots$ oznaczają sumy wypłacane przez instytucyę osobom żyjącym na początku roku $(\nu+1)$-go, $(\nu+2)$-go, $(\nu+3)$-go i t. d.; wreszcie p_ν, $p_{\nu+1}$, $p_{\nu+2}, \ldots$ są premiami netto, wnoszonemi przez osoby ubezpieczone, pozostające przy życiu na początku roku $(\nu+1)$-go, $(\nu+2)$-go, $(\nu+3)$-go i t. d.

Wyrazy w nawiasach po stronie prawej, w (278) i 278'), ciągną się do końca trwania ubezpieczeń; można je wszakże uważać i za ciągnące się do końca tablicy śmiertelności, jeżeli wypłaty M, V i p, mające się uskuteczniać po terminie trwania ubezpieczeń, przyjmiemy za równe zeru.

We wzorze (278) resp. (278') pierwsze dwa wiersze przedstawiają wartość matematyczną zobowiązań instytucyi, obrachowaną na chwilę obliczania rezerwy (*); wiersz trzeci jest jednoczesną wartością zobowiązań ubezpieczonego (**). Wynika stąd, że rezerwa premiowa jest różnicą pomiędzy wartością matematyczną zobowiązań instytucyi, obliczoną na chwilę oznaczania rezerwy, a takąż wartością zobowiązań osoby ubezpieczonej. Jest to najogólniejsze słowne wyrażenie rezerwy, które w różnych rodzajach ubezpieczeń rozmaitym ulegać może uproszczeniom.

99. Wzory na obliczanie rezerwy przy premiach jednorazowych. Zastosujmy wyprowadzone wzory ogólne do poszczególnych rodzajów ubezpieczeń, zawieranych za pośrednictwem premij jednorazowych.

(*) Pierwszy wiersz przedstawia wartość kapitałów ubezpieczonych na przypadek śmierci, drugi — wartość wypłat dokonywać się mających za życia osoby ubezpieczonej.

(**) Mających się przez ubezpieczonego wnosić premij.

Odtąd symbol rezerwy „Rez(ν)" dopełniać będziemy symbolem odpowiedniego rodzaju ubezpieczeń, pomieszczanym obok ν.

Jeżeli ubezpieczenie zawiera się za pośrednictwem premii jednorazowej, we wzorach (277) i (278) resp. (277') i (278') podstawić należy: $p_1=p_2=p_3==p_4=\ldots=0$, zaś p_0=premii jednorazowej; tym sposobem w (277) resp. w (277') pierwszy wiersz po stronie prawej sprowadza się do $\frac{v_x}{v_{x+\nu}}p_0$, a w (278) resp. w (278') wiersz trzeci całkiem znika.

I. Ubezpieczenie kapitału na dożycie bez zwrotu premii. Używając wzoru (277) należy założyć $p_0={}_n\overset{d}{\mathrm{K}}_x$, $p_1=p_2=\ldots=p_{\nu-1}=0$; $\mathrm{M}_0=\mathrm{M}_1=\mathrm{M}_2=\ldots=\mathrm{M}_{\nu-1}=0$; $\mathrm{V}_1=\mathrm{V}_2=\mathrm{V}_3=\ldots=\mathrm{V}_{\nu-1}=0$, o ile $\nu<n$. Wtedy otrzymujemy

$$(\alpha)\qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu,{}_n\overset{d}{\mathrm{K}}_x\right\}=\frac{v_x}{v_{x+\nu}}\cdot{}_n\overset{d}{\mathrm{K}}_x=\frac{v_x}{v_{x+\nu}}\times\frac{v_{x+n}}{v_x}=\frac{v_{x+n}}{v_{x+\nu}}.$$

Biorąc za punkt wyjścia wzór (278), trzeba w nim założyć $p_\nu=p_{\nu+1}==p_{\nu+2}\ldots=0$; $\mathrm{M}_\nu=\mathrm{M}_{\nu+1}=\ldots=0$; $\mathrm{V}_\nu=\mathrm{V}_{\nu+1}=\ldots0$, z wyjątkiem $\mathrm{V}_n=1$. Wypada stąd

$$(\beta)\qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu,{}_n\overset{d}{\mathrm{K}}_x\right\}=\frac{v_{x+n}}{v_{x+\nu}},$$

t. j. wyrażenie identyczne z (α).

Ponieważ jednak, jak wiadomo,

$$\frac{v_{x+n}}{v_{x+\nu}}={}_{n-\nu}\overset{d}{\mathrm{K}}_{x+\nu},$$

mamy więc

$$(279)\qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu,{}_n\overset{d}{\mathrm{K}}_x\right\}={}_{n-\nu}\overset{d}{\mathrm{K}}_{x+\nu},$$

czyli: rezerwa po ν latach, od kapitału ubezpieczonego na dożycie (za pomocą premii jednorazowej) przez osobę (w chwili zawierania umowy) x letnią, równa się jednorazowej premii netto, jaką wnieść powinna osoba o ν lat starsza za takie samo ubezpieczenie, zawarte na czas o ν lat krótszy.

Gdy $\nu=n$, jest

$$\mathrm{Rez}\left\{n,{}_n\overset{d}{\mathrm{K}}_x\right\}=\frac{v_{x+n}}{v_{x+n}}=1$$

i tak być powinno, gdyż po n latach kapitał staje się wymagalny, zatem instytucya w całości posiadać go w rezerwie powinna.

II. Ubezpieczenie renty dożywotnej, natychmiast z dołu płatnej. W obecnym przypadku, dla 1-ki renty rocznej, należy we wzorach (277) resp. (278) założyć: $p_0={}_1\mathrm{R}_x$, $p_1=p_2=p_3=\ldots=0$; $\mathrm{M}_0==\mathrm{M}_1=\mathrm{M}_2=\ldots=0$; $\mathrm{V}_1=\mathrm{V}_2=\mathrm{V}_3=\ldots=1$.

Przy takich założeniach z (277) otrzymujemy

$$\mathrm{Rez}(\nu, {}_1\mathrm{R}_x) = \frac{v_x}{v_{x+\nu}} \cdot {}_1\mathrm{R}_x - \frac{\Sigma v_{x+1} - \Sigma v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} = \frac{v_x}{v_{x+\nu}} \cdot \frac{\Sigma v_{x+1}}{v_x} - \frac{\Sigma v_{x+1}}{v_{x+\nu}} + \frac{\Sigma v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}},$$

że zaś

$$\frac{\Sigma v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} = \mathrm{R}_{x+\nu}, \text{ zatem}$$

$$\mathrm{Rez}(\nu, {}_1\mathrm{R}_x) = \mathrm{R}_{x+\nu} = 1 + {}_1\mathrm{R}_{x+\nu}. \tag{280}$$

To samo wyrażenie otrzymuje się ze wzoru (278) i uczy nas, że rezerwa po ν latach, od renty dożywotniej natychmiast rocznie z dołu płatnej osobie (w chwili zawierania umowy) x letniej, równa się wartości takiej samej renty z góry rocznie płatnej osobie o ν lat starszej od osoby x letniej.

Np. osoba 60-o letnia za ubezpieczenie 1 000 fr. rocznej renty, płatnej z dołu do śmierci, wnosi, tytułem jednorazowej premii netto, 9 788,55 fr. (Tabl. X, kol. 1). Po 20-u latach rezerwa od tego ubezpieczenia równa się jednorazowej premii netto za ubezpieczenie takiej samej, lecz z góry płatnej renty osobie 80-o letniej, czyli, według tej samej tablicy, wynosi 4 728,89 fr.

Reguła ta nie ulega zmianie, gdy renta się wypłaca w ratach mniejszych od rocznych, tylko w (280), w miejsce 1-ki, podstawić trzeba odpowiednią ratę mniejszą od rocznej, będzie mianowicie

$$\mathrm{Rez}\left[\nu, {}_{\frac{1}{m}}\mathrm{R}_x^{\left(\frac{m}{m}\right)}\right] = \frac{1}{m} + {}_{\frac{1}{m}}\mathrm{R}_{x+\nu}^{\left(\frac{m}{m}\right)}. \tag{280'}$$

Gdybyśmy rentę wypłacali nie na początku następnego okresu, lecz przy końcu upłynionego, rezerwa byłaby równa wartości takiej samej renty, także z dołu płatnej osobie o ν lat starszej.

III. Ubezpieczenie renty dożywotniej odroczonej. W ogólnych wzorach należy założyć: $p_0 = {}_n\mathrm{R}_x$, $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = 0$; $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2 = \ldots = 0$; $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2 = \ldots \mathrm{V}_{n-1} = 0$, $\mathrm{V}_n = \mathrm{V}_{n+1} = \ldots = 1$.

Skutkiem tego, gdy $\nu < n$, z (277) otrzymujemy

$$\mathrm{Rez}(\nu, {}_n\mathrm{R}_x) = \frac{v_x}{v_{x+\nu}} \cdot {}_n\mathrm{R}_x = \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu}} = {}_{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu}, \tag{281}$$

t. j. rezerwa równa się jednorazowej premii netto za ubezpieczenie, osobie o ν lat starszej, renty, odroczonej na czas o ν lat krótszy.

Gdy $\nu > n$, mamy

$$\mathrm{Rez}(\nu, {}_n\mathrm{R}_x) = \frac{v_x}{v_{x+\nu}} \cdot {}_n\mathrm{R}_x - \frac{\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} = \frac{\Sigma v_{x+n} - \Sigma v_{x+n} + \Sigma v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}}, \text{ czyli}$$

$$\mathrm{Rez}(\nu, {}_n\mathrm{R}_x) = \frac{\Sigma v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} = \mathrm{R}_{x+\nu}. \tag{281'}$$

Rezerwa więc, w obecnym przypadku, równa się jednorazowej premii netto za ubezpieczenie renty natychmiast z góry płatnej osobie o ν lat starszej.

Tak być rzeczywiście powinno, albowiem przy $\nu > n$ osoba ubezpieczona po ν latach pobiera już rentę.

Gdy $\nu = n$, $\mathrm{Rez}(n, {}_n\mathrm{R}_x) = \mathrm{R}_{x+n}$.

IV. Zwyczajne ubezpieczenie kapitału pośmiertnego. Załóżmy: $p_0 = \overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x$, $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = 0$; $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2 = \ldots = 1$; $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2 = \mathrm{V}_3 = \ldots = 0$. Wtedy z (277) wypada

$$\mathrm{Rez}\left\{\nu, \overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x\right\} = \frac{v_x}{v_{x+\nu}} \cdot \overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x - \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_x + \Sigma m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} = \frac{\Sigma m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} = \overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_{x+\nu}. \tag{282}$$

Zatem rezerwa po ν latach równa się jednorazowej premii netto za takie samo ubezpieczenie, zawarte przez osobę o ν lat starszą.

Np. osoba 30-o letnia za ubezpieczenie 10000 fr. kapitału pośmiertnego płaci jednorazową premię netto w wysokości 3468,70 fr. (Tabl. X kol. 2). Rezerwa od tego ubezpieczenia, po 10-u latach, równa się jednorazowej premii netto, jaką zapłacić powinna osoba 40-o letnia, t. j. według tejże tablicy wynosi 4232,43 fr.

V. Czasowe, przez n lat trwające, ubezpieczenie kapitału pośmiertnego. Tutaj: $p_0 = {}^n\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x$, $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = 0$; $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2 = \ldots = \mathrm{M}_{n-1} = 1$, $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}_{n+1} = \ldots = 0$; $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2 = \mathrm{V}_3 = \ldots = 0$.

Gdy $\nu < n$, z (277) wypada

$$\mathrm{Rez}\left\{\nu, {}^n\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x\right\} = \frac{v_x}{v_{x+\nu}} \cdot {}^n\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x - \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+\nu}) = \frac{(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}) - (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+\nu})}{v_{x+\nu}} = \frac{\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma m_{x+n}}{v_{x+\nu}} = {}^{n-\nu}\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_{x+\nu},$$

t. j. rezerwa równa się jednorazowej premii netto za ubezpieczenie kapitału pośmiertnego przez osobę o ν lat starszą, na czas o ν lat krótszy.

Jeżeli $\nu > n$, mamy

$$\mathrm{Rez}\left\{\nu, {}^n\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x\right\} = \frac{v_x}{v_{x+\nu}} \cdot {}^n\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x - \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}) = \frac{(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n}) - (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})}{v_{x+\nu}} = 0, \tag{283'}$$

jak rzeczywiście być powinno.

VI. Ubezpieczenie kapitału pośmiertnego, odroczonego na n lat. Dla tej kombinacyi należy założyć: $p_0 = {}_n\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x$, $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = 0$; $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}_1 = \ldots = \mathrm{M}_{n-1} = 0$, $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}_{n+1} = \ldots = 1$; $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2 = \ldots = 0$.

Jeżeli $\nu < n$, z (277) otrzymujemy

$$\mathrm{Rez}\left\{\nu, {}_n\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x\right\} = \frac{v_x}{v_{x+\nu}} \cdot {}_n\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x = \frac{\Sigma m_{x+n}}{v_{x+\nu}} = {}_{n-\nu}\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_{x+\nu}, \tag{284}$$

czyli rezerwa równa się jednorazowej premii netto za ubezpieczenie, przez osobę o ν lat starszą, kapitału pośmiertnego, odroczonego na czas o ν lat krótszy.

Gdy $\nu > n$, jest

$$\text{(284')} \qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu,{}_n\overset{s}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{v_x}{v_{x+\nu}} \cdot {}_n\overset{s}{\mathrm{K}}_x - \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (\Sigma m_{x+n} - \Sigma m_{x+\nu}) =$$

$$= \frac{\Sigma m_{x+n} - (\Sigma m_{x+n} - \Sigma m_{x+\nu})}{v_{x+\nu}} = \frac{\Sigma m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} = \overset{s}{\mathrm{K}}_{x+\nu},$$

t. j. rezerwa równa się jednorazowej premii netto za natychmiastowe ubezpieczenie kapitału pośmiertnego przez osobę o ν lat starszą.

Przy $\nu = n$ wypada

$$\mathrm{Rez}\left\{\nu,{}_n\overset{s}{\mathrm{K}}_x\right\} = \overset{s}{\mathrm{K}}_{x+n}.$$

VII. Mieszane ubezpieczenie kapitału. Załóżmy: $p_0 = {}^n\overset{m}{\mathrm{K}}_x$, $p_1 = p_2 = \ldots = 0$; $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2 = \ldots = \mathrm{M}_{n-1} = 1$, $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}_{n+1} = \ldots = 0$; $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2 = \ldots = \mathrm{V}_{n-1} = 0$, $\mathrm{V}_n = 1$, $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{V}_{n+2} = \ldots = 0$.

Dla $\nu < n$, z (277) wypada

$$\text{(285)} \qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu,{}^n\overset{m}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{v_x}{v_{x+\nu}} \cdot {}^n\overset{m}{\mathrm{K}}_x - \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+\nu}) =$$

$$= \frac{(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n} + v_{x+n}) - (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+\nu})}{v_{x+\nu}} = \frac{\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma m_{x+n} + v_{x+n}}{v_{x+\nu}} = {}^{n-\nu}\overset{m}{\mathrm{K}}_{x+\nu}.$$

Dla $\nu > n$, ze wzoru (278), $\mathrm{Rez}\left\{\nu,{}^n\overset{m}{\mathrm{K}}_x\right\} = 0$. Dla $\nu = n$, $\mathrm{Rez}\left\{n,{}^n\overset{m}{\mathrm{K}}_x\right\} = 1$. Łatwo dostrzedz, że tak istotnie być powinno.

We wszystkich zatem powyżej przytoczonych przypadkach, rezerwa po ν latach, od ubezpieczenia zawartego przez osobę (w chwili zawierania umowy) x letnią, równa się jednorazowej premii netto, jaką wnieść powinna osoba o ν lat starsza za takie samo ubezpieczenie, zawarte na czas o ν lat krótszy (*).

Prawidło to z góry przewidzieć było można; albowiem, gdy sobie wyobrazimy osobę x letnią, która jest już ubezpieczoną przez ν lat, i jednocześnie drugą, w wieku lat $x + \nu$, zawierającą takie samo ubezpieczenie, jakie zawarła osoba x letnia przed ν latami, i z tym samem terminem płatności kapitału lub renty, to oczywiście pozycya finansowa obu tych osób względem instytucyi jest jednakowa, czyli obie to samo w kasie instytucyi posiadać winny. Że zas osoba druga wnieść powinna odpowiednią zawartemu ubezpieczeniu premię jednorazową, przeto osoba pierwsza taką samą premię jednorazową, pod tytułem rezerwy, musi na swoim rachunku w instytucyi posiadać.

Żeby jednak tak sformułowane prawidło mogło służyć do obliczania rezerwy premiowej, potrzebny jest warunek, aby zobowiązania instytucyi względ-

---

(*) Ponieważ, po wniesieniu premii jednorazowej, na osobie ubezpieczonej nie ciążą już żadne zobowiązania, a tem samem ich wartość równa się zeru, zaś wartość zobowiązań instytucyi stanowi premię jednorazową, przeto wypowiedziane powyżej prawidło jest tylko uproszczonym kształtem prawidła ogólnego, podanego przy końcu art. 98.

dem osób ubezpieczonych, z biegiem lat trwania ubezpieczeń, nie ulegały zmianie i nie zależały od chwili zawarcia umowy. Jeżeli bowiem osoba x letnia ubezpiecza np. stale co rok o swą pierwotną wysokość rosnący kapitał, to wysokość kapitału pośmiertnego zależy od liczby lat trwania umowy, np. przy ubezpieczeniu 1-ki kapitału pierwotnego, po ν latach wynosić będzie ν jednostek, podczas gdy dla osoby $x + \nu$ letniej, ubezpieczającej się w ten sam sposób, jak osoba x letnia, lecz w ν lat później, wynosić będzie tylko 1-kę; tej drugiej więc osoby premia jednorazowa oczywiście nie może być równa rezerwie premiowej osoby pierwszej.

Podobnie rzecz się ma z ubezpieczeniem kapitału na dożycie ze zwrotem premii w razie wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej.

Otóż w takich razach, gdy ubezpieczenie nie czyni zadość warunkom, przy jakich można użyć znanego nam prawidła na obliczanie rezerwy, uciec się trzeba do ogólnych wzorów i specyalnie poszukać prawidła na obliczanie rezerwy dla danego przypadku. Można też dane ubezpieczenie rozłożyć na części składowe, do których wiadome prawidło daje się zastosować, i obliczyć rezerwę dla każdej części składowej oddzielnie; suma częściowo obrachowanych rezerw będzie rezerwą od całego ubezpieczenia.

Weźmy parę przykładów.

VIII. Ubezpieczenie kapitału pośmiertnego, rosnącego stale co rok o swą pierwotną wysokość. Według wzoru (163) $p_0 = \frac{\Sigma\Sigma m_x}{v_x}$, obok czego należy w ogólnych wzorach na rezerwę założyć: $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = 0$; $M_0 = 1$, $M_1 = 2$, $M_2 = 3, \ldots$; $V_1 = V_2 = V_3 = \ldots = 0$.

Czyniąc to, z (277) otrzymujemy

$$(286) \qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu, \overset{<s}{K}_x\right\} = \frac{v_x}{v_{x+\nu}} \cdot \frac{\Sigma\Sigma m_x}{v_x} - \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (m_x + 2m_{x+1} + \ldots + \nu . m_{x+\nu-1}) =$$

$$= \frac{\Sigma\Sigma m_x}{v_{x+\nu}} - \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+\nu} - \nu \Sigma m_{x+\nu}) =$$

$$= \frac{\Sigma\Sigma m_{x+\nu} + \nu \Sigma m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} = \overset{<s}{K}_{x+\nu} + \nu . \overset{s}{K}_{x+\nu}.$$

Do tego samego rezultatu dojdziemy, rozkładając dane ubezpieczenie na części składowe. Stanowi ono mianowicie: Natychmiastowe ubezpieczenie 1-ki kapitału pośmiertnego + odroczone na rok ubezpieczenie takiegoż kapitału + odroczone na dwa lata ubezpieczenie podobnego kapitału + i t. d.

Rezerwę każdego z tych pojedynczych ubezpieczeń można obliczyć według znanego nam prawidła, ponieważ każde z nich odpowiada warunkom, jakich rzeczone prawidło wymaga.

Po ν latach, rezerwa od pierwszej części składowej, według (282), $= \overset{s}{K}_{x+\nu}$,

rezerwa od drugiej części składowej, według (284'), $= \overset{s}{K}_{x+\nu}$, rezerwa od trzeciej części składowej, według (284′), $=\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_{x+\nu}$ i t. d.

„ ν-ej „ „ „ „ $=\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_{x+\nu}$,

„ $\nu+1$-ej „ „ „ „ $=\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_{x+\nu}=\frac{\Sigma m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}}$,

„ $\nu+2$-ej „ „ , według (284), $={}_1\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_{x+\nu}=\frac{\Sigma m_{x+\nu+1}}{v_{x+\nu}}$

i t. d. . . . ;

$$\text{Suma}=\nu.\,\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_{x+\nu}+\frac{\Sigma m_{x+\nu}+\Sigma m_{x+\nu+1}+\ldots}{v_{x+\nu}}=$$

$$=\frac{\Sigma\Sigma m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}}+\nu.\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_{x+\nu}=\overset{<s}{\mathrm{K}}_{x+\nu}+\nu.\overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_{x+\nu},$$

czyli równa się temu samemu, co i we wzorze (286).

IX. Ubezpieczenie kapitału na dożycie ze zwrotem premii brutto, bez procentu, płatnej zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, jeżeli ta umrze przed terminem płatności kapitału dożyciowego. Według wzoru (213′) $p_0={}_n\overset{d(z)}{\mathrm{K}'_x}=\frac{v_{x+n}}{v_x-\mathrm{Q}r^{\frac{1}{2}}(\Sigma m_x-\Sigma m_{x+n})}$,

podstawmy nadto w ogólnych wzorach na rezerwę: $p_1=p_2=p_3=\ldots=0$;

$\mathrm{M}_0=\mathrm{M}_1=\mathrm{M}_2=\ldots=\mathrm{M}_{n-1}={}_n\overset{d(z)}{\mathrm{K}'_x}.\mathrm{Q}=\frac{v_{x+n}\cdot\mathrm{Q}}{v_x-\mathrm{Q}r^{\frac{1}{2}}(\Sigma m_x-\Sigma m_{x+n})}$, $\mathrm{M}_n=$ $=\mathrm{M}_{n+1}=\ldots=0$; $\mathrm{V}_1=\mathrm{V}_2=\ldots=\mathrm{V}_{n-1}=0$, $\mathrm{V}_n=1$, $\mathrm{V}_{n+1}=\mathrm{V}_{n+2}=\ldots=0$.

Ponieważ mamy tu zwracać premie zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, musimy zatem użyć wzoru (277′), z którego, przy założeniu $\nu<n$, otrzymujemy

$$\mathrm{Rez}\left\{\nu,{}_n\overset{d(z)}{\mathrm{K}'_x}\right\}=\frac{v_x}{v_{x+\nu}}\cdot{}_n\overset{d(z)}{\mathrm{K}'_x}-\frac{r^{\frac{1}{2}}{}_n\overset{d(z)}{\mathrm{K}'_x}\cdot\mathrm{Q}}{v_{x+\nu}}\cdot(\Sigma m_x-\Sigma m_{x+\nu})=$$

$$={}_n\overset{d(z)}{\mathrm{K}'_x}.\left[\frac{v_x-\mathrm{Q}r^{\frac{1}{2}}(\Sigma m_x-\Sigma m_{x+\nu})}{v_{x+\nu}}\right]=\frac{\dfrac{{}_n\overset{d(z)}{\mathrm{K}'_x}}{v_{x+\nu}}}{v_x-\mathrm{Q}r^{\frac{1}{2}}(\Sigma m_x-\Sigma m_{x+\nu})}.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia jest widocznie jednorazową premią netto za ubezpieczenie kapitału na dożycie z terminem ν lat i ze zwrotem premii brutto w razie wcześniejszej śmierci osoby, liczącej, w chwili zawierania umowy, x lat; mamy więc ostatecznie

$$\mathrm{Rez}\left\{\nu,{}_n\overset{d(z)}{\mathrm{K}'_x}\right\}=\frac{{}_n\overset{d(z)}{\mathrm{K}'_x}}{{}_\nu\overset{d(z)}{\mathrm{K}'_x}},\tag{287}$$

t. j. rezerwa od ubezpieczenia kapitału na dożycie ze zwrotem premii brutto, bez procentu, zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, równa się ilorazowi, wypadłemu z podzielenia zapłaconej premii netto przez netto premię, należną za takież ubezpieczenie 1-ki kapitału, ale zawarte na termin obliczania rezerwy.

Łatwo sprawdzić, że to samo prawidło stosuje się i do przypadków, gdy się zwraca premię netto zaraz po śmierci lub przy końcu roku, w którym śmierć osoby ubezpieczonej zajdzie.

Dalszych zastosowań wzorów ogólnych na rezerwę, przy premiach jednorazowych, nie podajemy, ponieważ premie jednorazowe rzadko się trafiają i uważny czytelnik w danym razie, na mocy tego cośmy powiedzieli, sam sobie bez wątpienia poradzi. Dodamy tylko, że najlepiej jest obliczać rezerwę premiową od 1-ki ubezpieczonego kapitału lub renty, a następnie dopiero otrzymany rezultat pomnożyć przez wysokość ubezpieczonego kapitału, albo ubezpieczonej renty.

100. WZORY NA OBLICZANIE REZERWY PRZY PREMIACH ROCZNYCH. Dla ubezpieczeń zawieranych za pośrednictwem premij rocznych, odnajdziemy uproszczone sposoby obliczania rezerwy również ze wzorów (277) lub (278) resp. z (277′) albo (278′), czyniąc podobne, jak w poprzednim artykule, założenia; tylko, gdy tam stale zakładaliśmy $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = 0$, tutaj będą one od zera różne, a pomiędzy sobą równe lub różne, stosownie do tego, czy roczne premie są stałe, czy też zmienne.

Przedewszystkiem zajmiemy się ubezpieczeniami o premiach stałych, t. j. gdy $p_0 = p_1 = p_2 = \ldots$; aby zaś uniknąć zbyt złożonych symboli, stałe premie roczne każdego rodzaju ubezpieczeń, płacone przez osobę zawierającą umowę w wieku lat x, oznaczać będziemy zawsze tym samym symbolem p_x.

I. Ubezpieczenie kapitału na dożycie, bez zwrotu premij w razie wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej. Posiłkując się wzorem (278), załóżmy $M_\nu = M_{\nu+1} = \ldots = 0$; $V_\nu = V_{\nu+1} = \ldots = V_{n-1} = 0$, $V_n = 1$, $V_{n+1} = V_{n+2} = \ldots = 0$; $p_\nu = p_{\nu+1} = \ldots = p_{n-1} = p_x$, $p_n = p_{n+1} = \ldots = 0$.

Wtedy otrzymujemy

$$\text{(288)} \quad \text{Rez}\left\{{}_{\nu,n}\overset{d}{K}_x\right\} = \frac{v_{x+n}}{v_{x+\nu}} - p_x \cdot \frac{\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu}} = {}_{n-\nu}\overset{d}{K}_{x+\nu} - p_x \cdot {}^{n-\nu}R_{x+\nu},$$

t. j. rezerwa po ν latach, od kapitału ubezpieczonego na dożycie, za pomocą premij rocznych, przez osobę (w chwili zawierania umowy) x letnią, równa się jednorazowej premii netto, jaką wnieść powinna osoba o ν lat starsza za takie samo ubezpieczenie, zawarte na czas o ν lat krótszy, minus iloczyn z opłacanej rocznie premii netto przez wartość 1-ki renty rocznej, płatnej z góry, osobie o ν lat starszej, od chwili obliczania rezerwy do czasu wyekspirowania terminu wnoszenia premij za dane ubezpieczenie.

Do tego samego rezultatu przyjdziemy ze wzoru (277), gdy w nim założymy $p_0 = p_1 = p_2 = \ldots = p_{\nu-1} = p_x$; $M_0 = M_1 = M_2 = \ldots M_{\nu-1} = 0$; $V_1 = V_2 = V_3 = \ldots = V_{\nu-1} = 0$, o ile $\nu < n$.

Wówczas bowiem

$$(288') \quad \mathrm{Rez}\left\{{}_{\nu,n}\overset{d}{\mathrm{K}}_x\right\} = p_x \cdot \frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} = p_x \cdot \frac{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - (\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n})}{v_{x+\nu}} =$$

$$= p_x \cdot \frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu}} - p_x \cdot \frac{\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu}}.$$

Że zaś $p_x = \frac{v_{x+n}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}}$, więc

$$\mathrm{Rez}\left\{{}_{\nu,n}\overset{d}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{v_{x+n}}{v_{x+\nu}} - p_x \cdot {}^{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu} = {}_{n-\nu}\overset{d}{\mathrm{K}}_{x+\nu} - p_x \cdot {}^{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu},$$

czyli otrzymujemy to samo wyrażenie, jakie już znamy ze wzoru (288).

Przypuśćmy np., że 30-o letnia osoba ubezpieczyła kapitał 1 000 fr., płatny jej po 5-u latach, jeżeli dożyje tego terminu. Zachodzi pytanie, jaką rezerwę instytucya po 3-ch latach posiadać winna na rachunku pomienionej osoby?

Roczna premia od 1-ki ubezpieczonego w ten sposób kapitału, według art. 96, wynosi 0,175 308. Jednorazowa premia za ubezpieczenie, przez osobę 33-y letnią, 1-ki kapitału płatnego po 2-ch latach, wynosi

$$\frac{v_{35}}{v_{33}} = \frac{24\,772{,}39}{27\,021{,}39} = 0{,}916\,770.$$

Wartość 1-ki renty rocznej płatnej z góry osobie 33-y letniej przez 2 lata równa się

$$\frac{\Sigma v_{33} - \Sigma v_{35}}{v_{33}} = \frac{52\,896{,}16}{27\,021{,}39} = 1{,}957\,566.$$

Rezerwa więc od 1-ki wynosi

$$0{,}916\,770 - 0{,}175\,308 \times 1{,}957\,566 = 0{,}573\,593;$$

od 1000 fr., 0,573 593 × 1000 = 573,59 fr., t. j. tyle, ile wypadło w drugiej tabelce art. 96.

II. Ubezpieczenie renty dożywotniej odroczonej (na n lat). Dokąd $\nu < n$, w (278) założyć należy $\mathrm{M}_\nu = \mathrm{M}_{\nu+1} = \mathrm{M}_{\nu+2} = \ldots = 0$; $\mathrm{V}_\nu = \mathrm{V}_{\nu+1} = \ldots = \mathrm{V}_{n-1} = 0$, $\mathrm{V}_n = \mathrm{V}_{n+1} = \ldots = 1$; $p_\nu = p_{\nu+1} = \ldots = p_{n-1} = p_x$, $p_n = p_{n+1} = \ldots = 0$, co podstawiwszy w (278), wypada

$$(289) \quad \mathrm{Rez}({}_{\nu,n}\mathrm{R}_x) = \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu}} - p_x \cdot \frac{\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu}} = {}_{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu} - p_x \cdot {}^{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu}.$$

Gdy $\nu > n$, $\mathrm{Rez}(\nu, {}_n\mathrm{R}_x) = \mathrm{R}_{x+\nu}$, gdyż wtedy premia już się nie opłaca, czyli $p_x = 0$, zaś ${}_{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu}$ przechodzi na rentę natychmiastową.

III. Zwyczajne ubezpieczenie kapitału pośmiertnego. Podstawiwszy we wzorze (278) $\mathrm{M}_\nu = \mathrm{M}_{\nu+1} = \mathrm{M}_{\nu+2} = \ldots = 1$; $\mathrm{V}_\nu = \mathrm{V}_{\nu+1} = \mathrm{V}_{\nu+2} = \ldots = 0$; $p_\nu = p_{\nu+1} = p_{\nu+2} = \ldots = p_x$, wypada

$$(290) \qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu, \overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} - p_x \cdot \frac{\Sigma v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} = \overset{s}{\dot{\mathrm{K}}}_{x+\nu} - p_x \,.\, \mathrm{R}_{x+\nu}, \text{ t. j.}$$

rezerwa po ν latach od kapitału ubezpieczonego na przypadek śmierci, za pomocą premij rocznych, przez osobę (w chwili zawierania umowy) x letnią, równa się jednorazowej premii netto, jaką wnieść powinna osoba o ν lat starsza za takie samo ubezpieczenie, minus iloczyn z opłacanej rocznie premii netto przez wartość 1-ki renty rocznej, płatnej z góry osobie o ν lat starszej, od chwili obliczania rezerwy aż do śmierci pomienionej osoby.

Np. osoba 30-o letnia za zwyczajne ubezpieczenie 1-ki kapitału pośmiertnego winna wnosić rocznie netto po 0,017 960 (Tabl. X, kol. 3). Po 10-u latach, premia jednorazowa za takież ubezpieczenie, zawarte przez osobę 40-o letnią, wynosi 0,423 243 (Tab. X, kol. 2), a wartość 1-ki renty dożywotniej z góry rocznie płatnej osobie 40-o letniej = 17,055 54. Skutkiem tego, wartość zobowiązań osoby ubezpieczonej równa się

$$0{,}017\,960 \times 17{,}055\,54 = 0{,}306\,317.$$

Rezerwą premiową zatem, po 10-u latach, od danego ubezpieczenia jest

$$0{,}423\,243 - 0{,}306\,317 = 0{,}116\,926.$$

Od 10 000 fr. ubezpieczonego kapitału 0,116 926 × 10 000 = 1169,26 fr.

Od 1 000 fr., ubezpieczonych na przypadek śmierci przez osobę 90-o letnią, rezerwa po 5-u latach wynosi

$$(0{,}946\,286 - 0{,}366\,115 \times 1{,}588\,35) \times 1\,000 = 364{,}77 \text{ fr.},$$

czyli, z drobną różnicą, to samo, co otrzymaliśmy w pierwszej tabelce art. 96.

Do podobnych, jak (290), rezultatów przyszlibyśmy, rozpatrując czasowe i odroczone ubezpieczenia kapitału pośmiertnego.

IV. Mieszane ubezpieczenie kapitału (z terminem n letnim). We wzorze (278) trzeba założyć $\mathrm{M}_\nu = \mathrm{M}_{\nu+1} = . . = \mathrm{M}_{n-1} = 1$, $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}_{n+1} = ... = 0$; $\mathrm{V}_\nu = \mathrm{V}_{\nu+1} = . . . = \mathrm{V}_{n-1} = 0$, $\mathrm{V}_n = 1$, $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{V}_{n+2} = ... = 0$; $p_\nu = p_{\nu+1} = ... = p_{n-1} = p_x$, $p_n = p_{n+1} = . . . = 0$.

Uczyniwszy to, otrzymujemy wzór

$$(291) \qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu, {}^n\overset{m}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma m_{x+n} + v_{x+n}}{v_{x+\nu}} - p_x \cdot \frac{\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu}} =$$

$$= {}^{n-\nu}\overset{m}{\mathrm{K}}_{x+\nu} - p_x \,.\, {}^{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu},$$

który słowami wyraża się w podobny sposób, jak i w poprzednich rodzajach ubezpieczeń.

V. Półmieszane ubezpieczenie kapitału (z terminem n letnim). Odnośne wzory na premię jednorazową i roczną znajdują się w art. 67 (179 i 179').

We wzór (278) należy, oczywiście, podstawić: $\mathrm{M}_\nu = \mathrm{M}_{\nu+1} = ... = \mathrm{M}_{n-1} = 1$, $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}_{n+1} = . . . = {}^1/_2$; $\mathrm{V}_\nu = \mathrm{V}_{\nu+1} = . . . = \mathrm{V}_{n-1} = 0$, $\mathrm{V}_n = {}^1/_2$, $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{V}_{n+2} = . . . = 0$; $p_\nu = p_{\nu+1} = . . . = p_{n-1} = p_x$, $p_n = p_{n+1} = . . . = 0$.

Wypada stąd

$$(292)\qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu,{}^{n}\overset{c/m}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{(\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma m_{x+n}) + \frac{1}{2}\Sigma m_{x+n} + \frac{v_{x+n}}{2}}{v_{x+\nu}} -$$

$$- p_x \,.\, \frac{\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu}} = \frac{\Sigma m_{x+\nu} + \frac{1}{2}(v_{x+n} - \Sigma m_{x+n})}{v_{x+\nu}} - p_x \,.\, {}^{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu} =$$

$$= {}^{n-\nu}\overset{c/m}{\mathrm{K}}_{x+\nu} - p_x \,.\, {}^{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu}.$$

Weźmy jeszcze jako ostatni przykład

VI. Ubezpieczenie kapitału z terminem stałym. Dla n letniego terminu wzór na premię roczną podaliśmy w art. 67 (182').

Chcąc do danego ubezpieczenia zastosować wzór (278), potrzeba przedewszystkiem warunkom ubezpieczenia nadać formę odpowiednią wzorowi (278). Otóż bezwarunkowa wypłata kapitału w oznaczonym terminie, może być zastąpiona przez wypłatę pośmiertną, ale nie kapitału ubezpieczonego, lecz kapitału odpowiednio zdyskontowanego – jeżeli osoba ubezpieczona umiera przed terminem płatności kapitału, i odpowiednio oprocentowanego—jeżeli śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi po terminie płatności kapitału.

Skutkiem tego we wzór (278) trzeba podstawić: $\mathrm{M}_\nu = \rho^{n-\nu-1}$, $\mathrm{M}_{\nu+1} = \rho^{n-\nu-2}, \ldots, \mathrm{M}_{n-1} = 1$, $\mathrm{M}_n = r$, $\mathrm{M}_{n+1} = r^2, \ldots;\ \mathrm{V}_\nu = \mathrm{V}_{\nu+1} = \mathrm{V}_{\nu+2} = \ldots = 0$; $p_\nu = p_{\nu+1} = \ldots = p_{n-1} = p_x$, $p_n = p_{n+1} = p_{n+2} = \ldots = 0$.

Podstawiwszy te wartości w (278), wypada

$$\mathrm{Rez}\left\{\nu,{}_{n}\overset{t}{\mathrm{K}}_x\right\} = \frac{1}{\lambda_{x+\nu}}\left(\frac{\tau_{x+\nu}\rho^{x+\nu+1}\rho^{n-\nu-1} + \tau_{x+\nu+1}\rho^{x+\nu+2}\rho^{n-\nu-2} + \ldots + \tau_{x+n-1}\rho^{x+n}\rho^0}{\rho^{x+\nu}} +\right.$$

$$\left. + \frac{\tau_{x+n}\rho^{x+n+1} . r + \tau_{x+n+1}\rho^{x+n+2} r^2 + \ldots}{\rho^{x+\nu}}\right) - p_x \,.\, \frac{\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_{x+\nu}} \cdot \left(\frac{\tau_{x+\nu} . \rho^{x+n} + \tau_{x+\nu+1}\rho^{x+n} + \ldots}{\rho^{x+\nu}}\right) - p_x \,.\, {}^{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu} =$$

$$= \rho^{n-\nu} . \frac{\Sigma\tau_{x+\nu}}{\lambda_{x+\nu}} - p_x \,.\, {}^{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu}.$$

Że zaś z (32) $\Sigma\tau_{x+\nu} = \lambda_{x+\nu}$, zatem ostatecznie

$$(293)\qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu,{}_{n}\overset{t}{\mathrm{K}}_x\right\} = \rho^{n-\nu} - p_x \,.\, {}^{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu}.$$

W ubezpieczeniu kapitału z terminem stałym, $\rho^{n-\nu}$ stanowi premię jednorazową, z czego wynika, że i w obecnej kombinacyi rezerwa premiowa oblicza się w podobny sposób, jak i w kombinacyach wziętych poprzednio pod uwagę.

Czyli w ogóle, we wszystkich tych rodzajach ubezpieczeń, w których roczne premie są stałe i zobowiązania instytucyi z biegiem lat się nie zmieniają, rezerwa premiowa równa się jednorazowej premii netto za dane ubezpieczenie, obrachowanej na chwilę oznaczenia rezerwy, minus iloczyn z opłacanej rocznie premii netto przez jednoczesną wartość 1-ki renty płatnej tak długo, jak długo premie roczne wnoszonemi jeszcze być mają.

Lecz jednorazowa premia stanowi wartość zobowiązań instytucyi, iloczyn z premii rocznej przez wartość 1-ki renty przedstawia wartość zobowiązań osoby ubezpieczonej; podane więc prawidło jest tylko szczególnym przypadkiem ogólnej reguły, wypowiedzianej przy końcu art. 98.

Jeżeli roczne premie są zmienne, ogólna reguła na obliczanie rezerwy pozostaje ta sama, zaś forma uproszczona zależy od sposobu, w jaki roczne premie się zmieniają. Dla każdego szczególnego przypadku należy przeto specyalnego poszukać wzoru resp. prawidła.

Dla ubezpieczeń, o stałej premii rocznej, w których zobowiązania instytucyi z biegiem lat nie ulegają zmianie, wyrażenie na rezerwę premiową przyjmuje jeszczą inną, bardzo prostą postać. Oznaczywszy w ogóle jednorazową premię netto dla osoby o ν lat starszej od osoby x letniej przez $P_{x+\nu}$, dotychczas znanem nam wyrażeniem na rezerwę jest

$$(\alpha) \qquad \mathrm{Rez}(\nu) = P_{x+\nu} - p_x . {}^{n-\nu}R_{x+\nu},$$

gdzie roczne premie mają być wnoszone do końca n letniego terminu, liczonego od chwili zawarcia umowy przez osobę x letnią.

Wyrażenie (α) można przekształcić w następujący sposób

$$(\beta) \qquad \mathrm{Rez}(\nu) = \left(\frac{P_{x+\nu}}{{}^{n-\nu}R_{x+\nu}} - p_x\right){}^{n-\nu}R_{x+\nu}.$$

Lecz $\dfrac{P_{x+\nu}}{{}^{n-\nu}R_{x+\nu}}$ jest roczną premią netto za dane ubezpieczenie, zawarte przez osobę $x + \nu$ letnią; oznaczywszy tę premię przez $p_{x+\nu}$, wypada

$$(294) \qquad \mathrm{Rez}(\nu) = (p_{x+\nu} - p_x) . {}^{n-\nu}R_{x+\nu},$$

t. j. rezerwa premiowa po ν latach równa się różnicy pomiędzy rocznemi premiami netto, płaconemi za dane ubezpieczenie przez osobę $x + \nu$ i x letnią, pomnożonej przez wartość 1-ki renty, płaconej osobie $x + \nu$ letniej tak długo, jak długo jeszcze premie wnoszonemi być mają; albo krócej, równa się wartości matematycznej różnicy rzeczonych premij rocznych, obrachowanej na chwilę obliczania rezerwy.

Słuszność takiego wyrażenia łatwo można zrozumieć, skoro bowiem osoba $x + \nu$ letnia, zawierająca umowę w chwili obliczania rezerwy, za to samo zobowiązanie instytucyi względem niej co i względem osoby x letniej (ubezpieczonej w tym wieku przed ν laty), wnosi rocznie po $p_{x+\nu}$, a ta druga tylko po p_x, przeto instytucya w zapasie dla tej ostatniej posiadać winna wartość matematyczną różnicy opłat, jakie jedna i druga osoba wnosić są obowiązane.

101. WZORY NA OBLICZANIE REZERWY PRZY PREMIACH ROCZNYCH, GDY ZOBOWIĄZANIA INSTYTUCYI ZALEŻĄ OD LAT TRWANIA UBEZPIECZEŃ. Gdy zobowiązania instytucyi z biegiem lat ulegają zmianie, jak to ma miejsce przy ubezpieczeniach ze zwrotem premij, wyprowadzone w poprzednim artykule prawidło nie może być użyte do obliczania rezerwy premiowej. Potrzeba się wtedy uciec do ogólnych wzorów (277) lub (278) resp. (277′) i (278′), albo też rozłożyć ubezpieczenie na części składowe, do których wzmiankowane prawidło daje się zastosować.

Rozpatrzymy tu niektóre kombinacye z podanych w art. 75—78, ograniczając się do przypadku, gdy premie roczne wnoszą się przez cały czas odroczenia.

I. Ubezpieczenie renty odroczonej ze zwrotem wniesionych premij brutto zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, jeżeli pomieniona osoba umrze przed upływem terminu odroczenia.

1. Premie zwracają się bez procentu. Odnośnym wzorem na premię roczną jest (199″).

W (278′) należy podstawić
$\mathrm{M}_\nu=(\nu+1)p_x.q$, $\mathrm{M}_{\nu+1}=(\nu+2)p_x q, \ldots$, $\mathrm{M}_{n-1}=np_x q$, $\mathrm{M}_n=\mathrm{M}_{n+1}=\ldots=0$; $\mathrm{V}_\nu=\mathrm{V}_{\nu+1}=\ldots=\mathrm{V}_{n-1}=0$, $\mathrm{V}_n=\mathrm{V}_{n+1}=\mathrm{V}_{n+2}=\ldots=1$; $p_\nu=p_{\nu+1}=\ldots$ $\ldots=p_{n-1}=p_x$, $p_n=p_{n+1}=p_{n+2}=\ldots=0$.

Po podstawieniu otrzymujemy

$$\mathrm{Rez}\left\{{}_{\nu,n}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}'_x\right\}=\frac{r^{\frac{1}{2}}p_x q}{v_{x+\nu}}\cdot\left[\nu(\Sigma m_{x+\nu}-\Sigma m_{x+n})+(m_{x+\nu}+2m_{x+\nu+1}+\ldots+(n-\nu)m_{x+n-1})\right]$$

$$+\frac{1}{v_{x+\nu}}\cdot\Sigma v_{x+n}-\frac{p_x}{v_{x+\nu}}\cdot(\Sigma v_{x+\nu}-\Sigma v_{x+n})=$$

$$=\frac{r^{\frac{1}{2}}p_x q}{v_{x+\nu}}\cdot\left[\nu(\Sigma m_{x+\nu}-\Sigma m_{x+n})+(\Sigma\Sigma m_{x+\nu}-\Sigma\Sigma m_{x+n}-(n-\nu)\Sigma m_{x+n})\right]+$$

$$+\frac{\Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu}}-\frac{p_x}{v_{x+\nu}}\cdot(\Sigma v_{x+\nu}-\Sigma v_{x+n})=$$

$$=\frac{p_x}{v_{x+\nu}}\cdot\left[\frac{\Sigma v_{x+n}}{p_x}+\nu.q.r^{\frac{1}{2}}\Sigma m_{x+\nu}+q.r^{\frac{1}{2}}(\Sigma\Sigma m_{x+\nu}-\Sigma\Sigma m_{x+n}-n\Sigma m_{x+n})-\right.$$

$$\left.-(\Sigma v_{x+\nu}-\Sigma v_{x+n})\right].$$

Podstawiwszy za p_x w klamrze wartość ze wzoru (199″), wypada

$$\mathrm{Rez}\left\{{}_{\nu,n}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}'_x\right\}=\frac{p_x}{v_{x+\nu}}\cdot\left[(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+\nu})-q\,r^{\frac{1}{2}}(\Sigma\Sigma m_x-\Sigma\Sigma m_{x+\nu}-\nu\,\Sigma m_{x+\nu})\right]=$$

$$=\frac{\dfrac{p_x}{v_{x+\nu}}}{(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+\nu})-q\,r^{\frac{1}{2}}(\Sigma\Sigma m_x-\Sigma\Sigma m_{x+\nu}-\nu\,\Sigma m_{x+\nu})}.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia, według (215′), stanowi roczną premię netto za ubezpieczenie 1-ki kapitału na dożycie, płatnego po upływie ν lat (t. j. w chwili obliczania rezerwy), ze zwrotem premij brutto, bez procentu, zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, jeżeli takowa przed wyekspirowaniem terminu nastąpi; podczas gdy p_x w liczniku oznacza roczną premię netto za ubezpieczenie omawianej obecnie renty, t. j. używając rozwiniętych symboli

$$\text{(295)} \qquad \mathrm{Rez}\left\{{}_{\nu,n}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}'_x\right\} = \frac{{}^{n}p\left\{{}_{n}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}'_x\right\}}{{}^{\nu}p\left\{{}_{\nu}\overset{d(z)}{\mathrm{K}}{}'_x\right\}},$$

czyli: rezerwa premiowa równa się ilorazowi, otrzymanemu z podzielenia opłacanej rocznie premii netto przez roczną premię netto, jaką musiałaby ta sama osoba (x letnia) opłacać w razie, gdyby ubezpieczyła 1-kę kapitału na dożycie, płatnego w chwili obliczania rezerwy, ze zwrotem premij brutto na podobnych warunkach, jak i przy ubezpieczeniu samej renty.

2. Premie zwracają się z procentem składanym. Wzór (200) daje wyrażenie na roczną premię netto.

Tutaj należy w (278′) założyć:

$$\mathrm{M}_\nu = p_x.q.(r^{\nu+\frac{1}{2}} + r^{\nu-\frac{1}{2}} + \ldots + r^{\frac{1}{2}}) = p_x.q.r^{\frac{1}{2}}(r^\nu + r^{\nu-1} + \ldots + 1) =$$

$$= p_x.q.r^{\frac{1}{2}} . \frac{r^{\nu+1}-1}{r-1}, \text{ podobnie } \mathrm{M}_{\nu+1} = p_x.q.r^{\frac{1}{2}} . \frac{r^{\nu+2}-1}{r-1}, \ldots$$

$$\ldots, \mathrm{M}_{n-1} = p_x.q.r^{\frac{1}{2}} . \frac{r^n-1}{r-1}, \mathrm{M}_n = \mathrm{M}_{n+1} = \ldots = 0; \mathrm{V}_\nu = \mathrm{V}_{\nu+1} = \ldots = \mathrm{V}_{n-1} = 0,$$

$$\mathrm{V}_n = \mathrm{V}_{n+1} = \ldots = 1; p_\nu = p_{\nu+1} = \ldots = p_{n-1} = p_x, p_n = p_{n+1} = \ldots = 0.$$

Wykonawszy podstawienia, wypada

$$\mathrm{Rez}\left\{{}_{\nu,n}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}'_x\right\} = \frac{p_x.q.r}{(r-1)v_{x+\nu}}.[(r^{\nu+1}-1)m_{x+\nu} + (r^{\nu+2}-1)m_{x+\nu+1} + \ldots + (r^n-1)m_{x+n-1}]$$

$$+ \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu}} - \frac{p_x}{v_{x+\nu}} \cdot (\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n}) =$$

$$= \frac{p_x.q.r}{(r-1)v_{x+\nu}} \cdot \left[\left(\frac{\tau_{x+\nu}}{r^x} + \frac{\tau_{x+\nu+1}}{r^x} + \ldots + \frac{\tau_{x+n-1}}{r^x}\right) - (\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma m_{x+n})\right] +$$

$$+ \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu}} - p_x . \frac{\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu}} =$$

$$= \frac{p_x}{v_{x+\nu}} \cdot \left(\frac{qr}{r-1} \cdot [\rho^x(\Sigma\tau_{x+\nu} - \Sigma\tau_{x+n}) - (\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma m_{x+n})] + \frac{\Sigma v_{x+n}}{p_x} - \right.$$

$$\left. - (\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n})\right).$$

Po podstawieniu za p_x w klamrze wartości ze wzoru (200), otrzymujemy

$$\mathrm{Rez}\left\{{}_{\nu,n}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}'_x\right\} = \frac{p_x}{v_{x+\nu}} \cdot \left[\frac{q.r}{r-1}.[\rho^x(\Sigma\tau_{x+\nu} - \Sigma\tau_{x+n}) - (\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma m_{x+n})] + \right.$$

$$+ (\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) - \frac{qr}{r-1}[\rho^x(\Sigma\tau_x - \Sigma\tau_{x+n}) - (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n})] -$$

$$\left. - (\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n})\right] =$$

$$=\frac{p_x}{v_{x+\nu}}\cdot\left[(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+\nu})-\frac{qr}{r-1}\left[\rho^x(\Sigma\tau_x-\Sigma\tau_{x+\nu})-(\Sigma m_x-\Sigma m_{x+\nu})\right]\right]=$$

$$=\frac{\dfrac{p_x}{v_{x+\nu}}}{(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+\nu})--\dfrac{qr}{r-1}\left[\rho^x(\Sigma\tau_x-\Sigma\tau_{x+\nu})-(\Sigma m_x-\Sigma m_{x+\nu})\right]}.$$

Ponieważ w mianowniku posiadamy wyrażenie zupełnie takie samo jak w (216), tylko na termin ν letni, wprowadzając zatem rozwinięte symbole, otrzymujemy ostatecznie wyrażenie

$$\text{(295')}\qquad \mathrm{Rez}\left\{{}_{\nu,n}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}'_x\right\}=\frac{{}^{n}p\left\{{}_{n}\overset{(z)}{\mathrm{R}}{}'_x\right\}}{{}^{\nu}p\left\{{}_{\nu}\overset{d(z)}{\mathrm{K}}{}'_x\right\}}.$$

Wyrażenie to jest zupełnie podobne do (295), tylko znajdujące się w niem premie odnoszą się do ubezpieczenia ze zwrotem premij oprocentowanych, skutkiem czego odpowiednie prawidło daje się tak samo, jak i w poprzednim przypadku, wypowiedzić.

