SPOTTISWOODE. DIE MATHEMATIK

DIE MATHEMATIK

IN IHREN

BEZIEHUNGEN ZU DEN ANDEREN WISSENSCHAFTEN.

VON

WILLIAM SPOTTISWOODE.

AUS DEM ENGLISCHEN.

LEIPZIG
VERLAG VON QUANDT & HÄNDEL.
1879.

29/VII 1879

VORWORT.

Dieses Schriftchen enthält in deutscher Uebertragung den zweiten Theil der Rede, welche zur Eröffnung der achtundvierzigsten Versammlung der Britischen Association zur Förderung der Wissenschaften in Dublin am 14. August 1878 von deren Präsidenten, dem Mathematiker William Spottiswoode, gehalten wurde. Das behandelte Thema, die Beziehungen der Mathematik zu den übrigen Wissenschaften und die Tendenz, zur Beseitigung der Vorurtheile beizutragen, die vielfach noch gegen die mathematische Forschung herrschen, dürften hinreichen zur Rechtfertigung des Versuches, diesen Theil der Rede durch eine Uebersetzung dem grösseren deutschen Publikum zugänglicher zu machen. Dagegen ist von einer Wiedergabe des ersten Theils der Rede, welcher sich mit der Organisation der Association, ihrer Tendenz, ihrer Thätigkeit und ihren Hilfsmitteln beschäftigt, abgesehen worden.

Die Noten, welche der englischen Ausgabe der Rede beigegeben sind, finden sich in der deutschen Ausgabe in etwas veränderter Form wieder.

Einzelne Unebenheiten der Uebersetzung möge der Leser entschuldigen durch das Streben, den englischen Text möglichst getreu wiederzugeben.

Freiberg, im Februar 1879.

Dr. Heinrich Gretschel.

INHALT.

DIE MATHEMATIK

IN IHREN BEZIEHUNGEN ZU DEN ANDEREN WISSENSCHAFTEN.

Wenn ein Mathematiker von seinem specifischen Standpunkte aus seine Wissenschaft betrachtet, so scheinen die Bahnen, in denen dieselbe fortschreitet, nur äusserst wenig Berührungspunkte mit den Erfahrungen des alltäglichen Lebens und den gewöhnlichen Gedankenrichtungen darzubieten. Wäre dieser esoterische Anblick der Sache der einzig mögliche, so müsste jeder Versuch, vor einem grösseren Kreise über die gegenwärtigen Fortschritte dieser Wissenschaft zu berichten, vollständig aufgegeben werden. Aber wenngleich die Mathematik hinsichtlich ihrer wissenschaftlichen Technik, während sie sich der Würde ihrer olympischen Stellung erfreut, auch alle Nachtheile derselben zu tragen hat, so begegnen wir derselben Wissenschaft doch auch in einem weniger förmlichen Gewande, in einer Verkleidung, wenn dieser Ausdruck gestattet ist, ganz unerwartet bei mancher Wendung; und obwohl Mancher niemals ihre eigentliche Sprache erlernt hat, so drücken sich doch nicht Wenige im ganzen wissenschaftlichen Leben, ja fast bei jeder genauen Darstellung, ohne es zu wissen, mathematisch aus. Ueberdies ist es eine Thatsache, die nicht übersehen werden sollte, dass die scheinbare Isolirung, welche bei der Mathematik so auffällig ist, in höherem oder niederem Grade auch allen anderen Wissenschaften anhaftet, ja vielleicht allen Bestrebungen im Leben. In ihrem höchsten Fluge schwärmt eine jede in einiger Entfernung von ihren Genossinnen. Eine jede wird verfolgt um ihrer selbst willen, ohne Rücksicht auf ihre Verbindung mit anderen, oder ihre Anwendung zu weiteren Zwecken. Pioniere und Vorhut müssen nothwendigerweise vom Hauptcorps getrennt sein, und in dieser Hinsicht unterscheidet sich die Mathematik nicht wesentlich von ihren Schwesterwissenschaften. Da aber die Vereinsamung der Mathematik häufig Gegenstand der Discussion ist, so wird es nicht ganz unzweckmässig erscheinen, wenn wir einige Zeit bei der anderen Seite des Frage verweilen und untersuchen, ob zwischen der Mathematik und den übrigen menschlichen Bestrebungen nicht Berührungspunkte, sei es in methodischer Hinsicht oder mit Rücksicht auf den Gegenstand selbst, vorhanden sind, die man häufig übersehen hat; ob ihre Bahnen nicht in manchen Fällen parallel laufen mit anderen Thätigkeiten und Richtungen des Lebens; endlich, ob nicht Hoffnung auf eine Aenderung in der Stellung vorhanden ist, welche die Vertreter anderer Zweige der Wissenschaft und geistigen Thätigkeit ihr gegenüber nur zu oft eingenommen haben.

In seiner Vorrede zu den „Principien“ giebt Newton einigen allgemeinen Gedanken Ausdruck, die als Grundton für alle späteren Bestimmungen über die Beziehungen der Mathematik zu den Naturerscheinungen, mit Einschluss der gewöhnlich sogen. künstlichen, betrachtet werden können. „Die Alten theilten die Mechanik in zwei Theile, in die rationale und praktische; und da Künstler oft ungenau arbeiten, so ist es gekommen, dass Mechanik und Geometrie in der Weise unterschieden wurden, dass alles Genaue zur Geometrie, alles Ungenaue zur Mechanik gerechnet wurde. Aber die Ungenauigkeiten fallen dem Künstler zur Last, nicht der Kunst, und die Geometrie selbst hat ihre Grundlage in der mechanischen Praxis und ist Nichts anderes, als derjenige Theil der allgemeinen Mechanik, welcher die

Kunst zu messen darlegt und beweist."[1]) Newton erklärt dann weiter, dass die rationale Mechanik die Wissenschaft von der Bewegung durch die Wirkung von Kräften ist, und fügt hinzu: „Die ganze Schwierigkeit der Naturforschung scheint mir in der Ableitung der Naturkräfte aus den Erscheinungen der Bewegung zu liegen, und in dem Nachweise, dass sich aus diesen Kräften die übrigen Erscheinungen ergeben". Dann, nachdem er die Aufgaben, welche in dem Werke behandelt werden, festgestellt hat, sagt er: „Ich wollte, dass alle anderen Naturerscheinungen in gleicher Weise von mechanischen Principien abgeleitet würden. Denn viele Erscheinungen leiten mich zu der Vermuthung, dass Alles von gewissen Kräften abhängt, durch welche die Theilchen der Körper aus noch nicht bekannten Ursachen entweder zusammen getrieben werden, so dass sie an einander haften in regelmässigen Gestalten, oder abgestossen werden und aus einander weichen."

Newton's Ansichten sind hiernach klar; er betrachtet die Mathematik nicht als eine von den verschiedenen Objecten unabhängige, obwohl auf sie anwendbare Methode, sondern sie ist ihm die höhere Seite oder Gestalt der Dinge selbst, und es würde wenig mehr als eine Uebertragung seiner Angaben in eine andere Sprache, wenig mehr als eine Paraphrase seiner eigenen Worte sein, wenn wir die Mathematik als eine Anschauung der materiellen Welt selbst bezeichnen wollten, von welcher getrennt alle anderen Anschauungen nur unvollkommene Skizzen und, wie sorgfältig immer in ihrer Art, doch mit den Mängeln eines ungenauen Künstlers behaftet sind. Burrowes in der Vorrede zum ersten Bande der Transactions der Königlich Irischen Akademie hat, von einem anderen Gesichtspunkte ausgehend, denselben Satz behandelt: „Keine Wissenschaft", sagt er, „ist so wenig mit den übrigen verknüpft, dass sie nicht manche Principien darböte, deren Anwendungen sich weit über die Wissenschaft hinaus erstreckt, der sie ursprünglich angehören, und kein Satz ist so rein theoretisch, dass er unfähig wäre, für praktische Zwecke verwendet zu werden. Kein auffälliger Zusammenhang besteht zwischen der Zeitdauer und dem Cycloidenbogen, und doch haben die Eigenschaften des letzteren uns die beste Methode zur Messung der Zeit geliefert; und wer sich mit der Natur und den Eigenthümlichkeiten der logarithmischen Linie vertraut gemacht hat, ist beträchtlich vorgeschritten in der Erkenntniss der verhältnissmässigen Dichte der Luft in verschiedenen Entfernungen von der Erde. Die Untersuchungen des Mathematikers sind der einzig sichere Boden, auf dem wir aus Experimenten Schlüsse ziehen können; und wie sehr die experimentale Wissenschaft commercielle Interessen zu fördern vermag, das ist erwiesen durch den Erfolg der Industrie in Ländern, in denen die Hand des Arbeiters unter der Leitung des Naturforschers steht. Jede Manufactur ist in Wahrheit nur ein chemischer Process, und die zu ihrer Ausführung nöthige Maschinerie nur die richtige Anwendung gewisser Sätze der rationalen Mechanik". Jedes Object also, mag es nach der gewöhnlichen Auffassung ein wissenschaftliches sein oder nicht, kann einen mathematischen Anblick darbieten; in der That, sobald es Gegenstand genauer Messung oder numerischer Feststellung wird, tritt es in eine mathematische Phase. Diese Phase ist vielleicht, oder sie ist auch nicht, das Vorspiel zu einer anderen, in welcher die Gesetze des Objectes in algebraischen Formeln oder geometrischen Figuren dargestellt werden. Aber das wahre Wesen der Sache liegt nicht immer in der Art des Ausdruckes, und der Zauber der Formeln oder anderer mathematischer Aeusserlichkeiten dürfte alles in allem wenig mehr bedeuten als ein Sceneriewechsel auf der Bühne. Die Zurückführung auf Formeln ist in Wahrheit eine Abstraction, deren Ergebniss nicht immer einen Gewinn bietet; in der That kann das Object durch diesen Process in einer Hinsicht mehr verlieren, als es in der anderen gewinnt. Aber lange bevor diese Abstraction vollständig erreicht ist, und selbst in solchen Fällen, wo sie überhaupt nie erreicht wird, kann ein Object für alle Zwecke und Bestimmungen mathematisch werden. Es sind nicht sowohl durchgeführte Berechnungen oder abstruse Processe, welche diese Phase charakterisiren, als die Grundsätze der Präcision, Exactheit und Proportion. Dies aber sind Grundsätze, deren keine wirkliche Erkenntniss gänzlich entbehren kann. Wenn der allgemeine wissenschaftliche Geist es ist, der auf der Fläche der Wasser schwebt und aus unbekannter Tiefe hervor Licht und lebende Formen bringt, so ist es nicht minder der mathematische Geist, der einen lebendigen Odem einhaucht dem, was ohne ihn für immer ein dürres Gerippe von Thatsachen geblieben wäre, der die zerstreuten Glieder sammelt und aus ihnen einen neuen lebendigen Organismus schafft.

Auf dieselbe Thatsache hat auch Professor Jellett bei der Versammlung der British Association in Belfast mit den Worten hingewiesen: „Nicht nur wenden wir unsere Methoden an auf manche Wissenschaften, von denen schon bekannt ist, dass sie in das eigentliche Bereich der Mathematik gehören, sondern wir lernen auch dasselbe Instrument anwenden auf Disciplinen, die bisher seiner Herrschaft nicht untergeben waren. Die Physik lehrt täglich mehr und mehr in allen Naturerscheinungen blosse Modificationen einer einzigen Erscheinung, nämlich der Bewegung, erkennen, die ganz speciell unter der Herrschaft der Mathematik steht“. Alles das sind nur Wiederhalle, entfernte und schwache, aber doch wahre, als Antworten auf jenen Wunsch von Newton, dass dereinst alle diese Erscheinungen aus mechanischen Principien abgeleitet werden möchten.

