Schmitz-Dumont

Dickstein

Die Bedeutung

der

PANGEOMETRIE.

Mit Bezug auf den Aufsatz:
„Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, von Helmholtz, Berlin, April 1876."

Von

Schmitz-Dumont.

Mit Holzschnitt im Text.

LEIPZIG,
Verlag von Erich Koschny (L. Heimann's Verlag)
1877.

INHALT.

I.

Kant war durch die kritische Untersuchung der Verstandesthätigkeit zu dem Resultate gelangt, dass Zeit und Raum Formen unserer menschlichen Auffassungsweise von Wesenheiten seien, deren innere Natur uns unerkennbar sei. Die weitere Frage, wie es nun komme, dass wir jene Wesenheiten als Erscheinungen grade oder einzig unter diesen beiden Formen auffassen oder anschauen, und warum diese die charakteristische Eigenschaft haben, als Zeit in einer, als Raum in drei Dimensionen aufzutreten, liess er unerörtert; ja es ist fraglich, ob er eine weitere Herleitung dieser Eigenschaften überhaupt für möglich hielt. Zeit und Raum mit ihren charakteristischen Eigenschaften stellten sich ja dar als Specifica der menschlich organisirten Wesen, deshalb schien die Möglichkeit offen zu bleiben, dass andere hypothetische mit Vernunft begabte Wesen auch andere Anschauungsformen haben könnten. Als in den mathematischen Wissenschaften nun die Aufgabe in Angriff genommen wurde, den Zusammenhang der Grundaxiome in der beliebten Form des algebraischen Beweises herzustellen, gelang dies nicht, und man glaubte schliesslich den Grund dieses Misslingens in jener Kant'schen Ansicht zu finden, dass hier eben Eigenthümlichkeiten unserer mundanen Welt vorlägen, die also durch Erfahrung aufzusuchen und zu ordnen seien; die aber für andere vernünftige, d. h. diskursiv denkende Wesen, oder andere äussere Welten, als die unsrige eben ist, auch ganz anders gestaltet sein dürften. Während nun in der früheren Mathematik die Algebra nur als Hülfsmittel gebraucht worden war, um die Anschauungen der Geometrie in Zahlenschemata zu bringen, zu berechnen, ging dieselbe in der neueren Mathematik als logisches Denken selbständig zur weiteren Aufstellung von Formeln vor, unbekümmert darum, ob diese Formeln noch eine Bedeutung in unserer objektiven Welt hätten. Ja nachdem unsere objektive Welt sich darstellte als ein Einzelfall jenes algebraischen Schematismus, glaubte man in der Analyse das Instrument gefunden zu haben, welches die Formen aller denkmöglichen Welten ergebe, wovon unsere in drei Dimensionen ausgedehnte Welt eben ein Spezialfall sei.

Alle Argumente für diese Ansicht neuerer Analytiker fasst nun Helmholtz in dem obigen ansprechenden Vortrage zusammen und wollen wir deren Gewicht der Reihe nach untersuchen. Hierbei wird selbstverständlich überall die algebraische Richtigkeit der Originalarbeiten anerkannt, welche zu diesen Argumenten führten; nur die begrifflichen Schlüsse aus diesen analytischen Resultaten werden von den durch Helmholtz gezogenen abweichend ausfallen.

„Die Geometrie, sagt H., nennt solche Sätze, welche „sie als unbeweisbar erklärt, aber deren Richtigkeit ein „jeder gesunde Verstand zugeben muss, Axiome (z. B. dass „durch zwei Punkte nur eine gerade Linie gezogen werden „könne etc.)“, und er stellt mit Recht die absolute Wahrheit eines Satzes dem kritischen Denken gegenüber in Zweifel, so lange kein besserer Grund, als die bisherige Annahme eines gesunden Verstandes sich aufweisen lasse. Mit derselben Berechtigung muss man jedoch auch der Behauptung der bisherigen Geometrie: „Jene Sätze seien unbeweisbar“, die absolute Wahrheit absprechen. Was die Geometrie nach ihren heutigen Methoden nicht beweisen kann, ist deshalb noch nicht unbeweisbar für jede mögliche Methode; die heutige Geometrie ist in diesem Sinne verschieden von der vergangenen und der zukünftigen. Soll jene Behauptung der heutigen Geometrie von entscheidendem Gewichte sein, so muss sie in Form des logischen Beweises aufgestellt und anerkannt werden.

Im Verfolge nun führt H. aus, dass wir unsere geometrischen Anschauungen, die wir gemeiniglich als Denknothwendigkeiten ansehen, auf der Annahme freier Beweglichkeit fester Raumgebilde mit unveränderter Form nach jeder Stelle des Raumes aufbauen; und er wirft dieser Annahme gegenüber die ganz berechtigte Frage auf, ob dieselbe nicht eine unerwiesene Voraussetzung einschliesse. In dem letzteren Falle, schliesst er, sei der Congruenzbeweis eine nur aus der Erfahrung genommene Thatsache. Das letztere ist nicht ganz richtig. Jene unerwiesene

Voraussetzung, wenn eine solche überhaupt stattfand, muss als unerweisbar nachgewiesen werden können, wenn der Schluss richtig sein soll. Es kann sehr wohl aus der Erfahrung durch wiederholte Beobachtung sich die Annahme eines Verhältnisses, eines Gesetzes historisch beim Menschen festsetzen, welches Gesetz sich später durch logisches Denken als eine Denknothwendigkeit ergiebt.