II. Ubezpieczenie kapitału pośmiertnego, odroczonego na n lat, ze zwrotem wniesionych premij brutto, bez procentu, zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej w razie, jeżeli pomieniona osoba umrze przed upływem terminu odroczenia. Wzór (207') daje wyrażenie na roczną premię netto.

Dla przykładu zastosujmy do obecnego przypadku nie wzór (278') lecz (277'). Należy w nim założyć, przy $\nu<n$, $p_0=p_1=p_2=\ldots=p_{\nu-1}=p_x$; $\mathrm{M}_0=p_xq$, $\mathrm{M}_1=2p_xq,\ldots,\mathrm{M}_{\nu-1}=\nu p_xq$; $\mathrm{V}_1=\mathrm{V}_2=\mathrm{V}_3=\ldots=\mathrm{V}_{\nu-1}=0$.

Po podstawieniu, wypada

$$\mathrm{Rez}\left\{{}_{\nu,n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}{}'_x\right\}=\frac{p_x}{v_{x+\nu}}\cdot(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+\nu})-\frac{p_xqr^{\frac{1}{2}}}{v_{x+\nu}}\cdot(m_x+2m_{x+1}+\ldots+\nu m_{x+\nu-1})=$$

$$=p_x\cdot\frac{(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+\nu})-qr^{\frac{1}{2}}.(\Sigma\Sigma m_x-\Sigma\Sigma m_{x+\nu}-\nu\Sigma m_{x+\nu})}{v_{x+\nu}}=$$

$$=\frac{\dfrac{p_x}{v_{x+\nu}}}{(\Sigma v_x-\Sigma v_{x+\nu})-qr^{\frac{1}{2}}.(\Sigma\Sigma m_x-\Sigma\Sigma m_{x+\nu}-\nu\Sigma m_{x+\nu})}.$$

Mianownik, według (215'), jest wyrażeniem na roczną premię netto za ubezpieczenie 1-ki kapitału na dożycie, z terminem ν letnim, i zwrotem premij na podobnych warunkach, jak przy ubezpieczeniu kapitału pośmiertnego. Używając zatem rozwiniętych symboli, otrzymujemy wyrażenie

$$\text{(296)}\qquad \mathrm{Rez}\left\{{}_{\nu,n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}{}'_x\right\}=\frac{{}^{n}p\left\{{}_{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}{}'_x\right\}}{{}^{\nu}p\left\{{}_{\nu}\overset{d(z)}{\mathrm{K}}{}'_x\right\}},$$

które słowami wypowiada się zupełnie podobnie, jak i dla rent odroczonych ze zwrotem premij.

III. Ubezpieczenie kapitału na dożycie, ze zwrotem wniesionych premij brutto, bez procentu, zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej—w razie, gdyby pomieniona osoba umarła przed terminem płatności kapitału.

W (277′) podstawmy : $p_0 = p_1 = p_2 = \ldots = p_{\nu-1} = p_x$; $\mathrm{M}_0 = p_x q$, $\mathrm{M}_1 = 2p_x q$, $\mathrm{M}_2 = 3p_x q, \ldots, \mathrm{M}_{\nu-1} = \nu p_x q$; $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2 = \mathrm{V}_3 = \ldots = \mathrm{V}_{\nu-1} = 0$.

Wtedy otrzymamy

$$\mathrm{Rez}\left\{\nu,{}_n\overset{d(z)}{\mathrm{K}'}_x\right\} = \frac{p_x}{v_{x+\nu}} \cdot (\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}) - \frac{p_x q r^{\frac{1}{2}}}{v_{x+\nu}} (m_x + 2m_{x+1} + \ldots + \nu . m_{x+\nu-1}) =$$

$$= p_x \cdot \frac{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}) - q r^{\frac{1}{2}} (\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+\nu} - \nu \Sigma m_{x+\nu})}{v_{x+\nu}} =$$

$$= \frac{p_x}{\dfrac{v_{x+\nu}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}) - q r^{\frac{1}{2}} (\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+\nu} - \nu \Sigma m_{x+\nu})}}.$$

I tutaj mianownik, według (215′), jest roczną premią netto za ubezpieczenie 1-ki kapitału na dożycie, płatnego po ν latach, ze zwrotem premij brutto, bez procentu, w razie wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej. Używając zatem rozwiniętych symboli i tutaj mamy

$$\mathrm{Rez}\left\{\nu,{}_n\overset{d(z)}{\mathrm{K}'}_x\right\} = \frac{{}^n p\left\{{}_n\overset{d(z)}{\mathrm{K}'}_x\right\}}{{}^\nu p\left\{{}_\nu\overset{d(z)}{\mathrm{K}'}_x\right\}}. \tag{297}$$

Podobne prawidło otrzymalibyśmy (tak samo, jak dla przypadku I) i przy zwrocie premij z procentem składanym.

Widzimy więc, że wyprowadzone prawidło jest ogólne dla całej grupy ubezpieczeń, w których zwracają się premie, w razie wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej, zaraz po jej śmierci lub przy końcu roku, w którym śmierć pomienionej osoby nastąpi, bez względu na to, czy się opłaca premie jednorazowo, czy rocznie,oraz czy się zwraca premie brutto, czy netto — bez procentu, czy też z procentem składanym.

We wszystkich tych przypadkach rezerwa premiowa, po ν latach, równa się ilorazowi, otrzymanemu z podzielenia opłacanej premii netto przez premię, jaką ta sama osoba musiałaby wnosić za ubezpieczenie 1-ki kapitału na dożycie z terminem ν letnim, t. j. kapitału wypłacalnego w chwili obliczania rezerwy, i ze zwrotem premij na tych samych warunkach, jak w rzeczywiście zawartem ubezpieczeniu.

Ogólność tego prawidła wynika z podobieństwa wzorów na obliczanie premij i jednakowego sposobu postępowania przy wyprowadzaniu wzorów, służących do obliczania rezerwy premiowej.

Ze wzoru (β) w art. 99-ym i ze wzoru (288′) dostrzedz łatwo, że podobne prawidło stosuje się także do ubezpieczeń kapitałów na dożycie bez zwrotu premij.

Prawidło nasze stosuje się naturalnie do chwili wyekspirowania terminu odroczenia (dokąd $\nu < n$), gdyż później obliczanie rezerwy dokonywa się według prawideł zastosowanych do położenia, w jakiem się dane ubezpieczenie znajdzie po upływie terminu odroczenia. Tak np., w ubezpieczeniu renty odroczonej, po upływie terminu odroczenia, rezerwa oblicza się tak samo, jak dla rent natychmiastowych; w ubezpieczeniu kapitału pośmiertnego odroczonego — jak za zwyczajne ubezpieczenie pośmiertne i t. d.

IV. Ubezpieczenie kapitału na dożycie, ze zwrotem, w razie wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej, wniesionych premij brutto, bez procentu, w tym samym czasie, kiedy byłby wypłacony kapitał, gdyby wówczas osoba ubezpieczona pozostawała przy życiu.

Według tego, cośmy powiedzieli w art. 77, wzór na premię roczną otrzymuje się ze (199), gdy w liczniku podstawimy v_{x+n} w miejsce Σv_{x+n}.

Aby otrzymać wzór na rezerwę, w (277) podstawić oczywiście trzeba $p_0 = p_1 = p_2 = \ldots = p_{\nu-1} = p_x$; $M_0 = p_x q.\rho^{n-1}$, $M_1 = 2p_x q.\rho^{n-2}, \ldots, M_{\nu-1} = \nu p_x q.\rho^{n-\nu}$; $V_1 = V_2 = V_3 = \ldots = V_{\nu-1} = 0$.

Po dokonaniu tych podstawień wypada

$$\mathrm{Rez}(\nu) = \frac{p_x}{v_{x+\nu}} \cdot (\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}) - \frac{p_x q \rho^n}{v_{x+\nu}} \cdot (m_x r + 2m_{x+1} r^2 + \ldots + \nu . m_{x+\nu-1} r^\nu) =$$

$$= \frac{p_x}{v_{x+\nu}} \cdot (\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}) - \frac{p_x q \rho^{x+n}}{v_{x+\nu}} \cdot (\tau_x + 2\tau_{x+1} + 3\tau_{x+2} + \ldots + \nu\tau_{x+\nu-1}) =$$

$$= p_x \cdot \left[\frac{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}) - q . \rho^{x+n} (\Sigma\Sigma\tau_x - \Sigma\Sigma\tau_{x+\nu} - \nu . \Sigma\tau_{x+\nu})}{v_{x+\nu}}\right]:$$

Albo inaczej

$$(298) \qquad \mathrm{Rez}(\nu) = \frac{p_x}{\dfrac{v_{x+\nu}}{(\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}) - q . \rho^{x+n} (\Sigma\Sigma\tau_x - \Sigma\Sigma\tau_{x+\nu} - \nu . \Sigma\tau_{x+\nu})}} .$$

Do obecnego przypadku, widocznie, poprzednie prawidło na obliczanie rozerwy już się nie stosuje, gdyż do mianownika wchodzi czynnik ρ^{x+n} zamiast $\rho^{x+\nu}$.

V. Czasowe ubezpieczenie kapitału pośmiertnego, ze zwrotem wniesionych premij brutto, bez procentu, w razie przeżycia przez osobę ubezpieczoną czasu trwania umowy.

Wzór (210′) jest wyrażeniem na roczną premię netto.

Założywszy, że ubezpieczony kapitał wypłaca się zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, podstawmy w (278′): $M_\nu = M_{\nu+1} = \ldots = M_{n-1} = 1$, $M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \ldots = 0$; $V_\nu = V_{\nu+1} = V_{\nu+2} = \ldots = V_{n-1} = 0$, $V_n = n p_x q$, $V_{n+1} = V_{n+2} = \ldots = 0$; $p_\nu = p_{\nu+1} = p_{\nu+2} = \ldots = p_{n-1} = p_x$, $p_n = p_{n+1} = p_{n+2} = \ldots = 0$. Po uskutecznieniu podstawień wypada

$$(299)\qquad \operatorname{Rez}\left\{\nu, {}^{n}\overset{s(z)}{\mathrm{K}}{}'_{x}\right\} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{v_{x+\nu}} \cdot (\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma m_{x+n}) + \frac{np_x q}{v_{x+\nu}} \cdot v_{x+n} -$$

$$- \frac{p_x}{v_{x+\nu}} \cdot (\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n}) = r^{\frac{1}{2}} \,.\, {}^{n-\nu}\overset{s}{\mathrm{K}}_{x+\nu} + np_x q \,.\, {}_{n-\nu}\overset{d}{\mathrm{K}}_{x+\nu} - p_x \,.\, {}^{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu} \,.$$

Otrzymane wyrażenie można było wypisać wprost, rozkładając dane ubezpieczenie na części składowe.

Weźmy wreszcie pod uwagę

VI. Ubezpieczenie od nieszczęśliwych wypadków ze zwrotem premij. Wzór (218) daje wyrażenie, z którego można obliczyć, ile razy wziętą premię za zwyczajne ubezpieczenie od nieszczęśliwych wypadków (bez zwrotu premij) pobierać trzeba, żeby zapewnić ubezpieczonemu zwrot wniesionych przezeń premij, bez procentu, w razie jego śmierci (natychmiast) lub po przeżyciu N lat.

Jeżeli liczbę obrachowaną z (218) oznaczymy, jak zwykle—dla krótkości, przez p_x, premię roczną za zwyczajne ubezpieczenie od nieszczęśliwych wypadków (bez zwrotu premij) — przez a, to ogólna premia roczna wynosi ap_x, zaś przeznaczona wyłącznie tylko na ubezpieczenie zwrotu premij równa się $ap_x - a = a(p_x - 1)$.

Załóżmy w (278′) $\mathrm{M}_\nu = (\nu + 1) \,.\, ap_x$, $\mathrm{M}_{\nu+1} = (\nu + 2) ap_x, \ldots$ $\ldots, \mathrm{M}_{n-1} = \mathrm{M}_n = \mathrm{M}_{n+1} = \ldots = \mathrm{M}_{\mathrm{N}-1} = nap_x$, $\mathrm{M}_\mathrm{N} = \mathrm{M}_{\mathrm{N}+1} = \mathrm{M}_{\mathrm{N}+2} = \ldots = 0$; $\mathrm{V}_\nu = \mathrm{V}_{\nu+1} = \mathrm{V}_{\nu+2} = \ldots = \mathrm{V}_{\mathrm{N}-1} = 0$, $\mathrm{V}_\mathrm{N} = nap_x$, $\mathrm{V}_{\mathrm{N}+1} = \mathrm{V}_{\mathrm{N}+2} = \ldots = 0$; $p_\nu = p_{\nu+1} = p_{\nu+2} = \ldots = p_{n-1} = a(p_x - 1)$, $p_n = p_{n+1} = \ldots = 0$.

Wówczas otrzymujemy

$$\operatorname{Rez}(\nu) = \frac{r^{\frac{1}{2}} \,.\, ap_x}{v_{x+\nu}} \cdot \left[(\nu + 1)\, m_{x+\nu} + (\nu + 2)\, m_{x+\nu+1} + \ldots\right.$$

$$\ldots + (n - 1) m_{x+n-2} + n \,.\, m_{x+n-1} + n(m_{x+n} + m_{x+n+1} + \ldots + m_{x+\mathrm{N}-1})\Big] +$$

$$+ \frac{v_{x+\mathrm{N}}}{v_{x+\nu}} \cdot nap_x - \frac{a(p_x - 1)}{v_{x+\nu}} \cdot (v_{x+\nu} + v_{x+\nu+1} + \ldots + v_{x+n-1}) =$$

$$= \frac{r^{\frac{1}{2}} ap_x}{v_{x+\nu}} \cdot \big[\nu(\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma m_{x+n}) + (m_{x+\nu} + 2m_{x+\nu+1} + \ldots + (n - \nu) m_{x+n-1}) +$$

$$+ n(\Sigma m_{x+n} - \Sigma m_{x+\mathrm{N}})\big] + n.ap_x \cdot \frac{v_{x+\mathrm{N}}}{v_{x+\nu}} - \frac{a(p_x - 1)}{v_{x+\nu}} \cdot (\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n}) =$$

$$= \frac{r^{\frac{1}{2}} ap_x}{v_{x+\nu}} \cdot \big[\nu(\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma m_{x+n}) + (\Sigma\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma\Sigma m_{x+n} - (n - \nu)\Sigma m_{x+n}) +$$

$$+ n(\Sigma m_{x+n} - \Sigma m_{x+\mathrm{N}})\big] + n.ap_x \cdot \frac{v_{x+\mathrm{N}}}{v_{x+\nu}} - \frac{a(p_x - 1)}{v_{x+\nu}} \cdot (\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n}).$$

Inaczej

$$\mathrm{Rez}(\nu) = \frac{r^{\frac{1}{2}} a p_x}{v_{x+\nu}} \cdot [(\nu \Sigma m_{x+\nu} - n \Sigma m_{x+\mathrm{N}}) + (\Sigma\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma\Sigma m_{x+n})] +$$

$$+ n.a p_x \cdot \frac{v_{x+\mathrm{N}}}{v_{x+\nu}} - \frac{a(p_x - 1)}{v_{x+\nu}} \cdot (\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n}),$$

albo ostatecznie

$$(300) \qquad \mathrm{Rez}(\nu) = \frac{a}{v_{x+\nu}} \cdot \Big[p_x \cdot \{ r^{\frac{1}{2}} [\nu \Sigma m_{x+\nu} + (\Sigma\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma\Sigma m_{x+n}) -$$

$$- n \Sigma m_{x+\mathrm{N}}] + n v_{x+\mathrm{N}} \} - (p_x - 1)(\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n}) \Big].$$

Ten kształt wyrażenia na rezerwę łatwo sobie bezpośrednio wytłumaczyć można.

Przejdźmy do obliczania rezerwy od ubezpieczeń opartych na życiu dwóch osób.

102. OBLICZANIE REZERWY OD UBEZPIECZEŃ OPARTYCH NA ŻYCIU DWÓCH OSÓB. Dla rezerwy premiowej od ubezpieczeń opartych na życiu dwóch i więcej osób możnaby również wyprowadzić wzory ogólne, podobne do (277) i (278), ale ponieważ — z przyczyny nader wielkiej rozmaitości warunków, pod jakimi renty lub kapitały mogą być, w tego rodzaju ubezpieczeniach, wypłacane — wzory ogólne przybrałyby nadzwyczaj złożoną postać, zatem lepiej jest dla każdego rodzaju ubezpieczeń oddzielnie specyalny wzór wyprowadzić.

Po dokładnem zrozumieniu istoty rezerwy oraz wyrobieniu w sobie pewnej zdolności oryentowania się w danych warunkach, jaką czytelnik musiał nabyć studyując uważnie to wszystko, cośmy dotąd o rezerwie powiedzieli, rzecz sama nie powinna przedstawiać wielkich trudności — tem bardziej, że zasadnicze prawidła na obliczanie rezerwy premiowej pozostają i dla ubezpieczeń opartych na życiu dwóch i więcej osób te same co i dla ubezpieczeń opartych na życiu jednej osoby.

Ogólnie nadmienimy tylko, że i obecnie dwa są sposoby postępowania: albo rozpatrywać można wartości już dokonanych wypłat przez instytucyę i daną grupę osób ubezpieczonych, albo też wartości wypłat dopiero w przyszłości dokonać się mających. W obu razach różnica wartości zobopólnych wypłat, podzielona przez liczbę ważnych, w chwili obliczania rezerwy, ubezpieczeń stanowi rezerwę premiową dla każdego pojedynczego ubezpieczenia.

W niniejszym artykule zajmiemy się sposobami obliczania rezerwy od najważniejszych ubezpieczeń, podanych w rozdziale VII.

I. Ubezpieczenie renty płatnej do śmierci pierwszej z dwóch osób ubezpieczonych (art. 80 i 81).

Po upływie ν lat, ubezpieczona para, y i x letnia w chwili zawierania umowy, jest w takiem samem położeniu, jak para $y + \nu$ i $x + \nu$ letnia, zawierająca umowę w chwili obliczania rezerwy. Że zaś ta ostatnia para powinna opłacić jednorazowo premię

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu, x+\nu};$$

zatem instytucya dla y, x letniej pary, ubezpieczonej przed ν laty, winna posiadać w rezerwie to samo, co wnosi para $y+\nu$, $x+\nu$ letnia, ubezpieczająca się w chwili obliczania rezerwy, t. j.

$$(301)\qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu, \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right\} = \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu,x+\nu}.$$

Z tej samej przyczyny, dla renty odroczonej na n lat, przy premii jednorazowej, dopóki $\nu < n$,

$$(302)\qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu, {}_n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right\} = {}_{n-\nu}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu,x+\nu}.$$

Jeżeli $\nu > n$, wyrażenie na rezerwę identyfikuje się z (301).

Gdy premie wnoszą się rocznie (oznaczać je będziemy symbolem $p_{y,x}$) przez cały czas trwania odroczenia, oczywiście

$$(302')\qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu, {}_n\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right\} = {}_{n-\nu}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu,x+\nu} - p_{y,x}\,.\,{}^{n-\nu}\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu,x+\nu}.$$

II. Ubezpieczenie renty płatnej do śmierci drugiej z 2-ch osób ubezpieczonych (art. 82).

$$(303)\qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu, \overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right\} = \overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y+\nu\ x+\nu}$$ dotąd, póki obie osoby żyją; albowiem w razie, gdyby jedna z pomienionych dwóch osób po ν latach już nie żyła, rezerwę należy obliczyć według metody podanej dla ubezpieczeń opartych na życiu pojedynczej osoby.

Dla renty odroczonej na n lat, przy premii jednorazowej, dopóki $\nu < n$,

$$(304)\qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu, {}_n\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right\} = {}_{n-\nu}\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y+\nu,x+\nu};$$

przy premiach rocznych, płatnych przez czas odroczenia,

$$(304')\qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu, {}_n\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y,x}\right\} = {}_{n-\nu}\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y+\nu,x+\nu} - p_{y,x}.{}^{n-\nu}\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{R}}_{y+\nu,x+\nu}.$$

Gdy $\nu > n$, obliczenie rezerwy dokonywa się, oczywiście, przy pomocy wzoru (303).

III. Ubezpieczenie renty na przeżycie (art. 83).

Na tej samej zasadzie, co i w przypadku I, dla premii jednorazowej

$$(305)\qquad \mathrm{Rez}(\nu, \mathrm{R}_{y,x}) = \mathrm{R}_{y+\nu,x+\nu} = \mathrm{R}_{y+\nu} + \mathrm{R}_{x+\nu} - 2\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu,x+\nu};$$

dla premij rocznych

$$(305')\qquad \mathrm{Rez}(\nu, \mathrm{R}_{y,x}) = \mathrm{R}_{y+\nu,x+\nu} - p_{y,x}\,.\,\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu,x+\nu}$$

dotąd, póki obie osoby pozostają przy życiu.

Gdy jedna osoba umrze, rezewa oblicza się jak od renty natychmiastowej, opartej na życiu pojedynczej osoby.

IV. Ubezpieczenie jednostronnej renty na przeżycie, bez zwrotu premij (art. 83).

Dla premii jednorazowej

$$(306)\qquad \mathrm{Rez}(\nu, \mathrm{R}_{(y),x}) = \mathrm{R}_{(y+\nu),x+\nu} = \mathrm{R}_{x+\nu} - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu,x+\nu};$$

dla premij rocznych

$$(306') \qquad \mathrm{Rez}(\nu,\mathrm{R}_{(y),x}) = \mathrm{R}_{(y+\nu),x+\nu} - p_{y,x} \cdot \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu;x+\nu} =$$

$$= \mathrm{R}_{x+\nu} - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu;x+\nu} - p_{y,x}.\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu;x+\nu} = \mathrm{R}_{x+\nu} - (1 + p_{y,x}).\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu;x+\nu}.$$

Gdy jedna z dwóch pomienionych osób umrze, rezerwa, w razie śmierci ubezpieczyciela, wyniesie $\mathrm{R}_{x+\nu}$; w razie śmierci osoby zabezpieczonej będzie równa zeru.

V. Ubezpieczenie jednostronnej renty na przeżycie ze zwrotem premij w razie śmierci osoby zabezpieczonej przed ubezpieczycielem (o ile ubezpieczyciel żyje przy końcu roku, w którym śmierć osoby zabezpieczonej nastąpiła, art. 84).

Przy premii jednorazowej, dane ubezpieczenie można rozłożyć na dwie składowe części: na jednostronne ubezpieczenie renty bez zwrotu premii i na jednostronne ubezpieczenie kapitału pośmiertnego, w wysokości opłaconej premii (brutto lub netto), płatnego ubezpieczycielowi, jeżeli osoba zabezpieczona wprzód umrze. Skutkiem tego, gdy mamy zwrócić premię brutto

$$(307) \qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu,\overset{(z)}{\mathrm{R}}_{(y),x}\right\} = \mathrm{R}_{(y+\nu),x+\nu} + \overset{(z)}{\mathrm{R}}_{(y),x}.\mathrm{Q}.\mathrm{K}_{(x+\nu);y+\nu} =$$

$$= \mathrm{R}_{x+\nu} - \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu;x+\nu} + \mathrm{Q}.\overset{(z)}{\mathrm{R}}_{(y),x}.\mathrm{K}_{(x+\nu),y+\nu}.$$

Gdyby się zwracało premię netto, należałoby w (307) założyć $\mathrm{Q} = 1$.

Przy premiach rocznych, dane ubezpieczenie, po ν latach, składa się z następujących trzech cześci: *a*) z ubezpieczenia jednostronnej renty (na korzyść osoby zabezpieczonej) bez zwrotu premij; *b*) z jednostronnego ubezpieczenia kapitału pośmiertnego, w wysokości ν razy wziętej rocznej premii brutto (na korzyść ubezpieczyciela) i *c*) z jednostronnego ubezpieczenia kapitału pośmiertnego, corocznie rosnącego o opłacaną premię brutto (również na korzyść ubezpieczyciela).

Po ν latach zatem, jednorazowa premia za tak złożone ubezpieczenie wynosi:

a) z tytułu pierwszej składowej części

$$\mathrm{R}_{(y+\nu);x+\nu};$$

b) z tytułu drugiej składowej części

$$\nu.p_{y,x}.q.\mathrm{K}_{(x+\nu);y+\nu};$$

c) z tytułu trzeciej części składowej, według (α'') w art. 84,

$$p_{y,x}.q.\left\{\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu;x+\nu} + \frac{v_{y+\nu+1}}{v_{y+\nu}}\overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu+1,x+\nu} - \overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu;x+\nu}\right\}.$$

Razem premia jednorazowa, dla osób ubezpieczających się po ν latach, wynosi

$$(\alpha) \quad \mathrm{R}_{(y+\nu);x+\nu} + p_{y,x}.q.(\nu.\mathrm{K}_{(x+\nu);y+\nu} + \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu;x+\nu} + \frac{v_{y+\nu+1}}{v_{y+\nu}}\overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu+1,x+\nu} - \overset{<\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu,x+\nu}).$$

Gdy od tej premii jednorazowej odejmiemy wartość mających się jeszcze wnieść premij netto, czyli

$$p_{y,x} \,.\, \overset{\text{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu;x+\nu},$$

otrzymamy szukaną rezerwę, t. j., po podstawieniu w (α)

$$\mathrm{R}_{(y+\nu);x+\nu} = \mathrm{R}_{x+\nu} - \overset{\text{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu,x+\nu},$$

$$(307') \qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu, \overset{(z)}{\mathrm{R}}_{(y),x}\right\} = \mathrm{R}_{x+\nu} - (1 + p_{y,x})\overset{\text{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu;x+\nu} +$$

$$+ p_{y,x} . q . \left\{\nu . \mathrm{K}_{(x+\nu);y+\nu} + \overset{\text{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu;x+\nu} + \frac{v_{y+\nu+1}}{v_{y+\nu}} . \overset{<\text{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu+1;x+\nu} - \overset{<\text{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu;x+\nu}\right\}.$$

Podobne wzory możnaby otrzymać dla przypadku, w którym premie zwracają się zawsze, gdy osoba zabezpieczona umiera przed ubezpieczycielem (patrz koniec art. 84).

VI. Ubezpieczenie kapitału pośmiertnego na krótsze życie jednej z dwóch osób (art. 89).

Po upływie ν lat, ubezpieczona para, licząca w chwili zawierania umowy y, x lat, pozostaje w takich samych warunkach, jak $y+\nu$, $x+\nu$ letnia para, zawierająca umowę w chwili obliczania rezerwy. Że zaś ta ostatnia para, za omawiane ubezpieczenie, winna jednorazowo zapłacić netto

$$\overset{\text{I}}{\mathrm{K}}_{y+\nu;x+\nu},$$

przeto taką samą kwotę instytucya posiadać musi na rachunku pary ubezpieczonej przed ν laty, t. j.

$$(308) \qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu, \overset{\text{I}}{\mathrm{K}}_{y,x}\right\} = \overset{\text{I}}{\mathrm{K}}_{y+\nu;x+\nu}.$$

Jeżeli premia opłaca się rocznie, w wysokości po $p_{y,x}$, od premii jednorazowej należy odjąć wartość matematyczną spodziewanych premij aż do śmierci jednej z dwóch osób ubezpieczonych, czyli

$$(308') \qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu, \overset{\text{I}}{\mathrm{K}}_{y,x}\right\} = \overset{\text{I}}{\mathrm{K}}_{y+\nu;x+\nu} - p_{y,x} . \overset{\text{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu;x+\nu}.$$

Gdyby premie roczne miały być płacone najwyżej przez n lat

$$(308'') \qquad \mathrm{Rez}(\nu) = \overset{\text{I}}{\mathrm{K}}_{y+\nu;x+\nu} - {}^{n}p_{y,x} . {}^{n-\nu}\overset{\text{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu;x+\nu}.$$

VII. Ubezpieczenie kapitału pośmiertego na dłuższe życie jednej z dwóch osób (art. 91).

Rozumując w podoby sposób, jak w przypadku VI, znajdziemy dla obecnego rodzaju ubezpieczeń:
przy premii jednorazowej

$$(309) \qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu, \overset{\text{II}}{\mathrm{K}}_{y,x}\right\} = \overset{\text{II}}{\mathrm{K}}_{y+\nu;x+\nu};$$

przy premiach rocznych

$$(309') \qquad \mathrm{Rez}\left\{\nu, \overset{\text{II}}{\mathrm{K}}_{y,x}\right\} = \overset{\text{II}}{\mathrm{K}}_{y+\nu;x+\nu} - p_{y,x} . \overset{\text{II}}{\mathrm{R}}_{y+\nu;x+\nu}.$$

Gdy po ν latach żyje już tylko osoba, licząca, w chwili zawierania umowy, x lat

(310) $$\mathrm{Rez}(\nu) = \overset{s}{\mathrm{K}}_{x+\nu} - p_{y,x}.\mathrm{R}_{x+\nu};$$

gdy żyje tylko osoba, licząca, w chwili zawierania umowy, y lat

(310′) $$\mathrm{Rez}(\nu) = \overset{s}{\mathrm{K}}_{y+\nu} - p_{y,x}.\mathrm{R}_{y+\nu}.$$

VIII. Jednostronne ubezpieczenie kapitału pośmiertnego na przeżycie (art. 92).

Przy premii jednorazowej

(311) $$\mathrm{Rez}(\nu,\mathrm{K}_{(y),x}) = \mathrm{K}_{(y+\nu);x+\nu};$$

przy premiach rocznych

(311′) $$\mathrm{Rez}(\nu,\mathrm{K}_{(y),x}) = \mathrm{K}_{(y+\nu);x+\nu} - p_{y,x}\,.\,\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{y+\nu;x+\nu}$$

Dla takiego samego rodzaju ubezpieczenia kapitału, lecz ze zwrotem premij w razie śmierci osoby zabezpieczonej przed ubezpieczycielem, rezerwa oblicza się w podobny sposób jak dla analogicznej renty (przypadek V).

Na zakończenie weźmy

IX. Ubezpieczenie kapitału posagowego na warunkach podanych w art. 95.

Po ν latach dane ubezpieczenie rozkłada się na następujące trzy części: *a*) na ubezpieczenie 1-ki kapitału posagowego, płatnego po upływie $n - \nu$ lat w razie, jeżeli wówczas ubezpieczone dziecko żyć jeszcze będzie; *b*) na czasowe, przez $n - \nu$ lat trwające, ubezpieczenie kapitału pośmiertnego, oparte na życiu $x + \nu$ letniego dziecka, w wysokości ν razy wziętej opłacanej rocznie premii brutto i *c*) na czasowe, również przez $n - \nu$ lat trwające, ubezpieczenie kapitału pośmiertnego, corocznie wzrastającego o opłacaną rocznie premię brutto (dopóki takowa była wnoszoną przez czas życia ubezpieczyciela), również oparte na życiu $x + \nu$ letniego dziecka.

Po ν latach zatem, jednorazowa premia za tak złożone ubezpieczenie wynosi:

a) z tytułu pierwszej składowej części

$${}_{n-\nu}\overset{d}{\mathrm{K}}_{x+\nu} = \frac{v_{x+n}}{v_{x+\nu}};$$

b) z tytułu drugiej składowej części

$$\nu.p_{y,x}.q.{}^{n-\nu}\overset{s}{\mathrm{K}}_{x+\nu};$$

c) z tytułu trzeciej składowej części, według (γ) art. 95,

$$\frac{p_{y,x}q}{\lambda_{y+\nu}v_{x+\nu}}\,.\,[(\Sigma\lambda_{y+\nu}\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma\lambda_{y+n}\Sigma m_{x+n}) - (\Sigma\lambda_{y+\nu} - \Sigma\lambda_{y+n})\,\Sigma m_{x+n}].$$

Czyli razem premia jednorazowa, dla osób ubezpieczających się po ν latach, wynosi

$$ {}_{n-\nu}\overset{d}{K}_{x+\nu}+p_{y,x}q\left(\nu.{}^{n-\nu}\overset{s}{K}_{x+\nu}+\frac{(\Sigma\lambda_{y+\nu}\Sigma m_{x+\nu}-\Sigma\lambda_{y+n}\Sigma m_{x+n})-(\Sigma\lambda_{y+\nu}-\Sigma\lambda_{y+n})\Sigma m_{x+n}}{\lambda_{y+\nu}v_{x+\nu}}\right) $$

Gdy od ostatniego wyrażenia odejmiemy wartość mających się wnieść premij netto, t. j.

$$ p_{y,x}.{}^{n-\nu}\overset{I}{R}_{y+\nu;x+\nu}, $$

otrzymamy szukaną rezerwę

$$ (312) \qquad \mathrm{Rez}(\nu)={}_{n-\nu}\overset{d}{K}_{x+\nu}+p_{y,x}q.\left(\nu.{}^{n-\nu}\overset{s}{K}_{x+\nu}+\right. $$

$$ \left.+\frac{(\Sigma\lambda_{y+\nu}\Sigma m_{x+\nu}-\Sigma\lambda_{y+n}\Sigma m_{x+n})-(\Sigma\lambda_{y+\nu}-\Sigma\lambda_{y+n})\Sigma m_{x+n}}{\lambda_{y+\nu}v_{x+\nu}}\right)-p_{y,x}.{}^{n-\nu}\overset{I}{R}_{y+\nu;x+\nu}. $$

Wzorów na obliczanie rezerwy w innych kombinacyach nie podajemy, każdy bowiem z czytelników — po tem, cośmy dotąd powiedzieli—bez wątpienia sam sobie radzić potrafi.

103. OBLICZANIE REZERWY WEDŁUG PREMIJ BRUTTO. Z art. 68 wiemy, że premie netto wystarczają na pokrywanie zobowiązań instytucyi względem osób ubezpieczonych o ile śmiertelność rzeczywista odpowiada prawdopodobnej, ale nie mogą wystarczyć na inne wydatki, nieuniknione przy prowadzeniu interesu asekuracyjnego. Na te inne wydatki przeznacza się t. z. dodatek administracyjny, który więc ma swoje specyalne przeznaczenie, a tem samem w zasadzie nie powinien być obracany na pokrywanie zobowiązań względem osób ubezpieczonych. Że zaś rezerwa premiowa stanowi wartość praw nabytych przez osoby ubezpieczone do chwili jej obliczania, wypada więc stąd oczywiście — o czem zresztą przekonywa art. 96 — iż rezerwa rachowaną być powinna na podstawie premij netto, nie brutto.

Pomimo to są podobno instytucye, które obliczają rezerwę według premij brutto. Zobaczmy, jakie stąd wyniknąć mogą następstwa.

Rezerwę po ν latach (dla osoby zawierającej umowę w wieku lat x), obliczoną według premij netto, oznaczmy przez $\mathrm{Rez}(\nu,n)$; obliczoną według premij brutto — przez $\mathrm{Rez}(\nu,b)$. Dla krótkości pierwszą zwać będziemy rezerwą netto, drugą — rezerwą brutto.

Jeżeli dalej przez $P_{x+\nu}$ oznaczymy jednorazową premię netto za dane ubezpieczenie, zawarte w chwili obliczania rezerwy; przez p_x opłacaną rocznie premię netto, a przez $R_{x+\nu}$ wartość jednostki renty, płatnej z góry, od chwili obliczania rezerwy, przez czas dalszego wnoszenia premij rocznych, to, jak nam wiadomo,

$$ (\alpha) \qquad \mathrm{Rez}(\nu,n)=P_{x+\nu}-p_x.R_{x+\nu}\ (*) $$

$$ (\beta) \qquad \mathrm{Rez}(\nu,b)=P_{x+\nu}-p_x.q.R_{x+\nu}\ (*). $$

(*) Gdyby premie były wnoszone nie dośmiertnie, tylko przez n lat, w miejsce $R_{x+\nu}$ należałoby podstawić ${}^{n-\nu}R_{x+\nu}$.

Odjąwszy (β) od (α), wypada różnica

$$(\gamma) \qquad \mathrm{Rez}(\nu,n) - \mathrm{Rez}(\nu,b) = (q-1)p_x.\mathrm{R}_{x+\nu}.$$

Ponieważ $q > 1$, strona druga ostatniej równości jest dodatnią, skutkiem czego

$$\mathrm{Rez}(\nu,n) > \mathrm{Rez}(\nu,b),$$

t. j. rezerwa netto jest większa od rezerwy brutto.

$\mathrm{R}_{x+\nu}$ maleje z wiekiem, czyli ze wzrostem ν, różnica więc pomiędzy rezerwą netto i brutto stale, z biegiem lat trwania ubezpieczeń, maleje, aż wkońcu, gdy $\mathrm{R}_{x+\nu} = 0$, t. j. gdy premie przestają się wnosić, różnica pomiędzy obu rezerwami znika. Innemi słowy: rezerwa netto jest stale większą od rezerwy brutto, lecz z biegiem lat obie zbliżają się do siebie — stając się równemi w chwili, gdy czas wnoszenia premij upłynie.

Wynika stąd, że instytucye obliczające rezerwę według premij netto posiadają stosunkowo większe zapasy, są więc bezpieczniejsze od instytucyj obliczających rezerwę według premij brutto.

Weźmy parę przykładów.

Osoba 20-letnia ubezpiecza kapitał 10 000 fr., płatny przy końcu roku, w którym jej śmierć zajdzie, obowiązując się wzamian płacić premie roczne aż do śmierci. Dodatek na administracyę wynosi 30% premii netto.

Według tab. X, kol. 3, roczna premia netto za takie ubezpieczenie równa się 137,86 fr., premia brutto 137,86 × 1,3 = 179,218 fr.

Podstawiwszy w (α) i (β): $x = 20$, za ν kolejno 1, 2, 3, 4, . . . , 20 i wyjmując z tab. X, kol. 1 i 2 odpowiednie wartości na $\mathrm{R}_{x+\nu}$ i $\mathrm{P}_{x+\nu}$, otrzymujemy

Po latach	Rezerwa				Różnica pomiędzy rezerwą netto i brutto	
	Netto		Brutto			
1	70	23	— 792	49	862	72
2	142	66	— 713	76	856	42
3	217	32	— 632	62	849	94
4	294	20	— 549	06	843	26
5	373	38	— 463	00	836	38
6	454	97	— 374	32	829	29
7	538	97	— 283	03	822	00
8	625	47	— 189	02	814	49
9	714	46	— 92	29	806	75
10	806	07	+ 7	29	798	78
12	997	28	+ 215	10	782	18
15	1 305	16	+ 549	74	755	42
20	1 881	15	+1175	77	705	38

Gdyby premie roczne za to samo ubezpieczenie miały być wnoszone nie do śmierci, tylko najwyżej przez lat 20, premia netto

$p_{20} = \frac{\Sigma m_{20}}{\Sigma v_{20} - \Sigma v_{40}} \times 10000 = 210{,}18$ fr. rocznie; premia brutto, przy 25% dodatku, $210{,}18 \times 1{,}25 = 262{,}73$ fr. rocznie.

Wartości rent czasowo płatnych, przez lat 19, 18, 17 i t. d., osobom w wieku lat 21, 22, 23 i t. d., obliczone według wzoru ${}^{20-\nu}R_{20+\nu} = \frac{\Sigma v_{20+\nu} - \Sigma v_{40}}{v_{20+\nu}}$, przedstawiają się jak następuje

Wiek $20+\nu$	Czas płacenia renty $20-\nu$	Wartość 1-ki rocznej renty płatnej z góry	Wiek $20+\nu$	Czas płacenia renty $20-\nu$	Wartość 1-ki rocznej renty płatnej z góry
21	19	13,323 473	28	12	9,573 706
22	18	12,849 583	29	11	8,946 600
23	17	12,356 551	30	10	8,293 357
24	16	11,843 618	32	8	6,903 427
25	15	11,309 846	35	5	4,588 280
26	14	10,754 247	40	0	0,000 000
27	13	10,175 903	—	—	—

Gdy powyższe wartości rent podstawiać będziemy kolejno w (α) i (β) za $R_{x+\nu}$, za p_x i $p_x q$ obliczone premie, a za $P_{x+\nu}$ odpowiednie wartości z tab. X, kol. 2, wypadnie

Po latach	Rezerwa				Różnica pomiędzy rezerwą netto i brutto	
	Netto		Brutto			
1	145	63	— 554	52	700	15
2	296	69	— 378	55	675	24
3	453	35	— 195	99	649	34
4	615	78	— 6	60	622	38
5	784	22	+ 189	88	594	34
6	958	95	+ 393	82	565	13
7	1 140	18	+ 605	44	534	74
8	1 328	20	+ 825	10	503	10
9	1 523	22	+ 1 053	08	470	14
10	1 725	60	+ 1 289	79	435	81
12	2 153	57	+ 1 790	79	362	78
15	2 858	89	+ 2 617	78	241	11
20	4 232	43	+ 4 232	43	—	—

Obie powyższe tablice stwierdzają wyprowadzone przez nas teoretycznie wnioski, że rezerwa netto jest większa od rezerwy brutto i że ich wysokości stopniowo zbliżają się do siebie, aż wkońcu, gdy upływa termin płatności premij, stają się sobie równe.

Oprócz tego pokazują jeszcze, iż rezerwa brutto, w pierwszych latach trwania umowy, może być ujemną. Zachodzi pytanie, jakie jest znaczenie rezerwy ujemnej?

Przypuśćmy, że gdy nasza 20-letnia osoba zawiera umowę według kombinacyi, do której odnosi się pierwsza z dwóch powyżej podanych tablic, instytucya posiada już pewnej wysokości rezerwę, zebraną dla osób poprzednio ubezpieczonych. Jeżeli obliczamy rezerwę według premij netto, to po roku, na rachunek naszej osoby, z wniesionej przez nią premii, odkłada instytucya do ogólnej rezerwy 70,23 fr. Po 2-ch latach dołącza 142,66—70,23=72,43 fr., aby mieć razem, zgodnie z rachunkiem, 142,66 fr. Po 3-ch latach dołącza 217,32 — 142,66 = 74,66 fr. i t. d. To samo czyni naturalnie instytucya ze wszystkiemi innemi w mocy będącemi ubezpieczeniami, reszta zaś, pozostała z dochodów rocznych, po potrąceniu wszelkich innych wydatków, stanowi zysk, który instytucya ma prawo rozdzielić pomiędzy akcyonaryuszów lub ubezpieczonych — stosownie do obowiązujących ją przepisów.

Jeżeli obliczymy rezerwę według premij brutto, ujemna ilość — 792,49 dowodzi, że instytucya, na rachunek omawianej osoby, ma prawo z ogólnej rezerwy zaczerpnąć 792,49 fr. i obrócić je na bieżące wydatki (*). Gdy instytucya zaczerpnie owe 792,49 fr, będzie dłużną ogólnej rezerwie 862, 72 fr. (792,49 ujęte rezerwie + nieodłożone 70,23 fr.), które z biegiem czasu musi zwrócić z procentem. Środków na to dostarczyć mogą tylko premie wnoszone przez osobę ubezpieczoną, że zaś premie netto wystarczą zaledwie na pokrycie szkód i przyrostu rezerwy w latach dalszych, dług zatem z procentem spłacać trzeba z dodatku na administracyę, wynoszącego 179,218 — 137,86 = = 41,358 fr. rocznie. Otóż wartość matematyczna tego dodatku, obliczona na koniec pierwszego roku trwania umowy$=41,358\times R_{21}=41,358\times 20,85979=$ $= 862,72$ fr., t. j. wynosi właśnie tyle, ile instytucya stała się dłużną rezerwie.

Pokazuje się z tego, że przy obliczaniu rezerwy według premij brutto, z wnoszonych w dalszych latach premij nic nie może być użyte na koszta administracyjne, które więc zawsze muszą być pokrywane z premij pierwszorocznych, wnoszonych przez osoby zawierające nowe ubezpieczenia. Jeżeli liczba osób nowo ubezpieczonych się zmniejszy, może zabraknąć środków na koszta administracyjne, które, w nadziei lepszej przyszłości, zostaną pokryte z niekompletnej rezerwy dawnych ubezpieczeń, t. j. powstanie deficyt.

Dalej — ubezpieczeni mają prawo zrywać umowy. Gdy się to zdarzy, nie będzie z czego pokryć długu, zaciągniętego z rezerwy na rachunek mających wpływać premij brutto, które niedopisały, czyli deficyt się zwiększy; że

---

*) Gdyby nie było jeszcze nagromadzonej rezerwy, możnaby zapożyczyć się u kapitału zakładowego lub u osób trzecich.

zaś nadto zrywającym umowę trzeba jeszcze zwrócić część rezerwy (wykup polis - patrz rozd. IX), obliczonej w sposób racyonalny, t. j. na podstawie premij netto, co znów trzeba załatwić z niekompletnej rezerwy innych ubezpieczeń, więc deficyt zwiększy się jeszcze bardziej, aż wkońcu może nastąpić bankructwo, tem dla społeczeństwa szkodliwsze, że dotknie przeważnie ludzi ciężkiej pracy, powierzających instytucyi z trudem zaoszczędzony grosz, w nadziei zabezpieczenia bytu sobie na starość lub rodzinie na przypadek przedwczesnego sieroctwa.

Ażeby zapobiedz możności, pozornie legalnego, czerpania funduszów z rezerwy premiowej na niewłaściwe cele, można przyjmować rezerwę ujemną za zero. Jest to wszakże tylko półśrodek, dopuszcza bowiem gromadzenie rezerwy mniejszej od tej jaka być powinna.

Najradykalniejszym sposobem zapobieżenia złemu jest zobowiązanie instytucyj do obliczania rezerwy według premij netto, troskliwe odkładanie rezerwy i gromadzenie kapitału zasobowego na przypadek nienormalnie wysokiej śmiertelności. Wówczas instytucya, choćby nie rozwijała się zbyt świetnie, będzie dostatecznie odpowiedzialną i nigdy nie zawiedzie pokładanego w niej zaufania.

W niektórych, zresztą bardzo rzadkich, przypadkach rezerwa może wypaść ujemna nawet gdy ją obliczamy według premij netto. Trafia się to np. w czasowych ubezpieczeniach pośmiertnych — zwłaszcza malejących, lub w ubezpieczeniach jednostronnych, gdy wiek osoby zabezpieczonej jest znacznie wyższy od wieku ubezpieczyciela.

Rezultat taki dowodzi, że po upływie pewnej liczby lat wartość zobowiązań instytucyi staje się mniejszą od wartości zobowiązań osoby ubezpieczonej, co jest stanem nienormalnym, mogącym skłonić ubezpieczonego do zerwania niekorzystnej już wtedy dla niego umowy. Dla zapobieżenia tej niewłaściwości należy dane ubezpieczenie tak przekształcić, aby obowiązki ubezpieczonego z biegiem lat malały, t. j. premie stałe zastąpić przez odpowiednio malejące, skutkiem czego rezerwę premiową zawsze w stanie dodatnim utrzymać można.

104. REZERWA PREMIOWA WOBEC ZILLMEROWSKIEJ METODY UMARZANIA PROWIZYI AKWIZYCYJNEJ (kosztów zawierania ubezpieczeń). W art. 69 opisaliśmy zillmerowską metodę umarzania prowizyi akwizycyjnej, polegającą na wypłacaniu tej ostatniej z pierwszorocznej premii netto i pokrywaniu wydatku przez odpowiednie zwiększenie dalszych premij netto. Nadmieniliśmy tam, że przeciwko pomysłowi Zillmera powstała opozycya, czyniąca metodzie różne, podane w art. 69, zarzuty, a pomiędzy innymi i obniżenie rezerwy premiowej.

Wzorem na obliczanie premii netto, umarzającej prowizyę akwizycyjną, jest

(183) $$p_{x(a)} = p_x + \frac{a}{R_x}$$, gdy premie wnoszą się dośmiertnie;

(183′) $$p_{x(a)} = p_x + \frac{a}{{}^{n}\mathrm{R}_x}, \text{ gdy się wnoszą czasowo przez } n \text{ lat.}$$

$p_{x(a)}$ oznacza premię szukaną (za 1-kę ubezpieczonego kapitału); p_x zwyczajną premię netto, a wyobraża wysokość prowizyi akwizycyjnej w stosunku do 1-ki ubezpieczonego kapitału.

Przy obliczaniu rezerwy netto stosujemy wzór

(α) $$\mathrm{Rez}(\nu,n) = \mathrm{P}_{x+\nu} - p_x . \mathrm{R}_{x+\nu}\ (^*),$$

przechodzący w metodzie Zillmera na

(β) $$\mathrm{Rez}(\nu,z)\ (^{**}) = \mathrm{P}_{x+\nu} - p_{x(a)} . \mathrm{R}_{x+\nu}\ (^*).$$

Ponieważ $p_{x(a)} > p_x$, zatem

(γ) $$\mathrm{Rez}(\nu,n) > \mathrm{Rez}(\nu,z),$$

skąd wynika, że obliczaniu rezerwy według premij zillmerowskich można, w zasadzie, uczynić te same zarzuty, co i obliczaniu rezerwy według premij brutto, lecz w stopniu zmniejszonym, gdyż $p_{x(a)}$, jako mieszczące w sobie amortyzacyę samej tylko prowizyi akwizycyjnej, jest mniejsze od premii brutto $p_x . q$, zawierającej obok środków na umorzenie prowizyi jeszcze i wszelkie inne wydatki.

Jeżeli prowizya akwizycyjna jest bardzo wysoka, rezerwa, obliczona według premij zillmerowskich, w pierwszych latach może wypaść, podobnie jak rezerwa brutto, ujemna.

Można tego jednak uniknąć naznaczywszy prowizyę akwizycyjną niższą od różnicy pomiędzy premią zillmerowską i premią naturalną (art. 97), inaczej zwaną ryzyko premią (art. 69), za pierwszy rok ubezpieczeniowy, t. j. czyniąc

(δ) $$a < p_{x(a)} - \frac{m_x}{v_x} .$$

Wówczas bowiem ryzyko premia wystarczy na pokrycie szkód pierwszorocznych (przy normalnej śmiertelności), a pozostała reszta, po strąceniu akwizycyi, może iść na rezerwę. W każdym razie, rezerwa obliczona według premij zillmerowskich, podobnie jak rezerwa brutto, stale będzie mniejsza od rezerwy netto, obie z biegiem lat będą się do siebie zbliżały, ale staną się równemi dopiero po upływie czasu wnoszenia premij.

Weźmy np. pod uwagę, dla naocznego stwierdzenia naszych rozumowań, drugi sposób ubezpieczenia się 20-o letniej osoby, podany w artykule poprzednim.

Zillmerowska premia netto za to ubezpieczenie równa się

$$p_{20(a)} = p_{20} + \frac{a}{{}^{20}\mathrm{R}_{20}} = 0{,}021\,018 + \frac{a}{\dfrac{\Sigma v_{20} - \Sigma v_{40}}{v_{20}}} =$$

$$= 0{,}021\,018 + \frac{a}{645\,870{,}55 : 46\,873{,}32} = 0{,}021\,018 + \frac{a}{13{,}779\,066};$$

---

*)Lub ${}^{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu}$, jeżeli premie wnoszą się czasowo przez n lat.

**) Znaczek z wprowadziliśmy od nazwiska Zillmer'a.

roczna ryzyko premia

$$\frac{m_{20}}{v_{20}} = \frac{330,1882}{46\,873,32} = 0,007\,044.$$

Jeżeli więc będzie

$$a < 0,021\,018 + \frac{a}{13,779\,066} - 0,007\,044,$$

czyli $a < 0,015\,068$, t. j. gdy prowizya akwizycyjna wyniesie mniej niż 1,5068% od ubezpieczonego kapitału, rezerwa zaraz po pierwszym roku powinna wypaść dodatnia; jeżeli zaś $a >$ 1,5068% ubezpieczonego kapitału, rezerwa pierwszoroczna będzie ujemna.

I tak jest rzeczywiście, przyjąwszy bowiem raz $a = 1\%$, drugi raz $a = 2\%$, otrzymujemy w pierwszym razie

$$p_{20(a)} = p_{20} + \frac{0,01}{13,779\,066} = 0,021\,018 + 0,000\,726 = 0,021\,744, \text{ czyli } 217,44 \text{ fr.}$$

od 10000 fr; w drugim razie

$$p_{20(a)} = p_{20} + \frac{0,02}{13,779\,066} = 0,021\,018 + 0,001\,451 = 0,022\,469, \text{ t. j. } 224,69 \text{ fr.}$$

od 10000 fr.