Wäre es, von diesem Anblick der Sache uns wegwendend, unsere Absicht, weiter auszuführen, wie dieselbe Tendenz sich in den Künsten geltend gemacht hat, vielleicht ohne dass die Künstler selbst es bemerkten, so könnten wir der Reihe nach jede einzelne zum Zeugen aufrufen mit vollem Vertrauen auf das Zeugniss, das sie ablegen würden. Und mit speciellerer Rücksicht auf Mathematik könnte voll Zuversicht hingewiesen werden auf die Genauigkeit der Messung, die Wahrheit in den Linien, welche neuerer Forschung zufolge der Schlüssel für die Vollkommenheit der classischen Kunst ist. Triumphirend könnte man nicht nur die Architekten aller Zeiten anführen, deren Kunst so offenbar auf mathematischen Grundsätzen beruht, sondern auch den literarischen wie den künstlerischen Nachlass der grossen Künstler des fünfzehnten Jahrhunderts, Maler wie Bildhauer, zum Nachweis der Geometrie und Mechanik, welche nicht nur die Grundlage ihrer Werke bilden, sondern auch in dem Ausbau derselben zur Geltung kommen.[2]) Und in einer weniger erhabenen, aber der Zeit und dem Orte nach uns näher liegenden Sphäre wäre mit Genugthuung hinzuweisen auf die grosse Schule englischer Meister der bürgerlichen Baukunst des 18. Jahrhunderts und daran zu erinnern, dass nicht nur Ingenieure und Architekten, sondern selbst Kunsttischler die Hälfte des Raumes ihrer Schriften der Perspective und der Auseinandersetzung derjenigen Methoden gewidmet haben, durch welche man körperliche Gebilde auf dem Papier abbilden kann, also unserer heutigen darstellenden Geometrie.[3])

Auch würden wahrscheinlich die Disciplinen, welche sich mit den Gesetzen des Denkens und der Sprache beschäftigen, und die verwandte Kunst der Musik, ja die Literatur selbst, wenn man sie genau prüfte, nicht weniger Berührungspunkte mit der Wissenschaft, die wir hier besprechen, darbieten.

Was ist in der That die Logik anders als derjenige Theil des allgemeinen Denkens, Grammatik anders als der Theil der allgemeinen Sprachlehre, Harmonie und Contrapunkt anders als der Theil der allgemeinen Musik, welcher genau festsetzt und beweist (soweit ein Beweis möglich ist), strenge Methoden, die jedem dieser Gebiete angehören? Man könnte sich selbst auf die allgemeine Ansicht berufen, der das Mathematische als Musterform des Denkens und präcisen Stiles gilt.

Wenn man also Präcision und Exactheit als die charakteristischen Merkmale annimmt, welche die mathematische Phase eines Objectes kennzeichnen, so müssen wir natürlicherweise erwarten, dass die Annäherung an eine solche Phase durch zunehmende Anwendung des Princips der Messung und Vermehrung des Werthes, welchen man numerischen Bestimmungen beilegt, bezeichnet wird. Und diese höchst nothwendige Bedingung für den Fortschritt kann recht wohl als einer der Hauptzüge des wissenschaftlichen Strebens unserer Tage bezeichnet werden.

Läge es in unserem Plane, auf den Schauplatz der einzelnen Wissenschaften hinabzusteigen und zu zeigen, wie die verschiedenartigsten Forschungen in gleicher Weise auf Messungen hinzielen und so in eine mathematische Phase einzutreten suchen, so würden wir von der Fülle von Beispielen überrascht werden, die sich anführen liessen. Wir wollen uns daher auf eine flüchtige Notiz über einige wenige beschränken, indem wir solche auswählen, die nicht nur die allgemeine Tendenz erläutern, sondern auch den besonderen Charakter der Messungen, welche jetzt erfordert werden, nämlich die Kleinheit der Objecte und die indirecte Methode, welche allein gegenwärtig Hoffnung auf eine Annäherung gewährt. Ein Object von $^1/_{80000}$ Zoll engl. Durchmesser ist vielleicht das kleinste, von dem das Mikroskop ein wohl bestimmtes Bild geben kann [4]); es ist unwahrscheinlich, dass $^1/_{120000}$ eines Zolles erkannt werden kann mit der stärksten uns zu Gebote stehenden Vergrösserung. Aber die Sonnenstrahlen und das elektrische Licht offenbaren uns die Anwesenheit von Körpern, die weit kleiner sind. Und in Ermanglung irgend eines Mittels, sie einzeln zu beobachten, hat Prof. Tyndall eine Scala in Wellenlängen des Lichtes für diese kleinen Körperchen aufgestellt. Er wurde darauf geführt, nicht durch den Versuch einer individualen Messung, sondern indem er ihre Aggregation betrachtete und die Farben beobachtete, welche sie zerstreuen, wenn sie in Form aktinischer Wolken auftreten. [5]) Die kleinen

Körperchen, mit denen die Experimentalwissenschaft neuerdings in Berührung gekommen, beschränken sich nicht auf Gasmolekeln, sondern umfassen vollkommene Organismen; und derselbe Forscher hat den massgebenden Einfluss, den diese kleinen Organismen auf die Oekonomie des Lebens ausüben, einem tieferen Studium unterzogen.[6]) Wenn daher mit Rücksicht auf ihre specifischen Wirkungen auf das menschliche Leben, seien sie nun verderbliche oder andere, eine qualitative Classification oder eine quantitative Schätzung jemals möglich sein sollte, so scheint es, dass sie nach einer Methode, wie die oben angedeutete, werde erfolgen müssen.

Ferner sind, um noch ein paar Beispiele der Messung kleiner Grössen zu erwähnen, die mittleren Entfernungen der Molekeln verschiedener Gase bei verschiedenem Drucke aufzuführen; die Länge ihrer freien Bahnen, oder der Spielraum, der für ihre Bewegungen bleibt, ohne dass sie an einander stossen; sodann die Bewegungen, welche die Drücke und Druckdifferenzen verursachen, unter deren Einflusse Crooke's Radiometer seine merkwürdigen Drehungen macht.[7]) Hierher gehören auch die Excursionen der Luftmolekeln bei der Fortpflanzung sehr hoher Töne, welche den Forschungen des Lord Rayleigh zufolge von ganz unerwarteter Kleinheit zu sein scheinen.[8]) Es gehören weiter hierher die molekularen Wirkungen, die ins Spiel kommen bei den bemerkenswerthen Versuchen des Dr. Kerr, dem es gelang, was selbst Faraday nicht gelungen war, nämlich eine sichtbare Drehung der Polarisationsebene des Lichtes bei seinem Durchgange durch elektrisirte Dielectrica und bei seiner Reflexion an einem Magneten zu erhalten.[9]) Und um noch eine, allen gegenwärtige Thatsache zn erwähnen, sei noch der verschwindend kleinen Wellen der schwingenden Platte in Graham Bell's wunderbarer Erfindung gedacht.

Von den Knoten und Bäuchen der Platte des Telephons, welche thatsächlich Schall in Elektricität und Elektricität in Schall umwandeln, können wir uns zur Zeit noch keine Vorstellung bilden. Alles was jetzt gesagt werden kann, ist, dass die vollkommensten Beispiele von Chladni's Sandfiguren auf einer schwingenden Platte oder von Kundt's Lycopodiumhäufchen in einer tönenden Röhre[10]) oder selbst von den feineren Wirbeln auf der Membran von Sedley Taylor's Phoneidoskop[11]), mit ihnen verglichen, nur roh und skizzenhaft sind. Denn ungeachtet der Thatsache, dass wir in den Bewegungen der Telephonplatte in Wirklichkeit die Lösung des alten Weltproblems der Construction einer Sprechmaschine in der Hand haben, so sind doch die Charaktere, in denen diese Lösung ausgedrückt ist, zu klein für unsere Fähigkeit zum Entziffern. Bei Bewegungen gleich diesen scheinen wir das Unterscheidungsvermögen zu verlieren oder wir haben vielleicht unbewusst die Grenzen überschritten zwischen Körper- und Molekelbewegung.[12])

In dem Phonographen haben wir nicht allein eine Umwandlung, sondern eine beständige und greifbare Niederschrift des Mechanismus der Sprache. Die Unterschiede aber, auf denen die Articulation — abgesehen von Stärke, Höhe und Klangfarbe — beruht, scheinen nach den Untersuchungen von Fleeming Jenkin u. A. von mikroskopischer Kleinheit zu sein. Das Mikrophon bietet ein anderes Beispiel von der unerwarteten Bedeutung kleiner Aenderungen, in diesem Falle von Aenderungen des elektrischen Stromes; und es ist bemerkenswerth, dass das Wesen dieses Apparates darin zu liegen scheint, etwas zu erhalten und zu vervollkommnen, was die Elektriker bisher sorgfältig zu vermeiden suchten, nämlich einen lockeren Contact.

Ferner hat es De la Rue als eines der mit seiner Riesenbatterie von 10000 Zellen gewonnenen Ergebnisse hingestellt, dass Vieles dafür spricht, dass jede voltaische Entladung, auch wenn sie scheinbar continuirlich erfolgt, doch wohl eine intermittirende Erscheinung ist; aber alles, was wir über die Periode dieser Intermittenz wissen, ist, dass sie in ausserordentlich kurzen Intervallen erfolgen muss.[13]) Und im Zusammenhange hiermit mag hinzugefügt werden, dass, was auch immer zuletzt die Erklärung für die merkwürdige

Schichtung der voltaischen Entladungen sein mag, es klar ist, dass die abwechselnde Anordnung von Licht und Dunkelheit abhängen muss von einer wechselnden Vertheilung im Raume oder in der Zeitfolge, von der wir jetzt nur ganz im Allgemeinen reden können. In der verdünnten Luftsäule haben wir ein Vehikel für die Elektricität, das nicht constant ist, wie ein gewöhnlicher Conductor, sondern welches sich ändert beim Durchgang der Entladung und vielleicht Gesetzen unterworfen ist, die wesentlich verschieden sind von denen, welchen es bei gewöhnlichem Atmosphärendruck gehorcht. Es kann auch sein, dass manche von den Gestaltungen, welche die Schichtung begleiten, nur ein vergrössertes Bild geben von Erscheinungen, die den disruptiven Entladungen im Allgemeinen angehören, und dass also, weit entfernt, unter den bekannten Erscheinungen der letzteren einen Schlüssel für die Erklärung der ersteren erwarten zu dürfen, wir zuletzt hoffen müssen, in den ersteren eine Aufklärung für das zu finden, was in den letzteren zur Zeit noch dunkel ist. Ein vorsichtiger Forscher vermeidet gewöhnlich die voreilige Anwendung rein wissenschaftlicher Untersuchungen; es scheint aber fast, als ob die Gestaltung dieser Schichten dereinst ein sehr empfindliches Hilfsmittel zur Schätzung geringer Drücke und vielleicht auch zur Ausführung mancher elektrischen Messungen abgeben werden.

Es ist nun eine merkwürdige Thatsache, dass fast die einzigen kleinen Quantitäten, von denen wir bis jetzt genaue Messungen besitzen, die Wellenlängen des Lichtes sind, und dass andere, ausgenommen wenn sie von jenen abgeleitet werden können, einer zukünftigen Bestimmung noch harren. Inzwischen, so lange wir unfähig sind, die kleinen Quantitäten einzeln in Angriff zu nehmen, besteht die Methode, zu welcher wir unsere Zuflucht nehmen müssen, wie schon früher bemerkt, darin, Mittelwerthe zu bestimmen, indem wir unter Beiseitesetzung der Verhältnisse eines jeden Einzelfalles die durchschnittliche Grösse, Geschwindigkeit, Richtung u. s. w. einer grossen Anzahl von Fällen berechnen. Aber obwohl diese Methode sich auf Versuche stützt und zu Resultaten führt, die als materiell richtig betrachtet werden dürfen; obgleich sie anwendbar ist auf jede endliche Zeit, auf jeden endlichen Raum, also für alle praktischen Lebenszwecke, so ist doch keine Gewissheit vorhanden, dass es sich auch noch dann so verhält, wenn die Dimensionen der Zeit oder des Raumes ins Unendliche vermindert werden. In Wahrheit ist die Einfachheit der Natur, wie wir sie gegenwärtig auffassen, nur das Ergebniss einer unendlichen Mannigfaltigkeit, und unter der Einförmigkeit liegt eine Verschiedenartigkeit, deren Tiefen wir noch nicht geprüft haben, deren geheime Plätze noch ausserhalb unseres Bereichs liegen.