Na podstawie tych premij obliczone rezerwy podajemy w poniższej tablicy, zestawiając je, dla porównania, z rezerwami netto i brutto.

Po latach	Rezerwa netto		Rezerwa obliczona według premij zillmerowskich				Rezerwa brutto przy 25% dodatku na adm.	
			gdy $a=1\%$ ubez. kap.		gdy $a=2\%$ ubez. kap.			
1	145	63	48	90	— 47	69	—554	52
2	296	69	203	41	+110	25	—378	55
3	453	35	363	64	274	06	—195	99
4	615	78	529	79	443	93	— 6	60
5	784	22	702	11	620	11	+189	88
6	958	95	880	88	802	91	393	82
7	1 140	18	1 066	30	992	53	605	44
8	1 328	20	1 258	69	1 189	28	825	10
9	1 523	22	1 458	27	1 393	41	1 053	08
10	1 725	60	1 665	39	1 605	27	1 289	79
12	2 153	57	2 103	45	2 053	40	1 790	79
15	2 858	89	2 825	57	2 792	31	2 617	78
20	4 232	43	4 232	43	4 232	43	4 232	43

Z powyższej tablicy widzimy na liczbach, że istotnie, jak to z góry przewidzieliśmy, rezerwa obliczona według premij zillmerowskich posiada te same słabe strony, co i rezerwa brutto, tylko w znacznie zmniejszonym stopniu.

105. REZERWA PREMIOWA PRZY KOŃCU ROKU RACHUNKOWEGO. Wyprowadzone w poprzednich artykułach wzory podają sposób na obliczanie rezerwy premiowej przy końcu roku ubezpieczeniowego. Że zaś ubezpieczenia zawierają się przez cały rok, a bilans instytucyi, do ułożenia którego niezbędną jest znajomość rezerwy, układa się na dzień 31 grudnia każdego roku, w którym to dniu dla niewielu tylko osób lata ubezpieczeniowe się kończą, przeto wynika stąd potrzeba obliczania rezerwy za niepełną liczbę lat ubezpieczeniowych.

Z pierwszej tablicy art. 103-go okazuje się, że rezerwa premiowa od wziętego tam pod uwagę ubezpieczenia, po upływie 1-go roku, posiada wartość 70,23 fr.,
w ciągu 2-go roku wzrasta o . . . . 72,43 „
„ 3-go „ „ „ . . . . 74,66 „
„ 4-go „ „ „ . . . . 76,88 „
„ 5-go „ „ „ . . . . 79,18 „
i t. d., t. j. wzrasta (*) niejednostajnie. Jeżeli zaś rezerwa co rok wzrasta niejednostajnie, to tem samem niejednostajnie przyrasta i w ciągu roku, np. przyrost rezerwy w ciągu kwartału, ściśle biorąc, nie równa się czwartej części przyrostu rocznego. Ponieważ jednak różnice są nieznaczne, zgodzono się przyrost rezerwy w ciągu roku uważać za jednostajny, czyli przyjąć, że rezerwa codziennie wzrasta o $^1/_{365}$ część całorocznego przyrostu, albo inaczej, że się w ciągu roku zmienia o ilości proporcyonalne do upływającego czasu.

Niech więc w d. 31 grudnia danego roku (właściwie o godzinie 12-ej w nocy z 31 grudnia na 1 stycznia) upływa $\nu + \frac{k}{m}$ lat od chwili zawarcia danego ubezpieczenia; chodzi o oznaczenie wysokości rezerwy premiowej w owej chwili.

Przy końcu ν-go roku ubezpieczeniowego rezerwa, w znany nam sposób obliczona, równa się $\mathrm{Rez}(\nu)$; przy końcu $(\nu + 1)$-go roku wynosi $\mathrm{Rez}(\nu + 1)$. W ciągu $(\nu + 1)$-go roku zatem wzrasta rezerwa o

$$\mathrm{Rez}(\nu + 1) - \mathrm{Rez}(\nu),$$

z czego przypada: na część roku od końca ν-go po najbliższy 1-y stycznia

$$(\alpha) \qquad \frac{k}{m} \cdot [\mathrm{Rez}(\nu + 1) - \mathrm{Rez}(\nu)],$$

a od 31-go grudnia do końca $(\nu + 1)$-go roku

$$(\beta) \qquad \frac{m - k}{m} \cdot [\mathrm{Rez}(\nu + 1) - \mathrm{Rez}(\nu)].$$

(*) Rezerwa w niektórych kombinacyach, jak np. od wypłacanych już rent, może maleć.

Jeżeli więc za punkt wyjścia przyjmiemy Rez(ν), otrzymamy

$$(313)\qquad \mathrm{Rez}\left(\nu+\frac{k}{m}\right)=\mathrm{Rez}(\nu)+\frac{k}{m}\cdot[\mathrm{Rez}(\nu+1)-\mathrm{Rez}(\nu)]=$$

$$=\frac{(m-k).\mathrm{Rez}(\nu)+k.\mathrm{Rez}(\nu+1)}{m};$$

gdy za punkt wyjścia weźmiemy Rez(ν + 1), wypadnie

$$(313')\qquad \mathrm{Rez}\left(\nu+\frac{k}{m}\right)=\mathrm{Rez}(\nu+1)-\frac{m-k}{m}\cdot[\mathrm{Rez}(\nu+1)-\mathrm{Rez}(\nu)]=$$

$$=\frac{(m-k)\mathrm{Rez}(\nu)+k.\mathrm{Rez}(\nu+1)}{m},$$

t. j. wyrażenie oczywiście identyczne z (313).

Ze względu na (313) i (313′), wielkość (α) można nazwać domiarem (rezerwy z końca poprzedniego roku ubezpieczeniowego po najbliższy 1-y stycznia); wielkość (β) nadmiarem (rezerwy z końca bieżącego roku ubezpieczeniowego, licząc od 31 grudnia). Domiar należy dodać do rezerwy obliczonej na koniec poprzedniego roku ubezpieczeniowego, nadmiar odjąć od rezerwy obliczonej na koniec bieżącego roku ubezpieczeniowego.

Jeżeli instytucya posiada bardzo wiele ubezpieczeń i operuje już od dłuższego czasu, bez wielkiego błędu przyjąć można, że początek lat ubezpieczeniowych wszystkich w mocy będących ubezpieczeń jednostajnie się rozkłada na cały rok rachunkowy, czyli że przeciętnie dla wszystkich ubezpieczeń początek roku ubezpieczeniowego przypada w połowie roku rachunkowego. Wówczas, dla 31 grudnia, można założyć $\frac{k}{m}=\frac{1}{2}$, skutkiem czego (313) i (313′) sprowadza się do

$$(314)\qquad \mathrm{Rez}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)=\frac{\mathrm{Rez}(\nu)+\mathrm{Rez}(\nu+1)}{2},$$

co wprawdzie bardzo rachunek upraszcza, ale zarazem, jak to zwykle w takich razach bywa, czyni go mniej ścisłym.

106. PRZENIESIENIE PREMIJ BRUTTO, — PREMIE NIEWYSŁUŻONE. Rezerwa, obliczona w powyższy sposób, nie stanowi jeszcze wszystkiego, co instytucya ze sprawozdawczego roku odłożyć powinna na rachunek potrzebnych jej na przyszłość zapasów.

Ubezpieczeni, w ciągu roku rachunkowego, wnoszą premie rocznie lub też w ratach mniejszych od rocznych, ale najczęściej nie po 1 stycznia następnego roku, czyli nie po chwilę obliczania rezerwy. Tymczasem, obliczając rezerwę na d. 31 grudnia, uwzględniamy tylko premie po rzeczoną datę. Tak np., jeżeli omawiana w art. 103-im osoba 20-o letnia zawarła umowę w d. 20 maja i premię brutto, w wysokości 179,22 fr., wnosi rocznie, z pomienionej premii przypada na rok sprawozdawczy tylko $179{,}22 \times \frac{226}{365} = 179{,}22 \times 0{,}6191781 = 110{,}97$ fr., podczas gdy pozostała reszta $179{,}22 \times \frac{139}{365} = 179{,}22 \times 0{,}3808219 = 68{,}25$ fr. należy do następnego roku rachunkowego.

W pierwszej części, w 110,97 fr., mieści się 85,36 fr. premii netto i 25,61 fr. dodatku na administracyę. Dodatek zostaje zużyty na właściwe potrzeby roku sprawozdawczego; premia netto w części zostaje spotrzebowana na szkody, a w części wchodzi do rezerwy, obliczonej na d. 31 grudnia. Część druga wniesionej premii, 68,25 fr., pozostaje, a przynajmniej winna pozostać nienaruszoną, należy bowiem do dochodów roku następnego, czyli powinna być z roku sprawozdawczego przeniesioną na rok następny. Stanowi to t. z. przeniesienie premii (Prämien-Uebertrag), albo premię niewysłużoną (Unverdiente Prämie).

Gdyby ta sama osoba wnosiła premie kwartalnie, należałoby premię roczną zwiększyć o pewien procent, np. o 4%, i podzielić na cztery równe części. Wtedy kwartalna premia brutto wyniesie $\frac{179{,}22 \times 1{,}04}{4} = \frac{186{,}3888}{4} = 46{,}60$ fr. i ma być wnoszoną w dniu 20 maja, sierpnia, listopada i lutego. Lecz rata z d. 20 listopada w części tylko (za dni 42) należy do roku sprawozdawczego; pozostała część (za dni 50) należy do roku następnego, czyli przeniesieniem premii w obecnym przypadku będzie

$$46{,}60 \times 4 \times \frac{50}{365} = 25{,}53 \text{ fr.}$$

Otóż instytucya, oprócz rezerwy premiowej, powinna jeszcze odłożyć i przeniesienie premij od wszystkich na d. 31 grudnia w mocy będących ubezpieczeń.

Ponieważ, w opisanym sposobie, na rok następny przenosi się odpowiednią część premii z dodatkiem na administracyę, przeto taki rodzaj przenoszenia nazywać będziemy przeniesieniem premij brutto.

Niektóre instytucye przeniesienie premij brutto włączają do rezerwy. Naszem zdaniem, takie postępowanie nie jest właściwe, albowiem rezerwa premiowa ma całkiem inne znaczenie, aniżeli przeniesienie premij. Rezerwa premiowa oznacza matematyczną wartość praw, nabytych przez osoby ubezpieczone do chwili obliczania rezerwy, podczas gdy przeniesienie premij stanowi po prostu przyszłoroczny dochód, który wpłynął w roku sprawozdawczym, a tem samem nie jako rezerwa premiowa, lecz jako dochód przyszłego roku, oddzielnie od rezerwy, wykazane być powinno.

Przeniesienie premii dla każdego ubezpieczenia jest ilością stałą przez cały czas trwania umowy (o ile ubezpieczony w ciągu tego czasu rat nie zmienił), skutkiem czego z góry obliczone i do odpowiedniej księgi zaciągnięte być może — tak, że czynność ta wcale nie utrudnia rachunków, nie potrzebuje bowiem być każdorocznie na nowo powtarzaną.

Księgi, do których zapisujemy ubezpieczenia w ten sposób, aby z nich można było zaczerpnąć wszelkie wiadomości, potrzebne do obliczania rezerwy i przeniesienia premij, nazywają się księgami rezerwowemi (patrz schemat w art. 108).

Księgi rezerwowe w różnych instytucyach prowadzą się rozmaicie: są obszerniejsze lub szczuplejsze, stosownie do tego, jakich się wiadomości od nich żąda i jaki system dla obliczania rezerwy i przenoszenia premij został przyjęty. Podawać winny liczby, które przez cały czas trwania umowy nie ulegają zmianie, jak to np. ma miejsce z ubezpieczonym kapitałem, ze stałemi premiami brutto i netto, a więc i z dodatkiem administracyjnym, z procentem za rozłożenie premij na raty drobniejsze od rocznych i z przeniesieniem premij.

Przeciwnie, zmieniająca się z każdym rokiem rezerwa premiowa, domiar lub nadmiar muszą być każdorocznie na nowo obliczane w księgach, których układ zależy od poglądów i od pomysłowości urzędujących w instytucyi „actuaire'ów".

107. PRZENIESIENIE PREMIJ NETTO. Nie wszyscy teoretycy i praktycy zgadzają się na opisany w art. 106 system przenoszenia premij. Zillmer np. stanowczo utrzymuje, że nie premie brutto, lecz premie netto przenoszone i do rezerwy włączane być powinny i to zawsze w ten sposób, jakby za cały rok ubezpieczeniowy były wniesione, choćby to w rzeczywistości nie miało miejsca.

Przy takim systemie, wzory (313) i (314) można zmienić w ten sposób, ażeby w sobie już zawierały i przeniesienie premii netto.

Oznaczmy, jak poprzednio, przez $\mathrm{Rez}(\nu)$ i $\mathrm{Rez}(\nu+1)$ rezerwy od danego ubezpieczenia po upływie ν i $\nu+1$ lat ubezpieczeniowych; przez p opłacaną rocznie premię netto, przez $\frac{k}{m}$ ułamek roku od końca ν-go roku ubezpieczeniowego po koniec roku sprawozdawczego.

Wtedy rezerwa premiowa na d. 31 grudnia razem z przeniesieniem premii netto po koniec bieżącego roku ubezpieczeniowego, od każdego pojedynczego ubezpieczenia, wyraża się przez wzór

$$(315)\quad \mathrm{Rez}\left(\nu+\frac{k}{m}\right)=\mathrm{Rez}(\nu)+\frac{k}{m}\left[\mathrm{Rez}(\nu+1)-\mathrm{Rez}(\nu)\right]+\frac{m-k}{m}p=$$

$$=\frac{(m-k).[\mathrm{Rez}(\nu)+p]+k.\mathrm{Rez}(\nu+1)}{m}.$$

Gdybyśmy dla wszystkich ubezpieczeń przyjęli średnio $\frac{k}{m}=\frac{1}{2}$, byłoby

$$(315')\qquad \mathrm{Rez}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)=\frac{\mathrm{Rez}(\nu)+p+\mathrm{Rez}(\nu+1)}{2}.$$

Przenosząc na następny rok premię netto (nie brutto), zatrzymujemy na rachunek roku sprawozdawczego dodatek na administracyę od przeniesionych premij, czego — naszem zdaniem — czynić nie mamy prawa, ponieważ należy on do roku następnego.

Zillmer, broniąc omawianego systemu, twierdzi, że to samo czynimy z dodatkiem do premij jednorazowych i w ubezpieczeniach ze skróconą opłatą premij, od których dodatek na administracyę zostaje zużyty w tym roku, kiedy ubezpieczenie zostało zawarte, resp. przez skrócony czas wnoszenia premij, chociaż wystarczyć powinien na cały czas trwania ubezpieczeń. Zresztą—konkluduje Zillmer — postępując inaczej, t. j. uwzględniając przeniesienie premij brutto, rezerwę obliczalibyśmy nie według premij netto, czego czynić nie należy.

Racye Zillmera nie bardzo nam trafiają do przekonania.

Przeniesienie premij, właściwie mówiąc, nie pozostaje w żadnym organicznym związku z obliczaniem rezerwy premiowej i dla tego rezerwa może i powinna być obliczaną według premij netto, a przeniesienie premij może i powinno być obliczane według premij brutto, bez łączenia go z rezerwą.

Okoliczność, że dodatek w ubezpieczeniach ze skróconym terminem płacenia premij lub w zawieranych na podstawie premij jednorazowych zostaje w całości zużyty w czasie krótszym od trwania ubezpieczeń, również niczego nie dowodzi. Najprzód, po otrzymaniu wszystkich premij od osoby ubezpieczonej koszta zawarcia ubezpieczeń są już pokryte, a koszta ich dalszego utrzymania giną w masie innych ubezpieczeń. Następnie, jeżeli w niektórych razach (do pewnego stopnia z konieczności) źle postępujemy, to nie idzie za tem, abyśmy tak samo postępowali w innych razach, w których złego z łatwością uniknąć można.

Niektóre instytucye ścisłość swoją posuwają tak daleko, że, przenosząc premie netto, z odpowiednich dodatków tworzą specyalną „rezerwę kosztów administracyjnych" (Verwaltungskosten - Reserve), czerpiąc z niej, w dalszych latach, co potrzeba. Sposób ten wszakże wprowadza niepotrzebne utrudnienia rachunków.

Zillmer radzi także przenosić premie netto (łącząc je z rezerwą) w takim stosunku, jakby przez wszystkich były wnoszone za cały rok ubezpieczeniowy, choćby to w rzeczywistości nie miało miejsca. Wtenczas jednak niedowniesione premie wstawić trzeba w aktywa (*). Radzi to czynić, najprzód gwoli ułatwienia rachunków, a następnie dla tego, że właściwie premie wnoszą się rocznie, a rozkładają na raty tylko w charakterze udzielenia ubezpieczonym kredytu (gestundete Prämien). Gdy ubezpieczony umrze, bez zapłacenia całorocznej premii, z ubezpieczonego kapitału niedopłacona premia zostanie strąconą.

Ostatecznie manipulacyi takiej nic poważniejszego zarzucić nie można, jeżeli tylko pod rubryką zapożyczonych premij w aktywach pomieścimy to sa-

---

*) Byłyby to ilości stałe, dla których zatem należałoby w księgach rezerwowych ustanowić specyalną kolumnę.

mo, cośmy umieścili w pasywach, t. j. po jednej i drugiej stronie albo zapożyczone premie netto, albo brutto.

Pod nazwą „przeniesienie premij" Zillmer rozumie tylko premie, wniesione przez ubezpieczonych przed terminem ich płatności, np. gdyby termin płatności premij przypadał w d. 20 stycznia, a wniesione zostały, dajmy na to, d. 10 grudnia. Przy zastosowaniu systemu podanego w art. 106, oba rodzaje przeniesienia można całkiem słusznie pomieścić na jednem koncie.

108. GRUPOWE METODY OBLICZANIA REZERWY. Wszystko to, co dotąd o obliczaniu rezerwy premiowej powiedzieliśmy, odnosi się do ubezpieczeń pojedynczych — tak, że chcąc wyłożone sposoby bezpośrednio w praktyce stosować, należy dla każdej osoby ubezpieczonej oddzielnie rezerwę obliczać. Sposób taki nazywać będziemy metodą jednostkową.

Gdy chodzi o zupełną ścisłość, bezwarunkowo metody jednostkowej użyć trzeba. Jeżeli jednak decydujemy się poprzestać na rezultacie przybliżonym — zresztą, przy znacznej liczbie osób ubezpieczonych, nie bardzo od ścisłego oddalonym — możemy obliczać rezerwę od razu dla całych grup osób równowiekowych, według tej samej kombinacyi ubezpieczonych, i sposób ten zwać będziemy metodą grupową, albo zbiorową.

Według grup można rezerwę liczyć dwoma sposobami:

Sposób 1, gdy niezależnie od przeniesienia premij brutto obliczamy rezerwę przy końcu lat ubezpieczeniowych i później dopiero strącamy z niej nadmiar.

Sposób 2, gdy rezerwę od razu obrachowujemy na d. 31 grudnia (w ogóle na koniec roku rachunkowego), łącząc z nią przeniesienie premij netto.

W niniejszym artykule podamy oba sposoby grupowej metody obliczania rezerwy dla zwyczajnego ubezpieczenia kapitałów pośmiertnych z dożywotnią opłatą premij.

Sposób 1-y. Podzielmy księgę rezerwową, dla danej kombinacyi przeznaczoną, na konta według lat urodzenia osób ubezpieczonych; tym sposobem mieć będziemy konta osób urodzonych w roku $t - x$, $t - (x + 1)$, $t - (x + 2)$ i t. d., gdzie t oznacza rok zawarcia umowy; x, $x + 1$, $x + 2$ i t. d wiek osób ubezpieczonych w chwili zawierania umowy. W każdem koncie pomieśćmy kolumny: dla dat zawarcia umowy, dla numeru polisy, imienia i nazwiska osoby ubezpieczonej, dla ścisłej daty urodzenia i wieku taryfowego (*), dla wysokości ubezpieczonego kapitału, dla opłacanej rocznie premii brutto i netto,

---

(*) Przez wiek taryfowy rozumie się lata przyjęte za podstawę do obliczenia premii. Zazwyczaj ułamek roku mniejszy od $^1/_2$ rocza nie dolicza się, większy od $^1/_2$ rocza przyjmuje się za rok cały. Np. 20 lat $5^1/_2$ miesięcy przyjmuje się za 20 lat; 20 lat 6 miesięcy i 3 dni — za 21 lat.

Za rok urodzenia w księdze rezerwowej przyjmuje się nie rzeczywisty, lecz wypadły z przyjętego wieku taryfowego. I tak, dla osoby w wieku lat 20 i $5^1/_2$ miesięcy, rokiem urodzenia będzie $(t - 20)$; dla osoby mającej 20 lat 6 miesięcy i 3 dni $(t - 21)$ i t. d.

dla oznaczenia jakiemi ratami ma być roczna premia wnoszona, wreszcie dla przeniesienia premij brutto i dla nadmiaru — jednem słowem, nadajmy schematowi księgi rezerwowej następującą postać:

Rok urodzenia $t-20$

1	2	3	4	5	6	7		8		9	10		11	
Data zawarcia ubezpieczenia	№ polisy	Nazwisko i imię ubezpiecz.	Ścisła data urodzenia	Wiek taryfowy	Kapitał ubezpieczony	Premia roczna				Raty premiowe	Przeniesienie premij brutto		Nadmiar	
						Brutto		Netto						
$\frac{20}{\text{V}}$ t-go r.	N.	M.M.	$\frac{\text{I}}{\text{IV}}(t-20)$-o r.	20	10 000	179	22	137	86	$^1/_4$	25	53	26	75

Przeniesienie premij (kol. 10) jest ilością stałą przez cały czas trwania umowy; nadmiar (kol. 11) z każdym rokiem się zmienia, gdyż — jak nam wiadomo — rezerwa rośnie w sposób niejednostajny. W 1-ym jednak sposobie grupowej metody obliczania rezerwy nadmiar, obliczony w stosunku do pierwszorocznej rezerwy, przyjmuje się również za stały przez cały czas trwania umowy i na tem właśnie przyjęciu polega nieścisłość 1-go sposobu. W jednostkowej metodzie, kol. 11 w księdze rezerwowej istnieć nie potrzebuje.

Osoby zawierające umowę w t-ym roku i urodzone w ciągu $(t-20)$-go roku posiadają lat 20, osoby w tym samym urodzone roku, lecz zawierające umowę w ciągu $(t+1)$-go roku mają lat 21, t. j. tyleż co i osoby 20-o letnie, zawierające umowę w t-ym roku, i t. d. Widzimy więc, że, pomimo zawierania umowy w różnym wieku, na jednem i tem samem koncie tak urządzonej księgi gromadzą się sami tylko rówieśnicy.

Według powyższego schematu prowadzą się dwie księgi: księga rezerwowa, do której zapisują się zawierane ubezpieczenia, i ta prowadzi się w sposób ciągły, t. j. remanent z lat poprzednich łączy się z nowozawartemi ubezpieczeniami w roku bieżącym, oraz t. z. księga stornowa, w której się notuje te same, co i w księdze rezerwowej, szczegóły o osobach wybyłych skutkiem śmierci, albo zerwania umowy. Księga stornowa prowadzi się sposobem przerywanym, czyli za każdy rok rachunkowy oddzielnie.

Przed przystąpieniem do obliczenia rezerwy należy sumy z księgi stornowej odjąć, odpowiedniemi kontami, od sum księgi rezerwowej i następnie dopiero zająć się oznaczeniem rezerwy przy końcu lat ubezpieczeniowych, bieżących w chwili obliczania rezerwy, ogólnie dla wszystkich osób, razem pod temi samemi kontami zapisanych. Przypuśćmy, że dla osoby x letniej (w chwili zawierania umowy) skończy się w przyszłym roku sprawozdawczym ν lat ubezpieczeniowych. Ponieważ wówczas rzeczona osoba mieć będzie $x+\nu$ lat, zatem przy końcu ν-go roku ubezpieczeniowego rezerwa od 1-ki kapitału wyraża się przez wzór

$$(\alpha) \qquad \text{Rez}(\nu,x) = \text{P}_{x+\nu} - p_x . \text{R}_{x+\nu};$$

od ubezpieczonego kapitału k

(β) $\mathrm{Rez}(\nu,x) = \mathrm{P}_{x+\nu}.k - p_x.\mathrm{R}_{x+\nu}.k$, gdzie $\mathrm{P}_{x+\nu}$, p_x i $\mathrm{R}_{x+\nu}$ posiadają wiadome z art. 103 znaczenie.

Dla osoby $x+1$ letniej (w chwili zawierania umowy) po $\nu-1$ latach, od kapitału k',

(β') $\mathrm{Rez}(\nu-1, x+1) = \mathrm{P}_{x+\nu}.k' - p_{x+1}\mathrm{R}_{x+\nu}k'$ i t. d.

Z porównania (β') z (β) wynika, że dla wszystkich osób, zapisanych pod jednem kontem, $\mathrm{P}_{x+\nu}$ oraz $\mathrm{R}_{x+\nu}$ pozostają niezmienione i odnoszą się do wieku, jaki posiadają wszystkie osoby danego konta w końcu bieżących lat ubezpieczeniowych. Gdy więc wiek ten oznaczymy przez y, suma rezerw wszystkich osób jednego konta, obliczona na koniec bieżących lat ubezpieczeniowych, wynosi

(316) $$\Sigma\mathrm{Rez}(\text{dla } y \text{ letnich}) = \mathrm{P}_y\Sigma k - \mathrm{R}_y\Sigma p_x k.$$

P_y i R_y można sobie z góry przygotować dla każdego wieku. Σk otrzymuje się z dodania kol. 6 w księdze rezerwowej (po strąceniu storn); $\Sigma p_x k$ jest sumą kol. 8, również po strąceniu storn.

Okazuje się zatem, że obliczenie rezerwy dla wszystkich osób, razem wziętych, z pod jednego konta sprowadza się, w danej kombinacyi, do dwóch mnożeń i jednego odejmowania.

Ażeby mieć rezerwę przy końcu roku rachunkowego (na d. 31 grudnia), należy od (316) odjąć sumę otrzymaną z dodania kol. 11. Suma powstała z dodania kol. 10 stanowi przeniesienie premij brutto.

Tak samo postąpić trzeba z każdem innem kontem; suma rezerw wszystkich kont stanowi rezerwę premiową całej kombinacyi.

Sposób 2. W drugim sposobie grupowego obliczania rezerwy, od razu na d. 31 grudnia łącznie z przeniesieniem premij netto, przyjmujemy za przeniesienie premij i za rezerwę na d. 31 grudnia połowę premij rocznych i połowę sumy rezerw na początku i końcu bieżących lat ubezpieczeniowych, t. j., według wzoru (315'), dla pojedynczego ubezpieczenia

$$\mathrm{Rez}\left(\nu - \frac{1}{2}, x\right) = \frac{\mathrm{Rez}(\nu-1, x) + p_x + \mathrm{Rez}(\nu,x)}{2},$$

czyli, ponieważ

$$\mathrm{Rez}(\nu-1,x) = \mathrm{P}_{x+\nu-1} - p_x.\mathrm{R}_{x+\nu-1},$$
$$\mathrm{Rez}(\nu,x) = \mathrm{P}_{x+\nu} - p_x.\mathrm{R}_{x+\nu},$$

od 1-ki ubezpieczonego kapitału mamy

(γ) $$\mathrm{Rez}\left(\nu - \frac{1}{2}, x\right) = \frac{\mathrm{P}_{x+\nu-1} + \mathrm{P}_{x+\nu}}{2} - \frac{\mathrm{R}_{x+\nu-1} + \mathrm{R}_{x+\nu} - 1}{2}p_x,$$

zaś od kapitału k

(δ) $$\mathrm{Rez}\left(\nu - \frac{1}{2}, x\right) = \frac{\mathrm{P}_{x+\nu-1} + \mathrm{P}_{x+\nu}}{2}k - \frac{\mathrm{R}_{x+\nu-1} + \mathrm{R}_{x+\nu} - 1}{2}p_x k.$$

Dla osoby $x+1$ letniej (w chwili zawierania umowy) po $\nu - 1^1/_2$ latach, od kapitału k',

$$(\delta')\quad \mathrm{Rez}(\nu - 1^1/_2, x+1) = \frac{\mathrm{P}_{x+\nu-1} + \mathrm{P}_{x+\nu}}{2} k' - \frac{\mathrm{R}_{x+\nu-1} + \mathrm{R}_{x+\nu} - 1}{2} p_{x+1} k'$$

i t. d., czyli dla wszystkich osób y letnich w końcu bieżących lat ubezpieczeniowych, albo dla przeciętnie $y - {}^1/_2$ letnich w d. 31 grudnia wypada

$$(316')\Sigma\,\mathrm{Rez}(\text{dla } y - {}^1/_2 \text{ letnich}) = \frac{\mathrm{P}_{y-1} + \mathrm{P}_y}{2} . \Sigma k - \frac{\mathrm{R}_{y-1} + \mathrm{R}_y - 1}{2} \Sigma p_x . k.$$

Tu znów $\frac{\mathrm{P}_{y-1} + \mathrm{P}_y}{2}$ i $\frac{\mathrm{R}_{y-1}+\mathrm{R}_y-1}{2}$ są spólne dla wszystkich osób tego samego konta, zaś Σk i $\Sigma p_x k$, jak i poprzednio, stanowią sumy kol. 6 i 8, po potrąceniu z nich sum wystornowanych. Kolumny 10 i 11 dla tego sposobu są zbyteczne, mogą więc być w księdze rezerwowej zupełnie pominięte.

W rachunek powyższy można włączyć i ubezpieczenia zawarte za pomocą premij jednorazowych, dość bowiem dla takich przypadków podstawić $p_x=0$, t. j. w kol. 8, przy ubezpieczeniach o premiach jednorazowych, postawić zera.

109. Grupowe metody obliczania rezerwy (ciąg dalszy). Grupową metodę obliczania rezerwy można także stosować do kombinacyj, w których premie opłacają się nie dożywotnio, lecz przez czas ograniczony, a kapitał wypłaca się po śmierci, albo w razie dożycia pewnego terminu. W takich kombinacyach do wyrażeń kształtu (316) resp. (316′) potrzeba dodać pewną poprawkę, noszącą miano zwyżki rezerwy (Mehr - Reserve). Odnośne wzory wyprowadzimy tutaj dla paru kombinacyj, aby dać czytelnikom pojęcie, jak w podobnych razach postępować trzeba.

I. Zwyczajne ubezpieczenie kapitałów pośmiertnych z czasową opłatą premij rocznych.

Sposób 1. Jeżeli osoba x letnia ma opłacać premię roczną przez n lat od kapitału k, wyrażeniem na rezerwę przy końcu ν-go roku ubezpieczeniowego jest

$$\mathrm{Rez}(\nu,x) = \mathrm{P}_{x+\nu}.k - {}^n p_x{}^{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu}.k =$$

$$= \mathrm{P}_{x+\nu}.k - \mathrm{R}_{x+\nu}.{}^n p_x k + (\mathrm{R}_{x+\nu} - {}^{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu}){}^n p_x k =$$

$$= \mathrm{P}_{x+\nu} k - \mathrm{R}_{x+\nu}.{}^n p_x k + \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu}} . {}^n p_x k,$$

albo inaczej

$$(\alpha)\qquad \mathrm{Rez}(\nu,x) = \mathrm{P}_{x+\nu} k - \mathrm{R}_{x+\nu}.{}^n p_x k + \frac{1}{v_{x+\nu}} . {}^n p_x k \Sigma v_{x+n}.$$

Osoba $x+1$ letnia, ubezpieczona następnego roku na kapitał k' z n' letnim terminem płatności premij, zapisuje się pod tem samem kontem księgi rezerwowej co i poprzednia, lecz w chwili spółczesnego z poprzednią obliczania rezerwy kończy się dla niej dopiero $(\nu - 1)$-y rok ubezpieczeniowy. Dla niej więc wzór (α) zmienia się na

$$(\alpha') \quad \mathrm{Rez}(\nu - 1, x + 1) = \mathrm{P}_{x+\nu}.k' - \mathrm{R}_{x+\nu}.{}^{n'}p_{x+1}k' + \frac{1}{v_{x+\nu}}.{}^{n'}p_{x+1}k'.\Sigma v_{x+1+n'}.$$

Podobny wzór otrzymuje się dla każdej innej osoby pod tem samem kontem w księdze rezerwowej zapisanej.

We wzorach tych $x + \nu$ oznacza ten sam wiek wszystkich osób w chwili obliczania rezerwy, a tem samem $\mathrm{P}_{x+\nu}, \mathrm{R}_{x+\nu}$ i $\frac{1}{v_{x+\nu}}$ są spólne dla wszystkich osób pod tem samem kontem zapisanych.

Gdy więc wiek $x + \nu$ rzeczonych osób, przy końcu lat ubezpieczeniowych, oznaczymy przez y i wzory (α) zsumujemy, wypadnie na rezerwę zbiorową dla całego konta.

$$(317) \quad \Sigma\mathrm{Rez}(\text{dla } y \text{ letnich}) = \mathrm{P}_y\,.\,\Sigma k - \mathrm{R}_y.\Sigma^n p_x k + \frac{1}{v_y}\cdot\Sigma^n p_x k\,.\,\Sigma v_{x+n},$$

gdzie Σk jest sumą kol. 6, $\Sigma^n p_x k$ sumą kol. 8.

Wyrażenie $\frac{1}{v_y}\cdot\Sigma^n p_x k \Sigma v_{x+n}$ stanowi wzmiankowaną na początku niniejszego artykułu zwyżkę rezerwy i składa się z dwóch czynników: z $\frac{1}{v_y}$ zmieniającego się każdorocznie — lecz spólnego dla wszystkich ubezpieczeń, i z $\Sigma^n p_x k \Sigma v_{x+n}$, będącego sumą ilości ${}^n p_x k \Sigma v_{x+n}$.

Ilość ${}^n p_x k \Sigma v_{x+n}$ nazywa się liczbą pomocniczą (Hülfszahl), jest różną dla różnych ubezpieczeń, ale dla tego samego ubezpieczenia pozostaje stałą przez cały czas trwania umowy; daje się obliczyć z góry na cały czas, zaraz przy zapisywaniu danego ubezpieczenia do księgi rezerwowej. Gdy więc liczbom pomocniczym poświęcimy w księdze rezerwowej specyalną kolumnę, $\Sigma^n p_x k \Sigma v_{x+n}$ otrzymamy z dodania liczb pomocniczych w tej samej kolumnie zapisanych.

Tą drogą otrzymana rezerwa jest obliczona na koniec bieżących lat ubezpieczeniowych. Gdy od niej odejmiemy sumę nadmiarów (kol. 11), wypadnie rezerwa na d. 31 grudnia, obrachowana w przybliżeniu dla tego, że — jak wiemy — nadmiary są ilościami zmiennemi, podczas gdy tutaj przyjmują się za ilości stałe.

Sposób 2. Według (α), przy końcu $(\nu - 1)$-go roku trwania umowy, rezerwa dla osoby ubezpieczonej w wieku lat x z n letnim terminem płacenia premij wynosi

$$\mathrm{Rez}(\nu - 1, x) = \mathrm{P}_{x+\nu-1}\,.\,k - \mathrm{R}_{x+\nu-1}{}^n p_x k + \frac{1}{v_{x+\nu-1}}{}^n p_x k \Sigma v_{x+n},$$

przy końcu ν-go roku

$$\mathrm{Rez}(\nu, x) = \mathrm{P}_{x+\nu} k - \mathrm{R}_{x+\nu}{}^n p_x k + \frac{1}{v_{x+\nu}}{}^n p_x k \Sigma v_{x+n},$$

czyli rezerwa na d. 31 grudnia, łącznie z przeniesieniem premii netto, według wzoru (315′), wynosi

$$(\beta)\quad \mathrm{Rez}\left(\nu-\frac{1}{2},x\right)=\frac{\mathrm{P}_{x+\nu-1}+\mathrm{P}_{x+\nu}}{2}k-\frac{\mathrm{R}_{x+\nu-1}+\mathrm{R}_{x+\nu}-1}{2}{}^{n}p_x k+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{x+\nu-1}}+\frac{1}{v_{x+\nu}}\right).\,{}^{n}p_x k\Sigma v_{x+n}.$$

Dodawszy rezerwy wszystkich osób jednego konta, których wiek w chwili obliczania rezerwy (na d. 31 grudnia) oznaczmy przez $y-\frac{1}{2}$, wypadnie na rezerwę zbiorową dla całego konta

$$(317')\quad \Sigma\mathrm{Rez}(\text{dla } y-\frac{1}{2}\text{ letnich})=\frac{\mathrm{P}_{y-1}+\mathrm{P}_y}{2}\Sigma k-\frac{\mathrm{R}_{y-1}+\mathrm{R}_y-1}{2}\Sigma^{n}p_x k+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{y-1}}+\frac{1}{v_y}\right)\cdot\Sigma^{n}p_x k\Sigma v_{x+n}.$$

Część poprawki $\Sigma^{n}p_x k\Sigma v_{x+n}$ jest sumą liczb pomocniczych, dla których, jak to już zauważyliśmy przy sposobie 1-ym, w księdze rezerwowej przeznaczoną być powinna specyalna kolumna.

Wzory sposobu 1-go od wzorów sposobu 2-go, nie bacząc na przeniesienie premij, różnią się tem tylko, że tam, gdzie w ostatnich są połowy sum ilości odnoszących się do początku i końca bieżącego roku ubezpieczeniowego, w pierwszych znajdują się odpowiednie ilości z końca roku ubezpieczeniowego. Ponieważ więc, z powodu tego podobieństwa, łatwo przechodzić można od jednych wzorów do drugich, zatem w dalszych kombinacyach wyprowadzimy tylko wzory dla sposobu 2-go, pomijając sposób 1-y, jako prostszy.

II. Mieszane ubezpieczenie kapitałów.

Dla osoby x letniej (w chwili zawierania umowy), ubezpieczonej na kapitał k, płatny na przypadek śmierci lub w razie przeżycia n lat, rezerwa przy końcu ($\nu-1$)-go roku wyraża się przez wzór

$$(\gamma)\quad \mathrm{Rez}(\nu-1,x)={}^{n-\nu+1}\mathrm{P}_{x+\nu-1}.k-{}^{n}p_x{}^{n-\nu+1}\mathrm{R}_{x+\nu-1}k=$$

$$=\mathrm{P}_{x+\nu-1}k-\mathrm{R}_{x+\nu-1}.{}^{n}p_x k+{}^{n-\nu+1}\mathrm{P}_{x+\nu-1}k-\mathrm{P}_{x+\nu-1}k+$$

$$+(\mathrm{R}_{x+\nu-1}-{}^{n-\nu+1}\mathrm{R}_{x+\nu-1}){}^{n}p_x k.$$

Jeżeli w powyższe wyrażenie podstawimy, według wzorów (174″) i (146′),

${}^{n-\nu+1}\mathrm{P}_{x+\nu-1}=1-\frac{r-1}{r}{}^{n-\nu+1}\mathrm{R}_{x+\nu-1}$, $\mathrm{P}_{x+\nu-1}=1-\frac{r-1}{r}\mathrm{R}_{x+\nu-1}$, będzie

$$(\gamma')\mathrm{Rez}(\nu-1,x)=\mathrm{P}_{x+\nu-1}k-\mathrm{R}_{x+\nu-1}{}^{n}p_x k+(\mathrm{R}_{x+\nu-1}-{}^{n-\nu+1}\mathrm{R}_{x+\nu-1})\left({}^{n}p_x+\frac{r-1}{r}\right)k,$$

albo, ponieważ według (176″)

$${}^{n}p_x=\frac{1}{{}^{n}\mathrm{R}_x}-\frac{r-1}{r},$$

zaś

$$R_{x+\nu-1} - {}^{n-\nu+1}R_{x+\nu-1} = \frac{\Sigma v_{x+\nu-1} - (\Sigma v_{x+\nu-1} - \Sigma v_{x+n})}{v_{x+\nu-1}} = \frac{\Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu-1}},$$

$$(\delta) \qquad \mathrm{Rez}(\nu-1, x) = P_{x+\nu-1}k - R_{x+\nu-1} \,.\, {}^n p_x k + \frac{1}{v_{x+\nu-1}} \cdot \frac{\Sigma v_{x+n}}{{}^nR_x} k.$$

Dla rezerwy przy końcu ν-go roku

$$(\delta') \qquad \mathrm{Rez}(\nu, x) = P_{x+\nu}k - R_{x+\nu}\,{}^n p_x k + \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot \frac{\Sigma v_{x+n}}{{}^nR_x} k.$$

Rezerwa więc na d. 31 grudnia, łącznie z przeniesieniem premii netto, obliczona według wzoru (315′), wynosi

$$(\varepsilon) \quad \mathrm{Rez}\left(\nu - \frac{1}{2}, x\right) = \frac{P_{x+\nu-1} + P_{x+\nu}}{2} k - \frac{R_{x+\nu-1} + R_{x+\nu} - 1}{2}\,{}^n p_x k +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{x+\nu-1}} + \frac{1}{v_{x+\nu}}\right) \cdot \frac{\Sigma v_{x+n}}{{}^nR_x} k.$$

Wyrażeniem na rezerwę po $\nu - 1^1/_2$ latach, dla osoby zawierającej umowę w wieku lat $x + 1$, od kapitału k', ubezpieczonego na termin n' lat, jest

$$(\varepsilon') \quad \mathrm{Rez}(\nu - 1^1/_2, x+1) = \frac{P_{x+\nu-1} + P_{x+\nu}}{2} k' - \frac{R_{x+\nu-1} + R_{x+\nu} - 1}{2}\,{}^{n'} p_{x+1} k' +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{x+\nu-1}} + \frac{1}{v_{x+\nu}}\right) \cdot \frac{\Sigma v_{x+1+n'}}{{}^{n'}R_{x+1}} k'$$

i t. d., czyli czynniki $\frac{P_{x+\nu-1} + P_{x+\nu}}{2}, \frac{R_{x+\nu-1} + R_{x+\nu} - 1}{2}$ i $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{x+\nu-1}} + \frac{1}{v_{x+\nu}}\right)$ dla każdej osoby, zapisanej pod jednem kontem w księdze rezerwowej, pozostają te same. Jeżeli więc wzory (ε), wypisane dla każdej osoby oddzielnie, dodamy do siebie, wypadnie na rezerwę zbiorową dla całego konta

$$(318) \qquad \Sigma\mathrm{Rez}(\text{dla } y - {}^1/_2 \text{ letnich osób}) = \frac{P_{y-1} + P_y}{2} \Sigma k -$$

$$- \frac{R_{y-1} + R_y - 1}{2} \Sigma^n p_x k + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{y-1}} + \frac{1}{v_y}\right) \cdot \Sigma \frac{\Sigma v_{x+n}}{{}^nR_x} k,$$

gdzie Σk jest sumą kol. 6, $\Sigma^n p_x k$ sumą kol. 8, a $\frac{\Sigma v_{x+n}}{{}^nR_x} k$ są liczbami pomocniczemi, dla których potrzeba w księdze rezerwowej przeznaczyć specyalną kolumnę. Suma tej kolumny daje $\Sigma \frac{\Sigma v_{x+n}}{{}^nR_x} k$.

Jeżeli ubezpieczenie zostaje zawarte przy pomocy premii jednorazowej, ${}^n p_x = 0$, t. j. w kol. 8 należy dla takiego ubezpieczenia podstawić zero, zaś liczbę pomocniczą obliczyć według wyrażenia

$$k . \frac{r-1}{r} \Sigma v_{x+n},$$

gdyż skoro ${}^n p_x = 0$, to ${}^n\mathrm{R}_x = \frac{r}{r-1}$, a wtedy

$$\frac{\Sigma v_{x+n}}{{}^n\mathrm{R}_x} . k = k . \frac{r-1}{r} . \Sigma v_{x+n}.$$

Gdyby termin płatności kapitału był różny od czasu przez jaki wnoszą się premie, t. j. gdyby premie roczne były wnoszone przez l lat, a kapitał wymagalny w razie śmierci lub przeżycia n lat ($l < n$), to przez pierwsze l lat wyrażeniem na liczbę pomocniczą byłoby

$${}^l p_x . k \Sigma v_{x+l} + \frac{r-1}{r} . k \Sigma v_{x+n},$$

co nie trudno sprawdzić, prowadząc rachunek podobnie, jak przy $l = n$. Przez dalszy czas, po upływie l lat, liczbą pomocniczą będzie

$$\frac{r-1}{r} k \Sigma v_{x+n},$$

albowiem wówczas położenie identyfikuje się z ubezpieczeniem o premii jednorazowej.

III. Ubezpieczenie kapitału na dożycie bez zwrotu premij w razie wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej.

Dla osoby ubezpieczonej w wieku x lat na kapitał k, płatny w razie przeżycia n lat, po $\nu - 1$ latach rezerwa wynosi

$$\mathrm{Rez}(\nu - 1, x) = \frac{v_{x+n}}{v_{x+\nu-1}} . k - \frac{\Sigma v_{x+\nu-1} - \Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu-1}} . {}^n p_x k =$$

$$= \frac{v_{x+n} + {}^n p_x \Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu-1}} . k - \mathrm{R}_{x+\nu-1} . {}^n p_x k,$$

po ν latach

$$\mathrm{Rez}(\nu, x) = \frac{v_{x+n} + {}^n p_x \Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu}} . k - \mathrm{R}_{x+\nu} {}^n p_x k;$$

przeciętnie na d. 31 grudnia, razem z przeniesieniem premii netto, wypada

$$\mathrm{Rez}(\nu - {}^1/_2, x) = \frac{\mathrm{Rez}(\nu - 1, x) + {}^n p_x k + \mathrm{Rez}(\nu, x)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{v_{x+\nu-1}} + \frac{1}{v_{x+\nu}}\right) \cdot (v_{x+n} + {}^n p_x \Sigma v_{x+n}) k - \frac{\mathrm{R}_{x+\nu-1} + \mathrm{R}_{x+\nu} - 1}{2} . {}^n p_x k,$$

a dla całego konta, przeciętnie $y - {}^1/_2$ letnich osób, w dniu 31 grudnia

$$(319) \quad \mathrm{Rez}(\text{dla } y - {}^1/_2 \text{ letnich}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{y-1}} + \frac{1}{v_y}\right) \cdot \Sigma (v_{x+n} + {}^n p_x \Sigma v_{x+n}) k -$$

$$- \frac{\mathrm{R}_{y-1} + \mathrm{R}_y - 1}{2} \Sigma {}^n p_x k.$$

Tutaj $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{y-1}} + \frac{1}{v_y}\right)$ oraz $\frac{R_{y-1} + R_y - 1}{2}$ są ilościami zmieniającemi się corocznie; $\Sigma^n p_x k$ jest sumą premij netto, dla których mamy w księdze rezerwowej kol. 8; wreszcie $\Sigma(v_{x+n} + {}^n p_x \Sigma v_{x+n})$ stanowi sumę liczb pomocniczych, dla nich więc — podobnie jak dla premij netto — przeznaczyć trzeba w księdze rezerwowej specyalną kolumnę.

W taki sposób można zbiorowo obliczać rezerwę premiową i w innych kombinacyach, lecz poprzestajemy na kilku powyżej podanych przykładach, dają one bowiem dostateczne pojęcie o tem, jak w podobnych razach należy postępować.

Zarówno metoda grupowa jak jednostkowa posiadają swoje strony dodatnie i ujemne.

Metoda grupowa oszczędza dużo pracy i mniej podlega błędom, ale jest nie tak ścisłą jak jednostkowa i zmusza do wykonywania pracy w ciągu stosunkowo krótkiego czasu, gdyż rachunek można rozpocząć dopiero po zamknięciu ksiąg rezerwowych; jeżeli zaś trafi się błąd, to najczęściej dość znaczny. Tymczasem w metodzie jednostkowej błędy mogą być częstsze, lecz mniej znaczne (z pewną szansą wzajemnego kompensowania się); praca mozolniejszą, ale można ją przez cały rok wykonywać. Zresztą, jeżeli się ma z góry obliczone tablice rezerwowe, sama praca nie jest znów tak nadzwyczaj uciążliwą, sprowadza się bowiem, w każdem pojedynczem ubezpieczeniu, do dwóch mnożeń i dwóch odejmowań.

Tablice rezerwowe obejmują rezerwy premiowe od ubezpieczonych jednostek (kapitału lub renty), obliczone na koniec każdego roku ubezpieczeniowego. Rozumie się, że tablice takie są różne dla różnych kombinacyj i dla różnego wieku oraz różnych terminów w tych samych kombinacyach.

Tablice rezerwowe muszą posiadać te towarzystwa, które są obowiązane podawać w polisach sumy wykupne, stanowiące — jak to zobaczymy w następnym rozdziale — pewien procent rezerwy premiowej; takie towarzystwa, mając gotowy materyał, z większą od innych łatwością mogą stosować metodę jednostkową. Oprócz tego, zręczne schematy na księgi obliczania rezerwy bardzo ułatwiają pracę.

ROZDZIAŁ IX.

WIADOMOŚCI UZUPEŁNIAJĄCE.

110. Śmiertelność spodziewana. Tablica śmiertelności i stopa procentu technicznego stanowią, jak wiemy, dwie główne podstawy, na których spoczywają wszystkie obliczenia instytucyi ubezpieczeń życiowych. Jeżeli podstawy te są dobrane odpowiednio do warunków, w jakich instytucya pracuje, cała budowa jest silna i tak trwała, że ją chyba tylko jakieś nadzwyczajne niepowodzenia, bezrząd lub zła wola zarysować są w stanie. Jeżeli jednak podstawy rzeczone są wadliwe: jeżeli tablica śmiertelności jest nieodpowiednią dla danego społeczeństwa, albo procent techniczny zawysoki w stosunku do warunków ekonomicznych i finansowych danej miejscowości, wówczas nie pomoże ani powodzenie akwizycyjne, ani energia, ani ład, ani najlepsza wola; gmach coraz silniej rysować się będzie, aż wreszcie może runąć, jeżeli się złemu dość wcześnie nie zaradzi.

Okazuje się stąd, jak ważną jest rzeczą bezustannie czuwać nad tem, czy rzeczywista śmiertelność pomiędzy osobami ubezpieczonemi zbliża się do przewidywanej przez przyjętą tablicę śmiertelności i czy procentowanie nagromadzonych kapitałów nie schodzi niżej normy procentu technicznego.

Procentowanie (fruktyfikacya) kapitałów jest sprawą czysto finansową i do zbadania względnie łatwą, dla tego też tym przedmiotem zajmować się tu nie będziemy; natomiast sprawie badania śmiertelności poświęcimy nieco miejsca.

Przypuśćmy, że osoba urodzona dnia 20 marca 1856 roku zawiera ubezpieczenie dnia 15 listopada 1893-go r. Osoba ta, w chwili zawierania umowy, posiada 37 lat, 7 miesięcy, 25 dni i przyjmuje się za 38-o letnią; jej więc prawdopodobieństwo śmierci w ciągu roku ubezpieczeniowego (od 15/xi 1893 r. do 15/xi 1894 r.), według tablicy 17-tu towarzystw angielskich (Tab. III, kol. 10), wynosi 0,009 91. W podobny sposób można oznaczyć prawdopodobieństwo śmierci w ciągu roku ubezpieczeniowego dla innych osób. Suma wszystkich prawdopodobieństw da nam spodziewaną liczbę osób zmarłych, ale niewiadomo w ciągu jakiego roku, ponieważ dla różnych osób rok ubezpieczeniowy od innej daty się zaczyna i na innej kończy.

Potrzeba więc najprzód zdecydować się za jaki rok zamierzamy oznaczyć spodziewaną śmiertelność wśród danej grupy osób ubezpieczonych. Oczywiście najwłaściwiej jest przyjąć rok rachunkowy, czyli sprawozdawczy, skutkiem czego przedewszystkiem wiek każdej osoby ubezpieczonej powinniśmy oznaczyć na dniu 1-ym stycznia danego roku sprawozdawczego. Jeżeli np. mamy na myśli rok 1893-ci, wzięta powyżej za przykład osoba, w dniu 1-ym stycznia 1893-go r. ma lat 36, miesięcy 9, dni 12, musi więc być przyjętą za 37-o letnią. Jej śmiertelność w ciągu roku sprawozdawczego (1893-go) równa się 0,00969; ponieważ jednak w instytucyi przebywa ona tylko od 15/XI 1893 roku do 1/I 1894-go roku, t. j. dni 47, zatem jej spodziewana śmiertelność w 1893-im roku, wynosi $0{,}00969 \times \frac{47}{365} = 0{,}00125$.

Tak samo obrachować można prawdopodobieństwo śmierci dla wszystkich osób nowoprzyjętych w ciągu danego roku rachunkowego. Prawdopodobieństwo śmierci dla osób dawniej przyjętych i przebywających w instytucyi przez cały rok wyjmuje się wprost z tablicy śmiertelności, mieszczącej, jak wiadomo, prawdopodobieństwa roczne. Pozostają jeszcze prawdopodobieństwa śmierci osób, które zerwały umowę; dla nich prawdopodobieństwo roczne trzeba pomnożyć przez ułamek roku od 1 stycznia po datę zerwania umowy. Np. gdyby osoba, licząca w dniu 1-ym stycznia lat 40, zerwała umowę dnia 20 maja, jej prawdopodobieństwo śmierci w czasie pobytu w instytucyi (od 1/I do 20/V) równa się $0{,}01036 \times \frac{139}{365} = 0{,}00395$.

Dla osób dawniej ubezpieczonych i zmarłych w roku sprawozdawczym przyjąć należy całoroczne prawdopodobieństwo śmierci.

Z powyższego wypada, że dla oznaczenia śmiertelności spodziewanej wśród danej grupy osób ubezpieczonych, w ciągu danego roku sprawozdawczego, należy przedewszystkiem oznaczyć wiek każdej osoby na dniu 1-ym stycznia, a następnie całą grupę rozdzielić na trzy następujące kategorye:

I. na osoby w poprzednich latach ubezpieczone, które cały rok w instytucyi przebyły;

II. na osoby nowoprzyjęte, z oznaczeniem dat zawarcia umowy;

III. na osoby wybyłe, z oznaczeniem dat opuszczenia instytucyi (*).

Osoby zmarłe włączają się do właściwej kategoryi I lub II.

Kategoryę I-szą podzielić trzeba na klasy według wieku i roczne prawdopodobieństwo śmierci każdej równowiekowej klasy pomnożyć przez liczbę osób w klasie; suma tak otrzymanych iloczynów stanowi spodziewaną śmiertelność osób należących do kategoryi I. Dla kategoryi II i III najlepiej, w opisany po-

---

(*) Mogą być jeszcze osoby przybyłe i wybyłe w tym samym roku. Dla nich prawdopodobieństwo śmierci jest iloczynem z rocznego prawdopodobieństwa śmierci przez część roku, jaką w instytucyi przebyły.

przednio sposób, oznaczyć prawdopodobieństwo śmierci każdej osoby oddzielnie i zsumować. Suma śmiertelności wszystkich trzech kategoryj daje śmiertelność spodziewaną całej grupy (spodziewaną liczbę osób zmarłych), obliczoną według danej tablicy śmiertelności. Gdy ją porównamy z liczbą osób rzeczywiście zmarłych, okaże się o ile i w jakim kierunku śmiertelność rzeczywista zbacza od spodziewanej.

Taki sposób oznaczania śmiertelności spodziewanej nie jest zupełnie ścisły, gdyż stoi temu na przeszkodzie trudność w należytem ustanowieniu wieku, który musi być określony w latach całkowitych, podczas gdy w istocie wiek osób ubezpieczonych na d. 1-ym stycznia przeważnie jest ułamkowy. Ale zaznaczona nieścisłość nie wywiera tutaj, zwłaszcza przy znaczniejszej liczbie osób ubezpieczonych, zbyt szkodliwego wpływu, gdyż popełniane błędy do pewnego stopnia wzajem się znoszą, a nieskompensowane różnice nie mogą przybrać zbyt wielkich rozmiarów—tem bardziej, że w podobnych badaniach nie można poprzestawać na jednorocznym rezultacie. Rezultat jednoroczny może być przypadkowy, sądzić więc z niego nie można, czy dana tablica jest odpowiednią lub nie; dopiero gdy w ciągu szeregu lat zboczenia są znaczne i przeważnie jednokierunkowe, wówczas można decydować o niestosowności danej tablicy. W ciągu zaś szeregu lat różnokierunkowe błędy bardziej się jeszcze niwelują.

Badania nad śmiertelnością oddzielnie prowadzone być powinny dla ubezpieczeń pośmiertnych i oddzielnie dla ubezpieczeń na dożycie oraz dla rent; albowiem tablica korzystna dla pierwszych jest niekorzystną dla drugich i naodwrót.

Istotnie, tablica wykazująca większą śmiertelność jest korzystniejszą dla instytucyi w ubezpieczeniach pośmiertnych, a niekorzystną w ubezpieczeniach na dożycie — tak, że tablica odpowiednia dla pierwszych może być niewłaściwą dla drugich i naodwrót. Skutkiem tego, postępowo prowadzone instytucye używają innych tablic dla ubezpieczeń kapitałów na przypadek śmierci i innych dla ubezpieczeń rent i kapitałów na dożycie.

111. Wypłaty spodziewane. Oprócz oznaczenia prawdopodobnej śmiertelności, oblicza się jeszcze, i podaje w sprawozdaniach, wysokość spodziewanych wypłat. Odnosi się to szczególniej do ubezpieczeń kapitałów pośmiertnych.

Gdyby wszystkie ubezpieczenia były zawierane na jednakowe sumy, otrzymalibyśmy wypłaty spodziewane, mnożąc ubezpieczony na jedną osobę kapitał przez śmiertelność spodziewaną (przez spodziewaną liczbę osób zmarłych). Ponieważ jednak różne osoby ubezpieczają różnej wysokości kapitały, więc dla obliczenia spodziewanych wypłat, trzeba prawdopodobieństwo śmierci każdej, pojedynczo wziętej, osoby pomnożyć przez ubezpieczony przez nią kapitał. Suma tą drogą wypadłych iloczynów reprezentuje spodziewaną, czyli prawdopodobną wypłatę, albo — wyrażając się matematycznie — t. z. matematyczną obawę instytucyi (art. 13).

Spodziewana wypłata dla pojedynczego ubezpieczenia nie ma żadnego znaczenia, lecz w sumie dla wszystkich ubezpieczeń przedstawia kwotę, jakiej — matematycznie biorąc — rzeczywiście wypłacone, z powodu śmierci, kapitały przekroczyć nie powinny.

Porównanie wypłat rzeczywistych z matematycznie spodziewanemi daje miarę, czy dokonane wypłaty nie przekraczają normy rachunkiem dozwolonej, o czem porównanie śmiertelności spodziewanej z rzeczywistą nie daje dostatecznego wyobrażenia. Jak już powiedzieliśmy, ubezpieczenia bywają zawierane na różnej wysokości kapitały: obok kapitałów bardzo nizkich ubezpiecza się bardzo wysokie. Otóż, jeżeli w pewnym roku umrze nieproporcyonalnie wiele osób, ubezpieczonych na znacznie wyższe od przeciętnych kapitały, wówczas — pomimo, że śmiertelność jest normalną, a nawet niższą od normalnej — wypłaty rzeczywiste mogą znacznie przewyższyć spodziewane.

Jak sobie instytucye radzą, aby uniknąć podobnej alternatywy, zobaczymy w artykule 113; tutaj nadmienimy tylko jeszcze, że gdyby wszystkie ubezpieczenia były zawierane na równe sumy, obliczanie wypłaty spodziewanej byłoby zbyteczne, albowiem dostateczną pod tym względem miarę dawałaby śmiertelność spodziewana w porównaniu z rzeczywistą. Ponieważ jednak jest inaczej, t. j. ponieważ ubezpieczenia są zawierane na bardzo od siebie różne, pod względem wysokości, sumy, przeto oznaczanie wypłat spodziewanych okazuje się rzeczą pożyteczną i dla tego w sprawozdaniach pomijane być nie powinno (*).

112. ZYSK LUB STRATA NA ŚMIERTELNOŚCI. Różnica pomiędzy spodziewaną i rzeczywistą wypłatą kapitałów, ubezpieczonych na przypadek śmierci, nie stanowi zysku (resp. straty) otrzymanego ze śmiertelności, instytucya bowiem dla każdego ubezpieczenia posiada już pewien zapas w rezerwie premiowej, który w razie śmierci osoby ubezpieczonej potrzebuje tylko dopełnić do wysokości ubezpieczonego kapitału. Zysk (resp. stratę) na śmiertelności

---

(*) Poprzestając na liczbach mniej ścisłych, do obrachowania śmiertelności i wypłaty spodziewanej można użyć sposobu krótszego.

Jeżeli przez L_x oznaczymy liczbę osób x letnich, ubezpieczonych na początku roku rachunkowego, przez P_x i W_x liczby osób w tymże roku przybyłych i wybyłych, to według art. 25 za liczbę osób x letnich przez cały rok ubezpieczonych można w przybliżeniu przyjąć

$$(\alpha) \qquad L_x + \frac{P_x - W_x}{2}.$$

Ponieważ dalej $\frac{\tau_x}{\lambda_x}$ jest prawdopodobieństwem śmierci dla osoby x letniej, zatem iloczyn

$$(\beta) \qquad \left(L_x + \frac{P_x - W_x}{2}\right) \cdot \frac{\tau_x}{\lambda_x}$$

oznacza spodziewaną w ciągu roku liczbę osób zmarłych z pośród grupy x letnich.

Podobnie oznaczyć można spodziewaną liczbę osób zmarłych w każdym innym wieku. Suma wszystkich iloczynów będzie spodziewaną śmiertelnością ogółu osób ubezpieczonych.

Gdy zamiast liczby osób (α), podstawimy w (β) sumy kapitałów ubezpieczonych przez te osoby, w miejsce spodziewanej śmiertelności wypadnie spodziewana wypłata.

przedstawia nie różnica pomiędzy wypłatą spodziewaną i rzeczywistą, lecz różnica pomiędzy spodziewaną i rzeczywistą dopłatą instytucyi do nagromadzonej już rezerwy premiowej.

Przypuśćmy, że każda z λ_x osób x letnich ubezpiecza swym spadkobiercom kapitał k, płatny przy końcu roku ubezpieczeniowego, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi.

Roczną premię netto za każde z tych ubezpieczeń od kapitału k oznaczmy przez $p_x(k)$; rezerwę premiową po ν latach przez $\mathrm{Rez}(x, k, \nu)$.

Na początku $(\nu + 1)$-go roku ubezpieczeniowego, z pośród λ_x osób ubezpieczonych, żyje jeszcze $\lambda_{x+\nu}$ jednostek; na rachunku każdej z nich, po wniesieniu rocznej premii netto, posiada zatem instytucya $\mathrm{Rez}(x, k, \nu) + p_x(k)$, t. j. na rachunku wszystkich ma

$$\lambda_{x+\nu}[\mathrm{Rez}(x, k, \nu) + p_x(k)],$$

a po roku posiadać będzie

$$\lambda_{x+\nu}[\mathrm{Rez}(x, k, \nu) + p_x(k)]\,r.$$

Przy normalnej (zgodnej z tablicą) śmiertelności, umiera w ciągu roku $\tau_{x+\nu}$ osób; z drugiej więc strony, przy końcu $(\nu + 1)$-go roku ubezpieczeniowego powinna instytucya posiadać rezerwę dla $\lambda_{x+\nu} - \tau_{x+\nu}$ żyjących osób i po kapitale k dla każdej osoby zmarłej, t. j. winno być

$$\lambda_{x+\nu}[\mathrm{Rez}(x, k, \nu) + p_x(k)]\,r =$$

$$= (\lambda_{x+\nu} - \tau_{x+\nu}) . \mathrm{Rez}(x, k, \nu + 1) + \tau_{x+\nu} k = \lambda_{x+\nu} . \mathrm{Rez}(x, k, \nu + 1) +$$

$$+ \tau_{x+\nu}[k - \mathrm{Rez}(x, k, \nu + 1)],$$

skąd dla każdej pojedynczej osoby wypada

$$(\alpha) \qquad [\mathrm{Rez}(x, k, \nu) + p_x(k)]\,r = \mathrm{Rez}(x, k, \nu + 1) + \frac{\tau_{x+\nu}}{\lambda_{x+\nu}} \cdot [k - \mathrm{Rez}(x, k, \nu + 1)].$$

Kwota $k - \mathrm{Rez}(x, k, \nu + 1)$ jest dopłatą, czyli dopełnieniem rezerwy do wysokości kapitału ubezpieczonego, albo inaczej tą częścią kapitału, jaka w ciągu $(\nu + 1)$-go roku ubezpieczeniowego jest na ryzyku instytucyi, dla tego część ta bywa nazywaną ryzyko kapitałem; $\frac{\tau_{x+\nu}}{\lambda_{x+\nu}}$ stanowi prawdopodobieństwo śmierci osoby $x + \nu$ letniej w ciągu roku; iloczyn jednego przez drugie jest zatem matematyczną obawą instytucyi, resp. spodziewaną dopłatą ryzyko kapitału.

Wzór (α) uczy nas, że rezerwa premiowa z końca pewnego roku ubezpieczeniowego zwiększona o roczną premię netto i oprocentowana przez rok daje rezerwę na końcu następnego roku ubezpieczeniowego powiększoną o

(β) $\frac{\tau_{x+\nu}}{\lambda_{x+\nu}}[k - \mathrm{Rez}(x, k, \nu + 1)]$, t. j. o spodziewaną dopłatę, czyli że spodziewana dopłata jest tą częścią rocznej premii netto, jaka się matematycznie przeznacza na pokrywanie szkód, spowodowanych przez śmierć osób ubezpieczonych.

Osoba zmarła (właściwie jej sukcesorowie), przy końcu roku ubezpieczeniowego, t. j. gdy kapitał staje się wymagalnym, posiada na swoim rachunku

$$[\mathrm{Rez}(x, k, \nu) + p_x(k)] \,.\, r,$$

rzeczywista więc dopłata, za każdy wypadek śmierci, wynosi

$$(\gamma) \qquad k - [\mathrm{Rez}(x, k, \nu) + p_x(k)] \,.\, r.$$

Sumując (β), obliczone dla wszystkich ubezpieczeń ważnych w ciągu $(\nu + 1)$-go roku, i sumując (γ), obliczone dla wszystkich osób zmarłych w ciągu tegoż roku, różnica otrzymanych sum pokaże, jaki jest zysk lub strata ze śmiertelności, zaszłej w ciągu rzeczonego roku.

Dodawszy do zysku ze śmiertelności wszystkie inne zyski, otrzymane: ze zwyżki procentu handlowego nad technicznym, z oszczędności na kosztach administracyjnych, z korzyści ciągnionych ze skupywania polis i t. p., otrzymamy zysk ogólny, który, całkiem niezależnie od poszczególnych badań, w sumie ryczałtowej wykazuje bilans handlowy instytucyi.

113. Reasekuracya. W art. 111 nadmieniliśmy, że różne osoby ubezpieczają się na różnej wysokości kapitały pośmiertne, które czasami mogą dochodzić do bardzo znacznych rozmiarów. Otóż ubezpieczenie bardzo wysokiego kapitału, oparte na życiu jednej osoby, przedstawia wielkie dla instytucyi niebezpieczeństwo, nie dająca się albowiem przewidzieć śmierć pojedynczej osoby może za sobą pociągnąć wypłatę, zdolną podkopać byt instytucyi — zwłaszcza początkującej.

Aby uniknąć takiego niebezpieczeństwa, a jednak nie odmawiać życzeniom klientów — czego dobrze uorganizowanej instytucyi czynić nie wolno — każda instytucya oznacza pewne maksymum dla własnego ryzyka, opartego na jednem życiu, sumy zaś przekraczające owe maksymum ubezpiecza od siebie w innych instytucyach. Operacya taka nazywa się reasekuracyą, a część ubezpieczonego kapitału przewyższająca własne maksymum, w praktyce ubezpieczeniowej, nosi miano ekscedentu (*).

Reasekuracya dokonywa się, jak dotąd, w dwojaki sposób: albo się oddaje ekscedent innym instytucyom razem z odpowiednią częścią opłacanych przez osobę ubezpieczoną premij brutto, za potrąceniem tylko, w pierwszym roku, pewnej umówionej prowizyi akwizycyjnej; albo też corocznie reasekuruje się tylko ekscedent zmniejszony o nagromadzoną rezerwę, czyli t. z. ryzyko kapitał (art. 112), opłacając zań co rok inną—t. z. roczną ryzyko premię (art. 69), bez względu na to, jaką premię wnosi sam ubezpieczony.

(*) Jeżeli każdem ubezpieczeniem, bez względu na wysokość kapitału, instytucya jest obowiązaną dzielić się z innemi, to manipulacya podobna nazywa się koasekuracyą. Obok koasekuracyi może mieć miejsce i reasekuracya ekscedentów ponad koasekuracyjne maksymum. Do ubezpieczeń życiowych koasekuracya dotąd nie bywa stosowaną, lecz w innych rodzajach ubezpieczeń, jak od ognia, od nieszczęśliwych wypadków i t. p. ten rodzaj podziału ryzyka bardzo jest rozpowszechniony.

Pierwszy sposób nie przedstawia żadnych trudności ani w zrozumieniu go, ani w zastosowaniu. Rezerwa premiowa od ekscedentu gromadzi się albo w instytucyi przyjmującej reasekuracyę, albo w zawierającej umowę z ubezpieczonym. W tym ostatnim razie, instytucya reasekurująca zwraca przy końcu każdego roku instytucyi ubezpieczającej kwotę, o jaką rezerwa w ciągu roku przyrasta. Ten rodzaj reasekuracyi może dokonywać każda instytucya ubezpieczeń życiowych.

Dla sposobu drugiego zazwyczaj organizują się specyalne instytucye reasekuracyjne. W tym celu pewna liczba zwyczajnych instytucyj ubezpieczeń życiowych wiąże się w stowarzyszenie wzajemne, zakładając dla siebie rodzaj biura obrachunkowego. Rzeczywiste koszta utrzymania biura ponoszą stowarzyszone instytucye, proporcyonalnie do opłacanych w danym roku premij. Skutkiem tego za reasekurowane ryzyko kapitały, stowarzyszone instytucye nie potrzebują płacić premij brutto — tylko netto.

Wnoszone premie netto powinny, przy normalnej śmiertelności, starczyć na pokrycie wypłat spowodowanych śmiercią reasekurowanych osób. Jeżeli wniesione premie netto przewyższają wypłaty, pozostałość rozdziela się pomiędzy stowarzyszone instytucye według reguły przewidzianej przez ustawę; gdy się okaże brak, ten musi być w podobny sposób przez rzeczone instytucye pokryty.

Na podobnych zasadach funkcyonuje np. od lat kilku w Wiedniu wzajemne stowarzyszenie reasekuracyjne pod firmą „Lebensversicherungs - Theilungs-Verein".

Rezerwę premiową od ekscedentu gromadzi u siebie ta instytucya, która ubezpieczenie zawarła.

Należna za dany rok ryzyko premia jest iloczynem z rocznej ryzyko premii netto od 1-ki ubezpieczonego kapitału (dla tego wieku, jaki na początku danego roku posiada reasekurowana osoba) przez wysokość ryzyko kapitału z końca tegoż roku, jeżeli ubezpieczony kapitał ma być płacony przy końcu roku ubezpieczeniowego, w którym śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi.

Gdy więc użyjemy oznaczeń przyjętych w art. 69 i 112, a przez e oznaczymy reasekurowany ekscedent, to dla osoby x letniej (w chwili zawierania umowy) ryzyko premią netto będzie:

za 1-y rok $[e - \mathrm{Rez}(x, e, 1)].\dfrac{m_x}{v_x}$,

„ 2-i „ $[e - \mathrm{Rez}(x, e, 2)].\dfrac{m_{x+1}}{v_{x+1}}$,

„ 3-i „ $[e - \mathrm{Rez}(x, e, 3)].\dfrac{m_{x+2}}{v_{x+2}}$,

. . . i w ogóle

„ ν-y „ $[e - \mathrm{Rez}(x, e, \nu)].\dfrac{m_{x+\nu-1}}{v_{x+\nu-1}}$.

Ryzyko kapitał corocznie się zmniejsza, ryzyko premia od 1-ki co rok się zwiększa; iloczyn więc jednego przez drugie, czyli opłacana ryzyko premia netto od ryzyko kapitału zmienia się corocznie w sposób nie dający się ogólnie przewidzieć, ponieważ zależy to od kombinacyi, według jakiej reasekurowana osoba ubezpieczenie zawarła.

Kapitały na dożycie nie potrzebują być reasekurowane, gdyż nie może się tu trafić żadna taka katastrofa, któraby mogła stać się niebezpieczną dla dobrze prowadzonej instytucyi.

114. Wykup polis. Z rozdziału VIII-go wiemy, że instytucye ubezpieczeń życiowych gromadzą zasoby, zwane rezerwą premiową, przeznaczone na częściowe lub całkowite pokrywanie zobowiązań instytucyi względem osób ubezpieczonych. Na rachunku każdej osoby ubezpieczonej figuruje zatem pewna kwota pieniędzy, mająca ściśle określone przeznaczenie w razie, jeżeli zajdzie fakt, decydujący wypłatę ubezpieczonego kapitału. Zachodzi jednak pytanie, kto i jakie ma prawo do pomienionej kwoty, jeżeli osoba ubezpieczona zrywa dobrowolnie umowę przed zajściem powyżej wzmiankowanego faktu (decydującego wypłatę kapitału): czy pozostała rezerwa powinna stać się własnością instytucyi, czy też winna być zwróconą zrywającemu umowę? O pozostałą, ponad rezerwę, część wniesionych premij sporu być nie może, albowiem rozchodzi się ona na znane nam cele: na pokrywanie kosztów administracyjnych i, w ubezpieczeniach pośmiertnych, na dopłatę do nagromadzonej rezerwy, w przypadkach śmierci osób ubezpieczonych (art. 112).

Z początku, gdy pierwsze instytucye ubezpieczeń życiowych powstawały, nie było wcale mowy o jakichkolwiek zwrotach osobom zrywającym umowę. Dopiero angielskie towarzystwo „The Equitable Society for the Assurance of Life and Survivorships”, powodowane humanitarnymi względami, na zasadzie prawa z d. 5 marca 1772 r., pierwsze wprowadziło zwyczaj t. z. wykupu polis, czyli zwracania pewnej części wniesionych premij osobom nie życzącym sobie dalej być ubezpieczonemi. Za tem towarzystwem poszły inne; sprawa stała się następnie przedmiotem konkurencyi, która w zwykły sobie sposób położenie wyzyskiwała. Zaczęto prześcigać się w przyrzeczeniach, począwszy od $\frac{1}{10}$ wniesionych premij, jaką z początku tytułem wykupu wypłacano, dla ułatwienia sobie akwizycyi, wysokość wykupu podnoszono coraz bardziej, aż wkońcu czyniono tak wysokie przyrzeczenia, że one nie mogły być i nigdy nie były spełniane.

Tymczasem specyaliści zajęli się badaniem przedmiotu, lecz do jednakich poglądów nie doszli.

Jedni, przeważnie juryści, utrzymują, że żadnych zwrotów, zrywającym umowę, instytucye ubezpieczeń życiowych czynić nie są obowiązane, gdyż rezerwa nie jest własnością ubezpieczonych, lecz instytucyi. Ubezpieczenie stanowi dobrowolną umowę, mocą której instytucya obowiązuje się wypłacić pewien kapitał w razie śmierci lub dożycia terminu przez osobę ubezpieczoną;

ta ostatnia zaś wzamian obowiązuje się wnosić premie. Co instytucya z premiami robić będzie, to ubezpieczonego nie obchodzi, byle został zaspokojony, gdy zajdzie fakt, od którego wypłata kapitału zależy.

Instytucya więc, gromadząc rezerwę, czyni to w imię własnego interesu, aby z czasem miała z czego wypłacać zastrzeżone umowami kapitały; mogłaby jednak radzić sobie inaczej i nie gromadzić wcale rezerwy. Skoro więc gromadzenie rezerwy nie stanowi przedmiotu umowy, lecz zależy od gospodarczych poglądów kierujących instytucyą, to jakież mogą mieć prawo ubezpieczeni do realności, która ewentualnie bez pogwałcenia umów, mogłaby wcale nie istnieć?

Co więcej — możność zerwania umowy przez osobę ubezpieczoną z prawem do odszkodowania jest do pewnego stopnia zasadą niesprawiedliwą, gdyż przysługuje tylko jednej stronie. Instytucyi pod żadnym pozorem nie może być wolno zerwać umowy, z obowiązków swoich, chce czy nie chce, wywiązać się musi. Gdy więc jedna strona musi być i jest tak bezwzględnie skrępowaną, jakimże sposobem można stronie drugiej nadawać nie tylko prawo do zrywania umowy, ale nadto jeszcze i prawo do odszkodowania!

Technicy — naodwrót — twierdzą, iż ubezpieczony, w razie zerwania umowy, ma prawo do rezerwy, albowiem rezerwa jest jego, a nie instytucyi własnością.

Ubezpieczenia w zasadzie są roczne, premia więc do każdorocznego ryzyka ustosunkowaną być powinna (roczna ryzyko premia).

W takim jednak razie, ponieważ ryzyko z każdym rokiem rośnie, premia również wzrastałaby, co dla ubezpieczonych bardzo byłoby niewygodne i niepraktyczne. Dla tego ustanawia się premia stała (niejako przeciętna) na cały czas trwania umowy, która z początku jest wyższą, a później niższą od ryzyko premii. Nadpłata, jaka stąd w pierwszych latach powstaje, gromadzi się pod nazwą rezerwy, z której następnie, gdy ryzyko premia staje się większą od premii stałej, instytucya czerpie na pokrycie niedoborów. Wynika stąd, że rezerwa, jako nadpłata, jest własnością ubezpieczonych, że więc w razie zerwania umowy, zwróconą im być powinna.

Pogląd ten widocznie znalazł większe uznanie w sferach rządowych, gdyż w wydawanych obecnie koncesyach obowiązek wykupywania polis bywa zastrzegany. Wszakże wysokość wykupu pozostawia się uznaniu instytucyi, skutkiem czego dziś nie może już być kwestyi co do obowiązku wykupywania polis; sporowi podlegać tylko może wysokość wykupu, która w każdym razie rozmiaru rezerwy przewyższać nie powinna.

Chociaż stan zdrowia każdej pojedynczo wziętej osoby jest rozmaity, to jednak można sobie wyobrazić człowieka ze zdrowiem, które za typ przeciętny zdrowia wszystkich ubezpieczonych przyjąć można. Gdyby ogół zrywających umowę stanowił, pod względem zdrowia, przeciętny typ wszystkich ubezpieczonych, to płacąc każdemu jego całkowitą rezerwę, nie wyrządzilibyśmy instytucyi żadnego uszczerbku, gdyż jej ryzyko pozostałoby takie samo, jak poprzednio. Jeżeli jednak przeciętne zdrowie zrywających umowę jest lepsze od przeciętnego typu wszystkich ubezpieczonych, w takim razie zrywający umowę przyczyniają się do obniżenia przeciętnego stanu zdrowia pozostałych ubezpieczonych, przez co ryzyko instytucyi zwiększa się, czyli instytucya ponosi szkodę, którą zrywający umowę wynagrodzić powinni, poprzestając na wykupie mniejszym od rezerwy, na ich koncie zapisanej.

Otóż są powody do mniemania, że przeciętny typ ogółu zrywających umowę jest zdrowszy od przeciętnego typu ogółu ubezpieczonych. Nasuwa nam to na myśl proste zastanowienie. Kto, po pewnej liczbie lat opłacania premij, czuje się niezdrowym i ma przed sobą widoki blizkiej śmierci, ten najprawdopodobniej ubezpieczenia nie zerwie, czyniąc wszelkie wysiłki, aby premię dalej płacić. Przeciwnie, człowiek zdrów i silny, mający jeszcze przed sobą widoki długiego życia, żadnymi skrupułami krępować się nie będzie—pierwsza lepsza okoliczność może go popchnąć do zerwania. Aprioryśtyczne to przewidywanie stwierdza statystyka (art. 28), a skoro tak jest, wysokość wykupu powinna być rzeczywiście niższą od rezerwy.

Oprócz tego, wszystkie rezultaty rachunkowe instytucyj ubezpieczeń życiowych opierają się na prawie wielkich liczb, t. j. urzeczywistniają się o tyle, o ile się działa na dostatecznie wielkiej liczbie osób ubezpieczonych. Im więcej jest ubezpieczonych, tem mniej instytucya jest narażona na straty; im ich jest mniej, tem więcej stracić może, czyli ze zmniejszeniem się liczby osób ubezpieczonych wzrasta ryzyko instytucyi. Zrywający umowę, przyczyniając się do zmniejszenia liczby osób ubezpieczonych, powiększają i z tego powodu ryzyko instytucyi, a tem samem winni są dać za to odpowiedni równoważnik.

Wreszcie wiadomo powszechnie, że koszta administracyjne na jednostkę wypadają tem mniejsze, im na więcej osób się rozkładają i naodwrót. W razie więc zmniejszania się liczby osób ubezpieczonych zwiększają się koszta administracyjne na jednostkę, na czem oczywiście traci instytucya i pozostały ogół osób ubezpieczonych. Straty te słusznie powinny być przez zrywających umowę wynagrodzone.

Wszakże stosunku odchylenia przeciętnego stanu zdrowia ogółu zrywających umowę od przeciętnego stanu zdrowia ogółu ubezpieczonych oznaczyć niepodobna, jak i trudno określić z góry, w jakim stopniu zwiększy się ryzyko instytucyi z przyczyny zmniejszenia się liczby osób ubezpieczonych. Nie można więc także oznaczyć ściśle przeciętnej normy na odszkodowanie zrywających umowę ubezpieczeniową i dla tego panuje pod tym względem wielka rozmaitość.

Podczas gdy jedne instytucye, tytułem wykupu, wypłacają tylko $^2/_3$ rezerwy, inne dają 75%, 80%, a nawet 90%; jedne utrzymują ten sam stosunek przez cały czas trwania umowy, inne zwiększają go od 50% do 100%, w miarę jak długo trwa ubezpieczenie.

Inne znów instytucye za podstawę do oznaczenia wysokości wykupu nie przyjmują rezerwy, lecz wniesione premie i z tych wydzielają od 20% do 40%, albo biorą za podstawę rezerwę, lecz pod warunkiem, aby wykup nie przenosił $^1/_3$ wniesionych premij. Niektórzy specyaliści proponują strącać z rezerwy matematyczną wartość straconych przez instytucyę, skutkiem zerwania umowy, dodatków na administracyę.

Wszystko, cośmy powyżej o wykupie polis powiedzieli, odnosi się do kombinacyj, w których jest pewność, że instytucya wcześniej czy później ubezpieczony kapitał wypłaci, jak to np. ma miejsce w zwyczajnych ubezpieczeniach pośmiertnych, w ubezpieczeniach mieszanych i t. p. W tych jednak ubezpieczeniach, w których ewentualnie kapitał może nie być wypłacony, jak np. w razie śmierci, przed upływem terminu płatności kapitału, w ubezpieczeniach na dożycie bez zwrotu premij, wykup nie powinien być dopuszczony, premie bowiem w takich przypadkach są o tyle zniżone, o ile, według przewidywań tablicy śmiertelności, można liczyć na zyski płynące z przedwczesnej śmierci osób ubezpieczonych. Tymczasem, jeżeli dopuścimy wykup, każdy ubezpieczony w razie niebezpiecznej choroby zerwie umowę, skutkiem czego instytucya zostanie pozbawioną tych korzyści na jakie rachowała przy obliczaniu premij.

115. Redukcya polis. Jest inny, o wiele racyonalniejszy, sposób wynagrodzenia osoby ubezpieczonej, gdy ta nie może dalej płacić premij; można mianowicie, w odpowiednio zmniejszonych rozmiarach, utrzymać to samo ubezpieczenie, bez obowiązku dalszego wnoszenia premij. Sposób taki nazywa się redukcyą polisy.

Weźmy najprzód pod uwagę ubezpieczenie kapitału na dożycie bez zwrotu premij.

Przypuśćmy, że osoba x letnia ubezpieczyła 1-ę kapitału, płatnego w razie przeżycia n lat. Premię roczną (netto) oznaczmy przez ${}^np_x$, jednorazową— przez ${}_nP_x$.

Ubezpieczenie to można rozłożyć na szereg innych, corocznie zawieranych ubezpieczeń, przyjmując roczne premie za jednorazowe, za które każdorazowo oddzielnie ubezpiecza się odpowiedniej wysokości kapitał. Kapitał taki jest tyle razy mniejszy od 1-ki (od rzeczywiście ubezpieczonego kapitału), ile razy premia roczna jest mniejsza od odpowiedniej premii jednorazowej.

Tak więc, kapitał ubezpieczony za pierwszą roczną premię wynosi

$${}^np_x \cdot \frac{1}{{}_nP_x};$$

kapitał ubezpieczony za drugą roczną premię równa się

$${}^np_x \cdot \frac{1}{{}_{n-1}P_{x+1}}$$

i t. d., w ogóle, kapitał ubezpieczony za ν roczną premię równa się

$${}^np_x \cdot \frac{1}{{}_{n-\nu+1}P_{x+\nu-1}}.$$

Kapitał zatem ubezpieczony za sumę premij rocznych, wniesionych przez ν lat, wynosi

$$(\alpha)\quad {}^np_x \cdot \left(\frac{1}{{}_nP_x} + \frac{1}{{}_{n-1}P_{x+1}} + \frac{1}{{}_{n-2}P_{x+2}} + \dots + \frac{1}{{}_{n-\nu+1}P_{x+\nu-1}}\right) = {}^np_x \cdot \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\nu-1}\left(\frac{1}{{}_{n-\alpha}P_{x+\alpha}}\right)$$

Ponieważ ${}_{n-\alpha}P_{x+\alpha} = \frac{v_{x+n}}{v_{x+\alpha}}$,

zatem (α) przechodzi na

$$ {}^{n}p_x \cdot \frac{1}{v_{x+n}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\nu-1} v_{x+\alpha} = {}^{n}p_x \cdot \frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} \cdot \frac{v_{x+\nu}}{v_{x+n}} = $$

$$ = \frac{{}^{n}p_x}{\frac{v_{x+\nu}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}}} \cdot \frac{1}{{}_{n-\nu}P_{x+\nu}} = \frac{{}^{n}p_x}{{}^{\nu}p_x} \cdot \frac{1}{{}_{n-\nu}P_{x+\nu}}. $$

Lecz $\frac{{}^{n}p_x}{{}^{\nu}p_x}$, według art. 101, stanowi rezerwę po ν latach od danego ubezpieczenia, mamy więc na wysokość kapitału, jaki został ubezpieczony przez wniesienie pierwszych ν premij rocznych, wyrażenie

$$ \frac{\mathrm{Rez}(x,\nu)}{{}_{n-\nu}P_{x+\nu}}, \tag{320} $$

t. j. wysokość szukanego kapitału jest ilorazem, wypadłym z podzielenia nagromadzonej, po ν latach, rezerwy przez premię jednorazową za ubezpieczenie 1-ki kapitału, płatnego w tym samym terminie, przez osobę o ν lat starszą od osoby x letniej.

Taki kapitał, zwany **kapitałem zredukowanym**, może instytucya, bez obowiązku dalszego wnoszenia premij, ubezpieczyć danej osobie za wniesione dotąd przez nią premie. Rezultat ten był łatwy do przewidzenia, albowiem rezerwa stanowi tutaj rodzaj premii jednorazowej, jaką ubezpieczony, w chwili redukowania polisy, niejako wnosi, ażeby sobie ubezpieczyć pewnej wysokości kapitał, płatny po $n - \nu$ latach. Wysokość zaś ubezpieczonego kapitału równa się, oczywiście, wniesionej premii jednorazowej, podzielonej przez premię jednorazową za ubezpieczenie 1-ki kapitału.

Np. roczna premia netto za ubezpieczenie osobie 30-o letniej 10000 fr. płatnych po 20-u latach, równa się

$$ {}^{20}p_{30} = \frac{v_{50}}{\Sigma v_{30} - \Sigma v_{50}} \times 10000 = 297{,}73 \text{ fr.} $$

Po 6-u latach rezerwa od tego ubezpieczenia wynosi

$$ \mathrm{Rez}(30,6) = ({}_{14}P_{36} - {}^{20}p_{30} \cdot {}^{14}R_{36}) \times 10000 = \frac{{}^{20}p_{30}}{{}^{6}p_{30}} \times 10000 = 2085{,}25 \text{ frank.} $$

Otóż, jeżeli rzeczona osoba po 6-u latach przestaje wnosić premie, można jej wzamian, bez obowiązku dalszego płacenia premij, ubezpieczyć kapitał

$$ \frac{\mathrm{Rez}(30,6)}{{}_{14}P_{36}} = \frac{2085{,}25}{0{,}524927} = 3972{,}46 \text{ fr.}, $$

płatny po 14-u latach, jeżeli osoba ubezpieczona owe lat 14 przeżyje.

W rachunku powyższym nie uwzględniliśmy kosztów administracyjnych; gdy je uwzględnimy, wzór (320) przejdzie na

$$(321) \qquad \frac{\mathrm{Rez}(x, \nu)}{{}_{n-\nu}\mathrm{P}_{x+\nu} \cdot \mathrm{Q}}.$$

Gdy w poprzednim przykładzie, na koszta administracyjne i t. p. wydatki przyjmiemy 15%, jednorazowa premia brutto za ubezpieczenie 1-ki kapitału wyniesie ${}_{14}\mathrm{P}_{36} \times 1{,}15 = 0{,}603\,666$, a wysokość zredukowanego kapitału jest równa

$$\frac{\mathrm{Rez}(30{,}6)}{{}_{14}\mathrm{P}_{36} \times 1{,}15} = \frac{2\,085{,}25}{0{,}603\,666} = 3\,454{,}31 \text{ fr.}$$

Do podobnych rezultatów dochodzi się i w innych kombinacyach. Jeżeli np. osoba x letnia ubezpieczyła sobie 1-kę rocznej renty, odroczonej na n lat i po ν latach przestaje płacić premię roczną ${}^{n}p_x$, to instytucya, za wniesione dotąd premie, ubezpieczyć jej może rentę zredukowaną do wysokości

$$(322) \qquad \frac{\mathrm{Rez}(x,\nu)}{{}_{n-\nu}\mathrm{R}_{x+\nu}} = {}^{n}p_x \cdot \frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}}{\Sigma v_{x+n}}.$$

W ubezpieczeniach kapitału pośmiertnego, z dożywotnią opłatą rocznej premii p_x, pierwszą roczną premię można uważać za złożoną z dwóch części: z premii jednorazowej za zwyczajne pośmiertne ubezpieczenie pewnego kapitału K_1 i z premii za roczne ubezpieczenie kapitału $(1 - \mathrm{K}_1)$, uzupełniającego kapitał K_1 do całkowitej ubezpieczonej sumy (jak w obecnym przypadku do 1-ki). Gdy premię od 1-ki za pierwsze ubezpieczenie oznaczymy przez P_x, za drugie przez ${}^{1}p_x$, to oczywiście powinno być

$$p_x = \mathrm{K}_1 . \mathrm{P}_x + (1 - \mathrm{K}_1) . {}^{1}p_x, \text{ skąd}$$

$$\mathrm{K}_1 = \frac{p_x - {}^{1}p_x}{\mathrm{P}_x - {}^{1}p_x} = \frac{p_x - \dfrac{m_x}{v_x}}{\dfrac{\Sigma m_x}{v_x} - \dfrac{m_x}{v_x}} = \frac{v_x p_x - m_x}{\Sigma m_{x+1}} = \frac{\dfrac{v_x}{v_{x+1}} p_x - \dfrac{m_x}{v_{x+1}}}{\mathrm{P}_{x+1}}.$$

Drugą premię roczną można uważać za złożoną z premii jednorazowej za zwyczajne pośmiertne ubezpieczenie pewnego kapitału K_2 i z premii za roczne ubezpieczenie pozostałej części kapitału, dopełniającego K_2 do $1 - \mathrm{K}_1$, czyli

$$p_x = \mathrm{K}_2 . \mathrm{P}_{x+1} + (1 - \mathrm{K}_1 - \mathrm{K}_2) . {}^{1}p_{x+1}, \text{ skąd}$$

$$\mathrm{K}_2 = \frac{p_x - (1 - \mathrm{K}_1) . {}^{1}p_{x+1}}{\mathrm{P}_{x+1} - {}^{1}p_{x+1}}.$$

Podobnie dla trzeciego roku

$$\mathrm{K}_3 = \frac{p_x - (1 - \mathrm{K}_1 - \mathrm{K}_2)\, {}^{1}p_{x+2}}{\mathrm{P}_{x+2} - {}^{1}p_{x+2}}.$$

Gdy więc osoba ubezpieczona po roku przestaje płacić premie, może dalej pozostać ubezpieczoną na kapitał K_1, bez obowiązku dalszego wnoszenia premij.

Gdy przestaje płacić premie po 2-ch latach, może pozostać ubezpieczoną na kapitał $K_1 + K_2$ i t. d.

Z poprzednich wyrażeń na K_1, K_2 i t. d. otrzymujemy

$$K_1 = \frac{v_x p_x - m_x}{\Sigma m_{x+1}} = \frac{p_x . \frac{v_x}{v_{x+1}} - \frac{m_x}{v_{x+1}}}{P_{x+1}} .$$

$$K_1 + K_2 = \frac{v_x p_x - m_x}{\Sigma m_{x+1}} + \frac{p_x - \frac{m_{x+1}}{v_{x+1}} \cdot \left(1 - \frac{v_x p_x - m_x}{\Sigma m_{x+1}}\right)}{\frac{\Sigma m_{x+1}}{v_{x+1}} - \frac{m_{x+1}}{v_{x+1}}} =$$

$$= \frac{v_x p_x - m_x}{\Sigma m_{x+1}} + \frac{v_{x+1} p_x - m_{x+1}\left(1 - \frac{v_x p_x - m_x}{\Sigma m_{x+1}}\right)}{\Sigma m_{x+2}} =$$

$$= \frac{v_x p_x - m_x}{\Sigma m_{x+1}} \cdot \left(1 + \frac{m_{x+1}}{\Sigma m_{x+2}}\right) + \frac{v_{x+1} p_x - m_{x+1}}{\Sigma m_{x+2}} =$$

$$= \frac{v_x p_x - m_x}{\Sigma m_{x+2}} + \frac{v_{x+1} p_x - m_{x+1}}{\Sigma m_{x+2}} = \frac{p_x . \frac{v_x + v_{x+1}}{v_{x+2}} - \frac{m_x + m_{x+1}}{v_{x+2}}}{\frac{\Sigma m_{x+2}}{v_{x+2}}} =$$

$$= \frac{p_x . \frac{v_x + v_{x+1}}{v_{x+2}} - \frac{m_x + m_{x+1}}{v_{x+2}}}{P_{x+2}} .$$

W taki sam sposób znajdziemy

$$K_1 + K_2 + K_3 = \frac{p_x . \frac{v_x + v_{x+1} + v_{x+2}}{v_{x+3}} - \frac{m_x + m_{x+1} + m_{x+2}}{v_{x+3}}}{P_{x+3}} ,$$

a po ν latach, polisa może być zredukowaną do sumy

$$(323) \qquad \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} K_\alpha = \frac{p_x . \frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} - \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}}}{P_{x+\nu}} ;$$

albo, podstawiwszy

$$\frac{\Sigma m_x}{v_{x+\nu}} = \frac{\Sigma v_x}{v_{x+\nu}} \cdot \frac{\Sigma m_x}{\Sigma v_x} = \frac{p_x . \Sigma v_x}{v_{x+\nu}} ,$$

$$(323') \qquad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\nu} K_\alpha = \frac{\frac{\Sigma m_{x+\nu}}{r_{x+\nu}} - p_x . \frac{\Sigma v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}}}{P_{x+\nu}} = \frac{P_{x+\nu} - p_x . R_{x+\nu}}{P_{x+\nu}} = \frac{\mathrm{Rez}(x, \nu)}{P_{x+\nu}} .$$

Licznik ostatniego wyrażenia jest rezerwą po ν latach. Okazuje się więc, że wysokość zredukowanego kapitału, jak i przy ubezpieczeniu kapitałów na dożycie i przy rentach, otrzymuje się z podzielenia nagromadzonej po ν latach rezerwy przez premię jednorazową za ubezpieczenie 1-ki kapitału pośmiertnego, ubezpieczonego przez osobę o ν lat starszą.

Łącząc rezultat rachunkowy, otrzymany dla wziętych pod uwagę kombinacyj, z prostem zastanowieniem, pozwalającem, w razie redukowania polisy, uważać nagromadzoną rezerwę za premię jednorazową, za którą, w miejsce dawnego, ubezpiecza się mniejszej wysokości kapitał, powyżej podane prawidło na obliczanie wysokości zredukowanego kapitału można uważać za ogólne, stosujące się do wszelkiego rodzaju kombinacyj ubezpieczeniowych.

Pamiętać tylko trzeba, iż w razie, jeżeli instytucya, przy redukowaniu polisy, uważa za właściwe liczyć sobie koszta administracyjne, za dzielnik rezerwy przyjąć należy nie premię netto, lecz odpowiednio oznaczoną jednorazową premię brutto.

Przy wykupie polisy twierdziliśmy, że zrywającemu umowę nie można zwracać całkowitej rezerwy, tylko zmniejszoną o pewien procent, ponieważ instytucya ponosi w takim razie pewne szkody na ryzyku i na kosztach administracyjnych, które zrywający umowę pokryć winni. Przy redukowaniu polisy, okoliczności powyższe nie zachodzą; ubezpieczenie, acz zmniejszone, jednak trwa dalej i koszta administracyjne zostają pokryte przez użycie za dzielnik jednorazowej premii brutto. Można więc na dobro osoby, nie mogącej dalej płacić premij, przyjąć całkowitą rezerwę, co wychodzi na korzyść ubezpieczonego. Skutkiem tego pragnąć należy, aby ten sposób postępowania mógł być zawsze w miejsce wykupu stosowany.

116. ZMIANA KOMBINACYI UBEZPIECZENIOWEJ. Warunki bytu, w jakich pozostają ubezpieczeni, różnym podlegać mogą zmianom, skutkiem czego i ubezpieczenia, odpowiednie przy warunkach dawnych, mogą się stać z czasem niedogodnemi, czyli zajść może potrzeba zamiany ubezpieczenia pierwotnego na inne. Ponieważ w razach podobnych ubezpieczony nie zrywa umowy, tylko ją zmienia, nie ma więc słusznego powodu do zmniejszenia rezerwy na jego koncie zapisanej, lecz należy takową traktować jako premię jednorazową, pokrywającą w części nowe względem instytucyi zobowiązania, wypływające z tytułu zmienionego ubezpieczenia. Pozostałą resztę powinien ubezpieczony albo dopłacić jednorazowo, albo też wnosić corocznie pewną opłatę, o obliczenie której właśnie w niniejszym artykule nam chodzi.

Przypuśćmy, że osoba w wieku lat x ubezpieczyła 1-kę kapitału płatnego po jej śmierci, zobowiązawszy się za to płacić corocznie premię p_x aż do śmierci.

Po ν latach życzy sobie zawarte ubezpieczenie zmienić w ten sposób, aby roczna premia nie była płaconą dożywotnio, tylko przez n lat. Zachodzi pytanie, jaką w dalszym ciągu premię roczną ma rzeczona osoba wnosić przez owe n lat?

Po ν latach matematyczną wartość omawianego ubezpieczenia reprezentuje jednorazowa premia $P_{x+\nu}$. Otóż, jeżeli nagromadzoną przez ν lat rezerwę oznaczymy, jak zwykle, przez $\mathrm{Rez}(x, \nu)$, a szukaną wysokość mającej się corocznie, przez n lat, dopłacać premii netto—przez p, to oczywiście powinno być

$$\mathrm{Rez}(x, \nu) + p \,.\, {}^n\mathrm{R}_{x+\nu} = \mathrm{P}_{x+\nu},$$

albo, ponieważ

$$\mathrm{Rez}(x, \nu) = \mathrm{P}_{x+\nu} - p_x . \mathrm{R}_{x+\nu};$$

$$\mathrm{P}_{x+\nu} - p_x . \mathrm{R}_{x+\nu} + p . {}^n\mathrm{R}_{x+\nu} = \mathrm{P}_{x+\nu},$$

skąd szukane

$$p = p_x \cdot \frac{\mathrm{R}_{x+\nu}}{{}^n\mathrm{R}_{x+\nu}} \,. \tag{324}$$

Mnożąc licznik i mianownik strony drugiej przez $\mathrm{P}_{x+\nu}$, wypada inne jeszcze wyrażenie

$$p = p_x \cdot \frac{\mathrm{P}_{x+\nu}}{{}^n\mathrm{R}_{x+\nu}} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{P}_{x+\nu}}{\mathrm{R}_{x+\nu}}} = p_x . \frac{{}^n p_{x+\nu}}{p_{x+\nu}} \,. \tag{324'}$$

Gdyby ubezpieczony chciał nie tylko skrócić czas płacenia premij do n lat, ale nadto jeszcze otrzymać kapitał w razie, jeżeli owe n lat przeżyje, to powinno być

$$\mathrm{Rez}(x, \nu) + p \,.\, {}^n\mathrm{R}_{x+\nu} = {}_n\mathrm{P}_{x+\nu}, \text{ albo}$$

$$\mathrm{P}_{x+\nu} - p_x . \mathrm{R}_{x+\nu} + p \,.\, {}^n\mathrm{R}_{x+\nu} = {}_n\mathrm{P}_{x+\nu}.$$

Według (146′) $\mathrm{P}_{x+\nu} = 1 - \frac{r-1}{r}\, \mathrm{R}_{x+\nu}$,

„ (149″) $p_x = \frac{1}{\mathrm{R}_x} - \frac{r-1}{r}$,

„ (174″) ${}_n\mathrm{P}_{x+\nu} = 1 - \frac{r-1}{r} \cdot {}^n\mathrm{R}_{x+\nu}$,

po podstawieniu tych wyrażeń w ostatnie równanie, wypada

$$p = \frac{\mathrm{R}_{x+\nu}}{\mathrm{R}_x} \cdot \frac{1}{{}^n\mathrm{R}_{x+\nu}} - \frac{r-1}{r} \,. \tag{325}$$

W podobny sposób można przeprowadzać wszelkie inne przemiany jednych kombinacyj na drugie.

117. ZMIANA TABLICY ŚMIERTELNOŚCI I STOPY PROCENTU TECHNICZNEGO. Z biegiem lat, pod wpływem cywilizacyi oraz rozwoju stosunków ekonomicznych i finansowych, zmienia się śmiertelność i stopa procentowa od wypożyczanych kapitałów. Odbija się to na interesach instytucyj ubezpieczeń życiowych w sposób więcej lub mniej korzystny i dla tego powinno się za tego rodzaju zmianami pilnie śledzić i odpowiednio do potrzeby modyfikować warunki ubezpieczeniowe oraz taryfy premiowe.

Opłat brutto, za poprzednio zawarte ubezpieczenia, instytucye samowolnie zwiększać nie mogą, stanowią one bowiem warunek, nieulegający zmianie przez cały czas trwania umowy. Należy więc przedewszystkiem zbadać, czy nowe warunki mogą być zastosowane do dawnych ubezpieczeń, t. j. trzeba rozpoznać, czy premie netto, jakie przy nowych warunkach dla dawnych ubezpieczeń wypadają, są niższe od dotąd płaconych premij brutto. Zobaczmy tedy, w jaki sposób nową premię netto obrachować można, przy uwzględnieniu innych podstaw rachunkowych i nagromadzonej już rezerwy.

Dajmy na to, że zmiana zachodzi po ν latach trwania umowy i oznaczmy dawną roczną premię netto od danego ubezpieczenia przez p_x, nagromadzoną rezerwę przez $\text{Rez}(x, \nu)$, czynnik zamieniający premię netto na brutto przez q; wszystkie zaś ilości odnoszące się do zmienionych warunków wyróżnijmy od dawnych kreską po stronie prawej symbolu — tak, że np. nową premię netto za dalszy czas trwania tego samego ubezpieczenia oznaczać będziemy przez p' i t. d.