Es ist hier nicht der Ort, die Beispiele zu häufen; aber einen flüchtigen Blick müssen wir doch auf einen höchst wichtigen Beleg für die Anwendung der statistischen Methode werfen. Ohne ihre Hilfe könnte das sociale Leben oder die Geschichte von Leben und Tod überhaupt nicht oder höchstens in ganz oberflächlicher Weise begriffen werden. Ohne ihre Hilfe könnten wir keine klaren Vorstellungen von der Lage der Armen gewinnen, wir könnten auf keine gründliche Besserung ihres Looses und ihrer Aussichten hoffen. Ohne ihre Hilfe würden gesundheitliche Massregeln, würde die ärztliche Kunst selbst machtlos sein. Ohne sie würden der Politiker und der Philanthrop gleichfalls in einer pfadlosen Wüste wandern.

Doch soll nicht sowohl von der Wissenschaft im Allgemeinen, als von der Mathematik ins Besondere gesprochen werden; es sollen Verbindungen zwischen der Mathematik und anderen Disciplinen nachgewiesen werden, um zu zeigen, dass ihre Region alles in allem nicht so entlegen, ihr Alphabet nicht unentzifferbar ist, und nachzuweisen, dass sich ganz wider Erwarten an vielen Stellen verborgene Gedankenläufe auffinden lassen, die, von einer gemeinsamen Quelle ausgehend, in gleicher Weise den mathematischen und den nicht nichtmathematischen Boden befruchten.

Dies im Auge haltend, wollen wir zum speciellen Gegenstand der Besprechung einige der neueren Mathematik eigenthümliche Betrachtungsweisen wählen; und zum Theil in der Absicht, gelegentlich einige landläufige irrthümliche Auffassungen zu berichtigen, haben wir zur Besprechung drei Methoden gewählt, rücksichtlich welcher die Mathematiker oft beargwöhnt werden, dass sie alle verständigen Grenzen des Denkens überschritten und für unbekannte Dinge eine unbekannte Sprache gewählt haben. Wir wollen zu zeigen versuchen, dass nicht nur in diesen Fällen die Wissenschaft ihr berechtigtes Gebiet nicht überschritten hat, sondern dass auch Kunst und Literatur unbewusst Methoden angewendet haben, die im Princip ähnlich sind. Die drei in Frage stehenden Methoden sind

erstens die der imaginären Quantitäten,
zweitens die des mannigfaltigen Raumes und
drittens die nichteuklidische Geometrie.

Zuerst wird der Vorwurf erhoben, dass wir mit Aufgebung der vorsichtigeren Methoden der alten Mathematiker in unseren Formeln Grössen den Zutritt gestattet haben, die unserer eigenen Ableitung und selbst unserer eigenen Bezeichnungsweise zufolge imaginär oder unmöglich sind; ja mehr noch, dass wir daraus ein eignes Gebiet der Algebra gebildet haben, dem in der Wirklichkeit Nichts entspricht, während wir gleichwohl den Anspruch erheben, von ihm aus auf mögliche und zuverlässige Resultate zu gelangen.

Ueber dieses Thema ist wohl, wenn irgend wo, gerade in Dublin gestattet zu sprechen. Denn der fruchtbaren Erfindungsgabe des verstorbenen Königlichen Astronomen für Irland, Sir William Rowan Hamilton, verdanken wir jenen wunderbaren Quaternionen-Calcul [14]), der erst in unseren Tagen vollständig verstanden zu werden anfängt, und welcher noch nicht alle die Anwendungen gefunden hat, deren er ohne Zweifel fähig ist. Und obgleich dieser Calcul nicht gleich umfassend ist wie ein anderer, der fast gleichzeitig auf dem Continente geschaffen wurde (Grassmann's „Ausdehnungslehre“ [15])), und wie gewisse Ideen, die kürzlich in Amerika entwickelt worden sind (Pierce’s lineare associative Algebra [16])), so wird er doch immer seine Stellung behaupten als eine originelle Erfindung und als eine der zwei grossen Gruppen verallgemeinerter Algebra (nämlich solcher Grössen, bei denen das Quadrat der Einheit resp. die negative Einheit und Null ist), deren gemeinsamer Ursprung auf der Karte unserer intellectuellen Thätigkeit noch als eine unbekannte Region bezeichnet werden muss. Noch recht wohl ist es erinnerlich, wie wir in ihren jüngeren Jahren die Methode ähnlich zu handhaben pflegten, wie etwa der Zauberlehrling des Meisters Stab schwingt, gleichsam zitternd zwischen Furcht und Hoffnung und kaum wissend, ob wir unseren eigenen Resultaten Glauben schenken durften, bis sie dem immer gegenwärtigen und immer bereiten Urtheil von Sir W. R. Hamilton selbst unterbreitet worden.

Um unsere Ideen zu fixiren, betrachten wir die Messung einer Linie oder die Berechnung der Zeit oder die Ausführung irgend welcher mathematischen Operation. Eine Linie kann nach einer Richtung oder auch nach der entgegengesetzten gemessen werden; die Zeit kann vorwärts und rückwärts gerechnet werden, eine Operation kann durchgeführt oder umgekehrt, sie kann vollzogen oder nicht vollzogen werden; und wenn, nachdem wir einen dieser Processe einmal umgekehrt haben, wir ihn ein zweites Mal umkehren, so werden wir finden, dass wir zu der ursprünglichen Richtung der Messung oder Rechnung, oder zu der ursprünglichen Art der Operation zurückkehren.

Wir wollen nun voraussetzen, dass in einem Stadium der Rechnung unsere Formeln eine Aenderung in der Art der Messung andeuten, so dass bei Wiederholung der Aenderung eine neue Lage der Dinge, nicht identisch mit der ursprünglichen, sondern die umgekehrte, erzeugt wird. Oder wir nehmen an, dass in einem gewissen Stadium unsere Transformationen anzeigen, dass man die Zeit in einer Weise in Rechnung ziehen soll, die verschieden ist von Vergangenheit oder Zukunft, aber immer noch auf einem Wege, der bestimmte algebraische Verbindung hat mit der Zeit, die vergangen ist und die kommen wird.[17]) Es ist klar, dass es in der wirklichen Erfahrung keinen Vorgang giebt, dem solche Messungen entsprechen. Die Zeit hat keinen Sinn, ausser als Zukunft oder Vergangenheit; die Gegenwart ist nur der Grenzpunkt von beiden. Oder, um noch ein Beispiel zu haben, nehmen wir an, es wird uns ernsthaft erzählt, dass alle Kreise durch dieselben zwei unendlich fernen imaginären Punkte gehen und dass jede Linie, die durch einen dieser Punkte gezogen wird, senkrecht steht auf sich selbst. Wenn wir das hören, so werden wir wahrscheinlich mit einem Lächeln oder einem Seufzer vor uns hin flüstern, dass es hoffentlich nicht wahr ist, dass auf jeden Fall ein weiter Weg bis dahin ist und dass vielleicht das Ganze nicht viel zu bedeuten hat. Wenn wir aber nicht zufrieden damit sind, die Frage unter solchen Umständen fallen zu lassen, so muss doch ein Mathematiker selbst zugeben, dass hier ein bestimmter Wendepunkt erreicht ist: unsere Wissenschaft muss entweder eine verständige Rechenschaft über dies Dilemma ablegen oder die Stellung als nicht länger haltbar aufgeben.

Zur Erklärung dieses anomalen Standes der Dinge haben sich den Mathematikern specielle Wege dargeboten. Es wird aber genügen, mit Umgehung von Einzelheiten die hierher nicht gehören, im Allgemeinen darauf hinzuweisen, dass eine Lösung der Schwierigkeit in der Thatsache gefunden wird, dass die Formeln, welche zu jenen Resultaten Anlass gegeben, umfassender sind, als die Bedeutung, welche ihnen untergelegt worden ist; wenn man dann den Kreis der ursprünglichen Bedingungen überschreitet, so können sie uns nicht mehr ein auf dieser Grundlage verständliches Resultat geben. Es folgt aber daraus durchaus nicht, dass es auch auf einer erweiterten Grundlage unmöglich ist, den Formeln eine Bedeutung beizulegen; im Gegentheil, die Schwierigkeit, auf die wir gestossen sind, deutet darauf, dass es einen umfassenderen Ausdruck der Aufgabe giebt, der die Fälle mit in sich begreift, welche unmöglich sind bei der beschränkteren, aber möglich bei der umfassenderen Auffassung der Dinge.

Ein sehr einfaches Beispiel wird die Sache erläutern. Wenn man von einem Punkte auf der Aussenseite eines Kreises aus eine Gerade zieht, die den Kreis berührt, so hat die Entfernung zwischen dem Anfangspunkt und Berührungspunkt gewisse geometrische Eigenschaften. Rückt der Anfangspunkt näher und näher an den Kreis, so wird die fragliche Entfernung kürzer und verschwindet endlich. Sobald aber der Punkt auf die Innenseite des Kreises rückt, hören die Ausdrücke „Berührungslinie“ und „Entfernung vom Berührungspunkte“ auf, eine Bedeutung zu haben, und dieser anomale Zustand der Dinge herrscht so lange der Punkt im Innern bleibt. Wenn aber der Punkt weiter verschoben wird, bis er auf der anderen Seite wieder aus dem Kreise heraustritt, so tritt die Tangente mit ihren Eigenschaften wieder in die Wirklichkeit und ist so verständlich wie vorher. Nun ist aber der Process, durch welchen wir vom Möglichen zum Unmöglichen und dann wieder zum Möglichen übergegangen sind, nämlich die Verschiebung des Ausgangspunktes, ein ganz continuirlicher, während die Bedingungen der Aufgabe, wie nachgewiesen, plötzlich geändert werden. Wenn wir aber den Begriff einer berührenden Linie ersetzen durch den einer Geraden, die den Kreis schneidet, und die Entfernung des Berührungspunktes durch die Abstände von den Schnittpunkten mit dem Kreise, so ist leicht einzusehen, dass die letztere Auffassung die frühere mit umfasst als einen Grenzfall, sobald man nämlich die Linie so weit um ihren Anfangspunkt dreht, bis sie mit der Tangente zusammenfällt. Ferner haben die beiden Abschnitte vom Anfangspunkte bis zum Schnittpunkte eine ganz bestimmte und verständliche Bedeutung, gleichviel ob der Punkt auf der Aussen- oder Innenseite des Kreises liegt. Der einzige Unterschied besteht darin, dass im ersten Falle die Abschnitte nach derselben Richtung gemessen werden, im zweiten nach entgegengesetzten Richtungen.

Das vorstehende Beispiel hat uns einen Zweck kennen gelehrt, dem das Imaginäre dienen kann, nämlich als Zeichen der Grenze für eine besondere Lage der Dinge, für die Anwendung eines besonderen Gesetzes, oder als Anzeige für einen Standpunkt, für welchen ein umfassenderes Gesetz erforderlich ist. Um zu so einem Gesetze zu gelangen, müssen wir, wie bei unserem Beispiele mit dem Kreise und der Tangente, wieder den Ausdruck unseres Problems betrachten; wir müssen zurückgehen auf das Princip, von dem wir ausgegangen sind, und uns vergewissern, ob es nicht modificirt oder erweitert werden kann. Und selbst wenn in einer speciellen Untersuchung, in welcher imaginäre Grössen auftreten, die umfassendste Auffassung des Problems, deren wir zur Zeit fähig sind, keine thatsächliche Repräsentation dieser Quantitäten liefert, so dass man sie vorläufig in die Kategorie des Imaginären verweisen muss; so folgt doch daraus nicht, dass man auch in einer späteren Zeit kein Gesetz finden wird, das ihnen Realität verleiht, oder dass wir in der Zwischenzeit Bedenken tragen müssten, sie zu benutzen für die Gewinnung richtiger Resultate, in Uebereinstimmung mit dem grossen Princip der Continuität.

Wenn wir übrigens in Geometrie und Algebra gelegentlich Punkte und Quantitäten anwenden, welche, von unserem gegenwärtigen Standpunkte aus betrachtet, keine reale Existenz besitzen, welche weder in dem erfahrungsmässigen Raume dargestellt, noch mit einem Massstabe, wie wir ihn sonst anwenden, gemessen werden können; wenn diese sogenannten imaginären Grössen durch ganz berechtigte Processe unserer Wissenschaft zum Vorschein kommen; wenn sie nicht nur dem Zwecke dienen, Ideen anzuregen, sondern uns thatsächlich zu praktischen Folgerungen führen; wenn Alles dies in der abstrakten Wissenschaft richtig ist, so mag es vielleicht gestattet sein und jedenfalls zur Erläuterung dienen, darauf hinzuweisen, dass in der Kunst nicht-reale Formen oft benutzt werden, um Ideen zu erwecken, einen Sinn auszudrücken, wofür andere Formen nicht geeignet oder entsprechend erscheinen. Sind nicht Formen, die der Biologie unbekannt sind, Situationen, die mit der Schwerkraft unverträglich sind, Stellungen, die nicht nur der Stabilität, sondern selbst der Möglichkeit des Gleichgewichts widersprechen — sind nicht dies gerade die Mittel, zu denen der Künstler oft greift, um seine Gedanken auszudrücken und seine Mission zu erfüllen? Wer sich jemals an der Ornamentik der Renaissance ergötzt hat, an den ungewöhnlichen Uebergängen von thierischen zu pflanzlichen Formen, und von diesen wieder zu fast rein geometrischen Linien, hat der nicht gefühlt, dass dieses Imaginäre einen ganz ähnlichen Anspruch auf Anerkennung hat, als das verwandte in der Mathematik? Wie kommt es, dass die grotesken Malereien des Mittelalters, die phantastischen Bildwerke entfernter Nationen, ja selbst die rohe Kunst einer vorgeschichtlichen Vergangenheit noch einen Eindruck auf uns machen und ein Interesse erregen, das weit über ihren antiquarischen Werth hinausgeht, wenn es nicht daher rührt, dass sie Symbole sind, die, wenn auch für sich allein schwer erklärlich, doch, von einem umfassenderen Standpunkte aus aufgefasst, fähig sind, uns geistig zu Etwas zu versetzen, dass über ihnen ist, zu Wahrheiten, welche, obgleich durch sie erreicht, eine Realität besitzen, die man ihren äusseren Formen schwerlich zuschreiben kann.

Wenden wir uns ferner von der Kunst zur Literatur, so ist Naturtreue ohne Zweifel ein charakteristisches Merkmal des echten Schriftstellers; und doch geschieht es häufig, selbst bei der Schilderung der äusseren Natur, und mehr noch bei derjenigen der Gefühle und Leidenschaften, der geheimen Triebfedern des Charakters und der Motive der Handlungen, dass der Schriftsteller zur Einbildung, zur Analogie, ja selbst zum Paradoxon greift, um einem Gedanken Ausdruck zu verleihen, für den es in der Sprache kein directes Aequivalent giebt. Und wer von uns wäre unvermögend, einen Sinn in solchen Redefiguren zu finden, eine innere Antwort auf die Schöpfung der Einbildungskraft, auf die sociale Fiction, ja selbst auf jene Sagen von Riesen und Feenland, die scheinbar nur für Kinderstube und Schule geschrieben sind? Wenn wir aber diese Dinge beleben wollen in einer Bedeutung, die über den blossen Wortsinn hinausgeht, müssen wir da nicht unseren früheren Standpunkt aufgeben, die Ideen, von denen wir ausgingen, erweitern? müssen wir uns nicht umsehen nach Etwas, das der Idee, die wir mitbringen, und dem Objecte, das thatsächlich beschrieben wird, gemeinsam ist? müssen wir nicht nach dem sympathischen Quell suchen, dem beide entsprungen? haben wir nicht, gleich dem Mathematiker, zurückzugehen gleichsam zu gewissen ersten Principien oder, da dies schöner klingt, wieder einem Kinde gleich zu werden?

Uebergehend zur zweiten der erwähnten drei Methoden, nämlich der des mannigfaltigen Raumes, mag zuerst bemerkt werden, dass alle unsere Erfahrung uns nur drei Dimensionen des Raumes zeigt, nämlich Länge, Breite und Dicke (Höhe); und wenn wir für gewisse Zwecke unsere Begriffe beschränken auf zwei Dimensionen, wie in der ebenen Geometrie, oder auf eine einzige Dimension, wie bei Theilung einer geraden Linie, so geschieht dies nur, indem wir mit Bewusstsein und zu einem überlegten Zwecke die eine Dimension oder die zwei übrigen bei Seite lassen, nicht aber vernichten. Die Negation, wie Hegel richtig bemerkt hat, schliesst das in sich, was verneint wird, oder nach seinem Ausdrucke, sie bestätigt das Gegentheil. Durch Abstraction von früherer Erfahrung, durch Einschränkung ihrer Resultate, nicht durch einen selbstständigen Process kommen wir zu der Vorstellung eines Raumes von weniger als drei Dimensionen.

Ohne Zweifel rührt es auch daher, dass Probleme der ebenen Geometrie, obgleich für sich allein lösbar, verständlicher, leichter einer Erweiterung fähig werden, wenn wir sie in Verbindung mit dem Raume, als specielle Fälle analoger Probleme der Stereometrie betrachten, Dies ist in so hohem Grade der Fall, dass der blosse sprachliche Ausdruck der allgemeineren Methoden oft beinahe durch blosse Anschauung uns auf Schlüsse führt, die von dem mehr eingeschränkten Gesichtspunkte aus einen langwierigen und mühsamen Beweis erfordern. Solch ein Wechsel in der Operationsbasis ist in Wirklichkeit erfolgreich in der Geometrie von zwei Dimensionen gemacht worden, und obwohl uns für die ferneren Schritte in gleicher Weise experimentelle Daten nicht zu Gebote stehen, so werden doch weder die Gesetze des Denkens noch die Giltigkeit der Schlüsse irgendwie alterirt, wenn man einen analogen geistigen Process auf die Geometrie dreier Dimensionen anwendet, und wenn man die Figuren im Raume von drei Dimensionen in gleicher Weise als Schnitte von Figuren im Raume von vier Dimensionen betrachtet, wie man ebene Figuren oft auffasst als Schnitte von Figuren im Raume von drei Dimensionen. Die Hinzufügung einer vierten Dimension zum Raume erweitert nicht nur die thatsächlichen Eigenschaften der geometrischen Figuren, sondern fügt auch neue Eigenschaften hinzu, die oft für die Zwecke der Transformation und Beweisführung von Nutzen sind. So ist neuerdings gezeigt worden, dass im Raume von vier Dimensionen ein geschlossenes hohles Gefäss durch blosse Biegung ohne Dehnung oder Riss umgewendet werden kann, so dass die Innenseite nach Aussen kommt [18], und dass in diesem Raume sich kein Knoten knüpfen lässt. [19]

Ferner wird die Lösung geometrischer Probleme oft mittels der Algebra bewirkt, und da drei Längen, sogenannte Coordinaten, die Lage eines Punktes im Raume bestimmen, so dienen die Buchstaben oder Quantitäten zu demselben Zwecke in der Sprache der Algebra. Nun lassen sich viele algebraische Aufgaben, welche drei unbekannte oder variable Grössen enthalten, so verallgemeinern, dass man Aufgaben mit vielen solchen Grössen erhält. Und da nun einerseits jedem algebraischen Problem mit einer oder mit zwei oder drei Unbekannten oder Variabeln ein Problem der Geometrie von ein, zwei oder drei Dimensionen entspricht, so kann man andererseits auch sagen, dass jedem algebraischen Problem, welches viele Variable enthält, eine Aufgabe in der Geometrie vieler Dimensionen entspricht.

Es giebt aber noch einen anderen Gesichtspunkt, unter welchem auch der gewöhnliche Raum uns einen vierfaltigen oder selbst mannichfaltigen Charakter darbietet. Die moderne Physik betrachtet den Raum nicht als ein Vacuum, in welchem sich Körper befinden und Kräfte ihr Spiel treiben, sondern vielmehr als ein Plenum, in dem die Materie ausgedehnt ist. Vom physikalischen Gesichtspunkte aus sind die Eigenschaften des Raumes Eigenschaften der Materie oder des Mediums, das ihn erfüllt. In ähnlicher Weise kann man vom mathematischen Gesichtspunkte aus den Raum als einen Ort betrachten, der, als Plenum, erfüllt ist mit geometrischen Elementargebilden, die wir als fundamental annehmen. Diese Gebilde brauchen nicht immer dieselben zu sein. Für verschiedene Zwecke können verschiedene Elemente gewählt werden, und von dem Grade der Complexität des Gegenstandes unserer Wahl wird die innere Structur oder Mannigfaltigkeit des Raumes abhängen.

So kann, um mit dem einfachsten Falle zu beginnen, ein Punkt eine einfach unendliche Menge von Lagen in einer Linie haben, was ein einfaches System von Punkten in einer Linie giebt. Die Linie mag in einer Ebene um einen ihrer Punkte rotiren und giebt so ein zweifaltiges System von Punkten in einer Ebene; und die Ebene mag sich endlich um eine ihrer Geraden drehen, wodurch ein dreifaltiges System von Punkten im Raume entsteht.

Wir wollen aber nunmehr annehmen, dass wir eine Gerade zu unserem Element wählen und uns den Raum mit solchen Geraden erfüllt denken. Dies wird der Fall sein, wenn wir zwei Ebenen, beispielsweise zwei parallele, nehmen und jeden Punkt der einen mit jedem der anderen verbinden. Da nun die Punkte einer Ebene ein zweifaltiges System bilden, so folgt, dass das Liniensystem vierfaltig ist; mit anderen Worten, der Raum, als erfüllt mit Geraden gedacht, ist vierfaltig. Dasselbe Resultat folgt aus der Betrachtung, dass die Geraden in einer Ebene und die Ebenen durch einen Punkt beide zweifaltig sind.

Nehmen wir dagegen eine Kugelfläche als Element, so können wir um jeden Punkt als Centrum eine einfach unendliche Anzahl Kugeln legen; die Anzahl der Mittelpunkte ist aber dreifach unendlich, mithin ist der Raum als das Plenum von Kugeln vierfaltig. Und im Allgemeinen besitzt der Raum, als ein Plenum von Oberflächen, eine Mannigfaltigkeit gleich der Anzahl der Constanten, die zur Bestimmung der Fläche nöthig sind. Wenn auch eine weitere Verfolgung des Gegenstandes über unseren Zweck hinausginge, so darf doch nicht unerwähnt bleiben, dass die Identität in dem vierfaltigen Charakter des Raumes, einerseits abgeleitet von einem System gerader Linien, andererseits von einem System von Kugeln, eng zusammenhängt mit den Principien, die Sophus Lie bei seinen Untersuchungen über die Correlation in diesen Figuren aufgestellt hat.

Nehmen wir einen Kreis als unser Element, so können wir jeden Punkt einer Ebene als ein Centrum, umgeben mit einem einfach unendlichen Systeme von Kreisen betrachten; da aber die Anzahl dieser Centra in einer Ebene doppelt unendlich ist, so bilden die Kreise in einer Ebene ein dreifaltiges System. Nun bilden aber auch die Ebenen im Raume ein dreifaltiges System, woraus folgt, dass der Raum, als Plenum von Kreisen betrachtet, sechsfaltig ist.

Wenn wir wieder einen Kreis als unser Element nehmen, so können wir ihn betrachten als Schnitt entweder einer Kugel oder eines geraden Kreiskegels (der bis auf seine Lage gegeben ist) durch eine zur Achse senkrechte Ebene. Im ersten Fall ist die Lage des Centrums dreifaltig, die Stellungen der Ebenen gleich denen des auf ihnen senkrechten Strahlenbündels sind zweifaltig und der Kugelradius ist einfach; alles zusammen giebt eine sechsfache Mannigfaltigkeit. Im letzteren Falle ist die Lage der Kegelspitze dreifaltig, die Richtung der Achse zweifaltig und der Abstand der Schnittebene einfach mannigfaltig; im Ganzen also wieder sechsfach mannigfaltig wie vorher. Sonach ist der Raum als ein Plenum von Kreisen sechsfach mannigfaltig.

Wenn wir in ähnlicher Weise einen Kegelschnitt als Element nehmen, so können wir ihn als Schnitt eines geraden Kreiskegels, der bis auf die Lage gegeben ist, mit einer Ebene betrachten. Ist die Art des Kegelschnittes bestimmt, so muss die Schnittebene unter bestimmtem Winkel gegen die Achse geneigt sein; anderenfalls kann sie jede beliebige Neigung annehmen. Wenn es so ist, so ist die Lage der Spitze dreifach mannigfaltig, die Richtung der Achse ist zweifach, der Abstand der Schnittebene von der Spitze einfach und die Richtung dieser Ebene einfach bei einem Kegelschnitte von besonderer Art, zweifach bei einem unbestimmten Kegelschnitt. Daher ist der Raum als ein Plenum bestimmter Kegelschnitte von siebenfacher, als ein Plenum von Kegelschnitten im Allgemeinen von achtfacher Mannigfaltigkeit. Und so fort für Curven höherer Ordnung.