Po upływie ν lat, dla zwyczajnego ubezpieczenia pośmiertnego z dożywotnią opłatą premij rocznych, winno być

$$P'_{x+\nu} = \text{Rez}(x, \nu) + p' . R'_{x+\nu}, \text{ skąd}$$

(326) $$p' = \frac{P'_{x+\nu} - \text{Rez}(x, \nu)}{R'_{x+\nu}} = p'_{x+\nu} - \frac{\text{Rez}(x, \nu)}{R'_{x+\nu}} .$$

Ażeby otrzymana premia była w praktyce możliwą do zastosowania, powinna być koniecznie mniejszą od dawnej premii brutto, t. j. powinno być

$$p_x . q > p'_{x+\nu} - \frac{\text{Rez}(x, \nu)}{R'_{x+\nu}}$$

i to o tyle mniejszą, aby pozostałość stanowiła dodatek, wystarczający na pokrycie wszelkiego rodzaju kosztów obciążających instytucyę. Jeżeli warunkowi temu nie czyni się zadość, nowych warunków, bez odpowiedniego zwiększenia nagromadzonej dotąd rezerwy, do dawnych ubezpieczeń stosować nie można.

118. BŁĘDNOŚĆ OBLICZANIA PREMIJ ZE ŚREDNIEJ DŁUGOŚCI ŻYCIA. W art. 19 nadmieniliśmy o rozpowszechnieniu się mylnego mniemania, jakoby obliczanie premij za ubezpieczenia życiowe opierało się na średniej długości życia ludzkiego.

Średnia długość życia każdej pojedynczej osoby, należącej do danej grupy osób x letnich, oznacza równą dla wszystkich liczbę lat, jaką każda z pomienionych osób przeżyćby musiała, aby wszystkie razem przeżyły tyle czasu, ile według tablicy śmiertelności przeżyć powinny. Albo inaczej, gdyby wszystkie osoby x letnie miały umrzeć jednocześnie, przeżywszy razem tyle czasu, ile według tablicy śmiertelności przeżyć powinny, to każda z nich żyćby musiała pewną jednakową liczbę lat, która się zowie średnią długością życia osoby x letniej.

Przypuśćmy, że osoba x letnia ubezpiecza sobie 1-kę renty rocznej, dożywotnio płatnej z dołu i że średnią długością życia tej osoby jest $n + \varepsilon$ lat, gdzie n liczba całkowita, a $\varepsilon < 1$.

Według mniemania niektórych osób, wartość owej renty, czyli jednorazowa premia za takową oznacza się przy założeniu, że osoba ubezpieczona żyć będzie $n + \varepsilon$ lat; gdy więc w ten sposób obrachowaną premię oznaczymy przez $P_{x(n+\varepsilon)}$, wysokość jej oczywiście wypada ze wzoru

$$(\alpha) \qquad P_{x(n+\varepsilon)} = \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^n + \varepsilon \rho^{n+1},$$

tymczasem rzeczywistem wyrażeniem jest

$$_1R_x = \frac{\Sigma v_{x+1}}{v_x} = \frac{\Sigma \lambda_{x+1} \rho^{x+1}}{\lambda_x \rho^x} = \rho . \frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x} + \rho^2 \frac{\lambda_{x+2}}{\lambda_x} + \rho^3 \frac{\lambda_{x+3}}{\lambda_x} + \ldots$$

do końca tablicy śmiertelności.

Ułamki $\frac{\lambda_{x+1}}{\lambda_x}, \frac{\lambda_{x+2}}{\lambda_x}, \frac{\lambda_{x+3}}{\lambda_x}, \ldots$ oznaczają prawdopodobieństwa przeżycia przez osobę x letnią roku, dwóch, trzech lat i t. d.; gdy więc owe prawdopodobieństwa oznaczymy przez $p_{x,1}$; $p_{x,2}$; $p_{x,3}$ i t. d., będzie

$$(\beta) \qquad _1R_x = \rho . p_{x,1} + \rho^2 p_{x,2} + \rho^3 . p_{x,3} + \ldots$$

Otóż dowiedziemy, że (α) nie równa się (β), lecz

$$(\gamma) \qquad _1R_x < P_{x(n+\varepsilon)},$$

którą to nierówność doprowadzimy do oczywistości (*).

Podstawiwszy w (γ) wyrażenia (α) i (β) za $P_{x(n+\varepsilon)}$ i $_1R_x$, wypada

$$\rho . p_{x,1} + \rho^2 p_{x,2} + \rho^3 p_{x,3} + \ldots < \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^n + \varepsilon \rho^{n+1}$$

albo, odejmując od obu stron po

$$\rho . p_{x,1} + \rho^2 . p_{x,2} + \ldots + \rho^{n+1} \, p_{x,n+1},$$

nierówność (γ) sprowadza się do kształtu

$$(\gamma') \qquad A = \rho^{n+2} p_{x,n+2} + \rho^{n+3} p_{x,n+3} + \ldots < B = \rho(1 - p_{x,1}) + \rho^2(1 - p_{x,2}) + \ldots$$
$$\ldots + \rho^n(1 - p_{x,n}) + \rho^{n+1}(\varepsilon - p_{x,n+1}).$$

Ponieważ $\rho < 1$, jest przeto

$$(\delta) \qquad A = \rho^{n+2} p_{x,n+2} + \rho^{n+3} p_{x,n+3} + \ldots < C = \rho^{n+2}(p_{x,n+2} + p_{x,n+3} + \ldots),$$

oraz

$$B = \rho . (1 - p_{x,1}) + \rho^2(1 - p_{x,2}) + \ldots + \rho^n(1 - p_{x,n}) + \rho^{n+1}(\varepsilon - p_{x,n+1}) > \rho^{n+1}[(1 - p_{x,1}) +$$
$$+ (1 - p_{x,2}) + \ldots + (1 - p_{x,n}) + (\varepsilon - p_{x,n+1})] = \rho^{n+1}[(n + \varepsilon) - \sum_{z=1}^{z=n+1} p_{x,z}].$$

(*) Dowód zaczerpnięty z dzieła B. Maleszewskiego „Теорія и практика пенсіонныхъ кассъ". Tom II, część II, rozd. 1, § 7, str. 16.

Według (33)

$$\text{śred. dł. życia}=(n+\varepsilon)=\frac{1}{2}+p_{x,1}+p_{x,2}+p_{x+3}+\ldots=\frac{1}{2}+\sum_{z=1}^{z=g}p_{x,z},$$

gdzie g oznacza granicę życia ludzkiego, wypada stąd

$$(n+\varepsilon)-\sum_{z=1}^{z=n+1}p_{x,z}=\frac{1}{2}+p_{x,n+2}+p_{x,n+3}+\ldots,$$

skutkiem czego ostatnia nierówność sprowadza się do

$$(\varepsilon)\quad B=\rho(1-p_{x,1})+\rho^2(1-p_{x,2})+\ldots+\rho^n(1-p_{x,n})+\rho^{n+1}(\varepsilon-p_{x,n+1})>$$
$$>D=\rho^{n+1}(\tfrac{1}{2}+p_{x,n+2}+p_{x,n+3}+\ldots).$$

Skoro $\rho<1$, jest przeto i $\rho^{n+2}<\rho^{n+1}$, a tem samem

$$(\varsigma)\quad C=\rho^{n+2}.(p_{x,n+2}+p_{x,n+3}+\ldots)<D=\rho^{n+1}(\tfrac{1}{2}+p_{x,n+2}+p_{x,n+3}+\ldots).$$

Z (ς) $C<D$, z (ε) $B>D$, zatem i $C<B$; że zaś według (δ) $A<C$, tem bardziej więc $A<B$, t. j. (γ'), czyli (γ) istotnie ma miejsce. Jednorazowa premia przeto obliczona według średniej długości życia jest różna od premii obrachowanej według tablicy śmiertelności; a ponieważ ten ostatni sposób, jak nam wiadomo, jest racyonalny, więc sposób oparty na średniej długości życia jest błędny, jak to w art. 19 zapowiedzieliśmy.

To samo, naturalnie, odnosi się i do ubezpieczeń kapitałów.

119. Ubezpieczenia na przypadek niezdolności do pracy. Od czasu pewnego do ubezpieczeń życiowych bywają przez niektóre towarzystwa włączane ubezpieczenia na przypadek niezdolności do pracy, bez względu na powód powstania takowej (*).

Bez tego dopełnienia, ubezpieczenia życiowe niezupełnie zabezpieczają byt osób interesowanych, opuszczają je bowiem w chwili największej niedoli: gdy osoba staje się niedołężną, gdy nie może zapracować nie tylko na premie, ale na własne utrzymanie, gdy zamiast być karmicielką swej rodziny, staje się dla niej ciężarem.

Różne instytucye w rozmaity sposób dążą do rozciągnięcia ubezpieczeń życiowych i na niezdolność do pracy. Jedne ustanawiają, tytułem dodatkowej opłaty, pewien stały procent od premii za ubezpieczenie życiowe; inne zatrzymują należne osobie ubezpieczonej dywidendy. Wzamian za to, jeżeli osoba ubezpieczona staje się niezdolną do pracy, nie tylko zostaje uwolnioną od obowiązku dalszego wnoszenia premij, ale otrzymuje nadto jakąś część ubezpieczonego kapitału lub pobiera pewien procent od tegoż kapitału aż do chwili jego płatności.

(*) Należy odróżnić niezdolność do pracy spowodowaną przez zajście nieszczęśliwego wypadku od niezdolności do pracy bez względu na przyczynę. Dział pierwszy jest cząstką, czyli szczególnym przypadkiem działu drugiego i stanowi przedmiot asekuracyi dla specyalnych instytucyj ubezpieczeń od nieszczęśliwych wypadków. Dział drugi jest ogólniejszy i o nim właśnie jest mowa w niniejszym artykule.

Nie potrzeba zbyt wielkiej biegłości w sprawach ubezpieczeniowych, aby dostrzedz, że wzmiankowane sposoby są dowolne, że się na żadnej gruntownej nie opierają podstawie.

Procentowo stały dla każdego wieku dodatek do premii życiowej nie może być racyonalnie oznaczonym, ponieważ możność stania się niezdolnym do pracy nie pozostaje w tak prostym ze śmiertelnością związku; dywidenda zaś jest ilością tak bardzo zmienną, że przyjmowanie wzamian za nią jakichś z góry ściśle określonych zobowiązań może się stać operacyą nader dla instytucyi niebezpieczną.

Przyczyna nieścisłego postępowania instytucyj leży w braku odpowiednich danych statystycznych, a brak ścisłych danych wynika pomiędzy innemi i z niepochwytności samego przedmiotu.

Przedmiot badań statystycznych musi być ściśle określony i posiadać względnie łatwe do rozpoznania cechy. Otóż, o ile fakt śmierci jest jasny, przez każdego łatwy do rozpoznania i nie mogący żadnej podlegać wątpliwości, o tyle fakt stania się niezdolnym do pracy jest problematyczny i, z wyjątkiem niewielu przypadków (krańcowe pomięszanie zmysłów, zupełny paraliż i t. p.), najczęściej sporowi podległy, gdyż przeważnie zależy od osobistych poglądów strony decydującej.

Kto jest niezdolnym do pracy: czy ten, kto nie jest w stanie pełnić swych czynności dotychczasowych; czy też ten tylko, kto bezwarunkowo żadnych już czynności załatwiać nie może? Jeżeli pierwszy, to np. śpiewak tracący głos będzie odszkodowany, pomimo, że może być człowiekiem zdrowym, silnym, zdolnym pełnić bardzo wiele innych robót. Jeżeli drugi, w takim razie np. ociemniały pedagog nie nabędzie prawa do odszkodowania, ponieważ może, dajmy na to, obracać rożen w kuchni restauracyjnej. Jeżeli wreszcie nie postawimy jednej, albo drugiej miary, całą sprawę oddać musimy na doraźny sąd ludzki, który — jak wiadomo — bardzo bywa stronny i łatwo może jedną albo drugą stronę skrzywdzić; w każdym zaś razie nie może dostarczać materyału do ścisłych badań statystycznych.

Ta właśnie trudność ścisłego określenia, kogo należy uważać za niezdolnego do pracy jest, naszem zdaniem, główną przyczyną, że statystyka inwalidności jest dotąd szczupłą i nader problematycznego znaczenia, oraz, że odnośne ubezpieczenia dotąd się nie rozwinęły, mimo dotkliwego braku, jaki z tego powodu uczuwać się daje.

Co do teoryi, ta jest już dosyć rozwinięta, ale zajmować się nią tutaj nie będziemy, raz dla tego, że wobec braku odpowiednich danych statystycznych, zapewne nie prędko jeszcze będzie mogła być racyonalnie w praktyce stosowaną, a następnie—ponieważ przedmiot ten został już w naszym języku opracowany przez p. T. Rozmarynowicza w broszurze p. t. „Matematyczne podstawy ubezpieczenia na wypadek niezdolności do pracy" (Warszawa, 1886), do której czytelników naszych, dla uzupełnienia podanych tu wiadomości, odsyłamy.

KONIEC.

TABLICE.

Tablica I.

Wartości funkcyi $\Theta(\gamma)$.

γ	$\Theta(\gamma)$	γ	$\Theta(\gamma)$	γ	$\Theta(\gamma)$	γ	$\Theta(\gamma)$
0,00	0,000 0000	0,50	0,520 4999	1,00	0,842 7008	1,50	0,966 1052
0,01	0,011 2833	0,51	0,529 2437	1,01	0,846 8105	1,51	0,967 2768
0,02	0,022 5644	0,52	0,537 8987	1,02	0,850 8380	1,52	0,968 4135
0,03	0,033 8410	0,53	0,546 4641	1,03	0,854 7842	1,53	0,969 5162
0,04	0,045 1109	0,54	0,554 9392	1,04	0,858 6499	1,54	0,970 5857
0,05	0,056 3718	0,55	0,563 3233	1,05	0,862 4360	1,55	0,971 6227
0,06	0,067 6215	0,56	0,571 6157	1,06	0,866 1435	1,56	0,972 6281
0,07	0,078 8577	0,57	0,579 8158	1,07	0,869 7732	1,57	0,973 6026
0,08	0,090 0781	0,58	0,587 9229	1,08	0,873 3261	1,58	0,974 5470
0,09	0,101 2806	0,59	0,595 9365	1,09	0,876 8030	1,59	0,975 4620
0,10	0,112 4630	0,60	0,603 8561	1,10	0,880 2050	1,60	0,976 3484
0,11	0,123 6230	0,61	0,611 6812	1,11	0,883 5330	1,61	0,977 2069
0,12	0,134 7584	0,62	0,619 4114	1,12	0,886 7879	1,62	0,978 0381
0.13	0,145 8671	0,63	0,627 0463	1,13	0,889 9707	1,63	0,978 8429
0,14	0,156 9470	0,64	0,634 5857	1,14	0,893 0823	1,64	0,979 6218
0,15	0,167 9959	0,65	0,642 0292	1,15	0,896 1238	1,65	0,980 3756
0,16	0,179 0117	0,66	0,649 3765	1,16	0,899 0962	1,66	0,981 1049
0,17	0,189 9923	0,67	0,656 6275	1,17	0,902 0004	1,67	0,981 8104
0,18	0,200 9357	0,68	0,663 7820	1,18	0,904 8374	1,68	0,982 4928
0,19	0,211 8398	0,69	0,670 8399	1,19	0,907 6083	1,69	0,983 1526
0,20	0,222 7025	0,70	0,677 8010	1,20	0,910 3140	1,70	0,983 7904
0,21	0,233 5218	0,71	0,684 6654	1,21	0,912 9555	1,71	0,984 4070
0,22	0,244 2958	0,72	0,691 4330	1,22	0,915 5339	1,72	0,985 0028
0,23	0,255 0225	0,73	0,698 1038	1,23	0,918 0501	1,73	0,985 5785
0,24	0,265 7000	0,74	0,704 6780	1,24	0,920 5052	1,74	0,986 1346
0,25	0,276 3263	0,75	0,711 1556	1,25	0,922 9001	1,75	0,986 6717
0,26	0,286 8997	0,76	0,717 5367	1,26	0,925 2359	1,76	0,987 1903
0,27	0,297 4182	0,77	0,723 8216	1,27	0,927 5136	1,77	0,987 6910
0,28	0,307 8800	0,78	0,730 0104	1,28	0,929 7342	1,78	0,988 1742
0,29	0,318 2834	0,79	0,736 1035	1,29	0,931 8987	1,79	0,988 6406
0,30	0,328 6267	0,80	0,742 1010	1,30	0,934 0080	1,80	0,989 0905
0,31	0,338 9081	0,81	0,748 0033	1,31	0,936 0632	1,81	0,989 5245
0,32	0,349 1259	0,82	0,753 8108	1,32	0,938 0652	1,82	0,989 9431
0,33	0,359 2785	0,83	0,759 5238	1,33	0,940 0150	1,83	0,990 3467
0,34	0,369 3644	0,84	0,765 1427	1,34	0,941 9137	1,84	0,990 7359
0,35	0,379 3819	0,85	0,770 6680	1,35	0,943 7622	1,85	0,991 1110
0,36	0,389 3296	0,86	0,776 1002	1,36	0,945 5614	1,86	0,991 4725
0,37	0,399 2059	0,87	0,781 4398	1,37	0,947 3124	1,87	0,991 8207
0,38	0,409 0093	0,88	0,786 6873	1,38	0,949 0160	1,88	0,992 1562
0,39	0,418 7385	0,89	0,791 8432	1,39	0,950 6733	1,89	0,992 4793
0,40	0,428 3922	0,90	0,796 9082	1,40	0,952 2851	1,90	0,992 7904
0,41	0,437 9690	0,91	0,801 8828	1,41	0,953 8524	1,91	0,993 0899
0,42	0,447 4676	0,92	0,806 7677	1,42	0,955 3762	1,92	0,993 3782
0,43	0,456 8867	0,93	0,811 5635	1,43	0,956 8573	1,93	0,993 6557
0,44	0,466 2251	0,94	0,816 2710	1,44	0,958 2966	1,94	0,993 9226
0,45	0,475 4818	0,95	0,820 8908	1,45	0,959 6950	1,95	0,994 1794
0,46	0,484 6555	0,96	0,825 4236	1,46	0,961 0535	1,96	0,994 4263
0,47	0,493 7452	0,97	0,829 8703	1,47	0,962 3729	1,97	0,994 6637
0,48	0,502 7498	0,98	0,834 2315	1,48	0,963 6541	1,98	0,994 8920
0,49	0,511 6683	0,99	0,838 5081	1,49	0,964 8979	1,99	0,995 1114

γ	$\Theta(\gamma)$	γ	$\Theta(\gamma)$	γ	$\Theta(\gamma)$	γ	$\Theta(\gamma)$
2,00	0,995 3223	2,55	0,999 6893	3,10	0,999 9884	3,65	0,999 999 755 51
2,01	0,995 5248	2,56	0,999 7058	3,11	0,999 9891	3,66	0,999 999 773 33
2,02	0,995 7195	2,57	0,999 7215	3,12	0,999 9898	3,67	0,999 999 789 90
2,03	0,995 9063	2,58	0,999 7364	3,13	0,999 9904	3,68	0,999 999 805 28
2,04	0,996 0858	2,59	0,999 7505	3,14	0,999 9910	3,69	0,999 999 819 57
2,05	0,996 2581	2,60	0,999 7640	3,15	0,999 9916	3,70	0,999 999 832 85
2,06	0,996 4235	2,61	0,999 7767	3,16	0,999 9921	3,71	0,999 999 845 17
2,07	0,996 5822	2,62	0,999 7888	3,17	0,999 9926	3,72	0,999 999 856 63
2,08	0,996 7344	2,63	0,999 8003	3,18	0,999 9931	3,73	0,999 999 867 26
2,09	0,996 8805	2,64	0,999 8112	3,19	0,999 9936	3,74	0,999 999 877 12
2,10	0,997 0205	2,65	0,999 8215	3,20	0,999 9940	3,75	0,999 999 886 29
2,11	0,997 1548	2,66	0,999 8313	3,21	0,999 9944	3,76	0,999 999 894 77
2,12	0,997 2836	2,67	0,999 8406	3,22	0,999 9947	3,77	0,999 999 902 65
2,13	0,997 4070	2,68	0,999 8494	3,23	0,999 9951	3,78	0,999 999 909 95
2,14	0,997 5253	2,69	0,999 8578	3,24	0,999 9954	3,79	0,999 999 916 72
2,15	0,997 6386	2,70	0,999 8657	3,25	0,999 9957	3,80	0,999 999 922 00
2,16	0,997 7472	2,71	0,999 8732	3,26	0,999 9960	3,81	0,999 999 928 81
2,17	0,997 8511	2,72	0,999 8803	3,27	0,999 9962	3,82	0,999 999 934 21
2,18	0,997 9505	2,73	0,999 8870	3,28	0,999 9965	3,83	0,999 999 939 21
2,19	0,998 0459	2,74	0,999 8933	3,29	0,999 9967	3,84	0,999 999 943 83
2,20	0,998 1372	2,75	0,999 8994	3,30	0,999 9969	3,85	0,999 999 948 12
2,21	0,998 2244	2,76	0,999 9051	3,31	0,999 9971	3,86	0,999 999 952 08
2,22	0,998 3079	2,77	0,999 9105	3,32	0,999 9973	3,87	0,999 999 955 75
2,23	0,998 3878	2,78	0,999 9156	3,33	0,999 9975	3,88	0,999 999 959 15
2,24	0,998 4642	2,79	0,999 9204	3,34	0,999 9977	3,89	0,999 999 962 30
2,25	0,998 5373	2,80	0,999 9250	3,35	0,999 9978	3,90	0,999 999 965 22
2,26	0,998 6071	2,81	0,999 9293	3,36	0,999 9980	3,91	0,999 999 967 90
2,27	0,998 6739	2,82	0,999 9334	3,37	0,999 9981	3,92	0,999 999 970 39
2,28	0,998 7377	2,83	0,999 9372	3,38	0,999 9982	3,93	0,999 999 972 60
2,29	0,998 7986	2,84	0,999 9409	3,39	0,999 9984	3,94	0,999 999 974 82
2,30	0,998 8568	2,85	0,999 9443	3,40	0,999 9985	3,95	0,999 999 976 78
2,31	0,998 9124	2,86	0,999 9476	3,41	0,999 9986	3,96	0,999 999 978 60
2,32	0,998 9655	2,87	0,999 9507	3,42	0,999 9987	3,97	0,999 999 980 28
2,33	0,999 0162	2,88	0,999 9536	3,43	0,999 9988	3,98	0,999 999 981 83
2,34	0,999 0646	2,89	0,999 9563	3,44	0,999 9989	3,99	0,999 999 983 27
2,35	0,999 1107	2,90	0,999 9589	3,45	0,999 9989	4,00	0,999 999 984 59
2,36	0,999 1548	2,91	0,999 9613	3,46	0,999 999 007 80	4,10	0,999 999 993 30
2,37	0,999 1968	2,92	0,999 9636	3,47	0,999 999 076 72	4,20	0,999 999 997 14
2,38	0,999 2369	2,93	0,999 9658	3,48	0,999 999 141 01	4,30	0,999 999 998 80
2,39	0,999 2751	2,94	0,999 9679	3,49	0,999 999 200 97	4,40	0,999 999 999 51
2,40	0,999 3115	2,95	0,999 9698	3,50	0,999 999 256 91	4,50	0,999 999 999 81
2,41	0,999 3462	2,96	0,999 9716	3,51	0,999 999 309 05	4,60	0,999 999 999 92
2,42	0,999 3793	2,97	0,999 9733	3,52	0,999 999 357 66	4,70	0,999 999 999 97
2,43	0,999 4108	2,98	0,999 9750	3,53	0,999 999 402 96	4,80	0,999 999 999 99
2,44	0,999 4408	2,99	0,999 9765	3,54	0,999 999 445 19	.	.
2,45	0,999 4694	3,00	0,999 9779	3,55	0,999 999 484 52		
2,46	0,999 4966	3,01	0,999 9793	3,56	0,999 999 521 15	.	.
2,47	0,999 5226	3,02	0,999 9805	3,57	0,999 999 555 27		
2,48	0,999 5472	3,03	0,999 9817	3,58	0,999 999 587 03	.	.
2,49	0,999 5707	3,04	0,999 9829	3,59	0,999 999 616 61		
2,50	0,999 5930	3,05	0,999 9839	3,60	0,999 999 644 14		
2,51	0,999 6143	3,06	0,999 9849	3,61	0,999 999 669 75	.	.
2,52	0,999 6345	3,07	0,999 9859	3,62	0,999 999 693 58		
2,53	0,999 6537	3,08	0,999 9867	3,63	0,999 999 715 74	.	.
2,54	0,999 6720	3,09	0,999 9876	3,64	0,999 999 736 36	∞	1,000 000 000 00

Tablica II.

Tablice śmiertelności ogółów ludności.

0	1	2	3	4	5	6	7	0
Wiek	Duvillard'a	Quetelet'a		Farr'a		Francyi		Wiek
		Mężczyźni	Kobiety	Mężczyźni	Kobiety	Mężczyźni	Kobiety	
	Liczba żyjących							
0	1000 000	1000	1000	511 745	488 255	1000	1000	0
1	767 525	838	864	428 026	422 481	401	416	1
2	671 834	782	808	400 505	396 322	—	—	2
3	624 668	752	777	386 290	382 299	—	—	3
4	598 713	734	756	377 077	373 056	—	—	4
5	583 151	720	741	370 358	366 460	358	372	5
6	573 025	710	730	365 325	361 594	—	—	6
7	565 838	702	720	361 372	357 779	—	—	7
8	560 245	695	712	358 062	354 530	—	—	8
9	555 486	689	705	355 328	351 806	—	—	9
10	551 122	684	699	353 031	349 478	347	360	10
11	546 888	679	694	351 048	347 433	—	—	11
12	542 630	675	690	349 272	345 572	—	—	12
13	538 255	672	687	347 606	343 807	—	—	13
14	533 711	669	684	345 969	342 062	—	—	14
15	528 969	666	681	344 290	340 273	—	—	15
16	524 020	663	678	342 509	338 385	—	—	16
17	518 863	659	674	340 581	336 356	—	—	17
18	513 502	654	669	338 469	334 151	—	—	18
19	507 949	647	660	336 149	331 751	—	—	19
20	502 216	640	650	333 608	329 142	330	340	20
21	496 317	633	641	330 844	326 323	—	—	21
22	490 267	626	631	328 043	323 456	—	—	22
23	484 083	618	622	325 207	320 544	—	—	23
24	477 777	611	614	322 339	317 592	—	—	24
25	471 366	604	607	319 442	314 603	—	—	25
26	464 863	597	600	316 516	311 579	—	—	26
27	458 282	589	594	313 562	308 524	—	—	27
28	451 635	581	588	310 581	305 440	—	—	28
29	444 932	574	582	307 572	302 328	—	—	29
30	438 183	566	576	304 534	299 190	301	316	30
31	431 398	558	570	301 466	296 027	—	—	31
32	424 583	550	562	298 366	292 840	—	—	32
33	417 744	541	555	295 232	289 631	—	—	33
34	410 886	533	547	292 061	286 398	—	—	34
35	404 012	525	539	288 850	283 143	—	—	35
36	397 123	517	531	285 596	279 864	—	—	36
37	390 219	509	523	282 296	276 563	—	—	37
38	383 300	501	515	278 944	273 237	—	—	38
39	376 363	493	507	275 538	269 887	—	—	39
40	369 404	484	499	272 073	266 511	272	284	40
41	362 419	475	491	268 544	263 109	—	—	41
42	355 400	467	483	264 948	259 678	—	—	42
43	348 342	459	475	261 280	256 219	—	—	43
44	341 235	451	467	257 534	252 729	—	—	44
45	334 072	443	459	253 708	249 207	—	—	45
46	326 843	435	451	249 796	245 652	—	—	46

0	1	2	3	4	5	6	7	0
Wiek	Duvillard'a	Quetelet'a		Farr'a		Francyi		Wiek
		Mężczyźni	Kobiety	Mężczyźni	Kobiety	Mężczyźni	Kobiety	
	Liczba żyjących							
47	319 539	426	442	245 795	242 061	—	—	47
48	312 148	418	433	241 700	238 434	—	—	48
49	304 662	410	424	237 508	234 769	—	—	49
50	297 070	403	415	233 216	231 064	238	254	50
51	289 361	396	406	228 821	227 318	—	—	51
52	281 527	389	397	224 195	223 530	—	—	52
53	273 560	382	389	219 437	219 698	—	—	53
54	265 450	374	381	214 552	215 822	—	—	54
55	257 193	366	373	209 539	211 576	—	—	55
56	248 782	358	365	204 395	207 137	—	—	56
57	240 214	349	358	199 114	202 509	—	—	57
58	231 488	340	351	193 686	197 692	—	—	58
59	222 605	330	344	188 102	192 683	—	—	59
60	213 567	319	337	182 350	187 477	191	212	60
61	204 380	307	329	176 421	182 068	—	—	61
62	195 054	294	321	170 303	176 449	—	—	62
63	185 600	280	311	163 989	170 614	—	—	63
64	176 035	265	301	157 474	164 557	—	—	64
65	166 377	250	290	150 754	158 275	—	—	65
66	156 651	235	279	143 833	151 766	—	—	66
67	146 882	220	267	136 718	145 035	—	—	67
68	137 102	205	253	129 421	138 088	—	—	68
69	127 347	192	238	121 963	130 939	—	—	69
70	117 656	179	221	114 370	123 607	123	146	70
71	108 070	166	204	106 675	116 118	—	—	71
72	98 637	153	187	98 919	108 505	—	—	72
73	89 404	139	170	91 149	100 807	—	—	73
74	80 423	125	154	83 416	93 071	—	—	74
75	71 745	111	137	75 777	85 347	—	—	75
76	63 424	99	123	68 294	77 694	—	—	76
77	55 511	88	110	61 026	70 173	—	—	77
78	48 057	78	98	54 036	62 844	—	—	78
79	41 107	69	87	47 381	55 773	—	—	79
80	34 705	60	76	41 115	49 018	43	56	80
81	28 886	52	66	35 283	42 636	—	—	81
82	23 680	45	57	29 922	36 677	—	—	82
83	19 106	38	48	25 060	31 181	—	—	83
84	15 175	32	41	20 711	26 178	—	—	84
85	11 886	26	35	16 877	21 688	—	—	85
86	9 224	21	29	13 549	17 716	—	—	86
87	7 165	17	24	10 709	14 258	—	—	87
88	5 670	13	19	8 325	11 296	—	—	88
89	4 686	10	15	6 360	8 802	—	—	89
90	3 830	7	11	4 770	6 739	5	7	90
91	3 093	5	8	3 510	5 066	—	—	91
92	2 466	4	6	2 531	3 735	—	—	92
93	1 938	3	5	1 787	2 698	—	—	93
94	1 499	2,4	3,7	1 234	1 908	—	—	94
95	1 140	1,7	2,4	833	1 320	—	—	95
96	850	1,1	1,5	548	892	—	—	96
97	621	0,6	1,0	352	588	—	—	97
98	442	0,4	0,6	220	378	—	—	98
99	307	0,2	0,4	134	236	—	—	99
100	207	—	—	79	144	—	—	100

Tablica III.

Tablice śmiertelności

0	1	2	3	4	5	6	7	8
Wiek	**Deparcieux'a**		**Deparcieux-Florencourt'a**		**Brune-Fischer'a**			
					Mężczyźni		Kobiety	
	Liczba żyjących	Prawdop. śmierci	Liczba żyjących	Prawdop. śmierci	Liczba żyjących	Prawdop. śmierci	Liczba żyjących	Prawdop. śmierci
0	”	”	10 000	0,255 00	”	”	”	”
1	”	”	7 450	0,048 59	”	”	”	”
2	”	”	7 088	0,037 39	”	”	”	”
3	1 000	0,030 00	6 823	0,030 05	”	”	”	”
4	970	0,022 68	6 618	0,022 67	”	”	”	”
5	948	0,018 99	6 468	0,019 02	”	”	”	”
6	930	0,016 13	6 345	0,016 08	”	”	”	”
7	915	0,014 21	6 243	0,014 26	”	”	”	”
8	902	0,013 30	6 154	0,013 16	”	”	”	”
9	890	0,011 24	6 073	0,011 36	”	”	”	”
10	880	0,009 09	6 004	0,009 66	”	”	”	”
11	872	0,006 88	5 946	0,008 24	”	”	”	”
12	866	0,006 93	5 897	0,007 29	”	”	”	”
13	860	0,006 98	5 854	0,006 66	”	”	”	”
14	854	0,007 03	5 815	0,006 36	”	”	”	”
15	848	0,007 08	5 778	0,006 58	”	”	”	”
16	842	0,008 31	5 740	0,007 14	”	”	”	”
17	835	0,008 38	5 699	0,007 72	”	”	”	”
18	828	0,008 45	5 655	0,008 31	”	”	100 000	0,015 92
19	821	0,008 53	5 608	0,008 92	”	”	98 408	0,014 78
20	814	0,009 83	5 558	0,009 36	”	”	96 954	0,014 01
21	806	0,009 93	5 506	0,009 63	”	”	95 596	0,013 40
22	798	0,010 03	5 453	0,009 90	”	”	94 315	0,012 90
23	790	0,010 13	5 399	0,010 19	”	”	93 098	0,012 49
24	782	0,010 23	5 344	0,010 48	”	”	91 935	0,012 20
25	774	0,010 34	5 288	0,010 78	100 000	0,006 20	90 813	0,011 99
26	766	0,010 44	5 231	0,011 09	99 380	0,006 40	89 724	0,011 90
27	758	0,010 55	5 173	0,011 02	98 744	0,006 70	88 656	0,011 80
28	750	0,010 67	5 116	0,010 95	98 082	0,006 99	87 610	0,011 80
29	742	0,010 78	5 060	0,010 87	97 396	0,007 30	86 576	0,011 80
30	734	0,010 90	5 005	0,010 79	96 685	0,007 60	85 554	0,011 81
31	726	0,011 02	4 951	0,010 91	95 950	0,007 90	84 544	0,011 79
32	718	0,011 14	4 897	0,010 82	95 192	0,008 20	83 547	0,011 80
33	710	0,011 27	4 844	0,010 74	94 411	0,008 50	82 561	0,011 80
34	702	0,011 40	4 792	0,010 85	93 609	0,008 90	81 587	0,011 80
35	694	0,011 53	4 740	0,010 97	92 776	0,009 30	80 624	0,011 80
36	686	0,011 66	4 688	0,010 88	91 913	0,009 71	79 673	0,011 80
37	678	0,010 32	4 637	0,010 78	91 021	0,010 10	78 733	0,011 80
38	671	0,010 43	4 587	0,010 68	90 102	0,010 50	77 804	0,011 80
39	664	0,010 54	4 538	0,010 58	89 156	0,011 00	76 886	0,011 81
40	657	0,010 65	4 490	0,010 91	88 175	0,011 50	75 978	0,011 79
41	650	0,010 77	4 441	0,011 03	87 161	0,012 00	75 082	0,011 80
42	643	0,010 89	4 392	0,011 38	86 115	0,012 50	74 196	0,011 90
43	636	0,011 01	4 342	0,011 75	85 039	0,013 10	73 313	0,012 00
44	629	0,011 13	4 291	0,012 12	83 925	0,013 70	72 433	0,012 20
45	622	0,011 25	4 239	0,012 50	82 775	0,014 30	71 549	0,012 40
46	615	0,013 01	4 186	0,012 90	81 591	0,014 99	70 662	0,012 69

Tablica III.

grup zamkniętych.

9	10	11	12	13	14	0
17-tu tow. angielskich		**20-tu tow. angielskich** H^{MF}		**30-tu tow. amerykańskich** Mężczyźni		Wiek
Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci	Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci	Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci	
"	"	"	"	"	"	0
"	"	"	"	"	"	1
"	"	"	"	"	"	2
"	"	"	"	"	"	3
"	"	"	"	"	"	4
"	"	"	"	"	"	5
"	"	"	"	"	"	6
"	"	"	"	"	"	7
"	"	"	"	"	"	8
"	"	"	"	"	"	9
100 000	0,006 76	100 000	0,004 42	100 000	0,006 48	10
99 324	0,006 79	99 558	0,004 09	99 352	0,006 50	11
98 650	0,006 81	99 151	0,003 88	98 706	0,006 51	12
97 978	0,006 85	98 766	0,003 81	98 063	0,006 54	13
97 307	0,006 90	98 390	0,003 85	97 422	0,006 57	14
96 636	0,006 94	98 011	0,004 04	96 782	0,006 59	15
95 965	0,007 00	97 615	0,004 36	96 144	0,006 62	16
95 293	0,007 06	97 189	0,004 83	95 508	0,006 65	17
94 620	0,007 13	96 720	0,005 43	94 873	0,006 68	18
93 945	0,007 21	96 195	0,006 04	94 239	0,006 72	19
93 268	0,007 29	95 614	0,006 50	93 606	0,006 76	20
92 588	0,007 38	94 993	0,006 79	92 973	0,006 81	21
91 905	0,007 46	94 348	0,006 92	92 340	0,006 86	22
91 219	0,007 56	93 695	0,006 95	91 707	0,006 91	23
90 529	0,007 67	93 044	0,006 95	91 073	0,006 97	24
89 835	0,007 77	92 397	0,007 00	90 438	0,007 03	25
89 137	0,007 89	91 750	0,007 10	89 802	0,007 12	26
88 434	0,008 01	91 099	0,007 33	89 163	0,007 19	27
87 726	0,008 14	90 431	0,007 59	88 522	0,007 28	28
87 012	0,008 28	89 745	0,007 83	87 878	0,007 39	29
86 292	0,008 43	89 042	0,008 06	87 229	0,007 49	30
85 565	0,008 58	88 324	0,008 22	86 576	0,007 60	31
84 831	0,008 75	87 598	0,008 37	85 918	0,007 73	32
84 089	0,008 92	86 865	0,008 55	85 254	0,007 87	33
83 339	0,009 10	86 122	0,008 76	84 583	0,008 03	34
82 581	0,009 29	85 368	0,009 00	83 904	0,008 21	35
81 814	0,009 48	84 600	0,009 33	83 215	0,008 39	36
81 038	0,009 69	83 811	0,009 68	82 517	0,008 59	37
80 253	0,009 91	83 000	0,010 00	81 808	0,008 83	38
79 458	0,010 13	82 170	0,010 27	81 086	0,009 08	39
78 653	0,010 36	81 326	0,010 50	80 350	0,009 36	40
77 838	0,010 61	80 472	0,010 69	79 598	0,009 65	41
77 012	0,010 89	79 612	0,010 92	78 830	0,010 00	42
76 173	0,011 25	78 743	0,011 28	78 042	0,010 35	43
75 316	0,011 70	77 855	0,011 73	77 234	0,010 76	44
74 435	0,012 21	76 942	0,012 32	76 403	0,011 20	45
73 526	0,012 84	75 994	0,013 01	75 547	0,011 69	46

0	1	2	3	4	5	6	7	8
Wiek	**Deparcieux'a**		**Deparcieux-Florencourt'a**		**Brune-Fischer'a**			
					Mężczyźni		Kobiety	
	Liczba żyjących	Prawdop. śmierci	Liczba żyjących	Prawdop. śmierci	Liczba żyjących	Prawdop. śmierci	Liczba żyjących	Prawdop. śmierci
47	607	0,013 18	4 132	0,013 31	80 368	0,015 70	69 765	0,013 00
48	599	0,015 03	4 077	0,013 74	79 106	0,016 50	68 858	0,013 40
49	590	0,015 25	4 021	0,014 18	77 801	0,017 40	67 935	0,013 90
50	581	0,017 21	3 964	0,014 88	76 447	0,018 41	66 991	0,014 49
51	571	0,019 26	3 905	0,015 88	75 040	0,019 50	66 020	0,015 21
52	560	0,019 64	3 843	0,017 17	73 577	0,020 70	65 016	0,016 10
53	549	0,020 04	3 777	0,018 53	72 054	0,022 10	63 969	0,017 10
54	538	0,022 30	3 707	0,020 50	70 462	0,023 60	62 875	0,018 29
55	526	0,022 81	3 631	0,022 31	68 799	0,025 20	61 725	0,019 60
56	514	0,023 35	3 550	0,023 94	67 065	0,026 90	60 515	0,021 10
57	502	0,025 90	3 465	0,025 40	65 261	0,028 81	59 238	0,022 81
58	489	0,026 58	3 377	0,026 95	63 381	0,030 89	57 887	0,024 69
59	476	0,027 31	3 286	0,028 91	61 423	0,033 20	56 458	0,026 82
60	463	0,028 08	3 191	0,031 03	59 384	0,035 70	54 944	0,029 10
61	450	0,028 89	3 092	0,032 99	57 264	0,038 51	53 345	0,031 68
62	437	0,032 04	2 990	0,035 12	55 059	0,041 59	51 655	0,034 61
63	423	0,033 10	2 885	0,037 09	52 769	0,045 01	49 867	0,037 80
64	409	0,034 23	2 778	0,039 24	50 394	0,048 70	47 982	0,041 29
65	395	0,037 97	2 669	0,041 21	47 940	0,052 71	46 001	0,045 11
66	380	0,042 11	2 559	0,043 38	45 413	0,057 10	43 926	0,049 20
67	364	0,046 70	2 448	0,045 75	42 820	0,061 89	41 765	0,053 71
68	347	0,051 87	2 336	0,048 37	40 170	0,067 12	39 522	0,058 50
69	329	0,057 75	2 223	0,051 28	37 474	0,072 69	37 210	0,063 69
70	310	0,061 29	2 109	0,055 00	34 750	0,078 71	34 840	0,069 32
71	291	0,068 73	1 993	0,059 71	32 015	0,085 09	32 425	0,075 19
72	271	0,073 80	1 874	0,066 70	29 291	0,091 91	29 987	0,081 50
73	251	0,079 68	1 749	0,076 04	26 599	0,099 10	27 543	0,088 19
74	231	0,086 58	1 617	0,084 78	23 963	0,106 71	25 114	0,095 33
75	211	0,090 05	1 479	0,096 01	21 406	0,114 69	22 720	0,102 77
76	192	0,098 96	1 337	0,103 96	18 951	0,123 21	20 385	0,110 72
77	173	0,109 83	1 198	0,111 85	16 616	0,132 22	18 128	0,118 99
78	154	0,116 88	1 064	0,120 30	14 419	0,141 69	15 971	0,127 73
79	136	0,132 35	936	0,132 48	12 376	0,151 67	13 931	0,136 82
80	118	0,144 07	812	0,141 63	10 499	0,162 30	12 025	0,146 36
81	101	0,158 42	697	0,153 52	8 795	0,173 51	10 265	0,156 45
82	85	0,164 71	590	0,166 10	7 269	0,185 45	8 659	0,167 11
83	71	0,169 01	492	0,178 86	5 921	0,198 11	7 212	0,178 31
84	59	0,186 44	404	0,190 59	4 748	0,211 67	5 926	0,190 18
85	48	0,208 33	327	0,201 84	3 743	0,222 82	4 799	0,202 54
86	38	0,236 84	261	0,210 73	2 909	0,311 10	3 827	0,221 58
87	29	0,241 38	206	0,228 16	2 004	0,343 31	2 979	0,233 30
88	22	0,272 73	159	0,264 15	1 316	0,394 38	2 284	0,245 18
89	16	0,312 50	117	0,316 24	797	0,454 20	1 724	0,256 38
90	11	0,363 64	80	0,375 00	435	0,501 15	1 282	0,274 57
91	7	0,428 57	50	0,440 00	217	0,553 00	930	0,291 40
92	4	0,500 00	28	0,500 00	97	0,628 87	659	0,315 63
93	2	0,500 00	14	0,571 43	36	0,666 67	451	0,319 29
94	1	”	6	0,500 00	12	”	307	0,381 11
95	”	”	3	0,666 67	”	”	190	0,431 58
96	”	”	1	”	”	”	108	0,500 00
97	”	”	”	”	”	”	54	0,500 00
98	”	”	”	”	”	”	27	0,333 33
99	”	”	”	”	”	”	9	”
100	”	”	”	”	”	”	”	”

9	10	11	12	13	14	0
17-tu tow. angielskich		20-tu tow. angielskich H^{MF}		30-tu tow. amerykańskich Mężczyźni		Wiek
Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci	Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci	Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci	
72 582	0,013 51	75 005	0,013 72	74 664	0,012 23	47
71 601	0,014 26	73 976	0,014 42	73 751	0,012 81	48
70 580	0,015 06	72 909	0,015 12	72 806	0,013 46	49
69 517	0,015 94	71 807	0,015 78	71 826	0,014 17	50
68 409	0,016 90	70 674	0,016 51	70 808	0,014 96	51
67 253	0,017 95	69 507	0,017 32	69 749	0,015 81	52
66 046	0,019 09	68 303	0,018 32	68 646	0,016 75	53
64 785	0,020 31	67 052	0,019 45	67 496	0,017 78	54
63 469	0,021 66	65 748	0,020 66	66 296	0,018 93	55
62 094	0,023 13	64 390	0,021 96	65 041	0,020 17	56
60 658	0,024 68	62 976	0,023 36	63 729	0,021 56	57
59 161	0,026 38	61 505	0,024 89	62 355	0,023 06	58
57 600	0,028 25	59 974	0,026 70	60 917	0,024 71	59
55 973	0,030 34	58 373	0,028 73	59 412	0,026 53	60
54 275	0,032 61	56 696	0,031 04	57 836	0,028 53	61
52 505	0,035 12	54 936	0,033 66	56 186	0,030 70	62
50 661	0,037 84	53 087	0,036 47	54 461	0,033 11	63
48 744	0,040 83	51 151	0,039 37	52 658	0,035 74	64
46 754	0,044 08	49 137	0,042 33	50 776	0,038 64	65
44 693	0,047 61	47 057	0,045 43	48 814	0,041 79	66
42 565	0,051 48	44 919	0,048 67	46 774	0,045 28	67
40 374	0,055 63	42 733	0,052 04	44 656	0,049 04	68
38 128	0,060 09	40 509	0,055 99	42 466	0,053 24	69
35 837	0,064 93	38 241	0,060 96	40 205	0,057 78	70
33 510	0,070 16	35 910	0,066 86	37 882	0,062 77	71
31 159	0,075 80	33 509	0,073 68	35 504	0,068 22	72
28 797	0,081 88	31 040	0,081 54	33 082	0,074 15	73
26 439	0,088 47	28 509	0,090 04	30 629	0,080 71	74
24 100	0,095 56	25 942	0,097 99	28 157	0,087 79	75
21 797	0,103 18	23 400	0,105 81	25 685	0,095 50	76
19 548	0,111 47	20 924	0,113 22	23 232	0,103 99	77
17 369	0,120 44	18 555	0,121 10	20 816	0,113 18	78
15 277	0,130 07	16 308	0,129 38	18 460	0,123 19	79
13 290	0,140 41	14 198	0,138 68	16 186	0,134 07	80
11 424	0,151 44	12 229	0,149 07	14 016	0,145 83	81
9 694	0,163 19	10 406	0,160.68	11 972	0,158 70	82
8 112	0,175 91	8 734	0,174 26	10 072	0,172 46	83
6 685	0,189 68	7 212	0,188 58	8 335	0,187 52	84
5 417	0,205 10	5 852	0,202 67	6 772	0,203 63	85
4 306	0,222 48	4 666	0,217 32	5 393	0,220 84	86
3 348	0,242 23	3 652	0,232 48	4 202	0,239 89	87
2 537	0,265 28	2 803	0,245 81	3 194	0,259 55	88
1 864	0,292 39	2 114	0,259 22	2 365	0,292 60	89
1 319	0,323 73	1 566	0,277 78	1 673	0,328 15	90
892	0,360 98	1 131	0,297 08	1 124	0,358 54	91
570	0,405 26	795	0,310 69	721	0,389 74	92
339	0,457 23	548	0,330 29	440	0,425 00	93
184	0,516 30	367	0,356 95	253	0,462 45	94
89	0,584 27	236	0,364 41	136	0,500 00	95
37	0,648 65	150	0,373 33	68	0,558 82	96
13	0,692 31	94	0,468 09	30	0,400 00	97
4	0,750 00	50	0,660 00	12	0,333 33	98
1	„	17	„	4	„	99
„	„	„	„	„	„	100

Tablica III.

(Ciąg dalszy).

Tablice śmiertelności

0	15	16	17	18	19	20
Wiek	23-ch towarzystw niemieckich					
	M I		W I		M u. W I	
	Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci	Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci	Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci
0	”	”	”	”	”	”
1	”	”	”	”	”	”
2	”	”	”	”	”	”
3	”	”	”	”	”	”
4	”	”	”	”	”	”
5	”	”	”	”	”	”
6	”	”	”	”	”	”
7	”	”	”	”	”	”
8	”	”	”	”	”	”
9	”	”	”	”	”	”
10	”	”	”	”	”	”
11	”	”	”	”	”	”
12	”	”	”	”	”	”
13	”	”	”	”	”	”
14	”	”	”	”	”	”
15	”	”	105 199	0,009 22	”	”
16	”	”	104 229	0,009 42	”	”
17	102 108	0,007 21	103 248	0,009 88	102 787	0,008 86
18	101 373	0,006 95	102 228	0,010 68	101 878	0,009 20
19	100 668	0,006 64	101 137	0,011 24	100 942	0,009 34
20	100 000	0,006 25	100 000	0,011 46	100 000	0,009 20
21	99 376	0,006 19	98 853	0,011 71	99 081	0,009 17
22	98 760	0,006 13	97 695	0,011 83	98 173	0,009 03
23	98 154	0,006 26	96 538	0,011 68	97 286	0,008 84
24	97 539	0,006 35	95 411	0,011 55	96 425	0,008 66
25	96 919	0,006 54	94 311	0,011 38	95 590	0,008 54
26	96 285	0,006 69	93 237	0,011 34	94 774	0,008 48
27	95 642	0,006 90	92 181	0,011 29	93 970	0,008 48
28	94 982	0,007 12	91 140	0,011 35	93 173	0,008 54
29	94 306	0,007 41	90 105	0,011 39	92 378	0,008 67
30	93 607	0,007 70	89 080	0,011 51	91 578	0,008 83
31	92 886	0,008 00	88 054	0,011 55	90 770	0,009 01
32	92 142	0,008 31	87 038	0,011 70	89 952	0,009 23
33	91 378	0,008 62	86 020	0,011 80	89 121	0,009 45
34	90 590	0,008 96	85 006	0,011 93	88 280	0,009 70
35	89 778	0,009 32	83 992	0,012 07	87 424	0,009 98
36	88 941	0,009 68	82 979	0,012 20	86 551	0,010 27
37	88 081	0,010 10	81 967	0,012 25	85 662	0,010 59
38	87 191	0,010 56	80 964	0,012 34	84 756	0,010 95
39	86 270	0,011 03	79 965	0,012 44	83 828	0,011 33
40	85 318	0,011 58	78 970	0,012 47	82 878	0,011 77
41	84 330	0,012 21	77 985	0,012 58	81 903	0,012 29
42	83 301	0,012 84	77 003	0,012 59	80 897	0,012 79
43	82 232	0,013 50	76 034	0,012 59	79 862	0,013 32
44	81 122	0,014 14	75 078	0,012 66	78 799	0,013 85
45	79 976	0,014 74	74 128	0,012 83	77 707	0,014 37
46	78 797	0,015 32	73 176	0,013 08	76 590	0,014 89

Tablica III.

grup zamkniętych. (Ciąg dalszy).