Dies ist in der That das ganze Wesen und Geheimniss des mannigfaltigen Raumes. Er wird nicht ernstlich betrachtet als etwas Reelles in demselben Sinne wie der gewöhnliche Raum; er ist eine Art der Auffassung oder eine Methode, welche von der Scene verschwindet, wenn sie ihrem Zwecke gedient hat. Einem Regenbogen gleich, den man mit der Hand zu ergreifen versucht, entgeht sie unserer Berührung; aber gleich wie ein Regenbogen entsteht sie aus realen Bedingungen bekannter und fassbarer Quantitäten, bildet bei richtiger Anwendung einen wahren und gültigen Ausdruck von Naturgesetzen und dient einem bestimmten Zwecke in der Wissenschaft, von der sie einen Theil bildet.

Sucht man nach einem Gegenstück im gewöhnlichen Leben, so darf wohl daran erinnert werden, dass die Perspective in der Malerei selbst eine Methode darstellt, die der besprochenen nicht unähnlich ist, und dass die dritte Dimension des Raumes, wie sie in dem Gemälde dargestellt wird, ihren Ursprung im Geiste des Malers hat und ein Erzeugniss seiner Kunst ist, aber keine wirkliche Existenz auf der Leinwand besitzt, die den Untergrund seines Kunstwerkes bildet. Und wenn wir uns zur Literatur wenden, wenn in Märchen und erdichteten Erzählungen Vergangenes und Zukünftiges wie gegenwärtig dargestellt wird, hat da nicht die poetische Phantasie die Zeit in Correlation zu den drei Dimensionen des Raumes gesetzt und alles zugleich in einem gemeinsamen Brennpunkte vereinigt? Und wenn der Raum, der schon mit materiellen Substanzen erfüllt ist, im Geiste noch bevölkert wird mit immateriellen Wesen, kann man da nicht sagen, dass die Einbildung ein neues Element zu der Capacität des Raumes, eine vierte Dimension hinzugefügt hat, von welcher die Erfahrung uns keine Kunde giebt?

Die dritte Methode, die wir zum Gegenstande specieller Bemerkungen machen, ist die sogenannte nicht-euklidische Geometrie. Der Gedankengang, welcher zu ihr geführt hat, lässt sich in allgemeinen Zügen folgendermassen andeuten: einige Eigenschaften des Raumes, welche man in Anbetracht ihrer Einfachheit beim Aufbau des Systems als fundamental betrachtet hat, sind jetzt als specielle Fälle allgemeinerer Eigenschaften erkannt worden. So können die Ebene und die gerade Linie als specielle Fälle von Oberflächen und Linien mit überall gleicher oder constanter Krümmung betrachtet werden. Und es ist wohl nicht schwer einzusehen, dass, wenn wir die besonderen Bestimmungen der Ebenflächigkeit und Geradlinigkeit aufgeben, manche Eigenschaften der geometrischen Figuren, die wir als fundamental zu betrachten gewohnt sind, tiefgreifende Aenderungen erfahren. So kann man eine Ebene als Specialfall einer Kugel ansehen, nämlich als die Grenze, der sich die Kugel nähert, wenn ihr Halbmesser unbegrenzt wächst. Aber selbst diese Auffassung berührt einen auf eine der einfachsten geometrischen Figuren bezüglichen Elementarsatz. In ebenen Dreiecken sind nämlich die drei Innenwinkel zusammen gleich zwei Rechten; in den Dreiecken, die man auf einer Kugel zeichnen kann, gilt dieser Satz nicht mehr. Dazu liessen sich noch weitere Beispiele beifügen.

Diese Modificationen können aber nicht nur unsere Ideen über einzelne geometrische Figuren, sondern auch die Axiome der Wissenschaft selbst berühren. So wird die Vorstellung, welche thatsächlich der euklidischen Methode zu Grunde liegt, dass eine geometrische Figur im Raume bewegt werden kann ohne Wechsel der Grösse oder Aenderung der Gestalt, gänzlich hinfällig oder wird nur annäherungsweise richtig in einem Raume, in welchem Dimensionen und Gestalt abhängig sind von der Lage. Beispielsweise, wenn wir blos den Fall von Figuren betrachten, die auf einer abgeplatteten Kugel, wie die Erdoberfläche, oder auf einer Eierschale gezeichnet sind, so kann man solche Figuren nicht ohne Veränderung der Gestalt auf der Fläche hingleiten lassen, wie es allerdings bei Figuren der Fall ist, die auf einer Ebene oder einer Kugel gezeichnet sind. Diese Verallgemeinerungen sind aber ferner nicht beschränkt auf den Fall von Figuren auf einer Fläche, sie lassen sich auch auf stereometrische Figuren in einem Raume anwenden, in welchem die Configuration sich von Punkt zu Punkt ändert. Wir können uns beispielsweise einen Raum denken, in welchem unser Massstab sich ändert wie er sich ausdehnt oder fortbewegt nach der einen oder der anderen Richtung; kurz einen Raum, dessen geometrische Dichtigkeit nicht gleichförmig vertheilt ist. Wir können uns einen solchen Raum versinnlichen als ein Gebiet mit einer mehr oder weniger verwickelten Temperaturvertheilung und unseren Massstab als einen Stab, der augenblicklich der Ausdehnung oder Zusammenziehung fähig ist unter dem Einflusse der Wärme; oder wir können uns den Raum gleichsam als krystallinisch in seiner geometrischen Bildung vorstellen und denken, dass unser Massstab die Structur des Ortes, in welchem er angewandt wird, annimmt. Diese Ideen sind schwer fassbar, wenigstens für den Anfang; Helmholtz hat aber auf eine sehr bekannte Erscheinung hingewiesen, die als Diagramm solch einer Art Raum betrachtet werden kann. Das Bild, welches durch Reflexion von einem ebenen Spiegel gebildet wird, kann als eine getreue Darstellung des gewöhnlichen Raumes betrachtet werden, in welchem, den Regeln der Perspective folgend, jeder Gegenstand in derselben Form und Grösse auftritt, was auch seine Lage sein mag. In gleicher Weise kann man ein Bild, das durch Reflexion von einem gekrümmten Spiegel gebildet wird, als Repräsentation eines Raumes betrachten, in welchem Dimensionen und Gestalt von der Lage abhängen. So erscheinen in einem gewöhnlichen Convexspiegel die Objecte kleiner in dem Masse, wie sie seitwärts vom Mittelpunkte des Bildes zurücktreten; gerade Linien werden gekrümmt; Objecte, die auf der Vorderseite unendlich weit entfernt sind, erscheinen auf der Hinterseite in der Entfernung der Brennweite. Und so könnte man durch geeignete Modificationen in der Krümmung des Spiegels in ähnlicher Weise Darstellungen von Räumen verschiedener Configuration erhalten.

Die Verschiedenartigkeit dieser Räume ist sonach unendlich gross; sie ändern sich mit der Art, wie wir unsere Vorstellung vom gewöhnlichen Raume verallgemeinern. Aber jede solche Vorstellung kann als Grundlage eines Systems der Geometrie gelten, dessen Gesetze, als Ergebniss strenger Schlüsse, eine Gültigkeit und Wahrheit besitzen, die nicht geringer ist, als bei denen, welche uns gewöhnlich geläufig sind. Da nun thatsächlich solche Systeme construirt worden sind, so hat man nicht unnatürlich die Frage aufgeworfen, ob in der Natur oder Aussenwelt etwas existirt, dem sie entsprechen; ob nicht, wenngleich die gewöhnliche Geometrie für unsere beschränkte Erfahrung vollständig ausreicht, für Wesen mit ausgedehnterer Fassungskraft oder schärferem Unterscheidungsvermögen ein allgemeineres Schema nothwendig sein mag. Beispielsweise wenn jene für das Sonnensystem passen mag, ist es gestattet, anzunehmen, dass sie nicht mehr stimmt, wenn man sie auf Entfernungen anwendet, die bis zu den Fixsternen reichen oder noch darüber hinaus? Oder wenn unser Gesicht im Stande wäre, die kleinsten Gestaltungen der Theile des Raumes zu unterscheiden, welche unseren gewöhnlichen Kräften unendlich klein erscheinen, dürften wir etwa erwarten, zu finden, dass unsere ganze gewöhnliche Geometrie nur ein specieller Fall ist, der freilich für den täglichen Gebrauch ausreicht, aber in Wirklichkeit nur eine rohe Annäherung an ein wahreres, obgleich vielleicht complicirteres Schema ist? Spuren derartiger Fragen sind in der That in den Schriften einiger unserer grössten und originellsten Mathematiker zu finden. Gauss, Riemann und Helmholtz haben Vermuthungen ausgesprochen, die gleichsam in verschiedenen Richtungen von einem gemeinsamen Centrum ausstrahlen, während Cayley, Sylvester und Clifford in England, Klein in Deutschland, Lobatscheffsky in Russland, Bolyai in Ungarn und Beltrami in Italien nebst vielen Anderen ähnliche Ideen ausgebildet haben mit den mancherlei Modificationen, wie sie ihren individuellen Richtungen entsprechen. Aber auf die Hauptfrage muss die Antwort verneinend lauten. Und, um Newton's Worte zu gebrauchen, „da die Geometrie in der mechanischen Praxis begründet ist“, so muss die Antwort bleiben, bis unsere Erfahrung eine andere wird, als sie gegenwärtig ist. Doch sind, trotz alledem, die verallgemeinerten Vorstellungen vom Raume nicht ohne praktischen Nutzen. Das Princip, den Raum einer Art darzustellen durch einen von anderer Art, und Figuren, die dem einen angehören durch ihre analogen im anderen, ist nicht nur in der reinen Mathematik als berechtigt anerkannt, sondern hat auch längst schon in der Kartographie Anwendung gefunden. Auf Karten und Plänen werden geographische Positionen, Küstenumrisse und andere Gestaltungen, die in Wahrheit der Erdoberfläche angehören, in der Ebene dargestellt; und einer jeden Darstellungs- oder Projectionsart entspricht eine bestimmte Correlation zwischen Sphäroid und Ebene. Man kann auch die Methode der darstellenden Geometrie und alle ähnlichen, bei Militär- und Civilingenieuren üblichen Methoden hierher rechnen.

Es ist oft die Frage aufgeworfen worden, ob nicht die moderne Forschung auf dem Gebiete der reinen Mathematik die Grenzen der physikalischen Anwendung derart überschritten hat, dass sie praktisch nutzlos ist? ob nicht der Analyst und Geometer jetzt und für eine lange Zeit noch mit Fug und Recht sagen sollte: „Hic artem remumque repono", um seine Aufmerksamkeit der Mechanik und Physik zuzuwenden? Dass die reine Mathematik die angewandte überholt hat, ist völlig richtig; dass aber die erstere deshalb nutzlos sein solle, ist weit von der Wahrheit entfernt. Ihr Nutzen zeigt sich oft an Stellen, wo man es nicht erwartet; Beispiele sind die Hilfe für Classification physikalischer Quantitäten, die von den Ideen des Quaternionen-Calculs geliefert worden sind; die Vortheile, welche der physischen Astronomie aus Lagrange's Gleichungen und Hamiltons Princip der veränderlichen Action erwachsen sind; an dem Werthe complexer Quantitäten und den Eigenschaften allgemeiner Integrale und allgemeiner Theoreme über Integration für die Theorie der Elektricität und des Magnetismus. Der Nutzen solcher Untersuchungen kann in keinem Falle im Voraus bestimmt oder nur eingebildet werden; wer z. B. hätte gedacht, dass der Calcul der Formen oder die Theorie der Substitutionen viel Licht auf die gewöhnlichen Gleichungen werfen würde? oder dass Abel'sche Functionen und hyperelliptische Transcendente uns etwas über die Eigenschaften der Curven lehren würden? oder dass der

Operationscalcul uns in irgend einer Weise zur Kenntniss der Gestalt der Erde verhelfen würde? Wir wollen jedoch bei solchen technischen Punkten jetzt nicht weiter verweilen. Wenn es aber hinlänglich erwiesen ist, dass eine dieser verallgemeinerten Ideen uns in den Stand setzt, als einig und zusammengehörig Eigenschaften und Processe zu behandeln, die, vom gewöhnlichen Gesichtspunkte aus betrachtet, merkliche Verschiedenheiten zeigen, so werden sie ihre Existenzberechtigung nachgewiesen haben, und wenn wir sie benutzen, werden wir nicht im blossen Schatten wandeln oder unser Hirn vergeblich beunruhigen.

Diese Erweiterungen der mathematischen Ideen würden aber erdrückend wirken, würden sie nicht andererseits aufgewogen durch einige Vereinfachungen in den Processen, die gegenwärtig in Anwendung kommen. Von diesen Hilfsmitteln der Calculs sollen nur zwei namhaft gemacht werden, nämlich Symmetrie der Form und mechanische Hilfsmittel, oder auch Mathematik als eine Kunst und Mathematik als Handwerk.

Zunächst also Symmetrie der Form. Es giebt viele Fälle in der Algebra, wo lange Rechnungsprocesse anfangs unvermeidlich scheinen. Die Resultate werden oft das erste Mal auf einem verschlungenen Irrwege von Formeln gewonnen, wo wir besten Falles unseren Process Schritt für Schritt mit Sicherheit ausführen können, ohne einen allgemeinen Ueberblick des zurückgelegten Weges und noch weniger des fernerhin zu befolgenden zu haben. Aber fast in unserem Zeitalter ist eine neue Methode erfunden worden, um diese Verwickelung zu lösen. Bestimmter gesprochen, die Methode ist nicht neu, denn sie ist den Processen der Algebra selbst inhärent, und einzelne Beispiele von ihr, vielleicht unbeachtet und übersehen, kann man fast in allen mathematischen Werken finden. Von Lagrange und, bis zu einer gewissen Ausdehnung auch von Gauss ist unter den älteren Autoren die in Rede stehende Methode als ein Princip erkannt worden; aber ausser diesen kann vielleicht kein anderer namhaft gemacht werden bis zu einer Zeit, die noch im Bereiche unserer Erinnerung liegt. Die Methode besteht in der Symmetrie des Ausdrucks. In algebraischen Formeln treffen gewisse Verbindungen von Quantitäten zusammen und kehren wieder, und durch eine passende Wahl dieser Quantitäten können die verschiedenen Combinationen symmetrisch gemacht und auf wenige wohl bekannte Typen zurückgeführt werden. Ist dies geschehen und ist eine solche Combination ausgerechnet worden, so kann das Uebrige, und manches Resultat dazu, oft ohne weitere Rechnung mittels blosser Vertauschung der Buchstaben niedergeschrieben werden. Symmetrische Ausdrücke ersparen uns ausserdem sowohl beim Lesen als beim Schreiben viel Zeit und Mühe. Anstatt sich mühsam durch eine Reihe von Ausdrücken durchzuarbeiten, die, obgleich der Reihe nach abhängig von einander, doch keine äusseren Aehnlichkeit mit einander haben, können wir symmetrische Formeln, mögen sie noch so lang sein, fast mit einem Blicke erfassen. Eine Seite solcher Formeln wird zu einem Gemälde; bekannte Formen erscheinen in bestimmten Gruppirungen; ihre relative Stellung, ihre Perspective kann man sagen, ihre Belichtung und Beschattung drücken ihren Sinn ebensowohl durch die künstlerische Auffassung als durch einen bewussten Denkprocess aus. Wenige Principien haben in reicherem Masse ausgebreitete Ideen oder neue Blicke und Beziehungen erweckt, als das eben besprochene. Um von Fragen, die sich auf ebene Figuren beziehen, überzugehen zu den auf den Raum bezüglichen, von Bedingungen mit wenig Graden der Willkür zu solchen mit vielen — kurz von beschränkteren zu weniger beschränkten Problemen, haben wir oft Nichts weiter zu thun, als unserer schon fertigen Anordnung von Buchstaben oder Symbolen noch eine Zeile oder Columne beizufügen und dann das so erweiterte Theorem sinnbildlich zu lesen.

Wir kommen nun zu den mechanischen Hilfsmitteln. Wenn Babbage von der Schwierigkeit sprach, sich der Genauigkeit langer numerischer Rechnungen in der theoretischen Astronomie zu vergewissern, so wies er darauf hin, dass die Wissenschaft, welche an sich die genaueste und gewisseste von allen ist, durch diese Schwierigkeiten in einigen ihrer Resultate ungenau und unsicher geworden ist. Ohne Zweifel waren es auch derartige Betrachtungen, verbunden mit der Abneigung, geübte Arbeit zu verwenden, wo ungeübte ausreichen kann, welche ihn zur Erfindung seiner Rechenmaschine führte. Der Gedanke, mechanische Arbeit an die Stelle der geistigen zu setzen, ist seitdem nicht erloschen, denn abgesehen von den Rechenmaschinen, deren Zahl Legion ist (von Napier's Stäbchen und Stanhope's Calculator zu Scheutz's und Thomas' Maschinen, die jetzt in der Praxis verwendet werden), ist vor Kurzen eine Erfindung gemacht worden, die eine noch schwierigere Aufgabe betrifft. In der That hat Prof. James Thomson jüngst eine Maschine construirt, welche durch blosse Reibung einer Scheibe, eines Cylinders und einer Kugel eine Menge verwickelter Rechnungen auszuführen vermag, welche in den Anwendungen der höheren Mathematik auf physikalische Probleme vorkommen.[20]) Mit ihrer Hilfe dürfte ein ungeübter Arbeiter in einer gegebenen Zeit die Arbeit von zehn geübten Rechnern verrichten. Die Maschine lässt sich in gleicher Weise zur Berechnung der Erscheinungen der Ebbe und Fluth, des Magnetismus, der meteorologischen und vielleicht auch aller anderen periodischen Phänomene verwenden. Sie löst Differentialgleichungen erster und vielleicht auch höherer Ordnung. Und durch die nämliche Erfindung ist die Aufgabe, die freie Bewegung einer beliebigen Anzahl von sich gegenseitig anziehenden Partikeln zu ermitteln, frei von den beschränkenden Voraussetzungen, die in der Theorie des Mondes und der Planeten erforderlich sind, auf den einfachen Process der Umdrehung einer Kurbel reducirt.

Wenn Faraday den experimentellen Theil eines physikalischen Problems erledigt hatte und nun wünschte, dass es mathematisch behandelt werde, pflegte er respectlos zu sagen: „Uebergebt es den Rechnern“. Die Wahrheit ist immer sonderbarer als die Einbildung, und wenn er bis in unsere Tage gelebt hätte, würde er mit vollem Rechte haben sagen können: „Uebergebt es der Maschine.“

Hätte es die Zeit gestattet, so hätten die vorhergehenden Gegenstände wohl Anlass gegeben, darauf hinzuweisen, dass die Mathematiker, obwohl blos mit Abstractionen beschäftigt, doch manche der Untersuchungsmethoden benutzen, welche in anderen Wissenschaften üblich sind, wie Beobachtung, Experiment, Induction, Phantasie. Dies ist aber um so weniger nöthig, als der Gegenstand schon in sehr geschickter Weise, wenngleich mit grösserer Kürze als erwünscht gewesen sein dürfte, von Professor Sylvester in der Eröffnungsrede der Section A. auf der Versammlung in Exeter behandelt worden ist.[21])

Für eine erschöpfende Behandlung des Gegenstandes würde noch eine Frage übrig bleiben, welche in gewissem Sinne allen anderen zu Grunde liegt und welche fast durch alle Zeiten hindurch auf denkende Geister eine Anziehung ausgeübt hat, die Frage nämlich nach dem Ursprunge der mathematischen Ideen. Sind sie als unahhängig von der Erfahrung anzusehen oder als abhängig? Die Frage ist bald in dem einen, bald in dem anderen Sinne beantwortet worden. Aber die Abwesenheit einer befriedigenden Lösung kann im Ganzen dahin gedeutet werden, dass keine Antwort in dem Sinne möglich ist, in welchem die Frage gestellt wurde; oder vielmehr, dass keine Frage hier vorliegt, ausgenommen was das Geschichtliche der Thatsachen anlangt. Und auch, wenn wir, was sicherlich nothwendig, unterscheiden zwischen der Entstehung der Ideen in dem Individuum und ihrem Ursprunge in der Nation oder der Menschheit, würden wir zu demselben Schlusse kommen. Nehmen wir den Fall eines Individuums, so besteht Alles, was wir thun können, darin, über unsere eigene Erfahrung zu berichten; wie wir mit Kugeln und Aepfeln spielten, wie wir das Einmaleins, Brüche, die Regeldetri erlernten; wie es uns nachher Vergnügen machte, zu erkennen, dass die gewöhnlichen Dinge sich nach den Gesetzen der Zahlen richten, und später, wie wir zu der Erkenntniss kamen, dass dieselben Gesetze auch für Musik, Mechanik, Astronomie, Chemie und in vielen anderen Fällen gelten. Und dann, wenn wir versuchen, unsere eigenen geistigen Processe zu analysiren, finden wir, dass mathematische Ideen genau in demselben Wege aufgenommen worden sind, wie alle anderen, nämlich durch Lernen, durch Erfahrung und durch Nachdenken. Der auffallende Unterschied zwischen der Art, sie anfänglich zu erfassen und ihrer schliesslichen Nothwendigkeit, rührt von dem Unterschiede der Ideen selbst her, von dem Vorwalten quantitativer Betrachtungen über qualitative in der Mathematik, von den Begriffen absoluter Gleichheit und Identität, welche sie einschliessen.

Wenden wir uns nun zu der anderen Frage: wie hat die Welt im Ganzen die Ideen der Zahl und Form sich angeeignet und ausgebildet? wie können wir die Kluft überspannen, die den Wilden, der nur mit Hilfe äusserer Objecte zählte, und dem 15, „die halben Hände und beide Füsse" war, trennt von Newton oder Laplace? Die Antwort ist die Geschichte der Mathematik und ihrer folgeweisen Entwickelungen, Arithmetik, Geometrie, Algebra u. s. w. Der erste und grösste Schritt bei alledem war der Uebergang von der concreten Zahl zur abstracten. Es war dies der Anfang nicht nur der Mathematik, sondern allen abstracten Denkens. Der Process war derselbe, wie bei dem Individuum. Es war da derselbe Eindruck der Evidenz, dieselbe ungesuchte, erfahrungsmässige Bestätigung, die gleiche Erkenntniss allgemeiner Gesetze, welche alle Bestrebungen und Verhältnisse des Lebens durchziehen. Kein Wunder, wenn unter solchen Umständen die Mathematik gleich anderen Dingen, und vielleicht mit besserer Entschuldigung, nach einiger Zeit mit Mystik umkleidet oder dass sie selbst noch in moderner Zeit auf eine aprioristische

Grundlage gestellt wurde, wie in der Kant'schen Philosophie. Die Zahl ergab sich bald als ein vielen Zweigen des Wissens gemeinsames Element, daher man sie rasch als den Schlüssel zu allen betrachtete. Sie gab Bestimmtheit des Ausdruckes, wenn nicht Klarheit des Gedankens, den Ideen, welche dem noch ungeschulten Geiste vorschwebten, und regte selbst neue Gedanken an. In „dem Einen", „dem All", „dem Vielen in Einem", Ausdrücken rein arithmetischen Ursprungs, gab sie den ersten rohen Vorstellungen der Menschen von Gott und der Welt Ausdruck. In „dem Gleichen", „dem Körperlichen", „dem Geraden", „dem Krummen", welche Ausdrücke noch als Redefiguren fortleben, lieferte sie Worte für die moralischen Begriffe der Menschen und machte sie lebendiger, indem sie ihnen Kraft des Ausdrucks verlieh. Darin liegt das grosse und dauernde Interesse der Ueberreste, welche uns von der pythagoreischen Philosophie geblieben sind.

Die aufeinander folgenden Processe der Mathematik führten auf die aufeinander folgenden Processe der Logik; aber erst lange nachdem die Menschheit sich zu abstracten Ideen erhoben hatte, kam sie zu einer klaren Vorstellung der gegenseitigen Verbindung derselben. Die leitenden Ideen der Mathematik wurden zu leitenden Ideen der Logik. Das „Eine" und das „Viele" ging über in das „Ganze" und seine „Theile" und weiter in das „Universelle" und das „Particulare". Die Trugschlüsse der Logik sowie das bekannte Sophisma von Achilles und der Schildkröte, gehören ihrer Natur nach beiden Wissenschaften an. Und vielleicht ist der Begriff der Unendlichgrossen und Unendlichkleinen, ebenso wie der der Negation, in früherer Zeit von der Logik auf die Mathematik übertragen worden. Die Verbindung unserer Zahlenideen ist aber wahrscheinlich älter als die Verbindung irgend welcher anderen Ideen, und in der That hatten Geometrie und Arithmetik schon bedeutende Fortschritte gemacht, als Aristoteles den Syllogismus erfand.