21	22	23	24	25	26	0
Towarzystw francuskich				Maleszewskiego		Wiek
A F		R F				
Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci	Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci	Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci	
1000 000	0,036 015	1000 000	0,036 015	”	”	0
963 985	0,027 487	963 985	0,027 487	”	”	1
937 488	0,020 853	937 488	0,020 853	”	”	2
917 939	0,015 745	917 939	0,015 745	”	”	3
903 486	0,011 866	903 486	0,011 866	”	”	4
892 765	0,008 973	892 765	0,008 973	”	”	5
884 754	0,006 870	884 754	0,006 870	”	”	6
878 676	0,005 399	878 676	0,005 399	”	”	7
873 932	0,004 435	873 932	0,004 435	”	”	8
870 056	0,003 876	870 056	0,003 876	”	”	9
866 684	0,003 651	866 684	0,003 651	”	”	10
863 520	0,003 647	863 520	0,003 647	”	”	11
860 371	0,003 868	860 371	0,003 868	”	”	12
857 043	0,004 220	857 043	0,004 220	”	”	13
853 426	0,004 664	853 426	0,004 664	”	”	14
849 446	0,005 153	849 446	0,005 153	”	”	15
845 069	0,005 646	845 069	0,005 646	”	”	16
840 298	0,006 099	840 298	0,006 099	”	”	17
835 173	0,006 479	835 173	0,006 479	102 979	0,015 83	18
829 762	0,006 753	829 762	0,006 753	101 349	0,013 31	19
824 159	0,006 902	824 159	0,006 902	100 000	0,011 35	20
818 471	0,006 918	818 471	0,006 918	98 865	0,009 86	21
812 809	0,006 813	812 809	0,006 813	97 890	0,008 77	22
807 271	0,006 621	807 271	0,006 621	97 032	0,008 00	23
801 926	0,006 410	801 926	0,006 410	96 255	0,007 49	24
796 786	0,006 282	796 786	0,006 236	95 534	0,007 18	25
791 780,2	0,006 400	791 817,3	0,006 302	94 849	0,007 02	26
786 713,1	0,006 298	786 827,1	0,006 375	94 183	0,006 97	27
781 758,4	0,006 895	781 810,9	0,006 456	93 526	0,007 00	28
776 368,2	0,006 818	776 763,6	0,006 544	92 872	0,007 08	29
771 074,6	0,006 984	771 680,7	0,006 641	92 214	0,007 17	30
765 689,5	0,007 165	766 555,8	0,006 748	91 553	0,007 28	31
760 203,2	0.007 363	761 383,0	0,006 865	90 886	0,007 44	32
754 606,0	0,007 579	756 155,8	0,006 995	90 210	0,007 64	33
748 887,2	0,007 814	750 866,4	0,007 137	89 521	0,007 88	34
743 035,6	0,008 071	745 507,5	0,007 294	88 816	0,008 14	35
737 038,6	0,008 351	740 070,0	0,007 466	88 093	0,008 45	36
730 883,6	0,008 658	734 544,7	0,007 655	87 348	0,008 86	37
724 556,0	0,008 991	728 921,7	0,007 863	86 574	0,009 39	38
718 041,5	0,009 356	723 190,0	0,008 092	85 761	0,010 05	39
711 323,8	0,009 754	717 337,7	0,008 344	84 899	0,010 84	40
704 385,8	0,010 188	711 352,1	0,008 621	83 979	0,011 71	41
697 209,8	0,010 661	705 219,3	0,008 926	82 996	0,012 61	42
689 777,0	0,011 178	698 924,5	0,009 261	81 949	0,013 50	43
682 066,8	0,011 742	692 451,7	0,009 629	80 843	0,014 39	44
674 058,2	0,012 357	685 783,8	0,010 035	79 680	0,015 29	45
665 728,9	0,013 028	678 902,0	0,010 480	78 461	0,016 18	46

0	15	16	17	18	19	20
Wiek	23-ch towarzystw niemieckich					
	M I		W I		M u. W I	
	Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci	Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci	Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci
47	77 591	0,015 97	72 219	0,013 57	75 450	0,015 50
48	76 352	0,016 70	71 239	0,014 18	74 281	0,016 21
49	75 077	0,017 63	70 230	0,014 75	73 077	0,017 06
50	73 755	0,018 84	69 194	0,015 38	71 831	0,018 14
51	72 365	0,020 14	68 130	0,016 05	70 528	0,019 31
52	70 907	0,021 57	67 036	0,016 80	69 166	0,020 61
53	69 378	0,023 09	65 910	0,017 66	67 741	0,021 99
54	67 777	0,024 70	64 746	0,018 72	66 251	0,023 49
55	66 103	0,026 34	63 533	0,020 13	64 695	0,025 05
56	64 362	0,028 16	62 254	0,021 79	63 074	0,026 80
57	62 550	0,030 11	60 898	0,023 56	61 383	0,028 67
58	60 667	0,032 23	59 463	0,025 51	59 624	0,030 73
59	58 711	0,034 40	57 947	0,027 76	57 792	0,032 89
60	56 692	0,036 89	56 338	0,030 15	55 892	0,035 36
61	54 601	0,039 35	54 640	0,032 53	53 916	0,037 82
62	52 453	0,041 87	52 863	0,035 29	51 878	0,040 42
63	50 256	0,044 57	50 998	0,038 07	49 781	0,043 17
64	48 016	0,047 55	49 056	0,040 78	47 632	0,046 13
65	45 733	0,050 83	47 055	0,044 26	45 435	0,049 43
66	43 408	0,054 63	44 973	0,048 36	43 189	0,053 29
67	41 036	0,059 01	42 798	0,052 54	40 887	0,057 62
68	38 615	0,063 50	40 549	0,057 78	38 532	0,062 26
69	36 163	0,068 27	38 206	0,063 94	36 133	0,067 31
70	33 695	0,073 40	35 763	0,070 30	33 701	0,072 76
71	31 221	0,078 92	33 248	0,076 89	31 249	0,078 56
72	28 757	0,084 62	30 692	0,083 97	28 794	0,084 59
73	26 324	0,091 11	28 114	0,091 38	26 358	0,091 30
74	23 925	0,098 19	25 545	0,098 84	23 952	0,098 54
75	21 576	0,106 08	23 020	0,107 33	21 592	0,106 49
76	19 288	0,114 05	20 549	0,115 84	19 293	0,114 51
77	17 088	0,122 38	18 169	0,126 13	17 083	0,123 12
78	14 997	0,131 89	15 877	0,134 14	14 980	0,132 33
79	13 019	0,142 30	13 748	0,141 66	12 998	0,142 19
80	11 167	0,156 00	11 800	0,151 71	11 150	0,155 14
81	9 425	0,171 37	10 010	0,163 35	9 420	0,169 74
82	7 809	0,187 11	8 375	0,174 53	7 821	0,184 51
83	6 348	0,200 57	6 913	0,190 31	6 378	0,198 25
84	5 075	0,212 24	5 598	0,208 79	5 114	0,211 12
85	3 998	0,223 15	4 429	0,221 42	4 034	0,222 00
86	3 106	0,229 13	3 448	0,230 98	3 138	0,228 05
87	2 394	0,236 07	2 652	0,237 00	2 423	0,233 68
88	1 829	0,244 51	2 023	0,238 33	1 857	0,237 88
89	1 382	0,257 74	”	”	1 415	0,243 16
90	”	”	”	”	”	”
91	”	”	”	”	”	”
92	”	”	”	”	”	”
93	”	”	”	”	”	”
94	”	”	”	”	”	”
95	”	”	”	”	”	”
96	”	”	”	”	”	”
97	”	”	”	”	”	”
98	”	”	”	”	”	”
99	”	”	”	”	”	”
100	”	”	”	”	”	”

21	22	23	24	25	26	0
Towarzystw francuskich				Maleszewskiego		Wiek
A F		R F				
Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci	Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci	Liczba żyjących	Prawdopod. śmierci	
657 055,9	0,013 760	671 787,0	0,010 970	77 192	0,017 06	47
648 014,8	0,014 559	664 417,2	0,011 509	75 875	0,017 89	48
638 580,6	0,015 430	656 770,3	0,012 101	74 517	0,018 71	49
628 727,4	0,016 380	648 822,5	0,012 752	73 123	0,019 50	50
618 429,0	0,017 416	640 548,4	0,013 469	71 697	0,020 36	51
607 658,5	0,018 546	631 921,0	0,014 256	70 238	0,021 43	52
596 388,8	0,019 778	622 912,6	0,015 121	68 732	0,022 80	53
584 593,5	0,021 121	613 493,7	0,016 072	67 165	0,024 46	54
572 246,3	0,022 585	603 633,9	0,017 117	65 522	0,026 40	55
559 322,1	0,024 182	593 301,8	0,018 265	63 793	0,028 64	56
545 796,8	0,025 921	582 465,2	0,019 526	61 966	0,031 15	57
531 649,4	0,027 816	571 091,7	0,020 912	60 035	0,033 90	58
516 861,2	0,029 881	559 148,8	0,022 435	58 000	0,036 92	59
501 417,0	0,032 130	546 604,1	0,024 107	55 859	0,040 25	60
485 306,6	0,034 579	533 426,9	0,025 944	53 610	0,043 75	61
468 525,2	0,037 246	519 587,6	0,027 960	51 265	0,047 23	62
451 074,5	0,040 149	505 059,8	0,030 174	48 844	0,050 57	63
432 964,3	0,043 308	489 820,3	0,032 603	46 374	0,053 81	64
414 213,5	0,046 744	473 850,8	0,035 268	43 878	0,056 94	65
394 851,3	0,050 483	457 138,9	0,038 192	41 380	0,060 11	66
374 918,2	0,054 547	439 680,0	0,041 398	38 893	0,063 54	67
354 467,7	0,058 963	421 478,3	0,044 913	36 421	0,067 40	68
333 567,3	0,063 761	402 548,6	0,048 764	33 967	0,071 66	69
312 298,8	0,068 970	382 918,6	0,052 983	31 533	0,076 29	70
290 759,4	0,074 625	362 630,3	0,057 604	29 127	0,081 43	71
269 061,5	0,080 758	341 741,3	0,062 661	26 755	0,087 24	72
247 332,5	0,087 408	320 327,6	0,068 192	24 421	0,093 80	73
225 713,7	0,094 612	298 483,9	0,074 240	22 130	0,101 13	74
204 358,5	0,102 413	276 324,5	0,080 848	19 892	0,109 32	75
183 429,6	0,110 850	253 984,3	0,088 063	17 718	0,118 04	76
163 096,4	0,119 971	231 617,8	0,095 934	15 626	0,126 76	77
143 529,5	0,129 822	209 397,7	0,104 515	13 645	0,135 17	78
124 896,2	0,140 451	187 512,4	0,113 862	11 801	0,143 42	79
107 354,4	0,151 903	166 161,9	0,124 031	10 109	0,151 64	80
91 046,9	0,164 235	145 552,6	0,135 084	8 575,6	0,159 91	81
76 093,8	0,177 491	125 890,7	0,147 083	7 204,3	0,168 38	82
62 587,8	0,191 723	107 374,3	0,160 090	5 991,3	0,177 22	83
50 588,3	0,206 977	90 184,8	0,174 503	4 929,5	0,186 69	84
40 117,7	0,223 303	74 447,3	0,189 063	4 009,2	0,197 07	85
31 159,3	0,240 744	60 372,1	0,205 805	3 219,1	0,208 71	86
23 657,9	0,259 330	47 947,2	0,223 481	2 547,2	0,222 01	87
17 522,7	0,279 112	37 231,9	0,242 478	1 981,7	0,237 40	88
12 631,9	0,300 097	28 204,0	0,262 832	1 511,3	0,261 98	89
8 841,1	0,322 302	20 791,1	0,284 598	1 115,3	0,302 85	90
5 991,6	0,345 751	14 874,0	0,307 799	777,56	0,367 10	91
3 920,0	0,370 434	10 295,8	0,332 456	492,12	0,461 85	92
2 467,9	0,396 288	6 872,9	0,358 582	264,83	0,594 18	93
1 489,9	0,423 317	4 408,4	0,386 104	107,47	0,771 20	94
859,2	0,451 466	2 706,3	0,415 069	24,590	1,000 00	95
471,3	0,480 586	1 583,0	0,445 294	„	„	96
244,8	0,510 621	878,1	0,476 825	„	„	97
119,8	0,541 736	459,4	0,509 360	„	„	98
54,9	0,573 771	225,4	0,543 035	„	„	99
23,4	0,602 564	103,0	0,576 700	„	„	100

Tablica IV.

Sumy, na jakie zamienia się po *n* latach 1-ka kapitału, oddana

$r^n = (1+i)^n$.

0	1	2	3	4	5	0
Po latach	1%	2%	2½%	3%	3½%	Po latach
1	1,010 000 00	1,020 000 00	1,025 000 00	1,030 000 00	1,035 000 00	1
2	1,020 100 00	1,040 400 00	1,050 625 00	1,060 900 00	1,071 225 00	2
3	1,030 301 00	1,061 208 00	1,076 890 62	1,092 727 00	1,108 717 87	3
4	1,040 604 01	1,082 432 16	1,103 812 89	1,125 508 81	1,147 523 00	4
5	1,051 010 05	1,104 080 80	1,131 408 21	1,159 274 07	1,187 686 31	5
6	1,061 520 15	1,126 162 42	1,159 693 42	1,194 052 30	1,229 255 33	6
7	1,072 135 35	1,148 685 67	1,188 685 75	1,229 873 87	1,272 279 26	7
8	1,082 856 71	1,171 659 38	1,218 402 90	1,266 770 08	1,316 809 04	8
9	1,093 685 27	1,195 092 57	1,248 862 97	1,304 773 18	1,362 897 35	9
10	1,104 622 13	1,218 994 42	1,280 084 54	1,343 916 38	1,410 598 76	10
11	1,115 668 35	1,243 374 31	1,312 086 66	1,384 233 87	1,459 969 72	11
12	1,126 825 03	1,268 241 79	1,344 888 82	1,425 760 89	1,511 068 66	12
13	1,138 093 28	1,293 606 63	1,378 511 04	1,468 533 71	1,563 956 06	13
14	1,149 474 21	1,319 478 76	1,412 973 82	1,512 589 72	1,618 694 52	14
15	1,160 968 96	1,345 868 34	1,448 298 17	1,557 967 42	1,675 348 83	15
16	1,172 578 64	1,372 785 70	1,484 505 62	1,604 706 44	1,733 986 04	16
17	1,184 304 43	1,400 241 42	1,521 618 26	1,652 847 63	1,794 675 55	17
18	1,196 147 48	1,428 246 25	1,559 658 72	1,702 433 06	1,857 489 20	18
19	1,208 108 95	1,456 811 17	1,598 650 19	1,753 506 05	1,922 501 32	19
20	1,220 190 04	1,485 947 40	1,638 616 44	1,806 111 23	1,989 788 86	20
21	1,232 391 94	1,515 666 34	1,679 581 85	1,860 294 57	2,059 431 47	21
22	1,244 715 86	1,545 979 67	1,721 571 40	1,916 103 41	2,131 511 58	22
23	1,257 163 02	1,576 899 26	1,764 610 68	1,973 586 51	2,206 114 48	23
24	1,269 734 65	1,608 437 25	1,808 725 95	2,032 794 11	2,283 328 49	24
25	1,282 431 99	1,640 605 99	1,853 944 10	2,093 777 93	2,363 244 98	25
26	1,295 256 31	1,673 418 11	1,900 292 70	2,156 591 27	2,445 958 56	26
27	1,308 208 88	1,706 886 48	1,947 800 02	2,221 289 01	2,531 567 11	27
28	1,321 290 97	1,741 024 21	1,996 495 02	2,287 927 68	2,620 171 96	28
29	1,334 503 88	1,775 844 69	2,046 407 39	2,356 565 51	2,711 877 98	29
30	1,347 848 92	1,811 361 58	2,097 567 58	2,427 262 47	2,806 793 70	30
31	1,361 327 40	1,847 588 82	2,150 006 77	2,500 080 35	2,905 031 48	31
32	1,374 940 68	1,884 540 59	2,203 756 94	2,575 082 76	3,006 707 59	32
33	1,388 690 09	1,922 231 40	2,258 850 86	2,652 335 24	3,111 942 35	33
34	1,402 576 99	1,960 676 03	2,315 322 13	2,731 905 30	3,220 860 33	34
35	1,416 602 76	1,999 889 55	2,373 205 19	2,813 862 45	3,333 590 45	35
36	1,430 768 78	2,039 887 34	2,432 535 32	2,898 278 33	3,450 266 11	36
37	1,445 076 47	2,080 685 09	2,493 348 70	2,985 226 68	3,571 025 43	37
38	1,459 527 24	2,122 298 79	2,555 682 42	3,074 783 48	3,696 011 32	38
39	1,474 122 51	2,164 744 77	2,619 574 48	3,167 026 98	3,825 371 71	39
40	1,488 863 73	2,208 039 66	2,685 063 84	3,262 037 79	3,959 259 72	40
41	1,503 752 37	2,252 200 46	2,752 190 43	3,359 898 93	4,097 833 81	41
42	1,518 789 89	2,297 244 47	2,820 995 20	3,460 695 89	4,241 257 99	42
43	1,533 977 79	2,343 189 36	2,891 520 08	3,564 516 77	4,389 702 02	43
44	1,549 317 57	2,390 053 14	2,963 808 08	3,671 452 27	4,543 341 60	44
45	1,564 810 75	2,437 854 21	3,037 903 28	3,781 595 84	4,702 358 55	45

Tablica IV.

na procent składany, przy różnych stopach procentowych.

$r^n = (1+i)^n$.

0	6	7	8	9	10	0
Po latach	**4%**	**4½%**	**5%**	**6%**	**8%**	Po latach
1	1,040 000 00	1,045 000 00	1,050 000 00	1,060 000 00	1,080 000 00	1
2	1,081 600 00	1,092 025 00	1,102 500 00	1,123 600 00	1,166 400 00	2
3	1,124 864 00	1,141 166 12	1,157 625 00	1,191 016 00	1,259 712 00	3
4	1,169 858 56	1,192 518 60	1,215 506 25	1,262 476 96	1,360 488 96	4
5	1,216 652 90	1,246 181 94	1,276 281 56	1,338 225 58	1,469 328 08	5
6	1,265 319 02	1,302 260 12	1,340 095 64	1,418 519 11	1,586 874 32	6
7	1,315 931 78	1,360 861 83	1,407 100 42	1,503 630 26	1,713 824 27	7
8	1,368 569 05	1,422 100 61	1,477 455 44	1,593 848 07	1,850 930 21	8
9	1,423 311 81	1,486 095 14	1,551 328 22	1,689 478 96	1,999 004 63	9
10	1,480 244 28	1,552 969 42	1,628 894 63	1,790 847 70	2,158 925 00	10
11	1,539 454 06	1,622 853 05	1,710 339 36	1,898 298 56	2,331 639 00	11
12	1,601 032 22	1,695 881 43	1,795 856 33	2,012 196 47	2,518 170 12	12
13	1,665 073 51	1,772 196 10	1,885 649 14	2,132 928 26	2,719 623 73	13
14	1,731 676 45	1,851 944 92	1,979 931 60	2,260 903 96	2,937 193 62	14
15	1,800 943 51	1,935 282 44	2,078 928 18	2,396 558 19	3,172 169 11	15
16	1,872 981 25	2,022 370 15	2,182 874 59	2,540 351 68	3,425 942 64	16
17	1,947 900 50	2,113 376 81	2,292 018 32	2,692 772 79	3,700 018 05	17
18	2,025 816 52	2,208 478 77	2,406 619 23	2,854 339 15	3,996 019 50	18
19	2,106 849 18	2,307 860 31	2,526 950 20	3,025 599 50	4,315 701 06	19
20	2,191 123 14	2,411 714 02	2,653 297 71	3,207 135 47	4,660 957 14	20
21	2,278 768 07	2,520 241 16	2,785 962 59	3,399 563 60	5,033 833 72	21
22	2,369 918 79	2,633 652 01	2,925 260 72	3,603 537 42	5,436 540 41	22
23	2,464 715 55	2,752 166 35	3,071 523 76	3,819 749 66	5,871 463 65	23
24	2,563 304 17	2,876 013 83	3,225 099 94	4,048 934 64	6,341 180 74	24
25	2,665 836 33	3,005 434 46	3,386 354 94	4,291 870 72	6,848 475 20	25
26	2,772 469 79	3,140 679 01	3,555 672 69	4,549 382 96	7,396 353 21	26
27	2,883 368 58	3,282 009 56	3,733 456 32	4,822 345 94	7,988 061 47	27
28	2,998 703 32	3,429 699 99	3,920 129 14	5,111 686 70	8,627 106 39	28
29	3,118 651 45	3,584 036 49	4,116 135 60	5,418 387 90	9,317 274 90	29
30	3,243 397 51	3,745 318 13	4,321 942 38	5,743 491 17	10,062 656 89	30
31	3,373 133 41	3,913 857 45	4,538 039 49	6,088 100 64	10,867 669 44	31
32	3,508 058 75	4,089 981 04	4,764 941 47	6,453 386 68	11,737 083 00	32
33	3,648 381 10	4,274 030 18	5,003 188 54	6,840 589 88	12,676 049 63	33
34	3,794 316 34	4,466 361 54	5,253 347 97	7,251 025 28	13,690 133 61	34
35	3,946 088 99	4,667 347 81	5,516 015 37	7,686 086 79	14,785 344 29	35
36	4,103 932 55	4,877 378 46	5,791 816 14	8,147 252 00	15,968 171 84	36
37	4,268 089 86	5,096 860 49	6,081 406 94	8,636 087 12	17,245 625 58	37
38	4,438 813 45	5,326 219 21	6,385 477 29	9,154 252 35	18,625 275 63	38
39	4,616 365 99	5,565 899 08	6,704 751 15	9,703 507 49	20,115 297 68	39
40	4,801 020 63	5,816 364 54	7,039 988 71	10,285 717 94	21,724 521 50	40
41	4,993 061 45	6,078 100 94	7,391 988 15	10,902 861 01	23,462 483 22	41
42	5,192 783 91	6,351 615 48	7,761 587 55	11,557 032 67	25,339 481 87	42
43	5,400 495 27	6,637 438 18	8,149 666 93	12,250 454 63	27,366 640 42	43
44	5,616 515 08	6,936 122 90	8,557 150 28	12,985 481 91	29,555 971 66	44
45	5,841 175 68	7,248 248 43	8,985 007 79	13,764 610 83	31,920 449 39	45

0	1	2	3	4	5	0
Po latach	1%	2%	2½%	3%	3½%	Po latach
46	1,580 458 85	2,486 611 29	3,113 850 86	3,895 043 72	4,866 941 10	46
47	1,596 263 44	2,536 343 51	3,191 697 13	4,011 895 03	5,037 284 04	47
48	1,612 226 08	2,587 070 39	3,271 489 56	4,132 251 88	5,213 588 98	48
49	1,628 348 34	2,638 811 79	3,353 276 80	4,256 219 44	5,396 064 59	49
50	1,644 631 82	2,691 588 03	3,437 108 72	4,383 906 02	5,584 926 86	50
51	1,661 078 14	2,745 419 79	3,523 036 44	4,515 423 20	5,780 399 30	51
52	1,677 688 92	2,800 328 19	3,611 112 35	4,650 885 90	5,982 713 27	52
53	1,694 465 81	2,856 334 75	3,701 390 16	4,790 412 47	6,192 108 24	53
54	1,711 410 47	2,913 461 44	3,793 924 91	4,934 124 85	6,408 832 02	54
55	1,728 524 57	2,971 730 67	3,888 773 03	5,082 148 59	6,633 141 14	55
56	1,745 809 82	3,031 165 29	3,985 992 36	5,234 613 05	6,865 301 08	56
57	1,763 267 92	3,091 788 59	4,085 642 17	5,391 651 44	7,105 586 62	57
58	1,780 900 60	3,153 624 36	4,187 783 22	5,553 400 98	7,354 282 15	58
59	1,798 709 60	3,216 696 85	4,292 477 80	5,720 003 01	7,611 682 03	59
60	1,816 696 70	3,281 030 79	4,399 789 75	5,891 603 10	7,878 090 90	60
61	1,834 863 67	3,346 651 40	4,500 784 49	6,068 351 20	8,153 824 08	61
62	1,853 212 30	3,413 584 43	4,622 529 10	6,250 401 73	8,439 207 93	62
63	1,871 744 43	3,481 856 12	4,738 092 33	6,437 913 79	8,734 580 20	63
64	1,890 461 87	3,551 493 24	4,856 544 64	6,631 051 20	9,040 290 51	64
65	1,909 366 49	3,622 523 11	4,977 958 26	6,829 982 73	9,356 700 68	65
66	1,928 460 15	3,694 973 57	5,102 407 21	7,034 882 22	9,684 185 20	66
67	1,947 744 75	3,768 873 04	5,229 967 39	7,245 928 68	10,023 131 68	67
68	1,967 222 20	3,844 250 50	5,360 716 58	7,463 306 54	10,373 941 29	68
69	1,986 894 42	3,921 135 51	5,494 734 49	7,687 205 74	10,737 029 24	69
70	2,006 763 37	3,999 558 22	5,632 102 86	7,917 821 91	11,112 825 26	70
71	2,026 831 00	4,079 549 39	5,772 905 43	8,155 356 57	11,501 774 14	71
72	2,047 099 31	4,161 140 37	5,917 228 06	8,400 017 27	11,904 336 24	72
73	2,067 570 31	4,244 363 18	6,065 158 76	8,652 017 78	12,320 988 01	73
74	2,088 246 01	4,329 250 45	6,216 787 73	8,911 578 32	12,752 222 59	74
75	2,109 128 47	4,415 835 45	6,372 207 43	9,178 925 67	13,198 550 38	75
76	2,130 219 75	4,504 152 16	6,531 512 61	9,454 293 44	13,660 499 64	76
77	2,151 521 95	4,594 235 21	6,694 800 43	9,737 922 24	14,138 617 13	77
78	2,173 037 17	4,686 119 91	6,862 170 44	10,030 059 91	14,633 468 73	78
79	2,194 767 54	4,779 842 31	7,033 724 70	10,330 961 71	15,145 640 13	79
80	2,216 715 22	4,875 439 16	7,209 567 82	10,640 890 56	15,675 737 54	80
81	2,238 882 37	4,972 947 94	7,389 807 01	10,960 117 27	16,224 388 35	81
82	2,261 271 19	5,072 406 90	7,574 552 19	11,288 920 79	16,792 241 95	82
83	2,283 883 90	5,173 855 04	7,763 915 99	11,627 588 42	17,379 970 41	83
84	2,306 722 74	5,277 332 14	7,958 013 89	11,976 416 07	17,988 269 38	84
85	2,329 789 97	5,382 878 78	8,156 964 24	12,335 708 55	18,617 858 81	85
86	2,353 087 87	5,490 536 35	8,360 888 34	12,705 779 81	19,269 483 86	86
87	2,376 618 75	5,600 347 08	8,569 910 55	13,086 953 20	19,943 915 80	87
88	2,400 384 94	5,712 354 02	8,784 158 32	13,479 561 80	20,641 952 85	88
89	2,424 388 79	5,826 601 10	9,003 762 27	13,883 948 65	21,364 421 20	89
90	2,448 632 67	5,943 133 13	9,228 856 33	14,300 467 11	22,112 175 95	90
91	2,473 119 00	6,061 995 79	9,459 577 74	14,729 481 12	22,886 102 10	91
92	2,497 850 19	6,183 235 70	9,696 067 18	15,171 365 56	23,687 115 68	92
93	2,522 828 69	6,306 900 42	9,938 468 86	15,626 506 52	24,516 164 73	93
94	2,548 056 98	6,433 038 43	10,186 930 58	16,095 301 72	25,374 230 49	94
95	2,573 537 55	6,561 699 19	10,441 603 85	16,578 160 77	26,262 328 56	95
96	2,599 272 93	6,692 933 18	10,702 643 95	17,075 505 59	27,181 510 06	96
97	2,625 265 65	6,826 791 84	10,970 210 04	17,587 770 76	28,132 862 91	97
98	2,651 518 31	6,963 327 68	11,244 465 30	18,115 403 88	29,117 513 11	98
99	2,678 033 49	7,102 594 23	11,525 576 93	18,658 866 00	30,136 626 07	99
100	2,704 813 83	7,244 646 12	11,813 716 35	19,218 631 98	31,191 407 98	100

0	6	7	8	9	10	0
Po latach	4%	4½%	5%	6%	8%	Po latach
46	6,074 822 71	7,574 419 61	9,434 258 18	14,590 487 48	34,474 085 34	46
47	6,317 815 62	7,915 268 49	9,905 971 09	15,465 916 73	37,232 012 17	47
48	6,570 528 24	8,271 455 57	10,401 269 65	16,393 871 73	40,210 573 14	48
49	6,833 349 37	8,643 671 07	10,921 333 13	17,377 504 03	43,427 418 99	49
50	7,106 683 35	9,032 636 27	11,467 399 78	18,420 154 27	46,901 612 51	50
51	7,390 950 68	9,439 104 90	12,040 769 77	19,525 363 53	50,653 741 51	51
52	7,686 588 71	9,863 864 63	12,642 808 26	20,696 885 34	54,706 040 84	52
53	7,994 052 26	10,307 738 53	13,274 948 68	21,938 698 46	59,082 524 10	53
54	8,313 814 35	10,771 586 77	13,938 696 11	23,255 020 37	63,809 126 03	54
55	8,646 366 92	11,256 308 17	14,635 630 92	24,650 321 59	68,913 856 11	55
56	8,992 221 60	11,762 842 04	15,367 412 46	26,129 340 89	74,426 964 60	56
57	9,351 910 46	12,292 169 93	16,135 783 08	27,697 101 34	80,381 121 77	57
58	9,725 986 88	12,845 317 58	16,942 572 24	29,358 927 42	86,811 611 51	58
59	10,115 026 36	13,423 356 87	17,789 700 85	31,120 463 07	93,756 540 43	59
60	10,519 627 41	14,027 407 93	18,679 185 89	32,987 690 85	101,257 063 67	60
61	10,940 412 51	14,658 641 29	19,613 145 19	34,966 952 30	109,357 628 76	61
62	11,378 029 01	15,318 280 14	20,593 802 45	37,064 969 44	118,106 239 06	62
63	11,833 150 17	16,007 602 75	21,623 492 57	39,288 867 61	127,554 738 19	63
64	12,306 476 17	16,727 944 87	22,704 667 20	41,646 199 67	137,759 117 24	64
65	12,798 735 22	17,480 702 39	23,839 900 56	44,144 971 65	148,779 846 62	65
66	13,310 684 63	18,267 334 00	25,031 895 59	46,793 669 94	160,682 234 35	66
67	13,843 112 01	19,089 364 03	26,283 490 36	49,601 290 14	173,536 813 10	67
68	14,396 836 49	19,948 385 41	27,597 664 88	52,577 367 55	187,419 758 14	68
69	14,972 709 95	20,846 062 76	28,977 548 13	55,732 009 60	202,413 338 80	69
70	15,571 618 35	21,784 135 58	30,426 425 53	59,075 930 18	218,606 405 90	70
71	16,194 483 09	22,764 421 68	31,947 746 81	62,620 485 99	236,094 918 37	71
72	16,842 262 41	23,788 820 66	33,545 134 15	66,377 715 15	254,982 511 84	72
73	17,515 952 91	24,859 317 59	35,222 390 86	70,360 378 06	275,381 112 79	73
74	18,216 591 02	25,977 986 88	36,983 510 40	74,582 000 74	297,411 601 81	74
75	18,945 254 66	27,146 996 29	38,832 685 92	79,056 920 79	321,204 529 96	75
76	19,703 064 85	28,368 611 12	40,774 320 22	83,800 336 03	346,900 892 35	76
77	20,491 187 44	29,645 198 62	42,813 036 23	88,828 356 19	374,652 963 74	77
78	21,310 834 94	30,979 232 56	44,953 688 04	94,158 057 57	404,625 200 84	78
79	22,163 268 34	32,373 298 02	47,201 372 44	99,807 541 02	436,995 216 91	79
80	23,049 799 07	33,830 096 43	49,561 441 06	105,795 993 48	471,954 834 26	80
81	23,971 791 04	35,352 450 77	52,039 513 12	112,143 753 09	509,711 221 00	81
82	24,930 662 68	36,943 311 06	54,641 488 77	118,872 378 28	550,488 118 68	82
83	25,927 889 18	38,605 760 06	57,373 563 21	126,004 720 97	594,527 168 18	83
84	26,965 004 75	40,343 019 26	60,242 241 37	133,565 004 23	642,089 341 63	84
85	28,043 604 94	42,158 455 13	63,254 353 44	141,578 904 48	673,456 488 96	85
86	29,165 349 14	44,055 585 61	66,417 071 11	150,073 638 75	748,933 008 08	86
87	30,331 963 11	46,038 086 96	69,737 924 67	159,078 057 08	808,847 648 73	87
88	31,545 241 63	48,109 800 87	73,224 820 90	168,622 740 50	873,555 460 62	88
89	32,807 051 29	50,274 741 91	76,886 061 95	178,740 104 93	943,439 897 47	89
90	34,119 333 35	52,537 105 30	80,730 365 04	189,464 511 23	1018,915 089 27	90
91	35,484 106 68	54,901 275 03	84,766 883 29	200,832 381 90	1100,428 296 41	91
92	36,903 470 95	57,371 832 41	89,005 227 46	212,882 324 82	1188,462 560 13	92
93	38,379 609 79	59,953 564 87	93,455 488 83	225,655 264 31	1283,539 564 94	93
94	39,914 794 18	62,651 475 29	98,128 263 27	239,194 580 17	1386,222 730 13	94
95	41,511 385 94	65,470 791 68	103,034 676 44	253,546 254 98	1497,120 548 54	95
96	43,171 841 38	68,416 977 30	108,186 410 26	268,759 030 27	1616,890 192 42	96
97	44,898 715 04	71,495 741 28	113,595 730 77	284,884 572 09	1746,241 407 82	97
98	46,694 663 64	74,713 049 64	119,275 517 31	301,977 646 42	1885,940 720 44	98
99	48,562 450 18	78,075 136 87	125,239 293 18	320,096 305 20	2036,815 978 08	99
100	50,504 948 19	81,588 518 03	131,501 257 84	339,302 083 51	2199,761 256 32	100

Tablica V.

Teraźniejsza wartość 1-ki kapitału, płatnego

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}.$$

0	1	2	3	4	5	0
Po latach	1%	2%	2½%	3%	3½%	Po latach
1	0,990 0990	0,980 3922	0,975 6098	0,970 8728	0,966 1836	1
2	0,980 2960	0,961 1688	0,951 8144	0,942 5959	0,933 5107	2
3	0,970 5901	0,942 3223	0,928 5994	0,915 1417	0,901 9427	3
4	0,960 9803	0,923 8454	0,905 9506	0,888 4870	0,871 4422	4
5	0,951 4657	0,905 7308	0,883 8543	0,862 6088	0,841 9732	5
6	0,942 0452	0,887 9714	0,862 2969	0,837 4843	0,813 5006	6
7	0,932 7181	0,870 5602	0,841 2652	0,813 0915	0,785 9910	7
8	0,923 4832	0,853 4904	0,820 7466	0,789 4092	0,759 4116	8
9	0,914 3398	0,836 7553	0,800 7284	0,766 4167	0,733 7310	9
10	0,905 2870	0,820 3483	0,781 1984	0,744 0939	0,708 9188	10
11	0,896 3237	0,804 2630	0,762 1448	0,722 4213	0,684 9457	11
12	0,887 4492	0,788 4932	0,743 5559	0,701 3799	0,661 7833	12
13	0,878 6626	0,773 0325	0,725 4204	0,680 9513	0,639 4042	13
14	0,869 9630	0,757 8750	0,707 7272	0,661 1178	0,617 7818	14
15	0,861 3495	0,743 0147	0,690 4656	0,641 8619	0,596 8906	15
16	0,852 8213	0,728 4458	0,673 6249	0,623 1669	0,576 7059	16
17	0,844 3775	0,714 1626	0,657 1951	0,605 0164	0,557 2038	17
18	0,836 0173	0,700 1594	0,641 1659	0,587 3946	0,538 3611	18
19	0,827 7399	0,686 4308	0,625 5277	0,570 2860	0,520 1557	19
20	0,819 5445	0,672 9713	0,610 2709	0,553 6758	0,502 5659	20
21	0,811 4302	0,659 7758	0,595 3863	0,537 5493	0,485 5709	21
22	0,803 3962	0,646 8390	0,580 8649	0,521 8925	0,469 1506	22
23	0,795 4418	0,634 1559	0,566 6972	0,506 6917	0,453 2856	23
24	0,787 5661	0,621 7215	0,552 8754	0,491 9337	0,437 9571	24
25	0,779 7684	0,609 5309	0,539 3906	0,477 6056	0,423 1470	25
26	0,772 0480	0,597 5793	0,526 2347	0,463 6947	0,408 8377	26
27	0,764 4039	0,585 8620	0,513 3997	0,450 1891	0,395 0122	27
28	0,756 8356	0,574 3746	0,500 8778	0,437 0768	0,381 6543	28
29	0,749 3421	0,563 1123	0,488 6613	0,424 3464	0,368 7482	29
30	0,741 9229	0,552 0709	0,476 7427	0,411 9868	0,356 2784	30
31	0,734 5771	0,541 2460	0,465 1148	0,399 9871	0,344 2303	31
32	0,727 3041	0,530 6333	0,453 7706	0,388 3370	0,332 5897	32
33	0,720 1031	0,520 2287	0,442 7030	0,377 0262	0,321 3427	33
34	0,712 9733	0,510 0282	0,431 9053	0,366 0449	0,310 4761	34
35	0,705 9142	0,500 0276	0,421 3711	0,355 3834	0,299 9769	35
36	0,698 9249	0,490 2231	0,411 0937	0,345 0324	0,289 8327	36
37	0,692 0049	0,480 6109	0,401 0670	0,334 9829	0,280 0316	37
38	0,685 1534	0,471 1872	0,391 2849	0,325 2262	0,270 5619	38
39	0,678 3697	0,461 9482	0,381 7414	0,315 7535	0,261 4125	39
40	0,671 6531	0,452 8904	0,372 4306	0,306 5568	0,252 5725	40
41	0,665 0031	0,444 0102	0,363 3470	0,297 6280	0,244 0314	41
42	0,658 4189	0,435 3041	0,354 4848	0,288 9592	0,235 7791	42
43	0,651 8999	0,426 7688	0,345 8389	0,280 5429	0,227 8059	43
44	0,645 4455	0,418 4007	0,337 4038	0,272 3718	0,220 1023	44
45	0,639 0549	0,410 1968	0,329 1744	0,264 4386	0,212 6592	45

Tablica V.

po *n* latach, przy różnych stopach procentowych.

$$\rho^n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}.$$

0	6	7	8	9	10	0
Po latach	**4%**	**4½%**	**5%**	**6%**	**8%**	Po latach
1	0,961 5385	0,956 9378	0,952 3810	0,943 3962	0,925 9259	1
2	0,924 5562	0,915 7300	0,907 0295	0,889 9964	0,857 3388	2
3	0,888 9964	0,876 2966	0,863 8376	0,839 6193	0,793 8322	3
4	0,854 8042	0,838 5613	0,822 7025	0,792 0937	0,735 0298	4
5	0,821 9271	0,802 4510	0,783 5262	0,747 2582	0,680 5832	5
6	0,790 3145	0,767 8957	0,746 2154	0,704 9605	0,630 1696	6
7	0,759 9178	0,734 8285	0,710 6813	0,665 0571	0,583 4904	7
8	0,730 6902	0,703 1851	0,676 8394	0,627 4124	0,540 2689	8
9	0,702 5867	0,672 9044	0,644 6089	0,591 8985	0,500 2490	9
10	0,675 5642	0,643 9277	0,613 9133	0,558 3948	0,463 1935	10
11	0,649 5809	0,616 1987	0,584 6793	0,526 7875	0,428 8829	11
12	0,624 5970	0,589 6639	0,556 8374	0,496 9694	0,397 1138	12
13	0,600 5741	0,564 2716	0,530 3214	0,468 8390	0,367 6980	13
14	0,577 4751	0,539 9729	0,505 0680	0,442 3010	0,340 4610	14
15	0,555 2645	0,516 7204	0,481 0171	0,417 2651	0,315 2417	15
16	0,533 9082	0,494 4693	0,458 1115	0,393 6463	0,291 8905	16
17	0,513 3732	0,473 1764	0,436 2967	0;371 3644	0,270 2689	17
18	0,493 6281	0,452 8004	0,415 5207	0,350 3438	0,250 2490	18
19	0,474 6424	0,433 3018	0,395 7340	0,330 5130	0,231 7121	19
20	0,456 3869	0,414 6429	0,376 8895	0,311 8047	0,214 5482	20
21	0,438 8336	0,396 7874	0,358 9424	0,294 1554	0,198 6557	21
22	0,421 9554	0,379 7009	0,341 8499	0,277 5051	0,183 9405	22
23	0,405 7263	0,363 3501	0,325 5713	0,261 7973	0,170 3153	23
24	0,390 1215	0,347 7035	0,310 0679	0,246 9785	0,157 6993	24
25	0,375 1168	0,332 7306	0,295 3028	0,232 9986	0,146 0179	25
26	0,360 6892	0,318 4025	0,281 2407	0,219 8100	0,135 2018	26
27	0,346 8166	0,304 6914	0,267 8483	0,207 3680	0,125 1868	27
28	0,333 4775	0,291 5707	0,255 0936	0,195 6301	0,115 9137	28
29	0,320 6514	0,279 0150	0,242 9463	0,184 5567	0,107 3275	29
30	0,308 3187	0,267 0000	0,231 3774	0,174 1101	0,099 3773	30
31	0,296 4603	0,255 5024	0,220 3595	0,164 2548	0,092 0160	31
32	0,285 0579	0,244 4999	0,209 8662	0,154 9574	0,085 2000	32
33	0,274 0942	0,233 9712	0,199 8725	0,146 1862	0,078 8889	33
34	0,263 5521	0,223 8959	0,190 3548	0,137 9115	0,073 0453	34
35	0,253 4155	0,214 2544	0,181 2903	0,130 1052	0,067 6345	35
36	0,243 6687	0,205 0282	0,172 6574	0,122 7408	0,062 6246	36
37	0,234 2968	0,196 1992	0,164 4356	0,115 7932	0,057 9857	37
38	0,225 2854	0,187 7504	0,156 6054	0,109 2388	0,053 6905	38
39	0,216 6206	0,179 6655	0,149 1480	0,103 0555	0,049 7134	39
40	0,208 2890	0,171 9287	0,142 0457	0,097 2222	0,046 0309	40
41	0,200 2779	0,164 5251	0,135 2816	0,091 7190	0,042 6212	41
42	0,192 5749	0,157 4403	0,128 8396	0,086 5274	0,039 4641	42
43	0,185 1682	0,150 6605	0,122 7044	0,081 6296	0,036 5408	43
44	0,178 0463	0,144 1728	0,116 8613	0,077 0091	0,033 8341	44
45	0,171 1984	0,137 9644	0,111 2965	0,072 6501	0,031 3279	45

0	1	2	3	4	5	0
Po latach	1%	2%	2½%	3%	3½%	Po latach
46	0,632 7276	0,402 1537	0,321 1458	0,256 7365	0,205 4679	46
47	0,626 4630	0,394 2684	0,313 3129	0,249 2588	0,198 5197	47
48	0,620 2604	0,386 5376	0,305 6712	0,241 9988	0,191 8065	48
49	0,614 1192	0,378 9584	0,298 2158	0,234 9503	0,185 3202	49
50	0,608 0388	0,371 5279	0,290 9422	0,228 1071	0,179 0534	50
51	0,602 0186	0,364 2430	0,283 8461	0,221 4632	0,172 9984	51
52	0,596 0581	0,357 1010	0,276 9230	0,215 0128	0,167 1482	52
53	0,590 1565	0,350 0990	0,270 1688	0,208 7503	0,161 4959	53
54	0,584 3134	0,343 2343	0,263 5793	0,202 6702	0,156 0347	54
55	0,578 5281	0,336 5042	0,257 1505	0,196 7672	0,150 7581	55
56	0,572 8001	0,329 9061	0,250 8786	0,191 0361	0,145 6600	56
57	0,567 1288	0,323 4374	0,244 7596	0,185 4719	0,140 7343	57
58	0,561 5137	0,317 0955	0,238 7898	0,180 0698	0,135 9752	58
59	0,555 9541	0,310 8779	0,232 9657	0,174 8251	0,131 3770	59
60	0,550 4496	0,304 7823	0,227 2836	0,169 7331	0,126 9343	60
61	0,544 9996	0,298 8061	0,221 7401	0,164 7894	0,122 6418	61
62	0,539 6036	0,292 9472	0,216 3318	0,159 9897	0,118 4945	62
63	0,534 2610	0,287 2031	0,211 0554	0,155 3298	0,114 4875	63
64	0,528 9713	0,281 5717	0,205 9077	0,150 8057	0,110 6159	64
65	0,523 7339	0,276 0507	0,200 8856	0,146 4133	0,106 8753	65
66	0,518 5484	0,270 6379	0,195 9859	0,142 1488	0,103 2611	66
67	0,513 4143	0,265 3313	0,191 2058	0,138 0085	0,099 7692	67
68	0,508 3310	0,260 1287	0,186 5422	0,133 9889	0,096 3954	68
69	0,503 2980	0,255 0282	0,181 9924	0,130 0863	0,093 1356	69
70	0,498 3149	0,250 0276	0,177 5536	0,126 2974	0,089 9861	70
71	0,493 3810	0,245 1251	0,173 2230	0,122 6188	0,086 9431	71
72	0,488 4961	0,240 3187	0,168 9980	0,119 0474	0,084 0030	72
73	0,483 6595	0,235 6066	0,164 8761	0,115 5800	0,081 1623	73
74	0,478 8708	0,230 9869	0,160 8548	0,112 2136	0,078 4177	74
75	0,474 1295	0,226 4577	0,156 9315	0,108 9452	0,075 7659	75
76	0,469 4351	0,222 0174	0,153 1039	0,105 7721	0,073 2038	76
77	0,464 7873	0,217 6641	0,149 3697	0,102 6913	0,070 7283	77
78	0,460 1854	0,213 3962	0,145 7265	0,099 7003	0,068 3365	78
79	0,455 6291	0,209 2119	0,142 1722	0,096 7964	0,066 0256	79
80	0,451 1179	0,205 1097	0,138 7046	0,093 9771	0,063 7929	80
81	0,446 6514	0,201 0880	0,135 3215	0,091 2399	0,061 6356	81
82	0,442 2291	0,197 1451	0,132 0210	0,088 5824	0,059 5513	82
83	0,437 8506	0,193 2795	0,128 8010	0,086 0024	0,057 5375	83
84	0,433 5155	0,189 4897	0,125 6595	0,083 4974	0,055 5918	84
85	0,429 2232	0,185 7742	0,122 5946	0,081 0655	0,053 7119	85
86	0,424 9735	0,182 1316	0,119 6045	0,078 7043	0,051 8955	86
87	0,420 7658	0,178 5604	0,116 6873	0,076 4120	0,050 1406	87
88	0,416 5998	0,175 0592	0,113 8413	0,074 1864	0,048 4450	88
89	0,412 4751	0,171 6266	0,111 0647	0,072 0256	0,046 8068	89
90	0,408 3912	0,168 2614	0,108 3558	0,069 9278	0,045 2240	90
91	0,404 3477	0,164 9622	0,105 7130	0,067 8911	0,043 6946	91
92	0,400 3443	0,161 7276	0,103 1346	0,065 9136	0,042 2170	92
93	0,396 3805	0,158 5565	0,100 6191	0,063 9938	0,040 7894	93
94	0,392 4559	0,155 4475	0,098 1650	0,062 1299	0,039 4101	94
95	0,388 5702	0,152 3995	0,095 7707	0,060 3203	0,038 0774	95
96	0,384 7230	0,149 4113	0,093 4349	0,058 5634	0,036 7897	96
97	0,380 9138	0,146 4817	0,091 1560	0,056 8577	0,035 5456	97
98	0,377 1424	0,143 6095	0,088 9326	0,055 2016	0,034 3436	98
99	0,373 4083	0,140 7936	0,086 7636	0,053 5938	0,033 1822	99
100	0,369 7112	0,138 0330	0,084 6474	0,052 0328	0,032 0601	100

0	6	7	8	9	10	0
Po latach	$4^0/_0$	$4^1/_2{}^0/_0$	$5^0/_0$	$6^0/_0$	$8^0/_0$	Po latach
46	0,164 6139	0,132 0233	0,105 9967	0,068 5378	0,029 0073	46
47	0,158 2826	0,126 3381	0,100 9492	0,064 6583	0,026 8586	47
48	0,152 1948	0,120 8977	0,096 1421	0,060 9984	0,024 8691	48
49	0,146 3411	0,115 6916	0,091 5639	0,057 5457	0,023 0269	49
50	0,140 7126	0,110 7097	0,087 2037	0,054 2884	0,021 3212	50
51	0,135 3006	0,105 9422	0,083 0512	0,051 2154	0,019 7419	51
52	0,130 0967	0,101 3801	0,079 0964	0,048 3164	0,018 2795	52
53	0,125 0930	0,097 0145	0,075 3299	0,045 5816	0,016 9255	53
54	0,120 2817	0,092 8368	0,071 7427	0,043 0015	0,015 6717	54
55	0,115 6555	0,088 8391	0,068 3264	0,040 5674	0,014 5109	55
56	0,111 2072	0,085 0135	0,065 0728	0,038 2712	0,013 4360	56
57	0,106 9300	0,081 3526	0,061 9741	0,036 1049	0,012 4407	57
58	0,102 8173	0,077 8494	0,059 0229	0,034 0612	0,011 5192	58
59	0,098 8628	0,074 4970	0,056 2123	0,032 1332	0,010 6659	59
60	0,095 0604	0,071 2890	0,053 5355	0,030 3143	0,009 8758	60
61	0,091 4042	0,068 2191	0,050 9862	0,028 5984	0,009 1443	61
62	0,087 8887	0,065 2815	0,048 5583	0,026 9797	0,008 4670	62
63	0,084 5084	0,062 4703	0,046 2460	0,025 4525	0,007 8398	63
64	0,081 2580	0,059 7802	0,044 0438	0,024 0118	0,007 2590	64
65	0,078 1327	0,057 2059	0,041 9465	0,022 6526	0,006 7213	65
66	0,075 1276	0,054 7425	0,039 9490	0,021 3704	0,006 2235	66
67	0,072 2381	0,052 3852	0,038 0467	0,020 1608	0,005 7625	67
68	0,069 4597	0,050 1294	0,036 2349	0,019 0196	0,005 3356	68
69	0,066 7882	0,047 9707	0,034 5095	0,017 9430	0,004 9403	69
70	0,064 2194	0,045 9050	0,032 8662	0,016 9274	0,004 5744	70
71	0,061 7494	0,043 9282	0,031 3011	0,015 9692	0,004 2356	71
72	0,059 3744	0,042 0366	0,029 8106	0,015 0653	0,003 9218	72
73	0,057 0908	0,040 2264	0,028 3910	0,014 2125	0,003 6313	73
74	0,054 8950	0,038 4941	0,027 0391	0,013 4081	0,003 3623	74
75	0,052 7837	0,036 8365	0,025 7515	0,012 6491	0,003 1132	75
76	0,050 7535	0,035 2502	0,024 5252	0,011 9331	0,002 8827	76
77	0,048 8015	0,033 7323	0,023 3574	0,011 2577	0,002 6691	77
78	0,046 9245	0,032 2797	0,022 2451	0,010 6204	0,002 4714	78
79	0,045 1197	0,030 8897	0,021 1858	0,010 0193	0,002 2883	79
80	0,043 3843	0,029 5595	0,020 1770	0,009 4522	0,002 1188	80
81	0,041 7157	0,028 2866	0,019 2162	0,008 9171	0,001 9619	81
82	0,040 1112	0,027 0685	0,018 3011	0,008 4124	0,001 8166	82
83	0,038 5685	0,025 9029	0,017 4296	0,007 9362	0,001 6820	83
84	0,037 0851	0,024 7874	0,016 5996	0,007 4870	0,001 5574	84
85	0,035 6588	0,023 7200	0,015 8092	0,007 0632	0,001 4420	85
86	0,034 2873	0,022 6986	0,015 0564	0,006 6634	0,001 3352	86
87	0,032 9685	0,021 7211	0,014 3394	0,006 2862	0,001 2363	87
88	0,031 7005	0,020 7858	0,013 6566	0,005 9304	0,001 1447	88
89	0,030 4813	0,019 8907	0,013 0063	0,005 5947	0,001 0600	89
90	0,029 3089	0,019 0342	0,012 3869	0,005 2780	0,000 9814	90
91	0,028 1816	0,018 2145	0,011 7971	0,004 9793	0,000 9087	91
92	0,027 0977	0,017 4302	0,011 2353	0,004 6974	0,000 8414	92
93	0,026 0555	0,016 6796	0,010 7003	0,004 4315	0,000 7791	93
94	0,025 0534	0,015 9613	0,010 1907	0,004 1807	0,000 7214	94
95	0,024 0898	0,015 2740	0,009 7055	0,003 9441	0,000 6679	95
96	0,023 1632	0,014 6163	0,009 2433	0,003 7208	0,000 6185	96
97	0,022 2724	0,013 9868	0,008 8031	0,003 5102	0,000 5727	97
98	0,021 4157	0,013 3845	0,008 3840	0,003 3115	0,000 5302	98
99	0,020 5920	0,012 8082	0,007 9847	0,003 1241	0,000 4910	99
100	0,019 8000	0,012 2566	0,007 6045	0,002 9472	0,000 4546	100

Tablica VI.