Allgemeine Ideen waren auch ausser den mathematischen vorhanden; wahre Geistesblitze, welche zeigten, dass allgemeine Gesetze vorhanden sein müssen, nach denen sich die Welt regelt, welche dieselben aber blos bei gelegentlichem Lichtschimmer erkennen liessen und durch die Verdrehungen eines unvollkommenen Wissens; und obgleich die einzigen Berichte, die von ihnen noch vorhanden sind, nur in ungenauen Darstellungen späterer Schriftsteller bestehen, so dürfen wir doch nicht vergessen, dass wir dem Dasein solcher Ideen nicht nur den Anfang, sondern selbst die Möglichkeit der Physik verdanken. Diese allgemeinen Ideen waren aber zu weit in ihrem Umfange und, wenigstens in früher Zeit, mit den Objecten der Erfahrung durch zu unbestimmte Bande verknüpft, um von den meisten Geistern vollständig erfasst werden zu können, und so kam es, dass eine Form einer solchen Idee für ihre einzige Form, ein Beispiel für die Idee selbst genommen wurde; und die Philosophie, unfähig, sich auf der Höhe der Ideen zu erhalten, fiel zurück in die Abstractionen der sinnlichen Wahrnehmung und mit Vorliebe derer, die am ehesten bei der Hand waren, der mathematischen. Plato's Ideen wurden zu einer Zahlenlehre, die Mathematik verlor sich in Mysticismus, Neuplatonismus u. s. f. So hat die Mathematik durch viele Zeitalter hindurch, durch gute und böse Zeit, eine ungesuchte Herrschaft geübt. Es ist dieser Wissenschaft begegnet, wie vielen anderen auch, dass ihre wärmsten Anhänger nicht immer ihre besten Freunde gewesen sind. Die Mathematik ist oft an Gegenstände herangebracht worden, wo ihre Anwesenheit nur von zweifelhaftem Nutzen gewesen ist.[22]) Wenn sie dem Stile Präcision verliehen hat, so ist diese Präcision bisweilen bis zum Uebermass getrieben worden, wie bei Spinoza und vielleicht auch bei Descartes; wenn sie nach Klarheit des Ausdrucks in der Philosophie gestrebt hat, so hat diese Klarheit bisweilen den Schein einer Vollendung erregt, die nicht immer vorhanden ist; wenn sie in der Theologie zur Bestimmtheit beigetragen hat, so ist diese Bestimmtheit oft trügerisch gewesen und nur auf Kosten des geistigen Gehalts erlangt worden.[23]) Und, wenn wir zur Neuzeit übergehen, wenn wir auch die logischen Maschinen des Earl Stanhope und Stanley Jevons', die formale Logik von Du Morgan und den Calcul von Boole bewundern; wenn wir als Mathematiker eine Genugthuung empfinden, dass diese Kunstwerke, deren Möglichkeit a priori klar war, ausgeführt worden sind, so müssen wir doch im Sinne behalten, dass ihre Anwendung thatsächlich beschränkt ist auf Fälle, deren Object von vollkommen gleichartigem Charakter ist, dass sie aber über diesen Bereich hinaus das Denken eher verwirren als unterstützen.

Nicht ohne Zusammenhang mit dieser innigen Verknüpfung der Ideen und ihres Ausdruckes ist die Thatsache, dass, was auch immer Ursache und was Wirkung gewesen sein mag, oder ob beide wechselsweise als Ursache und Wirkung betheiligt gewesen sein mögen, das Blüthealter der classischen Kunst gleichzeitig war mit der ersten grossen Entwickelung der mathematischen Wissenschaft.[24]) Schon früher ist hingewiesen worden auf die Wichtigkeit der mathematischen Präcision, die sich in der technischen Kunst während des Cinquecento kund giebt; es erübrigt nur noch die Bemerkung, dass, wenn man weiter zurückblickt, man erkennt, wie Bildhauerkunst und Malerei, Baukunst und Musik, ja selbst die Poesie einen neuen, wenn nicht den ersten wahren Impuls empfingen in der Zeit, als die geometrische Form neu gebildet aus den Händen der Mathematiker kam und als die ersten Ideen von Harmonie und Proportion ihren fröhlichen Wettkampf begannen in der Morgendämmerung der Kunst.

Ob die Ansichten, bei denen wir hier verweilt haben, in irgend einer Weise neu oder ob sie blos aus Gewohnheit oder Neigung unbeachtet geblieben, darauf kommt wenig an. Wie es sich immer damit verhalten mag, so können sie doch ein Mittel bieten, die starre Abneigung zu beseitigen, welche Literatur und Kunst nur zu oft geneigt sind gegen Wissenschaft jeder Art zu hegen. Es ist eine alte Erfahrung, dass einander besser kennen zu lernen, mehr bei den gegenseitigen Aehnlichkeiten als bei den Verschiedenheiten zu verweilen, der erste Schritt zu einem besseren Einvernehmen zwischen zwei Parteien bildet; aber in wenigen Fällen erscheint dieselbe richtiger als in dem hier besprochenen. Das allgemeine Wachsthum wissenschaftlicher und anderer Neigungen bis zur Zeit der Reife zu erkennen, führt nicht blos zu einer reichen Ernte, sondern es ist auch eine Sache der Klugheit, damit wir nicht etwa bei dem Versuche, das Unkraut aus dem Weizen zu gäten, gleichzeitig das vernichten, was ebenso werthvoll ist als Weizen. Als Pascal's Vater die Thür von seines Sohnes Studirzimmer vor mathematischen Büchern verschlossen und denselben mit Latein und Griechisch eingesperrt hatte, fand er bei seiner Rückkehr die Wände vollgeschrieben mit Formeln und Figuren, dem Erzeugnisse, das dem Geiste des Knaben verwandter war. Zum Glück für den Knaben und zum Glück auch für die Wissenschaft wurde die Mathematik nicht ausgerodet, sondern durfte aufwachsen mit anderen Dingen. Und Alles in Allem wurde der Knabe deshalb zuletzt kein schlechterer Schüler oder Literat. Aber, um die Wahrheit zu sagen, wenn man die strenge Trennung betrachtet, welche noch in der Erziehung und während unserer früheren Jahre zwischen Literatur und Wissenschaft besteht, so können wir uns kaum verwundern, wenn sie sich später bei ihrem Zusammentreffen im Leben als Fremde gegenübertreten, oder wenn das strenge Gewand, die sonderbaren Werkzeuge und fremdartigen Producte der letzteren wenig Reiz darbieten im Gegensatz zu der fröhlichen Gesellschaft der anderen. Der Tag ist noch jung und in der Frühdämmerung erscheinen viele Dinge unheimlich und phantastisch, die bei vollem Tageslichte sich als bekannt und nützlich erweisen. Die Ergebnisse der Wissenschaft, die zu einer Zeit blos als Steine des Anstosses betrachtet wurden, die auf den Weg gestreut sind, werden sich schliesslich als Schrittsteine erweisen, die sorgfältig hingelegt sind, um einen Pfad über schwierige Stellen zu bilden für die Kinder des Lichts.

Die Beispiele, bei denen wir verweilt haben, sind nur einige wenige von den vielen, in denen die Mathematik als herrschend und regierend über eine Fülle von Gegenständen gefunden werden mag. Als oberstes Ergebniss der Erfahrung, als Fachwerk, in welchem die mannigfaltigsten Offenbarungen der Natur niedergelegt sind, erhebt unsere Wissenschaft den Anspruch, Schiedsrichter über alles Wissen zu sein. Sie bringt in Wahrheit keine neuen thatsächlichen Elemente herbei, nach welchen man anderwärts suchen muss, aber sie sichtet und ordnet dieselben, sie verkündet die Gesetze, denen sie sich fügen müssen, wenn diese Elemente in präcise Resultate übergehen sollen. Aus den Daten eines Problems kann sie unfehlbar alle möglichen Folgerungen ziehen, diejenigen sowohl, welche von Haus aus gesucht wurden, wie auch andere, nicht geahnte; sie kann aber Nichts herbeibringen, was nicht in der ursprünglichen Annahme verborgen lag. Die Mathematik kann uns nicht sagen, ob Zeit und Raum Grenzen haben oder nicht; ihr sind beide von unbegrenzter Ausdehnung, und das in solchem Sinne, dass damit weder bejaht noch verneint wird, dass sie unendlich oder endlich sind. Die Mathematik kann uns nicht sagen, ob die Materie continuirlich oder diskret in ihrer Structur ist; ihr ist es gleichgültig, ob sie das Eine oder das Andere ist, und ihre Schlüsse sind unabhängig von jeder der beiden besonderen Hypothesen. Die Mathematik kann uns Nichts sagen über den Ursprung der Materie, ihre Schöpfung oder Vernichtung, sie handelt von ihr nur in einem Zustande des Seins; aber innerhalb dieses Zustandes mögen die Arten der Existenz variiren von unseren elementarsten Conceptionen bis zu unserer verwickeltsten Erfahrung. Die Mathematik kann uns Nichts berichten über das, was jenseits der von ihr behandelten Probleme liegt; sie führt dieselben bis zu ihrer Grenze, dort bleibt sie stehen und beobachtet unverbrüchliches Schweigen über das grosse Gebiet, das darüber hinaus liegt.

Von gleichem Umfang wie Zeit und Raum ist das Herrschergebiet der Mathematik; innerhalb dieses Bereiches ist ihre Herrschaft umumschränkt. Anders als nach ihrer Ordnung kann Nichts bestehen; nichts findet statt in Widerspruch mit ihren Gesetzen. Auf ihrer geheimnissvollen Gesetztafel ist geschrieben für diejenigen, die es zu lesen wissen, das was gewesen ist, was da ist und was da sein wird. Jedes Ding, welches ein Gegenstand des Wissens ist, hat Zahl, Ordnung oder Lage; und diese bilden die ersten Grundlinien für einen Ueberblick des Weltalls. Wenn unsere zu schwachen Hände nicht in alle Einzelheiten zu folgen vermögen, so ist doch ihre Rolle mit unfehlbarem Griffel aufgezeichnet und ihr Werk kann nicht bestritten werden. So weit ist der Umfang der mathematischen Wissenschaft, so unendlich mag er sich noch erweitern über unsere heutigen Hilfsmittel der Operationen hinaus, dass wir in manchen Augenblicken uns versucht fühlen, niederzufallen mit mehr als Ehrerbietung vor ihrer hohen Majestät. Aber so bestimmt begrenzt sind ihre Zusagen und ihre Macht, über so vieles, was wir wissen möchten, bietet sie keinerlei Auskunft, dass in anderen Angenblicken wir so schwach sind, ihre Ergebnisse als eitel zu verachten und sie zuzückzuweisen als einen Stein, wo wir nach Brot verlangt haben. Wenn der eine Anblick der Sache unsere Hoffnungen ermuthigt, so zügelt der andere unser Verlangen; und am weisesten ist vielleicht derjenige und am glücklichsten unter seinen Genossen, welcher nicht nur die Mathematik studirt, sondern auch die grössere Lehre sich angeeignet hat, welche sie indirect lehrt, nämlich unsere Ansprüche einzuschränken auf dasjenige, was möglich ist, unsere Wünsche zu mässigen auf das, was erreichbar, unsere Hoffnungen auf das zu richten, dessen Erlangen, wenn nicht unmittelbar thunlich, so wenigstens klar im Bereiche unserer Fassungsgabe ist. Was jetzt noch jenseits unseres

Gesichtskreises liegt, kann eines Tages auf eine uns jetzt noch unbekannte Weise in unseren Bereich fallen; unsere Wissenschaft aber lehrt uns, indem wir immer mit Goethe nach „Licht, mehr Licht“ verlangen, unsere Aufmerksamkeit auf das zu concentriren, was unsere Kräfte vermögen, und geduldig der Zukunft die Lösung von Aufgaben zu überlassen, zu denen wir gegenwärtig weder Ja noch Nein sagen können.