Sumy, na jakie zamieniają się 1-ki, oddawane corocznie z góry,

$${}_{s}W_{n}^{(pg)} = r.\frac{r^{n}-1}{r-1}.$$

0	1	2	3	4	5	0
Przez lat	1%	2%	2½%	3%	3½%	Przez lat
1	1,010 000 00	1,020 000 00	1,025 000 00	1,030 000 00	1,035 000 00	1
2	2,030 100 00	2,060 400 00	2,075 625 00	2,090 900 00	2,106 225 00	2
3	3,060 401 00	3,121 608 00	3,152 515 62	3,183 627 00	3,214 942 87	3
4	4,101 005 01	4,204 040 16	4,256 328 52	4,309 135 81	4,362 465 88	4
5	5,152 015 06	5,308 120 96	5,387 736 73	5,468 409 88	5,550 152 18	5
6	6,213 535 21	6,434 283 38	6,547 430 15	6,662 462 18	6,779 407 51	6
7	7,285 670 56	7,582 969 05	7,736 115 90	7,892 336 05	8,051 686 77	7
8	8,368 527 27	8,754 628 43	8,954 518 80	9,159 106 13	9,368 495 81	8
9	9,462 212 54	9,949 721 00	10,203 381 77	10,463 879 31	10,731 393 16	9
10	10,566 834 67	11,168 715 42	11,483 466 31	11,807 795 69	12,141 991 92	10
11	11,682 503 01	12,412 089 73	12,795 552 97	13,192 029 56	13,601 961 64	11
12	12,809 328 04	13,680 331 52	14,140 441 79	14,617 790 45	15,113 030 30	12
13	13,947 421 32	14,973 938 15	15,518 952 84	16,086 324 16	16,676 986 36	13
14	15,096 895 54	16,293 416 92	16,931 926 66	17,598 913 89	18,295 680 88	14
15	16,257 864 49	17,639 285 25	18,380 224 83	19,156 881 30	19,971 029 71	15
16	17,430 443 14	19,012 070 96	19,864 730 45	20,761 587 74	21,705 015 75	16
17	18,614 747 57	20,412 312 38	21,386 348 71	22,414 435 37	23,499 691 30	17
18	19,810 895 04	21,840 558 63	22,946 007 43	24,116 868 44	25,357 180 50	18
19	21,019 003 99	23,297 369 80	24,544 657 61	25,870 374 49	27,279 681 81	19
20	22,239 194 03	24,783 317 19	26,183 274 05	27,676 485 72	29,269 470 68	20
21	23,471 585 98	26,298 983 54	27,862 855 90	29,536 780 30	31,328 902 15	21
22	24,716 301 83	27,844 963 21	29,584 427 30	31,452 883 70	33,460 413 73	22
23	25,973 464 85	29,421 862 47	31,349 037 98	33,426 470 22	35,666 528 21	23
24	27,243 199 50	31,030 299 72	33,157 763 93	35,459 264 32	37,949 856 69	24
25	28,525 631 50	32,670 905 72	35,011 708 03	37,553 042 25	40,313 101 68	25
26	29,820 887 81	34,344 323 83	36,912 000 73	39,709 633 52	42,759 060 24	26
27	31,129 096 69	36,051 210 31	38,859 800 75	41,930 922 52	45,290 627 34	27
28	32,450 387 66	37,792 234 51	40,856 295 77	44,218 850 20	47,910 799 30	28
29	33,784 891 53	39,568 079 20	42,902 703 16	46,575 415 71	50,622 677 28	29
30	35,132 740 45	41,379 440 79	45,000 270 74	49,002 678 18	53,429 470 98	30
31	36,494 067 85	43,227 029 60	47,150 277 51	51,502 758 52	56,334 502 47	31
32	37,869 008 53	45,111 570 20	49,354 034 45	54,077 841 28	59,341 210 05	32
33	39,257 698 62	47,033 801 60	51,612 885 31	56,730 176 52	62,453 152 40	33
34	40,660 275 60	48,994 477 63	53,928 207 44	59,462 081 81	65,674 012 74	34
35	42,076 878 36	50,994 367 18	56,301 412 63	62,275 944 27	69,007 603 18	35
36	43,507 647 14	53,034 254 53	58,733 947 94	65,174 222 59	72,457 869 30	36
37	44,952 723 61	55,114 939 60	61,227 296 64	68,159 449 27	76,028 894 72	37
38	46,412 250 85	57,237 238 41	63,782 979 06	71,234 232 75	79,724 906 04	38
39	47,886 373 36	59,401 983 18	66,402 553 54	74,401 259 73	83,550 277 75	39
40	49,375 237 09	61,610 022 84	69,087 617 37	77,663 297 53	87,509 537 47	40
41	50,878 989 46	63,862 223 30	71,839 807 81	81,023 196 45	91,607 371 28	41
42	52,397 779 36	66,159 467 76	74,660 803 00	84,483 892 34	95,848 629 28	42
43	53,931 757 15	68,502 657 12	77,552 323 08	88,048 409 11	100,238 331 30	43
44	55,481 074 72	70,892 710 26	80,516 131 16	91,719 861 39	104,781 672 90	44
45	57,045 885 47	73,330 564 47	83,554 034 43	95,501 457 25	109,484 031 45	45

Tablica VI.

przez *n* lat, na procent składany, przy różnych stopach pr.

$${}_sW_n^{(pg)} = r.\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

0	6	7	8	9	10	0
Przez lat	4%	4 1/4 %	4 1/2 %	5%	6%	Przez lat
1	1,040 000 00	1,042 500 00	1,045 000 00	1,050 000 00	1,060 000 00	1
2	2,121 600 00	2,129 306 25	2,137 025 00	2,152 500 00	2,183 600 00	2
3	3,246 464 00	3,262 301 77	3,278 191 12	3,310 125 00	3,374 616 00	3
4	4,416 322 56	4,443 449 59	4,470 709 73	4,525 631 25	4,637 092 96	4
5	5,632 975 46	5,674 796 20	5,716 891 66	5,801 912 81	5,975 318 54	5
6	6,898 294 48	6,958 475 04	7,019 151 79	7,142 008 45	7,393 837 65	6
7	8,214 226 26	8,296 710 23	8,380 013 62	8,549 108 88	8,897 467 91	7
8	9,582 795 31	9,691 820 41	9,802 114 23	10,026 564 32	10,491 315 98	8
9	11,006 107 12	11,146 222 78	11,288 209 37	11,577 892 54	12,180 794 94	9
10	12,486 351 41	12,662 437 25	12,841 178 79	13,206 787 16	13,971 642 64	10
11	14,025 805 46	14,243 090 83	14,464 031 84	14,917 126 52	15,869 941 20	11
12	15,626 837 68	15,890 922 19	16,159 913 27	16,712 982 85	17,882 137 67	12
13	17,291 911 19	17,608 786 38	17,932 109 37	18,598 631 99	20,015 065 93	13
14	19,023 587 64	19,399 659 80	19,784 054 29	20,578 563 59	22,275 969 88	14
15	20,824 531 14	21,266 645 34	21,719 336 73	22,657 491 77	24,672 528 08	15
16	22,697 512 39	23,212 977 77	23,741 706 89	24,840 366 36	27,212 879 76	16
17	24,645 412 88	25,242 029 33	25,855 083 70	27,132 384 67	29,905 652 55	17
18	26,671 229 40	27,357 315 57	28,063 562 46	29,539 003 91	32,759 991 70	18
19	28,778 078 58	29,562 501 49	30,371 422 77	32,065 954 10	35,785 591 20	19
20	30,969 201 72	31,861 407 80	32,783 136 80	34,719 251 81	38,992 726 68	20
21	33,247 969 79	34,258 017 63	35,303 377 95	37,505 214 40	42,392 290 28	21
22	35,617 888 58	36,756 483 38	37,937 029 96	40,430 475 12	45,995 827 69	22
23	38,082 604 13	39,361 133 92	40,689 196 31	43,501 998 87	49,815 577 35	23
24	40,645 908 30	42,076 482 11	43,565 210 14	46,727 098 82	53,864 512 00	24
25	43,311 744 63	44,907 232 60	46,570 644 60	50,113 453 76	58,156 382 72	25
26	46,084 214 41	47,858 289 99	49,711 323 61	53,669 126 45	62,705 765 68	26
27	48,967 582 99	50,934 767 32	52,993 333 17	57,402 582 77	67,528 111 62	27
28	51,966 286 31	54,141 994 93	56,423 033 16	61,322 711 91	72,639 798 32	28
29	55,084 937 76	57,485 529 71	60,007 069 66	65,438 847 50	78,058 186 22	29
30	58,328 335 27	60,971 164 72	63,752 387 79	69,760 789 88	83,801 677 39	30
31	61,701 468 68	64,604 939 22	67,666 245 24	74,298 829 36	89,889 778 03	31
32	65,209 527 43	68,393 149 14	71,756 226 28	79,063 770 83	96,343 164 71	32
33	68,857 908 53	72,342 357 98	76,030 256 46	84,066 959 37	103,183 754 60	33
34	72,652 224 87	76,459 408 19	80,496 618 00	89,320 307 34	110,434 779 87	34
35	76,598 313 87	80,751 433 04	85,163 965 81	94,836 322 71	118,120 866 66	35
36	80,702 246 42	85,225 868 95	90,041 344 27	100,628 138 84	126,268 118 66	36
37	84,970 336 28	89,890 468 38	95,138 204 76	106,709 545 79	134,904 205 78	37
38	89,409 149 73	94,753 313 28	100,464 423 98	113,095 023 08	144,058 458 13	38
39	94,025 515 72	99,822 829 10	106,030 323 06	119,799 774 23	153,761 965 62	39
40	98,826 536 35	105,107 799 33	111,846 687 59	126,839 762 94	164,047 683 56	40
41	103,819 597 80	110,617 380 80	117,924 788 54	134,231 751 09	174,950 544 57	41
42	109,012 381 71	116,361 119 49	124,276 404 02	141,993 338 64	186,507 577 24	42
43	114,412 876 98	122,348 967 07	130,913 842 20	150,143 005 58	198,758 031 88	43
44	120,029 392 06	128,591 298 17	137,849 965 10	158,700 155 86	211,743 513 79	44
45	125,870 567 74	135,098 928 34	145,098 213 53	167,685 163 65	225,508 124 62	45

0	1	2	3	4	5	0
Przez lat	1%	2%	2½%	3%	3½%	Przez lat
46	58,626 344 32	75,817 175 76	86,667 885 29	99,396 500 95	114,350 972 55	46
47	60,222 607 77	78,353 519 27	89,859 582 43	103,408 395 98	119,388 256 59	47
48	61,834 833 85	80,940 589 66	93,131 071 99	107,540 647 85	124,601 845 57	48
49	63,463 182 18	83,579 401 45	96,484 348 79	111,796 867 29	129,997 910 16	49
50	65,107 814 01	86,270 989 48	99,921 457 51	116,180 773 31	135,582 837 02	50
51	66,768 892 15	89,016 409 27	103,444 493 95	120,696 196 51	141,363 236 31	51
52	68,446 581 07	91,816 737 45	107,055 606 29	125,347 082 40	147,345 949 58	52
53	70,141 046 88	94,673 072 20	110,756 996 45	130,137 494 88	153,538 057 82	53
54	71,852 457 35	97,586 533 65	114,550 921 36	135,071 619 72	159,946 889 84	54
55	73,580 981 92	100,558 264 82	118,439 694 40	140,153 768 31	166,580 030 99	55
56	75,326 791 74	103,589 429 61	122,425 686 76	145,388 381 36	173,445 332 07	56
57	77,090 059 66	106,681 218 20	126,511 328 93	150,780 032 80	180,550 918 69	57
58	78,870 960 25	109,834 842 56	130,699 112 15	156,333 433 79	187,905 200 85	58
59	80,669 669 86	113,051 539 41	134,991 589 95	162,053 436 80	195,516 882 88	59
60	82,486 366 55	116,332 570 20	139,391 379 70	167,945 039 91	203,394 973 78	60
61	84,321 230 22	119,679 221 60	143,901 164 19	174,013 391 10	211,548 797 86	61
62	86,174 442 52	123,092 806 04	148,523 693 30	180,263 792 84	219,988 015 79	62
63	88,046 186 95	126,574 662 16	153,261 785 63	186,701 706 62	228,722 585 99	63
64	89,936 648 82	130,126 155 40	158,118 330 27	193,332 757 82	237,762 876 50	64
65	91,846 015 31	133,748 678 51	163,096 288 53	200,162 740 55	247,119 577 18	65
66	93,774 475 46	137,443 652 08	168,198 695 74	207,197 622 77	256,803 762 38	66
67	95,722 220 21	141,212 525 12	173,428 663 13	214,443 551 45	266,826 894 06	67
68	97,689 442 42	145,056 775 62	178,789 379 71	221,906 858 00	277,200 835 35	68
69	99,676 336 84	148,977 911 13	184,284 114 21	229,594 063 74	287,937 864 59	69
70	101,683 100 21	152,977 469 36	189,916 217 06	237,511 885 65	299,050 689 85	70
71	103,709 931 21	157,057 018 74	195,689 122 49	245,667 242 22	310,552 463 99	71
72	105,757 030 52	161,218 159 12	201,606 350 55	254,067 259 48	322,456 800 23	72
73	107,824 600 83	165,462 522 30	207,671 509 31	262,719 277 27	334,777 788 24	73
74	109,912 846 84	169,791 772 75	213,888 297 05	271,630 855 59	347,530 010 83	74
75	112,021 975 30	174,207 608 20	220,260 504 47	280,809 781 26	360,728 561 21	75
76	114,152 195 06	178,711 760 37	226,792 017 08	290,264 074 69	374,389 060 85	76
77	116,303 717 01	183,305 995 57	233,486 817 51	300,001 996 93	388,527 677 98	77
78	118,476 754 18	187,992 115 48	240,348 987 95	310,032 056 84	403,161 146 71	78
79	120,671 521 72	192,771 957 79	247,382 712 65	320,363 018 55	418,306 786 85	79
80	122,888 236 94	197,647 396 95	254,592 280 46	331,003 909 10	433,982 524 39	80
81	125,127 119 31	202,620 344 89	261,982 087 48	341,964 026 38	450,206 912 74	81
82	127,388 390 50	207,692 751 79	269,556 639 66	353,252 947 17	466,999 154 69	82
83	129,672 274 40	212,866 606 82	277,320 555 65	364,880 535 58	484,379 125 10	83
84	131,978 997 15	218,143 938 96	285,278 569 54	376,856 951 65	502,367 394 48	84
85	134,308 787 12	223,526 817 74	293,435 533 78	389,192 660 20	520,985 253 28	85
86	136,661 874 99	229,017 354 09	301,796 422 13	401,898 440 01	540,254 737 15	86
87	139,038 493 74	234,617 701 17	310,366 332 68	414,985 393 21	560,198 652 95	87
88	141,438 878 68	240,330 055 20	319,150 491 00	428,464 955 00	580,840 605 80	88
89	143,863 267 46	246,156 656 30	328,154 253 27	442,348 903 65	602,205 027 01	89
90	146,311 900 14	252,099 789 43	337,383 109 61	456,649 370 76	624,317 202 95	90
91	148,785 019 14	258,161 785 22	346,842 687 35	471,378 851 88	647,203 305 05	91
92	151,282 869 33	264,345 020 92	356,538 754 53	486,550 217 44	670,890 420 73	92
93	153,805 698 03	270,651 921 34	366,477 223 39	502,176 723 96	695,406 585 46	93
94	156,353 755 01	277,084 959 76	376,664 163 98	518,272 025 68	720,780 815 95	94
95	158,927 292 56	283,646 658 96	387,105 757 83	534,850 186 45	747,043 144 51	95
96	161,526 565 48	290,339 592 14	397,808 401 77	551,925 692 05	774,224 654 56	96
97	164,151 831 14	297,166 383 98	408,778 611 82	569,513 462 81	802,357 517 47	97
98	166,803 349 45	304,129 711 66	420,023 077 11	587,628 866 69	831,475 030 59	98
99	169,481 382 94	311,232 305 89	431,548 654 04	606,287 732 69	861,611 656 66	99
100	172,186 196 77	318,476 952 01	443,362 370 39	625,506 354 67	892,803 064 64	100

0	6	7	8	9	10	0
Przez lat	4%	4¼%	4½%	5%	6%	Przez lat
46	131,945 390 45	141,883 132 79	152,672 633 14	177,119 421 83	240,098 612 09	46
47	138,263 206 07	148,955 665 94	160,587 901 63	187,025 392 92	255,564 528 82	47
48	144,833 734 31	156,328 781 74	168,859 357 20	197,426 662 57	271,958 400 55	48
49	151,667 083 68	164,015 254 96	177,503 028 28	208,347 995 70	289,335 904 58	49
50	158,773 767 03	172,028 403 30	186,535 664 55	219,815 395 48	307,756 058 86	50
51	166,164 717 71	180,382 110 44	195,974 769 46	231,856 165 26	327,281 422 39	51
52	173,851 306 42	189,090 850 13	205,838 634 08	244,498 973 52	347,978 307 73	52
53	181,845 358 68	198,169 711 27	216,146 372 61	257,773 922 20	369,917 006 20	53
54	190,159 173 02	207,634 423 99	226,917 959 38	271,712 618 31	393,172 026 57	54
55	198,805 539 94	217,501 387 01	238,174 267 55	286,348 249 22	417,822 348 16	55
56	207,797 761 54	227,787 695 96	249,937 109 59	301,715 661 68	443,951 689 05	56
57	217,149 672 00	238,511 173 04	262,229 279 53	317,851 444 77	471,648 790 39	57
58	226,875 658 88	249,690 397 89	275,074 597 10	334,794 017 00	501,007 717 82	58
59	236,990 685 24	261,344 739 80	288,497 953 97	352,583 717 85	532,128 180 89	59
60	247,510 312 65	273,494 391 25	302,525 361 90	371,262 903 75	565,115 871 74	60
61	258,450 725 16	286,160 402 87	317,184 003 19	390,876 048 93	600,082 824 04	61
62	269,828 754 16	299,364 720 00	332,502 283 33	411,469 851 38	637,147 793 49	62
63	281,661 904 33	313,130 220 60	348,509 886 08	433,093 343 95	676,436 661 10	63
64	293,968 380 50	327,480 754 97	365,237 830 96	455,798 011 15	718,082 860 76	64
65	306,767 115 72	342,441 187 06	382,718 533 35	479,637 911 70	762,227 832 41	65
66	320,077 800 35	358,037 437 51	400,985 867 35	504,669 807 29	809,021 502 35	66
67	333,920 912 36	374,296 528 60	420,075 231 38	530,953 297 65	858,622 792 49	67
68	348,317 748 86	391,246 631 07	440,023 616 79	558,550 962 54	911,200 160 04	68
69	363,290 458 81	408,917 112 89	460,869 679 55	587,528 510 66	966,932 169 64	69
70	378,862 077 16	427,338 590 19	482,653 815 13	617,954 936 20	1026,008 099 82	70
71	395,056 560 25	446,542 980 27	505,418 236 81	649,902 683 01	1088,628 585 81	71
72	411,898 822 66	466,563 556 93	529,207 057 46	683,447 817 16	1155,006 300 96	72
73	429,414 775 57	487,435 008 10	554,066 375 05	718,670 208 02	1225,366 679 01	73
74	447,631 366 59	509,193 495 94	580,044 361 93	755,653 718 42	1299,948 679 76	74
75	466,576 621 25	531,876 719 52	607,191 358 21	794,486 404 34	1379,005 600 55	75
76	486,279 686 10	555,523 980 10	635,559 969 33	835,260 724 55	1462,805 936 58	76
77	506,770 873 55	580,176 249 26	665,205 167 95	878,073 760 78	1551,634 292 77	77
78	528,081 708 49	605,876 239 85	696,184 400 51	923,027 448 82	1645,792 350 34	78
79	550,244 976 83	632,668 480 04	728,557 698 53	970,228 821 26	1745,599 891 36	79
80	573,294 775 90	660,599 390 44	762,387 794 97	1019,790 262 32	1851,395 884 84	80
81	597,266 566 94	689,717 364 54	797,740 245 74	1071,829 775 44	1963,539 637 93	81
82	622,197 229 62	720,072 852 53	834,683 556 80	1126,471 264 21	2082,412 016 21	82
83	648,125 118 80	751,718 448 76	873,289 316 86	1183,844 827 42	2208,416 737 18	83
84	675,090 123 55	784,708 982 84	913,632 336 11	1244,087 068 79	2341,981 741 41	84
85	703,133 728 49	819,101 614 61	955,790 791 24	1307,341 422 23	2483,560 645 89	85
86	732,299 077 63	854,955 933 23	999,846 376 85	1373,758 493 35	2633,634 284 65	86
87	762,631 040 74	892,334 060 39	1045,884 463 80	1443,496 418 01	2792,712 341 73	87
88	794,176 282 37	931,300 757 96	1093,994 264 67	1516,721 238 91	2961,335 082 23	88
89	826,983 333 66	971,923 540 17	1144,269 006 58	1593,607 300 86	3140,075 187 16	89
90	861,102 667 01	1014,272 790 63	1196,806 111 88	1674,337 665 90	3329,539 698 39	90
91	896,586 773 69	1058,421 884 23	1251,707 386 92	1759,104 549 20	3530,372 080 30	91
92	933,490 244 64	1104,447 314 31	1309,079 219 33	1848,109 776 66	3743,254 405 12	92
93	971,869 854 42	1152,428 825 17	1369,032 784 20	1941,565 265 49	3968,909 669 42	93
94	1011,784 648 60	1202,449 550 24	1431,684 259 49	2039,693 528 76	4208,104 249 59	94
95	1053,296 034 54	1254,596 156 12	1497,155 051 16	2142,728 205 20	4461,650 504 56	95
96	1096,467 875 93	1308,958 992 76	1565,572 028 46	2250,914 615 46	4730,409 534 84	96
97	1141,366 590 96	1365,632 249 95	1637,067 769 74	2364,510 346 23	5015,294 106 93	97
98	1188,061 254 60	1424,714 120 57	1711,780 819 38	2483,785 863 55	5317,271 753 34	98
99	1236,623 704 79	1486,306 970 69	1789,855 956 26	2609,025 156 72	5637,368 058 54	99
100	1287,128 652 98	1550,517 516 94	1871,444 474 29	2740,526 414 56	5976,670 142 05	100

Tablica VII.

Teraźniejsza wartość 1-tek, wnoszonych corocznie z góry,

$${}_sW_n^{(tg)} = \frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

0	1	2	3	4	5	0
Przez lat	1%	2%	2½%	3%	3½%	Przez lat
1	1,000 0000	1,000 0000	1,000 0000	1,000 0000	1,000 0000	1
2	1,990 0990	1,980 3922	1,975 6098	1,970 8738	1,966 1836	2
3	2,970 3951	2,941 5609	2,927 4242	2,913 4697	2,899 6943	3
4	3,940 9852	3,883 8833	3,856 0236	3,828 6114	3,801 6370	4
5	4,901 9656	4,807 7287	4,761 9742	4,717 0984	4,673 0792	5
6	5,853 4312	5,713 4595	5,645 8285	5,579 7072	5,515 0524	6
7	6,795 4765	6,601 4309	6,508 1254	6,417 1914	6,328 5530	7
8	7,728 1945	7,471 9911	7,349 3906	7,230 2830	7,114 5440	8
9	8,651 6778	8,325 4814	8,170 1372	8,019 6922	7,873 9555	9
10	9,566 0176	9,162 2367	8,970 8655	8,786 1089	8,607 6865	10
11	10,471 3045	9,982 5850	9,752 0639	9,530 2028	9,316 6053	11
12	11,367 6282	10,786 8480	10,514 2087	10,252 6241	10,001 5510	12
13	12,255 0775	11,575 3412	11,257 7646	10,954 0040	10,663 3343	13
14	13,133 7401	12,348 3737	11,983 1850	11,634 9553	11,302 7385	14
15	14,003 7030	13,106 2488	12,690 9122	12,296 0731	11,920 5203	15
16	14,865 0525	13,849 2635	13,381 3777	12,937 9351	12,517 4109	16
17	15,717 8738	14,577 7093	14,055 0027	13,561 1020	13,094 1168	17
18	16,562 2513	15,291 8719	14,712 1977	14,166 1185	13,651 3206	18
19	17,398 2686	15,992 0313	15,353 3636	14,753 5131	14,189 6817	19
20	18,226 0085	16,678 4620	15,978 8913	15,323 7991	14,709 8374	20
21	19,045 5530	17,351 4333	16,589 1623	15,877 4749	15,212 4033	21
22	19,856 9831	18,011 2092	17,184 5486	16,415 0241	15,697 9742	22
23	20,660 3793	18,658 0482	17,765 4132	16,936 9166	16,167 1248	23
24	21,455 8211	19,292 2041	18,332 1105	17,443 6084	16,620 4105	24
25	22,243 3873	19,913 9256	18,884 9858	17,935 5421	17,058 3676	25
26	23,023 1557	20,523 4565	19,424 3764	18,413 1477	17,481 5146	26
27	23,795 2037	21,121 0358	19,950 6111	18,876 8424	17,890 3523	27
28	24,559 6076	21,706 8978	20,464 0109	19,327 0315	18,285 3645	28
29	25,316 4432	22,281 2724	20,964 8887	19,764 1082	18,667 0188	29
30	26,065 7853	22,844 3847	21,453 5499	20,188 4546	19,035 7670	30
31	26,807 7082	23,396 4556	21,930 2926	20,600 4413	19,392 0454	31
32	27,542 2854	23,937 7015	22,395 4074	21,000 4285	19,736 2758	32
33	28,269 5895	24,468 3348	22,849 1780	21,388 7655	20,068 8655	33
34	28,989 6925	24,988 5636	23,291 8809	21,765 7918	20,390 2082	34
35	29,702 6659	25,498 5917	23,723 7863	22,131 8367	20,700 6842	35
36	30,408 5801	25,998 6193	24,145 1573	22,487 2201	21,000 6611	36
37	31,107 5050	26,488 8425	24,556 2511	22,832 2525	21,290 4938	37
38	31,799 5099	26,969 4534	24,957 3181	23,167 2354	21,570 5254	38
39	32,484 6633	27,440 6406	25,348 6030	23,492 4616	21,841 0874	39
40	33,163 0330	27,902 5888	25,730 3444	23,808 2151	22,102 4999	40
41	33,834 6861	28,355 4792	26,102 7751	24,114 7720	22,355 0723	41
42	34,499 6892	28,799 4895	26,466 1220	24,412 4000	22,599 1037	42
43	35,158 1081	29,234 7936	26,820 6068	24,701 3592	22,834 8828	43
44	35,810 0081	29,661 5623	27,166 4457	24,981 9021	23,062 6887	44
45	36,455 4535	30,079 9631	27,503 8495	25,254 2739	23,282 7910	45

Tablica VII.

przez *n* lat, na procent składany, przy różnych stopach pr.

$$_{s}W_{n}^{(tg)} = \frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^{n}-1}{r-1}.$$

0	6	7	8	9	10	0
Przez lat	4%	4½%	5%	6%	8%	Przez lat
1	1,000 0000	1,000 0000	1,000 0000	1,000 0000	1,000 0000	1
2	1,961 5385	1,956 9378	1,952 3810	1,943 3962	1,925 9259	2
3	2,886 0947	2,872 6678	2,859 4104	2,833 3927	2,783 2647	3
4	3,775 0910	3,748 9644	3,723 2480	3,673 0119	3,577 0970	4
5	4,629 8952	4,587 5257	4,545 9505	4,465 1056	4,312 1268	5
6	5,451 8223	5,389 9767	5,329 4767	5,212 3638	4,992 7101	6
7	6,242 1369	6,157 8725	6,075 6921	5,917 3243	5,622 8797	7
8	7,002 0547	6,892 7009	6,786 3734	6,582 3814	6,206 3701	8
9	7,732 7449	7,595 8861	7,463 2128	7,209 7938	6,746 6389	9
10	8,435 3316	8,268 7905	8,107 8217	7,801 6923	7,246 8879	10
11	9,110 8958	8,912 7182	8,721 7349	8,360 0871	7,710 0814	11
12	9,760 4767	9,528 9169	9,306 4142	8,886 8746	8,138 9643	12
13	10,385 0738	10,118 5808	9,863 2516	9,383 8439	8,536 0780	13
14	10,985 6478	10,682 8524	10,393 5730	9,852 6830	8,903 7759	14
15	11,563 1229	11,222 8253	10,898 6409	10,294 9839	9,244 2370	15
16	12,118 3874	11,739 5457	11,379 6580	10,712 2490	9,559 4787	16
17	12,652 2956	12,234 0150	11,837 7696	11,105 8953	9,851 3692	17
18	13,165 6689	12,707 1914	12,274 0662	11,477 2597	10,121 6381	18
19	13,659 2970	13,159 9918	12,689 5869	11,827 6035	10,371 8871	19
20	14,133 9394	13,593 2936	13,085 3209	12,158 1165	10,603 5992	20
21	14,590 3263	14,007 9365	13,462 2103	12,469 9212	10,818 1474	21
22	15,029 1599	14,404 7239	13,821 1527	12,764 0766	11,016 8031	22
23	15,451 1153	14,784 4248	14,163 0026	13,041 5817	11,200 7437	23
24	15,856 8417	15,147 7749	14,488 5739	13,303 3790	11,371 0589	24
25	16,246 9631	15,495 4784	14,798 6418	13,550 3575	11,528 7583	25
26	16,622 0799	15,828 2090	15,093 9446	13,783 3562	11,674 7762	26
27	16,982 7692	16,146 6114	15,375 1853	14,003 1662	11,809 9779	27
28	17,329 5857	16,451 3028	15,643 0336	14,210 5341	11,935 1648	28
29	17,663 0632	16,742 8735	15,898 1273	14,406 1643	12,051 0785	29
30	17,983 7146	17,021 8885	16,141 0736	14,590 7210	12,158 4060	30
31	18,292 0333	17,288 8885	16,372 4510	14,764 8312	12,257 7833	31
32	18,588 4936	17,544 3910	16,592 8105	14,929 0860	12,349 7994	32
33	18,873 5515	17,788 8909	16,802 6767	15,084 0434	12,434 9994	33
34	19,147 6457	18,022 8621	17,002 5492	15,230 2296	12,513 8884	34
35	19,411 1978	18,246 7580	17,192 9040	15,368 1411	12,586 9337	35
36	19,664 6132	18,461 0124	17,374 1943	15,498 2464	12,654 5682	36
37	19,908 2820	18,666 0406	17,546 8517	15,620 9871	12,717 1928	37
38	20,142 5788	18,862 2398	17,711 2873	15,736 7803	12,775 1785	38
39	20,367 8642	19,049 9902	17,867 8927	15,846 0192	12,828 8690	39
40	20,584 4848	19,229 6557	18,017 0407	15,949 0747	12,878 5824	40
41	20,792 7739	19,401 5844	18,159 0864	16,046 2969	12,924 6133	41
42	20,993 0518	19,566 1095	18,294 3680	16,138 0159	12,967 2346	42
43	21,185 6267	19,723 5493	18,423 2076	16,224 5433	13,006 6987	43
44	21,370 7949	19,874 2103	18,545 9120	16,306 1729	13,043 2395	44
45	21,548 8413	20,018 3831	18,662 7733	16,383 1820	13,077 0736	45

0	1	2	3	4	5	0
Przez lat	1%	2%	2½%	3%	3½%	Przez lat
46	37,094 5084	30,490 1599	27,833 0239	25,518 7125	23,495 4503	46
47	37,727 2361	30,892 3136	28,154 1696	25,775 4491	23,700 9181	47
48	38,353 6991	31,286 5820	28,467 4826	26,024 7078	23,899 4378	48
49	38,973 9595	31,673 1196	28,773 1537	26,266 7066	24,091 2443	49
50	39,588 0787	32,052 0780	29,071 3695	26,501 6569	24,276 5645	50
51	40,196 1175	32,423 6059	29,362 3117	26,729 7640	24,455 6179	51
52	40,798 1362	32,787 8489	29,646 1577	26,951 2272	24,628 6163	52
53	41,394 1942	33,144 9499	29,923 0807	27,166 2400	24,795 7645	53
54	41,984 3507	33,495 0489	30,193 2495	27,374 9903	24,957 2604	54
55	42,568 6641	33,838 2833	30,456 8288	27,577 6605	25,113 2951	55
56	43,147 1922	34,174 7875	30,713 9793	27,774 4276	25,264 0532	56
57	43,719 9922	34,504 6936	30,964 8578	27,965 4637	25,409 7133	57
58	44,287 1210	34,828 1310	31,209 6174	28,150 9357	25,550 4476	58
59	44,848 6347	35,145 2265	31,448 4072	28,331 0055	25,686 4228	59
60	45,404 5888	35,456 1044	31,681 3729	28,505 8306	25,817 7998	60
61	45,955 0384	35,760 8867	31,908 6565	28,675 5637	25,944 7341	61
62	46,500 0380	36,059 6928	32,130 3966	28,840 3531	26,067 3760	62
63	47,039 6416	36,352 6400	32,346 7284	29,000 3428	26,185 8705	63
64	47,573 9026	36,639 8432	32,557 7838	29,155 6726	26,300 3580	64
65	48,102 8738	36,921 4149	32,763 6915	29,306 4783	26,410 9739	65
66	48,626 6078	37,197 4655	32,964 5771	29,452 8915	26,517 8492	66
67	49,145 1562	37,468 1035	33,160 5630	29,595 0403	26,621 1103	67
68	49,658 5705	37,733 4348	33,351 7688	29,733 0488	26,720 8795	68
69	50,166 9015	37,993 5635	33,538 3110	29,867 0377	26,817 2749	69
70	50,670 1995	38,248 5917	33,720 3034	29,997 1240	26,910 4105	70
71	51,168 5143	38,498 6193	33,897 8570	30,123 4214	27,000 3966	71
72	51,661 8954	38,743 7444	34,071 0800	30,246 0401	27,087 3398	72
73	52,150 3915	38,984 0631	34,240 0780	30,365 0875	27,171 3428	73
74	52,634 0510	39,219 6697	34,404 9542	30,480 6675	27,252 5051	74
75	53,112 9218	39,450 6566	34,565 8089	30,592 8811	27,330 9228	75
76	53,587 0512	39,677 1143	34,722 7404	30,701 8263	27,406 6887	76
77	54,056 4864	39,899 1317	34,875 8443	30,807 5983	27,479 8924	77
78	54,521 2736	40,116 7958	35,025 2140	30,910 2896	27,550 6207	78
79	54,981 4590	40,330 1919	35,170 9405	31,009 9899	27,618 9572	79
80	55,437 0882	40,539 4039	35,313 1127	31,106 7863	27,684 9828	80
81	55,888 2061	40,744 5136	35,451 8172	31,200 7634	27,748 7757	81
82	56,334 8575	40,945 6016	35,587 1388	31,292 0033	27,810 4113	82
83	56,777 0867	41,142 7466	35,719 1598	31,380 5858	27,869 9626	83
84	57,214 9373	41,336 0261	35,847 9657	31,466 5881	27,927 5001	84
85	57,648 4528	41,525 5158	35,973 6202	31,550 0856	27,983 0919	85
86	58,077 6760	41,711 2900	36,096 2149	31,631 1510	28,036 8037	86
87	58,502 6495	41,893 4216	36,215 8194	31,709 8554	28,088 6993	87
88	58,923 4154	42,071 9819	36,332 5067	31,786 2673	28,138 8399	88
89	59,340 0152	42,247 0411	36,446 3480	31,860 4537	28,187 2849	89
90	59,752 4903	42,418 6677	36,557 4127	31,932 4794	28,234 0917	90
91	60,160 8815	42,586 9292	36,665 7685	32,002 4071	28,279 3156	91
92	60,565 2292	42,751 8913	36,771 4814	32,070 2982	28,323 0103	92
93	60,965 5735	42,913 6190	36,874 6160	32,136 2118	28,365 2273	93
94	61,361 9539	43,072 1754	36,975 2352	32,200 2057	28,406 0167	94
95	61,754 4098	43,227 6230	37,073 4002	32,262 3356	28,445 4268	95
96	62,142 9800	43,380 0225	37,169 1709	32,322 6559	28,483 5042	96
97	62,527 7030	43,529 4339	37,262 6057	32,381 2193	28,520 2939	97
98	62,908 6168	43,675 9155	37,353 7617	32,438 0770	28,555 8395	98
99	63,285 7592	43,819 5250	37,442 6943	32,493 2787	28,590 1831	99
100	63,659 1676	43,960 3187	37,529 4579	32,546 8725	28,623 3653	100

0	6	7	8	9	10	0
Przez lat	4%	4½%	5%	6%	8%	Przez lat
46	21,720 0397	20,156 3474	18,774 0698	16,455 8321	13,108 4015	46
47	21,884 6536	20,288 3707	18,880 0665	16,524 3699	13,137 4088	47
48	22,042 9361	20,414 7088	18,981 0157	16,589 0282	13,164 2674	48
49	22,195 1309	20,535 6065	19,077 1578	16,650 0266	13,189 1365	49
50	22,341 4720	20,651 2981	19,168 7217	16,707 5723	13,212 1634	50
51	22,482 1846	20,762 0078	19,255 9255	16,761 8606	13,233 4846	51
52	22,617 4852	20,867 9500	19,338 9766	16,813 0761	13,253 2265	52
53	22,747 5819	20,969 3302	19,418 0730	16,861 3925	13,271 5060	53
54	22,872 6749	21,066 3447	19,493 4028	16,906 9741	13,288 4315	54
55	22,992 9567	21,159 1815	19,565 1456	16,949 9755	13,304 1033	55
56	23,108 6122	21,248 0206	19,633 4720	16,990 5430	13,318 6141	56
57	23,219 8194	21,333 0340	19,698 5447	17,028 8141	13,332 0501	57
58	23,326 7494	21,414 3866	19,760 5188	17,064 9190	13,344 4908	58
59	23,429 5668	21,492 2360	19,819 5417	17,098 9802	13,356 0100	59
60	23,528 4296	21,566 7330	19,875 7540	17,131 1134	13,366 6760	60
61	23,623 4900	21,638 0220	19,929 2895	17,161 4277	13,376 5518	61
62	23,714 8942	21,706 2412	19,980 2757	17,190 0261	13,385 6961	62
63	23,802 7829	21,771 5227	20,028 8340	17,217 0058	13,394 1631	63
64	23,887 2912	21,833 9930	20,075 0800	17,242 4583	13,402 0029	64
65	23,968 5493	21,893 7732	20,119 1238	17,266 4701	13,409 2619	65
66	24,046 6820	21,950 9791	20,161 0703	17,289 1227	13,415 9832	66
67	24,121 8096	22,005 7217	20,201 0194	17,310 4931	13,422 2067	67
68	24,194 0477	22,058 1068	20,239 0661	17,330 6539	13,427 9692	68
69	24,263 5074	22,108 2362	20,275 3010	17,349 6735	13,433 3048	69
70	24,330 2956	22,156 2069	20,309 8105	17,367 6165	13,438 2452	70
71	24,394 5150	22,202 1119	20,342 6766	17,384 5439	13,442 8196	71
72	24,456 2644	22,246 0401	20,373 9778	17,400 5131	13,447 0552	72
73	24,515 6388	22,288 0766	20,403 7883	17,415 5784	13,450 9770	73
74	24,572 7297	22,328 3030	20,432 1794	17,429 7909	13,454 6084	74
75	24,627 6247	22,366 7971	20,459 2185	17,443 1990	13,457 9707	75
76	24,680 4083	22,403 6336	20,484 9700	17,455 8481	13,461 0840	76
77	24,731 1619	22,438 8838	20,509 4952	17,467 7812	13,463 9667	77
78	24,779 9633	22,472 6161	20,532 8526	17,479 0389	13,466 6358	78
79	24,826 8878	22,504 8958	20,555 0977	17,489 6593	13,469 1072	79
80	24,872 0075	22,535 7854	20,576 2835	17,499 6786	13,471 3956	80
81	24,915 3918	22,565 3449	20,596 4605	17,509 1308	13,473 5142	81
82	24,957 1075	22,593 6315	20,615 6767	17,518 0479	13,475 4763	82
83	24,997 2188	22,620 7000	20,633 9778	17,526 4603	13,477 2929	83
84	25,035 7873	22,646 6029	20,651 4074	17,534 3965	13,478 9749	84
85	25,072 8724	22,671 3903	20,668 0070	17,541 8835	13,480 5323	85
86	25,108 5312	22,695 1103	20,683 8162	17,548 9467	13,481 9744	86
87	25,142 8184	22,717 8089	20,698 8726	17,555 6101	13,483 3096	87
88	25,175 7869	22,739 5301	20,713 2120	17,561 8963	13,484 5459	88
89	25,207 4874	22,760 3159	20,726 8686	17,567 8267	13,485 6907	89
90	25,237 9687	22,780 2066	20,739 8748	17,573 4214	13,486 7506	90
91	25,267 2776	22,799 2407	20,752 2617	17,578 6994	13,487 7320	91
92	25,275 4592	22,817 4553	20,764 0588	17,583 6787	13,488 6408	92
93	25,322 5569	22,834 8854	20,775 2941	17,588 3762	13,489 4822	93
94	25,348 6124	22,851 5650	20,785 9944	17,592 8077	13,490 2613	94
95	25,373 6658	22,867 5263	20,796 1851	17,596 9884	13,490 9827	95
96	25,397 7556	22,882 8003	20,805 8906	17,600 9324	13,491 6506	96
97	25,420 9188	22,897 4166	20,815 1339	17,604 6532	13,492 2691	97
98	25,443 1912	22,911 4034	20,823 9370	17,608 1634	13,492 8418	98
99	25,464 6069	22,924 7879	20,832 3210	17,611 4749	13,493 3720	99
100	25,485 1990	22,937 5961	20,840 3057	17,614 5990	13,493 8630	100

Tablica VIII.

Teraźniejsza wartość 1-tek, wnoszonych corocznie z dołu,

$${}_{s}W_{n}^{(ld)}=\frac{1}{r^{n}}\cdot\frac{r^{n}-1}{r-1}.$$

0	1	2	3	4	5	0
Przez lat	1%	2%	2½%	3%	3½%	Przez lat
1	0,990 0990	0,980 3922	0,975 6098	0,970 8738	0,966 1836	1
2	1,970 3951	1,941 5609	1,927 4242	1,913 4697	1,899 6943	2
3	2,940 9852	2,883 8833	2,856 0236	2,828 6114	2,801 6370	3
4	3,901 9656	3,807 7287	3,761 9742	3,717 0984	3,673 0792	4
5	4,853 4312	4,713 4595	4,645 8285	4,579 7072	4,515 0524	5
6	5,795 4765	5,601 4309	5,508 1254	5,417 1914	5,328 5530	6
7	6,728 1945	6,471 9911	6,349 3906	6,230 2830	6,114 5440	7
8	7,651 6778	7,325 4814	7,170 1372	7,019 6922	6,873 9555	8
9	8,566 0176	8,162 2367	7,970 8655	7,786 1089	7,607 6865	9
10	9,471 3045	8,982 5850	8,752 0639	8,530 2028	8,316 6053	10
11	10,367 6282	9,786 8480	9,514 2087	9,252 6241	9,001 5510	11
12	11,255 0775	10,575 3412	10,257 7646	9,954 0040	9,663 3343	12
13	12,133 7401	11,348 3737	10,983 1850	10,634 9553	10,302 7385	13
14	13,003 7030	12,106 2488	11,690 9122	11,296 0731	10,920 5203	14
15	13,865 0525	12,849 2635	12,381 3777	11,937 9351	11,517 4109	15
16	14,717 8738	13,577 7093	13,055 0027	12,561 1020	12,094 1168	16
17	15,562 2513	14,291 8719	13,712 1977	13,166 1185	12,651 3206	17
18	16,398 2686	14,992 0313	14,353 3636	13,753 5131	13,189 6817	18
19	17,226 0085	15,678 4620	14,978 8913	14,323 7991	13,709 8374	19
20	18,045 5530	16,351 4333	15,589 1623	14,877 4749	14,212 4033	20
21	18,856 9831	17,011 2092	16,184 5486	15,415 0241	14,697 9742	21
22	19,660 3793	17,658 0482	16,765 4132	15,936 9166	15,167 1248	22
23	20,455 8211	18,292 2041	17,332 1105	16,443 6084	15,620 4105	23
24	21,243 3873	18,913 9256	17,884 9858	16,935 5421	16,058 3676	24
25	22,023 1557	19,523 4565	18,424 3764	17,413 1477	16,481 5146	25
26	22,795 2037	20,121 0358	18,950 6111	17,876 8424	16,890 3523	26
27	23,559 6076	20,706 8978	19,464 0109	18,327 0315	17,285 3645	27
28	24,316 4432	21,281 2724	19,964 8887	18,764 1082	17,667 0188	28
29	25,065 7853	21,844 3847	20,453 5499	19,188 4546	18,035 7670	29
30	25,807 7082	22,396 4556	20,930 2926	19,600 4413	18,392 0454	30
31	26,542 2854	22,937 7015	21,395 4074	20,000 4285	18,736 2758	31
32	27,269 5895	23,468 3348	21,849 1780	20,388 7655	19,068 8655	32
33	27,989 6925	23,988 5636	22,291 8809	20,765 7918	19,390 2082	33
34	28,702 6659	24,498 5917	22,723 7863	21,131 8367	19,700 6842	34
35	29,408 5801	24,998 6193	23,145 1573	21,487 2201	20,000 6611	35
36	30,107 5050	25,488 8425	23,556 2511	21,832 2525	20,290 4938	36
37	30,799 5099	25,969 4534	23,957 3181	22,167 2354	20,570 5254	37
38	31,484 6633	26,440 6406	24,348 6030	22,492 4616	20,841 0874	38
39	32,163 0330	26,902 5888	24,730 3444	22,808 2151	21,102 4999	39
40	32,834 6861	27,355 4792	25,102 7751	23,114 7720	21,355 0723	40
41	33,499 6892	27,799 4895	25,466 1220	23,412 4000	21,599 1037	41
42	34,158 1081	28,234 7936	25,820 6068	23,701 3592	21,834 8828	42
43	34,810 0081	28,661 5623	26,166 4457	23,981 9021	22,062 6887	43
44	35,455 4535	29,079 9631	26,503 8495	24,254 2739	22,282 7910	44
45	36,094 5084	29,490 1599	26,833 0239	24,518 7125	22,495 4503	45

Tablica VIII.

przez *n* lat, na procent składany, przy różnych stopach pr.

$${}_{s}W_{n}^{(td)} = \frac{1}{r^n} \cdot \frac{r^n-1}{r-1}.$$

0	6	7	8	9	10	0
Przez lat	**4%**	**4½%**	**5%**	**6%**	**8%**	Przez lat
1	0,961 5385	0,956 9378	0,952 3810	0,943 3962	0,925 9259	1
2	1,886 0947	1,872 6678	1,859 4104	1,833 3927	1,783 2647	2
3	2,775 0910	2,748 9644	2,723 2480	2,673 0119	2,577 0970	3
4	3,629 8952	3,587 5257	3,545 9505	3,465 1056	3,312 1268	4
5	4,451 8223	4,389 9767	4,329 4767	4,212 3638	3,992 7101	5
6	5,242 1369	5,157 8725	5,075 6921	4,917 3243	4,622 8797	6
7	6,002 0547	5,892 7009	5,786 3734	5,582 3814	5,206 3701	7
8	6,732 7449	6,595 8861	6,463 2128	6,209 7938	5,746 6389	8
9	7,435 3316	7,268 7905	7,107 8217	6,801 6923	6,246 8879	9
10	8,110 8958	7,912 7182	7,721 7349	7,360 0871	6,710 0814	10
11	8,760 4767	8,528 9169	8,306 4142	7,886 8746	7,138 9643	11
12	9,385 0738	9,118 5808	8,863 2516	8,383 8439	7,536 0780	12
13	9,985 6478	9,682 8524	9,393 5730	8,852 6830	7,903 7759	13
14	10,563 1229	10,222 8253	9,898 6409	9,294 9839	8,244 2370	14
15	11,118 3874	10,739 5457	10,379 6580	9,712 2490	8,559 4787	15
16	11,652 2956	11,234 0150	10,837 7696	10,105 8953	8,851 3692	16
17	12,165 6689	11,707 1914	11,274 0662	10,477 2597	9,121 6381	17
18	12,659 2970	12,159 9918	11,689 5869	10,827 6035	9,371 8871	18
19	13,133 9394	12,593 2936	12,085 3209	11,158 1165	9,603 5992	19
20	13,590 3263	13,007 9365	12,462 2103	11,469 9212	9,818 1474	20
21	14,029 1599	13,404 7239	12,821 1527	11,764 0766	10,016 8031	21
22	14,451 1153	13,784 4248	13,163 0026	12,041 5817	10,200 7437	22
23	14,856 8417	14,147 7749	13,488 5739	12,303 3790	10,371 0589	23
24	15,246 9631	14,495 4784	13,798 6418	12,550 3575	10,528 7583	24
25	15,622 0799	14,828 2090	14,093 9446	12,783 3562	10,674 7762	25
26	15,982 7692	15,146 6114	14,375 1853	13,003 1662	10,809 9779	26
27	16,329 5857	15,451 3028	14,643 0336	13,210 5341	10,935 1648	27
28	16,663 0632	15,742 8735	14,898 1273	13,406 1643	11,051 0785	28
29	16,983 7146	16,021 8885	15,141 0736	13,590 7210	11,158 4060	29
30	17,292 0333	16,288 8885	15,372 4510	13,764 8312	11,257 7833	30
31	17,588 4936	16,544 3910	15,592 8105	13,929 0860	11,349 7994	31
32	17,873 5515	16,788 8909	15,802 6767	14,084 0434	11,434 9994	32
33	18,147 6457	17.022 8621	16,002 5492	14,230 2296	11,513 8884	33
34	18,411 1978	17,246 7580	16,192 9040	14,368 1411	11,586 9337	34
35	18,664 6132	17,461 0124	16,374 1943	14,498 2464	11,654 5682	35
36	18,908 2820	17,666 0406	16,546 8517	14,620 9871	11,717 1928	36
37	19,142 5788	17,862 2398	16,711 2873	14,736 7803	11,775 1785	37
38	19,367 8642	18,049 9902	16,867 8927	14,846 0192	11,828 8690	38
39	19,584 4848	18,229 6557	17,017 0407	14,949 0747	11,878 5824	39
40	19,792 7739	18,401 5844	17,159 0864	15,046 2969	11,924 6133	40
41	19,993 0518	18,566 1095	17,294 3680	15,138 0159	11,967 2346	41
42	20,185 6267	18,723 5498	17,423 2076	15,224 5433	12,006 6987	42
43	20,370 7949	18,874 2103	17,545 9120	15,306 1729	12,043 2395	43
44	20,548 8413	19,018 3831	17,662 7733	15,383 1820	12,077 0736	44
45	20,720 0397	19,156 3474	17,774 0698	15,455 8321	12,108 4015	45