Innerhalb des so angezeigten Gebietes ist Erkenntniss im wahren Sinne des Wortes zu suchen. Andere Arten von Einfluss finden sich in der Gesellschaft und im individuellen Leben, andere Formen der Energie ausser der intellectuellen. Da ist die potentielle Energie der Sympathie, die actuelle der Arbeit, da sind die Wechselfälle des Lebens, die Mannigfaltigkeit der Umstände, Gesundheit und Krankheit, all die verwirrenden Ausgänge, glückliche und unglückliche, der Triebe und Leidenschaften. Aber wenn auch das Buch des Lebens zur Zeit noch nicht im Lichte der Wissenschaft allein gelesen werden kann, und die Pilger nicht befriedigt sind durch die wenigen Bruchstücke des Wissens, die jetzt in unserer Hand sind, so würde es doch schwer sein, den wahrhaft wundersamen Segen zu überschätzen, der durch freigebige Vertheilung dessen, was wir bereits besitzen, und durch Beschränkung unserer Sehnsucht auf die Grenzen des Erreichbaren hervorgebracht wird.

In dem Masse, wie methodische Arbeit besser ist als ein Impuls, bewusstes Streben besser als vereinzelte Thätigkeit, klarer Sonnenschein besser als unregelmässiger Reflex und bestimmter Ausdruck besser als ungewisser Schall, in dem Masse wie Wissenschaft besser ist als Vermuthung, Beweis besser als Meinung; in dem Masse wird der Mathematiker die Unterscheidung zwischen dem Gewissen und dem Ungewissen schätzen und eine richtige Beurtheilung der Erfolge, welche von einer bewegenden Kraft oder der anderen abhängen. Während er auf der einen Seite seinen Nachbarn volle Freiheit lässt, das Unbekannte zu betrachten, auf was immer für einem Wege sie durch die edelsten Kräfte, welche sie besitzen, geleitet werden, so beansprucht er andererseits eine gleiches Recht, eine deutliche Grenzlinie zu ziehen zwischen dem, was ein Gegenstand des Wissens ist, und dem, was auf alle Fälle etwas anderes ist, und die eine Kategorie als Etwas, das mit Recht unsere Anerkennung fordert, zu behandeln, das andere aber als weiteren Beweises bedürftig. Und doch, wenn er rings um sich solche sieht, deren Streben so rein, deren Triebe so mächtig, deren Auffassung so empfänglich, dass sie dem objective Realität verleihen, was oft nur ein Reflex ihres Ich oder ein projicirtes Bild ihrer eigenen Erfahrung ist, so wird er willig zugeben, dass es Einflüsse giebt, die er noch nicht ergründen oder messen kann, deren Thätigkeit er aber anerkennen muss unter den Thatsachen unserer Existenz.

ANMERKUNGEN.

1) (Seite 3.) Vergl. damit, was Plato im letzten Theile seines „Philebos“ über das Verhältniss zwischen Wissenschaft und Handwerk sagt.

2) (S. 6.) Vergl. den Trattato della Pittura des Leonardo da Vinci; desgl. Venturi, Essai sur les ouvrages de Leonard de Vinci (Paris 1797); Jordan, Untersuchungen über das Malerbuch des Leonardo da Vinci (Leipzig 1873); Grothe, Leonardo da Vinci als Ingenieur und Philosoph (Verh. des Ver. zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen, auch sep. Berlin 1874). In gleicher Weise ist auf die mathematischen Leistungen unseres deutschen Meisters Albrecht Dürer hinzuweisen.

3) (S. 6.) Vergl. John Chippendale, The Gentleman and Cabinet Maker's Director (London 1797); Thom. Sheraton, The Cabinet Maker and Upholsterer's Drawing Book (1797).

4) (S. 7.) Die Angabe $^1/_{80000}$ Zoll engl. $=$ $^1/_{3150}$ Millimeter, welche Sorby in seiner Eröffnungsrede der Mikroskopischen Gesellschaft 1876 macht, stimmt nahezu mit der von Harting, $^1/_{3315}$ Millim., überein. Dippel fand aus Messungen an Diatomaceen $^1/_{3500}$ und aus solchen an Nobert'schen Gittern $^1/_{3600}$ Mill. Helmholtz hat auf theoretischem Wege als Mass für die kleinste mit dem Mikroskop wahrnehmbare Distanz für weisses Licht in Luft $^1/_{3636}$ Millim. für blaues Licht bei Anwendung von Immersion aber $^1/_{4654}$ Millim. ermittelt. Vergl. Jahrbuch der Erfindungen X, S. 105 (Leipzig 1874).

5) (S. 7.) Vergl. Phil. Transactions of the Royal Society, 1870, p. 333 und 1876, p. 27.

6) (S. 8.) Vergl. Phil. Trans. 1877, p. 149.

7) (S. 8.) Bezüglich der Bewegung der Gasmolekeln vergl. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase. In elementarer Darstellung mit math. Zusätzen (Breslau 1877), sowie Maxwell, Theorie der Wärme. Deutsch von Auerbach (Breslau 1877), Cap. XXI. Die Bewegung des Radiometerkreuzes wird von Crookes erklärt in den Phil. Trans. 1874, p. 501; 1875, p. 519; 1876, p. 325; vergl. Jahrbuch der Erfindungeu XIV, S. 211 (Leipzig 1878).

8) (S. 8.) Lord Rayleigh fand die Grösse dieser Excursionen bei dem durch eine Pfeife erzeugten Ton f^4 von 2730 Schwingungen in der Secunde, welcher an einem klaren, stillen Wintertage noch in 820 Meter Entfernung gut hörbar war, kleiner als ein Milliontel-Millimeter, und er ist geneigt zu glauben, dass während einer stillen Nacht selbst ein Ton von derselben Höhe, bei welchem die Amplitude der Luftmolekeln nur den zehnten Theil jener Grösse beträgt, noch hörbar sein würde. Vergl. Philos. Magazine, April 1878.

9) (S. 8.) Ueber die Versuche von J. Kerr vergl. Philos. Magazine, 1875, Vol. II, p. 337 u. 446; 1877, Vol. I, p. 321; 1878, Vol. I, p. 161. Bestätigt wurden sie von G. F. Fitzgerald, Royal Society's Proceedings, XXV, p. 447, sowie unter Anwendung besonders kräftiger Apparate von J. E. H. Gordon, Phil. Magazine, IV, p. 104.

10) (S. 9.) Vergl. Poggendorff's Annalen der Physik u. Chemie, Bd. 35, S. 337.

11) (S. 9.) Vergl. Royal Soc. Proceedings, 1878; Jahrb. der Erfindungen XIV, S. 117 (Leipzig 1878).

12) (S. 9.) Telephon, Phonograph u. Mikrophon. Separat-Abdr. aus dem Jahrbuch der Erfindungen X (Leipzig 1878).

13) (S. 9.) Philos Transactions, Vol. 169, p. 55 u. 155.

14) (S. 12.) Hamilton, Lectures on Quaternions, containing a systematic statement of a new mathematical method, of which the principles were communicated in 1843 to the Royal Irish Academy (Dublin 1853).

15) (S. 13) Herm. G. Grassmann, Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre (Leipzig 1844, 2. Aufl. 1862).

16) (S. 13.) Benjamin Pierce, Linear Associative Algebra (Washington City 1870).

17) (S. 14.) Vergl. Sir W. Thomson im Cambridge Mathematical Journal, Vol. III, p. 174, sowie Jevon's Principles of Science, Vol. II, p. 438. Spottiswoode macht übrigens darauf aufmerksam, dass bei dem a. a. O. behandelten, die Wärmeleitung betreffenden Probleme der imaginäre Ausdruck für die Zeit auch noch eine andere Deutung zulässt, die nämlich, dass vor einer gewissen Epoche die Bedingungen, welche die Erscheinungen hervorrufen, nicht diejenigen der Wärmeleitung, sondern einer anderen Wirkung der Wärme waren. Wenn wir daher die Erscheinungen der früheren Periode sowohl wie die der späteren in einem Probleme begreifen wollen, so müssen wir eine allgemeinere Annahme ausfindig machen, nämlich diejenige der physikalischen Bedingungen, welche in der kritischen Epoche in den Fall der Wärmeleitung übergehen. Eine ähnliche Erklärung hat auch Prof. Clifford gegeben.

18) (S. 19.) Vergl. S. Newcomb, On certain Transformations of Surfaces, im American Journal of Mathematics, Vol. I, p. 1.

19) (S. 19.) Vergl. Tait, On Knots, in den Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol. XXVIII, p. 145; Klein, in den Mathem. Annalen, Bd. IX, S. 478.

20) (S. 30.) Ueber die verschiedenen Rechenmaschinen und insbesondere über graphische Hilfsmittel beim Rechnen vergl. Vogler, Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln und zu deren Benutzung beim Schnellrechnen etc. (Berlin 1877); über Thomson's Maschine s. Royal Society's Proceedings 1876 Febr. 3 und 1877 Mai 9. Am 5. December vorigen Jahres hat Sir William Thomson vor der Royal Society die Construction einer Maschine zur Auflösung eines Systems simultaner linearer Gleichungen beschrieben; s. Nature 1878 Dec. 19.

21) (S. 31.) Report of the British Association for the advancement of Science. 1869.

22) (S. 34.) Als Beispiel führt Spottiswoode Herbart's Psychologie an. Es muss aber bezweifelt werden, ob wirklich die Mathematik bei Erörterung psychologischer Probleme besser wegbliebe; sie dürfte doch schliesslich hier,

wie auch anderwärts, das zuverlässigste Mittel sein, die zu Grunde gelegten Hypothesen in alle Consequenzen zu verfolgen. Die vielfach vorhandene Abneigung der Mathematiker gegen Herbart's Psychologie dürfte zum grossen Theil ihren Grund in dem Umstande haben, dass Herbart es „noch nicht nachdrücklich genug ausgesprochen, dass seine mathematische Psychologie eigentlich erst eine abstracte Vorbereitung zu einer künftigen Theorie der durch die innere Erfahrung gegebenen Erscheinungen ist; er strebte vielleicht zu frühzeitig, den synthetischen Theil seiner Untersuchungen mit dem analytischen in Verbindung zu bringen, was doch nur in lockerer Weise geschehen konnte, so dass es damit weder gelang, die empirische Gültigkeit der mathematischen Formeln exact nachzuweisen, noch die Unentbehrlichkeit einer mathematischen Theorie zur Erklärung der psychischen Probleme genügend darzuthun". Drobisch, Erste Grundlinien der mathematischen Phychologie. Vorrede (Leipzig 1850).

23) (S. 35.) Ein Beispiel enthalten die Moralia Gregor des Grossen, Buch I. Cap. XIV, wovon hier nur das arithmethische Theil angeführt werden soll: „Quid in septenario numero, nisi summa perfectionis accipitur? Ut enim humanae rationis causas de septenario numero taceamus, quae afferunt, quod idcirco perfectus sit, quod ex primo pari constat et primo impari; ex primo, qui dividi potest, et ex primo, qui dividi non potest; certissime scimus, quod septenarium numerum Scriptura Sacra pro perfectione ponere consuevit.... A septenario quippe numero in duodenarium surgitur. Nam septenarius suis in se partibus multiplicatus, ad duodenarium tenditur. Sive enim quatuor per tria, sive per quatuor tria ducantur, septem in duodecim vertuntur.... Iam superius dictum est, quod in quinquagenario numero, qui septem hebdomadibus ac monade addita impletur, requies designatur; denario autem numero summa perfectionis exprimitur".

24) (S. 35.) Als Beleg dienen folgende Angaben über die Lebenszeit von

Bildhauern, Malern, Dichtern		und	Mathematikern	
Stesichorus . . .	600 v. Chr.		Thales	600 v. Chr.
Pindar	522—442		Pythagoras . . .	550
Aeschylus . . .	500—450		Anaxagoras . .	500—450
Sophokles . . .	495—400		Hippokrates . .	460
Euripides . . .	480—400			
Praxiteles . . .	450—400		Theaetetus . . .	440
Zeuxis	400		Archytas . . .	400
Skopas	377			
Apelles	325		Euklid	323—283

Druck von J. B. Hirschfeld in Leipzig.

SPOTTISWOODE. DIE MATHEMATIK