0	1	2	3	4	5	0
Przez lat	1%	2%	2½%	3%	3½%	Przez lat
46	36,727 2361	29,892 3136	27,154 1696	24,775 4491	22,700 9181	46
47	37,353 6991	30,286 5820	27,467 4826	25,024 7078	22,899 4378	47
48	37,973 9595	30,673 1196	27,773 1537	25,266 7066	23,091 2443	48
49	38,588 0787	31,052 0780	28,071 3695	25,501 6569	23,276 5645	49
50	39,196 1175	31,423 6059	28,362 3117	25,729 7640	23,455 6179	50
51	39,798 1362	31,787 8489	28,646 1577	25,951 2272	23,628 6163	51
52	40,394 1942	32,144 9499	28,923 0807	26,166 2400	23,795 7645	52
53	40,984 3507	32,495 0489	29,193 2495	26,374 9903	23,957 2604	53
54	41,568 6641	32,838 2833	29,456 8288	26,577 6605	24,113 2951	54
55	42,147 1922	33,174 7875	29,713 9793	26,774 4276	24,264 0532	55
56	42,719 9922	33,504 6936	29,964 8578	26,965 4637	24,409 7133	56
57	43,287 1210	33,828 1310	30,209 6174	27,150 9357	24,550 4476	57
58	43,848 6347	34,145 2265	30,448 4072	27,331 0055	24,686 4228	58
59	44,404 5888	34,456 1044	30,681 3729	27,505 8306	24,817 7998	59
60	44,955 0384	34,760 8867	30,908 6565	27,675 5637	24,944 7341	60
61	45,500 0380	35,059 6928	31,130 3966	27,840 3531	25,067 3760	61
62	46,039 6416	35,352 6400	31,346 7284	28,000 3428	25,185 8705	62
63	46,573 9026	35,639 8432	31,557 7838	28,155 6726	25,300 3580	63
64	47,102 8738	35,921 4149	31,763 6915	28,306 4783	25,410 9739	64
65	47,626 6078	36,197 4655	31,964 5771	28,452 8915	25,517 8492	65
66	48,145 1562	36,468 1035	32,160 5630	28,595 0403	25,621 1103	66
67	48,658 5705	36,733 4348	32,351 7688	28,733 0488	25,720 8795	67
68	49,166 9015	36,993 5635	32,538 3110	28,867 0377	25,817 2749	68
69	49,670 1995	37,248 5917	32,720 3034	28,997 1240	25,910 4105	69
70	50,168 5143	37,498 6193	32,897 8570	29,123 4214	26,000 3966	70
71	50,661 8954	37,743 7444	33,071 0800	29,246 0401	26,087 3398	71
72	51,150 3915	37,984 0631	33,240 0780	29,365 0875	26,171 3428	72
73	51,634 0510	38,219 6697	33,404 9542	29,480 6675	26,252 5051	73
74	52,112 9218	38,450 6566	33,565 8089	29,592 8811	26,330 9228	74
75	52,587 0512	38,677 1143	33,722 7404	29,701 8263	26,406 6887	75
76	53,056 4864	38,899 1317	33,875 8443	29,807 5983	26,479 8924	76
77	53,521 2736	39,116 7958	34,025 2140	29,910 2896	26,550 6207	77
78	53,981 4590	39,330 1919	34,170 9405	30,009 9899	26,618 9572	78
79	54,437 0882	39,539 4039	34,313 1127	30,106 7863	26,684 9828	79
80	54,888 2061	39,744 5136	34,451 8172	30,200 7634	26,748 7757	80
81	55,334 8575	39,945 6016	34,587 1388	30,292 0033	26,810 4113	81
82	55,777 0867	40,142 7466	34,719 1598	30,380 5858	26,869 9626	82
83	56,214 9373	40,336 0261	34,847 9657	30,466 5881	26,927 5001	83
84	56,648 4528	40,525 5158	34,973 6202	30,550 0856	26,983 0919	84
85	57,077 6760	40,711 2900	35,096 2149	30,631 1510	27,036 8037	85
86	57,502 6495	40,893 4216	35,215 8194	30,709 8554	27,088 6993	86
87	57,923 4154	41,071 9819	35,332 5067	30,786 2673	27,138 8399	87
88	58,340 0152	41,247 0411	35,446 3480	30,860 4537	27,187 2849	88
89	58,752 4903	41,418 6677	35,557 4127	30,932 4794	27,234 0917	89
90	59,160 8815	41,586 9292	35,665 7685	31,002 4071	27,279 3156	90
91	59,565 2292	41,751 8913	35,771 4814	31,070 2982	27,323 0103	91
92	59,965 5735	41,913 6190	35,874 6160	31,136 2118	27,365 2273	92
93	60,361 9539	42,072 1754	35,975 2352	31,200 2057	27,406 0167	93
94	60,754 4098	42,227 6230	36,073 4002	31,262 3356	27,445 4268	94
95	61,142 9800	42,380 0225	36,169 1709	31,322 6559	27,483 5042	95
96	61,527 7030	42,529 4339	36,262 6057	31,381 2193	27,520 2939	96
97	61,908 6168	42,675 9155	36,353 7617	31,438 0770	27,555 8395	97
98	62,285 7592	42,819 5250	36,442 6943	31,493 2787	27,590 1831	98
99	62,659 1676	42,960 3187	36,529 4579	31,546 8725	27,623 3653	99
100	63,028 8788	43,098 3516	36,614 1053	31,598 9053	27,655 4254	100

0	6	7	8	9	10	0
Przez lat	4%	4½%	5%	6%	8%	Przez lat
46	20,884 6536	19,288 3707	17,880 0665	15,524 3699	12,137 4088	46
47	21,042 9361	19,414 7088	17,981 0157	15,589 0282	12,164 2674	47
48	21,195 1309	19,535 6065	18,077 1578	15,650 0266	12,189 1365	48
49	21,341 4720	19,651 2981	18,168 7217	15,707 5723	12,212 1634	49
50	21,482 1846	19,762 0078	18,255 9255	15,761 8606	12,233 4846	50
51	21,617 4852	19,867 9500	18,338 9766	15,813 0761	12,253 2265	51
52	21,747 5819	19,969 3302	18,418 0730	15,861 3925	12,271 5060	52
53	21,872 6749	20,066 3447	18,493 4028	15,906 9741	12,288 4315	53
54	21,992 9567	20,159 1815	18,565 1456	15,949 9755	12,304 1033	54
55	22,108 6122	20,248 0206	18,633 4720	15,990 5430	12,318 6141	55
56	22,219 8194	20,333 0340	18,698 5447	16,028 8141	12,332 0501	56
57	22,326 7494	20,414 3866	18,760 5188	16,064 9190	12,344 4908	57
58	22,429 5668	20,492 2360	18,819 5417	16,098 9802	12,356 0100	58
59	22,528 4296	20,566 7330	18,875 7540	16,131 1134	12,366 6760	59
60	22,623 4900	20,638 0220	18,929 2895	16,161 4277	12,376 5518	60
61	22,714 8942	20,706 2412	18,980 2757	16,190 0261	12,385 6961	61
62	22,802 7829	20,771 5227	19,028 8340	16,217 0058	12,394 1631	62
63	22,887 2912	20,833 9930	19,075 0800	16,242 4583	12,402 0029	63
64	22,968 5493	20,893 7732	19,119 1238	16,266 4701	12,409 2619	64
65	23,046 6820	20,950 9791	19,161 0703	16,289 1227	12,415 9832	65
66	23,121 8096	21,005 7217	19,201 0194	16,310 4931	12,422 2067	66
67	23,194 0477	21,058 1068	19,239 0661	16,330 6539	12,427 9692	67
68	23,263 5074	21,108 2362	19,275 3010	16,349 6735	12,433 3048	68
69	23,330 2956	21,156 2069	19,309 8105	16,367 6165	12,438 2452	69
70	23,394 5150	21,202 1119	19,342 6766	16,384 5439	12,442 8196	70
71	23,456 2644	21,246 0401	19,373 9778	16,400 5131	12,447 0552	71
72	23,515 6388	21,288 0766	19,403 7883	16,415 5784	12,450 9770	72
73	23,572 7297	21,328 3030	19,432 1794	16,429 7909	12,454 6084	73
74	23,627 6247	21,366 7971	19,459 2185	16,443 1990	12,457 9707	74
75	23,680 4083	21,403 6336	19,484 9700	16,455 8481	12,461 0840	75
76	23,731 1619	21,438 8838	19,509 4952	16,467 7812	12,463 9667	76
77	23,779 9633	21,472 6161	19,532 8526	16,479 0389	12,466 6358	77
78	23,826 8878	21,504 8958	19,555 0977	16,489 6593	12,469 1072	78
79	23,872 0075	21,535 7854	19,576 2835	16,499 6786	12,471 3956	79
80	23,915 3918	21,565 3449	19,596 4605	16,509 1308	12,473 5142	80
81	23,957 1075	21,593 6315	19,615 6767	16,518 0479	12,475 4763	81
82	23,997 2188	21,620 7000	19,633 9778	16,526 4603	12,477 2929	82
83	24,035 7873	21,646 6029	19,651 4074	16,534 3965	12,478 9749	83
84	24,072 8724	21,671 3903	19,668 0070	16,541 8835	12,480 5323	84
85	24,108 5312	21,695 1103	19,683 8162	16,548 9467	12,481 9744	85
86	24,142 8184	21,717 8089	19,698 8726	16,555 6101	12,483 3096	86
87	24,175 7869	21,739 5301	19,713 2120	16,561 8963	12,484 5459	87
88	24,207 4874	21,760 3159	19,726 8686	16,567 8267	12,485 6907	88
89	24,237 9687	21,780 2066	19,739 8748	16,573 4214	12,486 7506	89
90	24,267 2776	21,799 2407	19,752 2617	16,578 6994	12,487 7320	90
91	24,275 4592	21,817 4553	19,764 0588	16,583 6787	12,488 6408	91
92	24,322 5569	21,834 8854	19,775 2941	16,588 3762	12,489 4822	92
93	24,348 6124	21,851 5650	19,785 9944	16,592 8077	12,490 2613	93
94	24,373 6658	21,867 5263	19,796 1851	16,596 9884	12,490 9827	94
95	24,397 7556	21,882 8003	19,805 8906	16,600 9324	12,491 6506	95
96	24,420 9188	21,897 4166	19,815 1339	16,604 6532	12,492 2691	96
97	24,443 1912	21,911 4034	19,823 9370	16,608 1634	12,492 8418	97
98	24,464 6069	21,924 7879	19,832 3210	16,611 4749	12,493 3720	98
99	24,485 1990	21,937 5961	19,840 3057	16,614 5990	12,493 8630	99
100	24,504 9990	21,949 8527	19,847 9102	16,617 5462	12,494 3176	100

Tablica IX.

Tablice pomocnicze, obliczone na podstawie tablicy przez Heym'a.

0	1	2	3	4	5
Wiek	Liczby żyjących	Liczby zmarłych	Czynniki dyskontujące	Zdyskontowane liczby żyjących	Sumy zdyskontowanych liczb żyjących
x	λ_x	τ_x	$\rho^x=\left(\frac{1}{1,035}\right)^x$	$v_x=\lambda_x.\rho^x=\frac{\lambda_x}{r^x}$	Σv_x
0	144 218	21 526	1,000 0000	144 218,0	2 545 916,1
1	122 692	8 353	0,966 1836	118 543,0	2 401 698,1
2	114 339	4 289	0,933 5107	106 736,7	2 283 155,1
3	110 050	2 706	0,901 9427	99 258,79	2 176 418,4
4	107 344	1 873	0,871 4422	93 544,09	2 077 159,6
5	105 471	1 419	0,841 9732	88 803,76	1 983 615,5
6	104 052	1 162	0,813 5006	84 646,36	1 894 811,7
7	102 890	1 001	0,785 9910	80 870,61	1 810 165,3
8	101 889	893	0,759 4116	77 375,69	1 729 294,7
9	100 996	817	0,733 7310	74 103,90	1 651 919,0
10	100 179	763	0,708 9188	71 018,78	1 577 815,1
11	99 416	725	0,684 9457	68 094,56	1 506 796,3
12	98 691	699	0,661 7833	65 312,06	1 438 701,7
13	97 992	682	0,639 4042	62 656,50	1 373 389,6
14	97 310	674	0,617 7818	60 116,35	1 310 733,1
15	96 636	671	0,596 8906	57 681,12	1 250 616,7
16	95 965	672	0,576 7059	55 343,58	1 192 935,6
17	95 293	673	0,557 2038	53 097,62	1 137 592,0
18	94 620	675	0,538 3611	50 939,73	1 084 494,4
19	93 945	677	0,520 1557	48 866,03	1 033 554,7
20	93 268	680	0,502 5659	46 873,32	984 688,67
21	92 588	683	0,485 5709	44 958,04	937 815,35
22	91 905	686	0,469 1506	43 117,29	892 857,31
23	91 219	690	0,453 2856	41 348,26	849 740,02
24	90 529	694	0,437 9571	39 647,82	808 391,76
25	89 835	698	0,423 1470	38 013,41	768 743,94
26	89 137	703	0,408 8377	36 442,57	730 730,53
27	88 434	708	0,395 0122	34 932,51	694 287,96
28	87 726	714	0,381 6543	33 481,01	659 355,45
29	87 012	720	0,368 7482	32 085,52	625 874,44
30	86 292	727	0,356 2784	30 743,98	593 788,92
31	85 565	734	0,344 2303	29 454,07	563 044,94
32	84 831	742	0,332 5897	28 213,92	533 590,87
33	84 089	750	0,321 3427	27 021,39	505 376,95
34	83 339	758	0,310 4761	25 874,77	478 355,56
35	82 581	767	0,299 9769	24 772,39	452 480,79
36	81 814	776	0,289 8327	23 712,37	427 708,40
37	81 038	785	0,280 0316	22 693,20	403 996,03
38	80 253	795	0,270 5619	21 713,40	381 302,83
39	79 458	805	0,261 4125	20 771,31	359 589,43
40	78 653	815	0,252 5725	19 865,58	338 818,12
41	77 838	826	0,244 0314	18 994,92	318 952,54
42	77 012	839	0,235 7791	18 157,82	299 957,62
43	76 173	857	0,227 8059	17 352,66	281 799,80
44	75 316	881	0,220 1023	16 577,22	264 447,14
45	74 435	909	0,212 6592	15 829,30	247 869,92

Tablica IX.

śmiertelności 17-u towarzystw angielskich, dopełnionej przy stopie $3\frac{1}{2}\%$.

6	7	8	9	10	0
Sumy sum zdyskontowanych liczb żyjących	Zdyskontowane liczby zmarłych	Sumy zdyskontowanych liczb zmarłych	Sumy sum zdyskontowanych liczb zmarłych	Sumy żyjących	Wiek
$\Sigma\Sigma v_x$	$m_x = \tau_x . \rho^{x+1} = \frac{\tau_x}{r^{x+1}}$	Σm_x	$\Sigma\Sigma m_x$	$\Sigma\lambda_x$	x
50 615 920,9	20 798,07	58 124,24	834 266,79	6 000 239	0
48 070 004,8	7 797,615	37 326,17	776 142,55	5 856 021	1
45 668 306,7	3 868,432	29 528,55	738 816,38	5 733 329	2
43 385 151,6	2 358,123	25 660,12	709 287,80	5 618 990	3
41 208 733,2	1 577,016	23 302,00	683 627,68	5 508 940	4
39 131 573,6	1 154,357	21 724,98	660 325,68	5 401 596	5
37 [illegible] 958,1	913,3215	20 570,62	638 600,70	5 296 125	6
35 253 146,4	760,1710	19 657,30	618 030,08	5 192 073	7
33 442 981,1	655,2218	18 897,13	598 372,78	5 089 183	8
31 713 686,4	579,1867	18 241,91	579 475,65	4 987 294	9
30 061 767,4	522,6136	17 662,72	561 233,74	4 886 298	10
28 483 952,3	479,7929	17 140,11	543 571,02	4 786 119	11
26 977 156,0	446,9435	16 660,32	526 430,91	4 686 703	12
25 538 454,3	421,3272	16 213,38	509 770,59	4 588 012	13
24 165 064,7	402,3043	15 792,05	493 557,21	4 490 020	14
22 854 331,6	386,9697	15 389,75	477 765,16	4 392 710	15
21 603 714,9	374,4410	15 002,78	462 375,42	4 296 074	16
20 410 779,3	362,3170	14 628,34	447 372,64	4 200 109	17
19 273 187,3	351,1051	14 266,02	432 744,30	4 104 816	18
18 188 692,9	340,2371	13 914,91	418 478,28	4 010 196	19
17 155 138,17	330,1882	13 574,67	404 563,37	3 916 251	20
16 170 449,50	320,4299	13 244,48	390 988,70	3 822 983	21
15 232 634,15	310,9539	12 924,05	377 744,22	3 730 395	22
14 339 776,84	302,1904	12 613,10	364 820,17	3 638 490	23
13 490 036,82	293,6640	12 310,91	352 207,07	3 547 271	24
12 681 645,06	285,3687	12 017,25	339 896,16	3 456 742	25
11 912 901,12	277,6936	11 731,88	327 878,91	3 366 907	26
11 182 170,59	270,2112	11 454,19	316 147,03	3 277 770	27
10 487 882,63	263,2862	11 183,98	304 692,84	3 189 336	28
9 828 527,18	256.5204	10 920,69	293 508,86	3 101 610	29
9 202 652,74	250,2554	10 664,17	282 588,17	3 014 598	30
8 608 863,82	244,1208	10 413,91	271 924,00	2 928 306	31
8 045 818,88	238,4363	10 169,79	261 510,09	2 842 741	32
7 512 228,01	232,8571	9 931,351	251 340,30	2 757 910	33
7 006 851,06	227,3825	9 698,494	241 408,95	2 673 821	34
6 528 495,50	222,3017	9 471,111	231 710,46	2 590 482	35
6 076 014,71	217,3045	9 248,809	222 239,35	2 507 901	36
5 648 306,31	212,3911	9 031,504	212 990,54	2 426 087	37
5 244 310,28	207,8229	8 819,113	203 959,04	2 345 049	38
4 863 007,45	203,3209	8 611,290	195 139,93	2 264 796	39
4 503 418,02	198,8856	8 407,969	186 528,64	2 185 338	40
4 164 599,90	194,7535	8 209,083	178 120,67	2 106 685	41
3 845 647,36	191,1292	8 014,329	169 911,59	2 028 847	42
3 545 689,74	188,6277	7 823,200	161 897.26	1 951 835	43
3 263 889,94	187,3528	7 634,572	154 074,06	1 875 662	44
2 999 442,80	186,7703	7 447,219	146 439,49	1 800 346	45

0	1	2	3	4	5
x	λ_x	τ_x	$\rho^x = \frac{1}{(1,035)^x}$	$v_x = \lambda_x . \rho^x$	Σv_x
46	73 526	944	0,205 4679	15 107,23	232 040,62
47	72 582	981	0,198 5197	14 408,96	216 933,39
48	71 601	1 021	0,191 8065	13 733,54	202 524,43
49	70 580	1 063	0,185 3202	13 079,90	188 790,89
50	69 517	1 108	0,179 0534	12 447,26	175 710,99
51	68 409	1 156	0,172 9984	11 834,65	163 263,73
52	67 253	1 207	0,167 1482	11 241,22	151 429,08
53	66 046	1 261	0,161 4959	10 666,16	140 187,86
54	64 785	1 316	0,156 0347	10 108,71	129 521,70
55	63 469	1 375	0,150 7581	9 568,466	119 412,99
56	62 094	1 436	0,145 6600	9 044,612	109 844,52
57	60 658	1 497	0,140 7343	8 536,661	100 799,91
58	59 161	1 561	0,135 9752	8 044,429	92 263,244
59	57 600	1 627	0,131 3770	7 567,315	84 218,815
60	55 973	1 698	0,126 9343	7 104,894	76 651,500
61	54 275	1 770	0,122 6418	6 656,384	69 546,606
62	52 505	1 844	0,118 4945	6 221,554	62 890,222
63	50 661	1 917	0,114 4875	5 800,051	56 668,668
64	48 744	1 990	0,110 6159	5 391,861	50 868,617
65	46 754	2 061	0,106 8753	4 996,848	45 476,756
66	44 693	2 128	0,103 2611	4 615,048	40 479,908
67	42 565	2 191	0,099 7692	4 246,676	35 864,860
68	40 374	2 246	0,096 3954	3 891,868	31 618,184
69	38 128	2 291	0,093 1356	3 551,074	27 726,316
70	35 837	2 327	0,089 9861	3 224,832	24 175,242
71	33 510	2 351	0,086 9431	2 913,463	20 950,410
72	31 159	2 362	0,084 0030	2 617,449	18 036,947
73	28 797	2 358	0,081 1623	2 337,231	15 419,498
74	26 439	2 339	0,078 4177	2 073,286	13 082,267
75	24 100	2 303	0,075 7659	1 825,958	11 008,981
76	21 797	2 249	0,073 2038	1 595,623	9 183,0229
77	19 548	2 179	0,070 7283	1 382,597	7 587,3999
78	17 369	2 092	0,068 3365	1 186,937	6 204,8029
79	15 277	1 987	0,066 0256	1 008,673	5 017,8659
80	13 290	1 866	0,063 7929	847,8076	4 009,1929
81	11 424	1 730	0,061 6356	704,1251	3 161,3853
82	9 694	1 582	0,059 5513	577,2903	2 457,2602
83	8 112	1 427	0,057 5375	466,7442	1 879,9699
84	6 685	1 268	0,055 5918	371,6312	1 413,2257
85	5 417	1 111	0,053 7119	290,9574	1 041,5945
86	4 306	958	0,051 8955	223,4620	750,63714
87	3 348	811	0,050 1406	167,8707	527,17514
88	2 537	673	0,048 4450	122,9050	359,30444
89	1 864	545	0,046 8068	87,24788	236,39944
90	1 319	427	0,045 2240	59,65046	149,15156
91	892	322	0,043 6946	38,97558	89,50110
92	570	231	0,042 2170	24,06369	50,52552
93	339	155	0,040 7894	13,82761	26,46183
94	184	95	0,039 4101	7,251458	12,63422
95	89	52	0,038 0774	3,388889	5,382757
96	37	24	0,036 7897	1,361219	1,993868
97	13	9	0,035 5456	0,462093	0,632649
98	4	3	0,034 3436	0,137374	0,170556
99	1	1	0,033 1822	0,033182	0,033182
100	0	—	0,032 0601	0,000000	0 000000

6	7	8	9	10	0
$\Sigma\Sigma v_x$	$m_x = \tau_x \cdot \rho^{x+1}$	Σm_x	$\Sigma\Sigma m_x$	$\Sigma\lambda_x$	x
2 751 572,88	187,4026	7 260,449	138 992,27	1 725 911	46
2 519 532,26	188,1622	7 073,046	131 731,82	1 652 385	47
2 302 598,87	189,2119	6 884,884	124 658,77	1 579 803	48
2 100 074,44	190,3338	6 695,672	117 773,89	1 508 202	49
1 911 283,55	191,6822	6 505,338	111 078,22	1 437 622	50
1 735 572,56	193,2233	6 313,656	104 572,88	1 368 105	51
1 572 308,83	194,9256	6 120,433	98 259,221	1 299 696	52
1 420 879,75	196,7598	5 925,507	92 138,788	1 232 443	53
1 280 691,89	198,3977	5 728,747	86 213,281	1 166 397	54
1 151 170,19	200,2825	5 530,349	80 484,534	1 101 612	55
1 031 757,20	202,0945	5 330,066	74 954,185	1 038 143	56
921 912,68	203,5549	5 127,971	69 624,119	976 049	57
821 112,765	205,0795	4 924,416	64 496,148	915 391	58
728 849,521	206,5221	4 719,336	59 571,732	856 230	59
644 630,706	208,2458	4 512,814	54 852,396	798 630	60
567 979,206	209,7353	4 304,568	50 339,582	742 657	61
498 432,600	211,1150	4 094,833	46 035,014	688 382	62
435 542,378	212,0507	3 883,718	41 940,181	635 877	63
378 873,710	212,6818	3 671,667	38 056,463	585 216	64
328 005,093	212,8211	3 458,985	34 384,796	536 472	65
282 528,337	212,3089	3 246,164	30 925,811	489 718	66
242 048,429	211,2023	3 033,855	27 679,647	445 025	67
206 183,569	209,1826	2 822,653	24 645,792	402 460	68
174 565,385	206,1582	2 613,470	21 823,139	362 086	69
146 839,069	202,3166	2 407,312	19 209,669	323 958	70
122 663,827	197,4911	2 204,995	16 802,357	288 121	71
101 713,417	191,7054	2 007,504	14 597,362	254 611	72
83 676,470	184,9089	1 815,799	12 589,858	223 452	73
68 256,972	177,2164	1 630,890	10 774,059	194 655	74
55 174,705	168,5884	1 453,674	9 143,169	168 216	75
44 165,7235	159,0679	1 285,086	7 689,495	144 116	76
34 982,7006	148,9052	1 126,018	6 404,409	122 319	77
27 395,3007	138,1256	977,1125	5 278,3914	102 771	78
21 190,4978	126,7565	838,9869	4 301,2789	85 402	79
16 172,6319	115,0120	712,2304	3 462,2920	70 125	80
12 163,4390	103,0237	597,2184	2 750,0616	56 835	81
9 002,0537	91,02433	494,1947	2 152,8432	45 411	82
6 544,7935	79,32950	403,1704	1 658,6485	35 717	83
4 664,8236	68,10669	323,8409	1 255,4781	27 605	84
3 251,5979	57,65590	255,7342	931,6372	20 920	85
2 210,00340	48,03469	198,0783	675,9030	15 503	86
1 459,36626	39,28890	150,0436	477,8247	11 197	87
932,19112	31,50098	110,7547	327,7811	7 849	88
572,88668	24,64708	79,25367	217,02640	5 312	89
336,48724	18,65759	54,60659	137,77273	3 448	90
187,33568	13,59387	35,94900	83,16614	2 129	91
97,83458	9,422351	22,35513	47,21714	1 237	92
47,30906	6,108566	12,93278	24,86201	667	93
20,84723	3,617353	6,824210	11,929226	328	94
8,213012	1,913064	3,206857	5,105016	144	95
2,830255	0,853094	1,293793	1,898159	55	96
0,836387	0,309092	0,440699	0,604366	18	97
0,203738	0,099547	0,131607	0,163667	5	98
0,033182	0,032060	0,032060	0,032060	1	99
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0	100

Tablica IX.

Tablice pomocnicze, obliczone na podstawie tablicy przez Heym'a,

(Ciąg dalszy).

0	11	12	13	14	15
Wiek	Zdyskontowane liczby żyjących par równego wieku	Sumy zdyskontowanych liczb żyjących par równego wieku	Sumy sum zdyskontowanych liczb żyjących par równego wieku	Zdyskontowane liczby żyjących par z 10-o letnią różnicą wieku	Sumy zdyskontowanych liczb żyjących par z 10-cio letnią różnicą wieku
x	$v_x \lambda_x$	$\Sigma v_x \lambda_x$	$\Sigma\Sigma v_x \lambda_x$	$v_{x+10} \lambda_x$	$\Sigma v_{x+10} \lambda_x$
0	”	”	”	”	”
1	”	”	”	”	”
2	”	”	”	”	”
3	”	”	”	”	”
4	”	”	”	”	”
5	”	”	”	”	”
6	”	”	”	”	”
7	”	”	”	”	”
8	”	”	”	”	”
9	”	”	”	”	”
10	”	”	”	”	”
11	”	”	”	”	”
12	”	”	”	”	”
13	”	”	”	”	”
14	”	”	”	”	”
15	”	”	”	”	”
16	”	”	”	”	”
17	”	”	”	”	”
18	”	”	”	”	”
19	”	”	”	”	”
20	4 371 780 474	78 341 451 901	1 175 125 163 481	2 867 429 126	48 581 611 796
21	4 162 574 869	73 969 671 427	1 096 783 711 580	2 727 093 026	45 714 182 670
22	3 962 694 161	69 807 096 558	1 022 814 040 153	2 593 000 024	42 987 089 644
23	3 771 746 847	65 844 402 397	953 006 943 595	2 464 863 837	40 394 089 620
24	3 589 277 343	62 072 655 550	887 162 541 198	2 342 416 845	37 929 225 783
25	3 414 934 750	58 483 378 207	825 089 885 648	2 225 427 871	35 586 808 938
26	3 248 381 014	55 068 443 457	766 606 507 441	2 113 649 748	33 361 381 067
27	3 089 221 492	51 820 062 443	711 538 063 984	2 006 850 520	31 247 731 319
28	2 937 154 653	48 730 840 951	659 718 001 541	1 904 830 097	29 240 880 799
29	2 791 825 127	45 793 686 298	610 987 160 590	1 807 353 609	27 336 050 702
30	2 652 959 151	43 001 861 171	565 193 474 292	1 714 241 044	25 528 697 093
31	2 520 237 123	40 348 902 020	522 191 613 121	1 625 299 996	23 814 456 049
32	2 393 414 776	37 828 664 897	481 842 711 101	1 540 346 028	22 189 156 053
33	2 272 201 353	35 435 250 121	444 014 046 204	1 459 167 726	20 648 810 025
34	2 156 377 265	33 163 048 768	408 578 796 083	1 381 529 338	19 189 642 299
35	2 045 728 937	31 006 671 503	375 415 747 315	1 307 199 621	17 808 112 961
36	1 940 004 044	28 960 942 566	344 409 075 812	1 235 983 144	16 500 913 340
37	1 839 011 606	27 020 938 522	315 448 133 246	1 167 673 049	15 264 930 196
38	1 742 565 827	25 181 926 916	288 427 194 724	1 102 157 561	14 097 257 147
39	1 650 447 100	23 439 361 089	263 245 267 808	1 039 302 670	12 995 099 586
40	1 562 487 841	21 788 913 989	239 805 906 719	979 013 963,2	11 955 796 915,6
41	1 478 526 279	20 226 426 148	218 016 992 730	921 185 292,1	10 976 782 952,4
42	1 398 370 034	18 747 899 869	197 790 566 582	865 708 672,9	10 055 597 660,3
43	1 321 804 079	17 349 529 835	179 042 666 713	812 473 268,6	9 189 888 987,4
44	1 248 530 263	16 027 725 756	161 693 136 878	761 347 451,7	8 377 415 718,8
45	1 178 254 124	14 779 195 493	145 665 411 122	712 228 755,5	7 616 068 267,1

Tablica IX.

śmiertelności 17-u towarzystw angielskich, dopełnionej przy stopie $3\frac{1}{2}\%$.

(Ciąg dalszy).

16	17	18	19	0
Sumy sum zdyskontowanych liczb żyjących par z 10-o letnią różnicą wieku	Zdyskontowane liczby żyjących par z 25-cio letnią różnicą wieku	Sumy zdyskontowanych liczb żyjących par z 25-o letnią różnicą wieku	Sumy sum zdyskontowanych liczb żyjących par z 25-o letnią różnicą wieku	Wiek
$\Sigma\Sigma v_{x+10}\,\lambda_x$	$v_{x+25}\,\lambda_x$	$\Sigma v_{x+25}\,\lambda_x$	$\Sigma\Sigma v_{x+25}\,\lambda_x$	x
”	5 482 218 064	76 641 642 028	1 134 141 977 919	0
”	4 471 211 320	71 159 423 964	1 057 500 335 891	1
”	3 994 148 135	66 688 212 644	986 340 911 927	2
”	3 684 584 611	62 694 064 509	919 652 699 283	3
”	3 444 187 887	59 009 479 898	856 958 634 774	4
”	3 242 597 861	55 565 292 011	797 949 154 876	5
”	3 064 754 434	52 322 694 150	742 383 862 865	6
”	2 902 929 900	49 257 939 716	690 061 168 715	7
”	2 753 182 029	46 355 009 816	640 803 228 999	8
”	2 613 248 039	43 601 827 787	594 448 219 183	9
”	2 481 673 498	40 988 579 748	550 846 391 396	10
”	2 357 389 224	38 506 906 250	509 857 811 648	11
”	2 239 614 680	36 149 517 026	471 350 905 398	12
”	2 127 739 904	33 909 902 346	435 201 388 372	13
”	2 021 256 604	31 782 162 442	401 291 486 026	14
”	1 919 730 653	29 760 905 838	369 509 323 584	15
”	1 822 847 124	27 841 175 185	339 748 417 746	16
”	1 730 313 141	26 018 328 061	311 907 242 561	17
”	1 641 908 576	24 288 014 920	285 888 914 500	18
”	1 557 347 384	22 646 106 344	261 600 899 580	19
675 278 895 456	1 476 367 376	21 088 758 960	238 954 793 236	20
626 697 283 660	1 398 748 470	19 612 391 584	217 866 034 276	21
580 983 100 990	1 324 255 184	18 213 643 114	198 253 642 692	22
537 996 011 346	1 252 759 530	16 889 387 930	180 039 999 578	23
497 601 921 726	1 184 110 240	15 636 628 400	163 150 611 648	24
459 672 695 943	1 118 199 171	14 452 518 160	147 513 983 248	25
424 085 887 005	1 054 904 974	13 334 318 989	133 061 465 088	26
390 724 505 938	994 105 863,8	12 279 414 014,6	119 727 146 099,4	27
359 476 774 619	935 699 394,3	11 285 308 150,8	107 447 732 084,8	28
330 235 893 820	879 578 900,5	10 349 608 756,5	96 162 423 934,0	29
302 899 843 118	825 682 055,1	9 470 029 856,0	85 812 815 177,5	30
277 371 146 025	773 902 229,2	8 644 347 800,9	76 342 785 321,5	31
253 556 689 976	724 173 503,7	7 870 445 571,7	67 698 437 520,6	32
231 367 533 923	676 447 974,2	7 146 272 068,0	59 827 991 948,9	33
210 718 723 898	630 652 481,5	6 469 824 093,8	52 681 719 880,9	34
191 529 081 599	586 729 215,9	5 839 171 612,3	46 211 895 787,1	35
173 720 968 638	544 585 376,0	5 252 442 396,4	40 372 724 174,8	36
157 220 055 298	504 182 270,4	4 707 857 020,4	35 120 281 778,4	37
141 955 125 102	465 471 512,2	4 203 674 750,0	30 412 424 758,0	38
127 857 867.955	428 426 525,5	3 738 203 237,8	26 208 750 008,0	39
114 862 768 368,9	393 017 068,4	3 309 776 712,3	22 470 546 770,2	40
102 906 971 453,3	359 226 132,7	2 916 759 643,9	19 160 770 057,9	41
91 930 188 500,9	327 045 012,1	2 557 533 511,2	16 244 010 414,0	42
81 874 590 840,6	296 455 252,0	2 230 488 499,1	13 686 476 902,8	43
72 684 701 853,2	267 452 701,4	1 934 033 247,1	11 455 988 403,7	44
64 307 286 134,4	240 040 360,2	1 666 580 545,7	9 521 955 156,6	45

0	11	12	13	14	15
x	$v_x \lambda_x$	$\Sigma v_x \lambda_x$	$\Sigma\Sigma v_x \lambda_x$	$v_{x+10} \lambda_x$	$\Sigma v_{x+10} \lambda_x$
46	1 110 774 399	13 600 941 369	130 886 215 629	665 014 144,9	6 903 839 511,6
47	1 045 830 910	12 490 166 970	117 285 274 260	619 607 941,0	6 238 825 366,7
48	983 334 997,1	11 444 336 059,7	104 795 107 290,4	575 989 147,2	5 619 217 425,7
49	923 179 320,8	10 461 001 062,6	93 350 771 230,7	534 101 106,8	5 043 228 278,5
50	865 295 839,7	9 537 821 741,8	82 889 770 168,1	493 910 886,3	4 509 127 171,7
51	809 596 400,8	8 672 525 902,1	73 351 948 426,3	455 356 552,5	4 015 216 285,4
52	756 005 627,4	7 862 929 501,3	64 679 422 524,2	418 418 152,3	3 559 859 732,9
53	704 457 084,5	7 106 923 873,9	56 816 493 022,9	383 070 184,2	3 141 441 580,6
54	654 892 647,8	6 402 466 789,4	49 709 569 149,0	349 311 742,7	2 758 371 396,4
55	607 300 959,0	5 747 574 141,6	43 307 102 359,6	317 144 931,7	2 409 059 653,7
56	561 616 140,0	5 140 273 182,6	37 559 528 218,0	286 566 811,6	2 091 914 722,0
57	517 816 793,2	4 578 657 042,6	32 419 255 035,4	257 594 872,8	1 805 347 910,4
58	475 916 452,8	4 060 840 249,4	27 840 597 992,8	230 246 795,6	1 547 753 037,6
59	435 877 355,5	3 584 923 796,6	23 779 757 743,4	204 541 871,6	1 317 506 242,0
60	397 682 207,8	3 149 046 441,1	20 194 833 946,8	180 503 514,3	1 112 964 370,4
61	361 275 225,3	2 751 364 233,3	17 045 787 505,7	158 128 219,5	932 460 856,1
62	326 662 678,1	2 390 089 008,0	14 294 423 272,4	137 429 184,9	774 332 636,6
63	293 836 395,9	2 063 426 329,9	11 904 334 264,4	118 406 447,0	636 903 451,7
64	262 820 893,5	1 769 589 934,0	9 840 907 934,5	101 060 231,8	518 497 004,7
65	233 622 621,1	1 506 769 040,5	8 071 318 000,5	85 370 849,22	417 436 772,91
66	206 260 355,5	1 273 146 419,4	6 564 548 960,0	71 313 189,02	332 065 923,69
67	180 759 763,9	1 066 886 063,9	5 291 402 540,6	58 850 233,22	260 752 734,67
68	157 130 273,8	886 126 300,0	4 224 516 476,7	47 921 381,11	201 902 501,45
69	135 395 355,6	728 996 026,2	3 338 390 176,7	38 458 687,58	153 981 120,34
70	115 568 299,7	593 600 670,6	2 609 394 150,5	30 382 882,43	115 522 432,76
71	97 630 154,51	478 032 370,87	2 015 793 479,86	23 595 231,90	85 139 550,33
72	81 557 108,35	380 402 216,36	1 537 761 108,99	17 987 788,52	61 544 318,43
73	67 305 233,91	298 845 108,01	1 157 358 892,63	13 440 832,73	43 556 529,91
74	54 815 597,19	231 539 874,10	858 513 784,62	9 825 556,847	30 115 697,175
75	44 005 592,38	176 724 276,91	626 973 910,52	7 012 072,424	20 290 140,328
76	34 779 799,54	132 718 684,53	450 249 633,61	4 870 801,715	13 278 067,904
77	27 027 002,44	97 938 884,99	317 530 949,08	3 281 537,010	8 407 266,189
78	20 615 903,02	70 911 882,55	219 592 064,09	2 134 736,337	5 125 729,179
79	15 409 498,80	50 295 979,53	148 680 181,54	1 332 885,789	2 990 992,842
80	11 267 363,55	34 886 480,73	98 384 202,01	792 754,5602	1 658 107,0530
81	8 043 925,074	23 619 117,175	63 497 721,283	445 257,0625	865 352,4928
82	5 596 252,188	15 575 192,101	39 878 604,108	233 273,4109	420 095,4303
83	3 786 228,950	9 978 939,913	24 303 412,007	112 169,5447	186 822,0194
84	2 484 354,458	6 192 710,963	14 324 472,094	48 475,99940	74 652,47470
85	1 576 116,030	3 708 356,505	8 131 761,131	18 357,60955	26 176,47530
86	962 227,4710	2 132 240,4753	4 423 404,6258	5 861,408583	7 818,865751
87	562 031,2007	1 170 013,0043	2 291 164,1505	1 547,086694	1 957,457168
88	311 809,8962	607 981,8036	1 121 151,1462	348,5188528	410,3704736
89	162 630,0394	296 171,9074	513 169,3426	61,8516208	61,8516208
90	78 678,95146	133 541,86802	216 997,43521	0,0000000	0,0000000
91	34 766,22021	54 862,91656	83 455,56719	"	"
92	13 716,30330	20 096,69635	28 592,65063	"	"
93	4 687,558637	6 380,393054	8 495,954276	"	"
94	1 334,268346	1 692,834417	2 115,561222	"	"
95	301,6110854	358,5660709	422,7268046	"	"
96	50,3650993	56,9549855	64,1607337	"	"
97	6,0072064	6,5898862	7,2057482	"	"
98	0,5494976	0,5826798	0,6158620	"	"
99	0,0331822	0,0331822	0,0331822	"	"
100	0,0000000	0,0000000	0,0000000	"	"

16	17	18	19	0
$\Sigma\Sigma v_{x+10}\,\lambda_x$	$v_{x+25}\,\lambda_x$	$\Sigma v_{x+25}\,\lambda_x$	$\Sigma\Sigma v_{x+25}\,\lambda_x$	x
56 691 217 867,3	214 215 301,1	1 426 540 185,5	7 855 374 610,9	46
49 787 378 355,7	189 979 718,2	1 212 324 884,4	6 428 834 425,4	47
43 548 552 989,0	167 348 058,9	1 022 345 166,2	5 216 509 541,0	48
37 929 335 563,3	146 332 495,5	854 997 107,3	4 194 164 374,8	49
32 886 107 284,8	126 935 135,5	708 664 611,8	3 339 167 267,5	50
28 376 980 113,1	109 154 989,5	581 729 476,3	2 630 502 655,7	51
24 361 763 827,7	92 983 783,26	472 574 486,77	2 048 773 179,43	52
20 801 904 094,8	78 392 419,31	379 590 703,51	1 576 198 692,66	53
17 660 462 514,2	65 346 886,14	301 198 284,20	1 196 607 989,15	54
14 902 091 117,8	53 809 503,17	235 851 398,06	895 409 704,95	55
12 493 031 464,1	43 721 943,59	182 041 894,89	659 558 306,89	56
10 401 116 742,1	35 017 275,14	138 319 951,30	477 516 412,00	57
8 595 768 831,7	27 613 053,62	103 302 676,16	339 196 460,70	58
7 048 015 794,1	21 405 956,14	75 689 622,54	235 893 784,54	59
5 730 509 552,1	16 285 756,42	54 283 666,40	160 204 162,00	60
4 617 545 181,7	12 128 401,30	37 997 909,98	105 920 495,60	61
3 685 084 325,6	8 814 052,626	25 869 508,677	67 922 585,622	62
2 910 751 689,0	6 226 488,432	17 055 456,051	42 053 076,945	63
2 273 848 237,3	4 252 810,429	10 828 967,619	24 997 620,894	64
1 755 351 232,60	2 788 897,420	6 576 157,190	14 168 653,275	65
1 337 914 459,69	1 741 935,740	3 787 259,770	7 592 496,085	66
1 005 848 536,00	1 024 270,965	2 045 324,030	3 805 236,315	67
745 095 801,33	558 275,7889	1 021 053,0653	1 759 912,2852	68
543 193 299,88	276 483,6059	462 777,2764	738 859,2199	69
389 212 179,54	121 447,6008	186 293,6705	276 081,9435	70
273 689 746,78	45 614,44534	64 846,06968	89 788,27299	71
188 550 196,45	14 398,34956	19 231,62434	24 942,20331	72
127 005 878,02	3 955,970597	4 833,274783	5 710,578969	73
83 449 348,108	877,3041858	877,3041858	877,3041858	74
53 333 650,933	0,0000000	0,0000000	0,0000000	75
33 043 510,605	”	”	”	76
19 765 442,701	”	”	”	77
11 358 176,512	”	”	”	78
6 232 447,333	”	”	”	79
3 241 454,4905	”	”	”	80
1 583 347,4375	”	”	”	81
717 994,9447	”	”	”	82
297 899,5144	”	”	”	83
111 077,49501	”	”	”	84
36 425,02031	”	”	”	85
10 248,545013	”	”	”	86
2 429,679262	”	”	”	87
472,2220944	”	”	”	88
61,8516208	”	”	”	89
0,0000000	”	”	”	90
”	”	”	”	91
”	”	”	”	92
”	”	”	”	93
”	”	”	”	94
”	”	”	”	95
”	”	”	”	96
”	”	”	”	97
”	”	”	”	98
”	”	”	”	99
”	”	”	”	100

Tablica X.

Tablica premij netto, dla niektórych rodzajów ubezpieczeń, obliczonych na podstawie tablicy śmiertelności 17-u towarzystw angielskich, przy stopie $3^1/_2{}^0/_0$.

0	1	2	3	4	5	6
Wiek	Premie jednorazowe za ubezp. 1-ki renty dożywotniej, płatnej z góry rocznie jednej osobie	Premie jednorazowe za ubezp. 1-ki kapitału, płatnego przy końcu roku, w którym śmierć ubezp. nastąpi	Premie roczne, płatne do śmierci, za ubezp. 1-ki kapitału, płatnego przy końcu roku, w którym śmierć ubezp. nastąpi	Premie jednorazowe za ubezp. 1-ki renty, płatnej z góry rocznie dwu osobom, równego wieku, do śmierci jednej z nich	Premie jednorazowe za ubezp. 1-ki renty, płatnej z góry rocznie dwu osobom, różniącym się wiekiem o lat 10, do śmierci jednej z nich	Premie jednorazowe za ubezp. 1-ki renty, płatnej z góry rocznie dwu osobom, różniącym się wiekiem o lat 25, do śmierci jednej z nich
x	$R_x = \frac{\Sigma v_x}{v_x}$	$\overset{s}{K}_x = \frac{\Sigma m_x}{v_x}$	$p(\overset{s}{K}_x) = \frac{\Sigma m_x}{\Sigma v_x}$	$\overset{I}{R}_{x,x} = \frac{\Sigma v_x \lambda_x}{v_x \lambda_x}$	$\frac{\Sigma v_{x+10} \lambda_x}{v_{x+10} \lambda_x}$	$\frac{\Sigma v_{x+25} \lambda_x}{v_{x+25} \lambda_x}$
0	17,653 25	”	”	”	”	13,980 04
1	20,260 14	”	”	”	”	15,915 02
2	21,390 53	”	”	”	”	16,696 48
3	21,926 71	”	”	”	”	17,015 23
4	22,205 14	”	”	”	”	17,133 06
5	22,337 07	”	”	”	”	17,136 04
6	22,385 03	”	”	”	”	17,072 39
7	22,383 48	”	”	”	”	16,968 35
8	22,349 33	”	”	”	”	16,836 89
9	22,291 93	”	”	”	”	16,684 92
10	22,216 87	”	”	”	”	16,516 51
11	22,128 00	”	”	”	”	16,334 56
12	22,028 12	”	”	”	”	16,140 95
13	21,919 35	”	”	”	”	15,937 05
14	21,803 27	”	”	”	”	15,723 96
15	21,681 56	”	”	”	”	15,502 65
16	21,555 09	0,271 084	0,012 576	”	”	15,273 46
17	21,424 54	0,275 499	0,012 859	”	”	15,036 77
18	21,289 76	0,280 057	0,013 155	”	”	14,792 55
19	21,150 78	0,284 756	0,013 463	”	”	14,541 46
20	21,007 44	0,289 603	0,013 786	17,919 80	16,942 57	14,284 22
21	20,859 79	0,294 596	0,014 123	17,770 17	16,762 97	14,021 39
22	20,707 64	0,299 742	0,014 475	17,616 07	16,578 13	13,753 88
23	20,550 80	0,305 045	0,014 843	17,457 27	16,387 96	13,481 75
24	20,389 31	0,310 507	0,015 229	17,293 91	16,192 35	13,205 38
25	20,222 97	0,316 132	0,015 632	17,125 77	15,991 00	12,924 82
26	20,051 56	0,321 928	0,016 055	16,952 58	15,783 78	12,640 30
27	19,875 12	0,327 895	0,016 498	16,774 47	15,570 53	12,352 22
28	19,693 42	0,334 040	0,016 962	16,591 17	15,350 91	12,060 83
29	19,506 45	0,340 362	0,017 449	16,402 78	15,124 90	11,766 55
30	19,313 99	0,346 870	0,017 960	16,209 02	14,892 13	11,469 34
31	19,116 03	0,353 564	0,018 496	16,009 96	14,652 34	11,169 82
32	18,912 33	0,360 453	0,019 059	15,805 31	14,405 31	10,868 18
33	18,702 85	0,367 537	0,019 651	15,595 12	14,151 09	10,564 41
34	18,487 34	0,374 824	0,020 275	15,379 06	13,890 15	10,258 94
35	18,265 53	0,382 325	0,020 932	15,156 78	13,623 10	9,952 07
36	18,037 35	0,390 042	0,021 624	14,928 29	13,350 44	9,644 85
37	17,802 51	0,397 983	0,022 355	14,693 19	13,072 95	9,337 61
38	17,560 72	0,406 160	0,023 129	14,451 06	12,790 60	9,031 00
39	17,311 83	0,414 576	0,023 948	14,201 83	12,503 67	8,725 42
40	17,055 54	0,423 243	0,024 816	13,945 01	12,212 08	8,421 46
41	16,791 47	0,432 173	0,025 738	13,680 13	11,915 93	8,119 56
42	16,519 47	0,441 371	0,026 718	13,406 97	11,615 45	7,820 13

0	1	2	3	4	5	6
x	$R_x = \frac{\Sigma v_x}{v_x}$	$\overset{s}{K}_x = \frac{\Sigma m_x}{v_x}$	$p(\overset{s}{K}_x) = \frac{\Sigma m_x}{\Sigma v_x}$	$\overset{I}{R}_{x,x} = \frac{\Sigma v_x \lambda_x}{v_x \lambda_x}$	$\frac{\Sigma v_{x+10} \lambda_x}{v_{x+10} \lambda_x}$	$\frac{\Sigma v_{x+25} \lambda_x}{v_{x+25} \lambda_x}$
43	16,239 57	0,450 836	0,027 762	13,125 64	11,311 00	7,523 86
44	15,952 44	0,460 546	0,028 870	12,837 27	11,003 41	7,231 31
45	15,658 93	0,470 471	0,030 045	12,543 30	10,693 29	6,942 91
46	15,359 57	0,480 594	0,031 290	12,244 56	10,381 49	6,659 38
47	15,055 45	0,490 878	0,032 605	11,942 82	10,068 99	6,381 34
48	14,746 70	0,501 319	0,033 995	11,638 29	9,755 77	6,109 09
49	14,433 66	0,511 905	0,035 466	11,331 49	9,442 46	5,842 84
50	14,116 44	0,522 632	0,037 023	11,022 61	9,129 43	5,582 89
51	13,795 40	0,533 489	0,038 672	10,712 16	8,817 74	5,329 39
52	13,470 88	0,544 463	0,040 418	10,400 62	8,507 90	5,082 33
53	13,143 24	0,555 543	0,042 268	10,088 51	8,200 69	4,842 19
54	12,812 88	0,566 714	0,044 230	9,776 36	7,896 59	4,609 22
55	12,479 85	0,577 977	0,046 313	9,464 13	7,596 08	4,383 08
56	12,144 75	0,589 308	0,048 524	9,152 65	7,299 92	4,163 63
57	11,807 88	0,600 700	0,050 873	8,842 23	7,008 48	3,950 05
58	11,469 21	0,612 152	0,053 374	8,532 67	6,722 15	3,741 08
59	11,129 29	0,623 647	0,056 037	8,224 62	6,441 25	3,535 91
60	10,788 55	0,635 170	0,058 874	7,918 50	6,165 89	3,333 20
61	10,448 11	0,646 683	0,061 895	7,615 70	5,896 87	3,132 97
62	10,108 44	0,658 169	0,065 111	7,316 69	5,634 41	2,935 03
63	9,770 37	0,669 601	0,068 534	7,022 36	5,378 96	2,739 18
64	9,434 33	0,680 965	0,072 179	6,733 06	5,130 57	2,546 31
65	9,101 09	0,692 233	0,076 061	6,449 59	4,889 69	2,357 98
66	8,771 29	0,703 387	0,080 192	6,172 52	4,656 44	2,174 17
67	8,445 40	0,714 407	0,084 591	5,902 23	4,430 79	1,996 86
68	8,124 17	0,725 269	0,089 273	5,639 44	4,213 20	1,828 94
69	7,807 87	0,735 966	0,094 260	5,384 20	4,003 81	1,673 80
70	7,496 59	0,746 492	0,099 578	5,136 36	3,802 22	1,533 94
71	7,190 90	0,756 830	0,105 248	4,896 36	3,608 34	1,421 61
72	6,891 04	0,766 970	0,111 300	4,664 24	3,421 45	1,335 68
73	6,597 34	0,776 902	0,117 760	4,440 15	3,240 61	1,221 77
74	6,309 92	0,786 621	0,124 664	4,223 98	3,065 04	1,000 00
75	6,029 15	0,796 116	0,132 044	4,015 95	2,893 60	„
76	5,755 13	0,805 382	0,139 942	3,815 97	2,726 05	„
77	5,487 79	0,814 422	0,148 406	3,623 74	2,561 99	„
78	5,227 58	0,823 222	0,157 477	3,439 67	2,401 11	„
79	4,974 72	0,831 773	0,167 200	3,263 96	2,244 00	„
80	4,728 89	0,840 085	0,177 649	3,096 24	2,091 58	„
81	4,489 81	0,848 171	0,188 910	2,936 27	1,943 49	„
82	4,256 54	0,856 059	0,201 116	2,783 15	1,800 87	„
83	4,027 84	0,863 793	0,214 456	2,635 59	1,665 53	„
84	3,802 76	0,871 404	0,229 150	2,492 68	1,539 99	„
85	3,579 89	0,878 940	0,245 522	2,352 84	1,425 92	„
86	3,359 13	0,886 407	0,263 880	2,215 94	1,333 96	„
87	3,140 36	0,893 805	0,284 618	2,081 76	1,265 25	„
88	2,923 43	0,901 141	0,308 248	1,949 85	1,177 47	„
89	2,709 52	0,908 374	0,335 253	1,821 13	1,000 00	„
90	2,500 43	0,915 443	0,366 115	1,697 30	„	„
91	2,296 34	0,922 347	0,401 660	1,578 05	„	„
92	2,099 66	0,928 998	0,442 452	1,465 17	„	„
93	1,913 70	0,935 287	0,488 733	1,361 13	„	„
94	1,742 30	0,941 081	0,540 137	1,268 74	„	„
95	1,588 35	0,946 286	0,595 765	1,188 84	„	„
96	1,464 77	0,950 466	0,648 886	1,130 84	„	„
97	1,369 09	0,953 702	0,696 593	1,097 00	„	„
98	1,241 54	0,958 020	0,771 635	1,060 39	„	„
99	1,000 00	0,966 186	0,966 186	1,000 00	„	„
100	„	,’	,’	„	„	„

DANIELEWICZ

PODSTAWY
MATEMATYCZNE
UBEZPIECZEŃ
ŻYCIOWYCH

T. N. W.