Doch diese Ausstellung an der Schlussweise von H. ist für das spätere Resultat nicht von Bedeutung, denn er sucht hierdurch nur darzulegen, dass die algebraische Methode der geometrischen bei diesen Untersuchungen vorzuziehen sei, weil sich in jener die Gefahren einer unerweisbaren oder unerwiesenen Voraussetzung vollständig vermeiden lassen; denn sie ist eine rein logische Operation, ein schematisches Darstellen des diskursiven Denkens.

Um nun einigermaassen eine Anschauung der hier wesentlichen Punkte zu geben, zugleich auch ein einfacheres, leichter überschaubares Gebiet, setzt H. die Hypothese einer Welt von zwei Dimensionen folgenderweise:

„Denken wir uns — darin liegt keine logische Un-„möglichkeit — verstandbegabte Wesen von nur zwei Di-„mensionen, die an der Oberfläche irgend eines unserer „festen Körper leben und sich bewegen. Wir nehmen an, „dass sie nicht die Fähigkeit haben, irgend etwas ausserhalb „dieser Oberfläche wahrzunehmen, wohl aber Wahrneh-„mungen, ähnlich den unsrigen, innerhalb der Ausdehnung „der Fläche, in der sie sich bewegen, zu machen. Wenn „sich solche Wesen ihre Geometrie ausbilden, so würden sie „ihrem Raume natürlich nur zwei Dimensionen „zuschreiben. Sie würden ermitteln, dass ein Punkt, der „sich bewegt, eine Linie beschreibt, und eine Linie, die sich „bewegt, eine Fläche, was für sie das vollständigste Raum-„gebilde wäre, was sie kennen. Aber sie würden sich eben-„sowenig von einem weiteren räumlichen Gebilde, was ent-„stände, wenn eine Fläche sich aus ihrem flächenhaften „Raume herausbewegte, eine Vorstellung machen können, „als wir es können von einem Gebilde, das durch Heraus-„bewegung eines Körpers aus dem uns bekannten Raume „entstände. Unter dem viel gemissbrauchten Ausdrucke: „„sich vorstellen“ oder „sich denken können, wie „etwas geschieht“, verstehe ich — und ich sehe nicht, wie „man etwas anderes darunter verstehen könne, ohne allen „Sinn des Ausdrucks aufzugeben — dass man sich die Reihe „der sinnlichen Eindrücke ausmalen könne, die man haben

„würde, wenn so etwas in dem einzelnen Falle vor sich „ginge. Ist nun gar kein sinnlicher Eindruck bekannt, der „sich auf einen solchen nie beobachteten Vorgang bezöge, „wie für uns eine Bewegung nach einer vierten, für jene „Flächenwesen eine Bewegung nach der uns bekannten „dritten Dimension des Raumes wäre, so ist ein solches „„Vorstellen“ nicht möglich, ebensowenig als ein von „Jugend auf absolut Blinder sich wird die Farben vorstellen „können, wenn man ihm auch eine begriffliche Beschreibung „derselben geben könnte. Jene Flächenwesen würden ferner „auch kürzeste Linien in ihrem flächenhaften Raume ziehen „können. Das wären nicht nothwendig gerade Linien in „unserem Sinne, sondern was wir nach geometrischer Ter„minologie geodätische Linien jener Fläche nennen wür„den; Linien, wie sie ein gespannter Faden beschreibt, „den man an die Fläche anlegt, und der ungehindert an „ihr gleiten kann.“

Diese Folgerungen oder vielmehr Behauptungen, welche an jene Hypothese einer Welt von zwei Dimensionen geknüpft werden, sind meiner Ansicht nach unrichtig; die Hypothese selbst einstweilen als eine Möglichkeit zugegeben, obschon ich glaube, nachweisen zu können, dass in einer solchen Welt die Annahme von Sinneswahrnehmungen bei solchen Wesen nicht zulässig ist. Doch hierauf kommt es nicht an. Den principiellen Fehler sehe ich darin, dass H. wahrnehmen und vorstellen in ein äquivalentes Verhältniss setzt.

Die Vorstellung eines Dinges ist keine schwache Wiederholung der Wahrnehmung, sondern: nach unseren Wahrnehmungen, nach den Sinnesreizungen, welche ein Ding auf uns ausübt, bilden wir in unserem Geiste eine Vorstellung von der Gestalt und den Eigenschaften des Dinges. Die Vorstellung ist eine Fiktion unseres Denkens von oder über jenes Ding. Um deutlicher zu sprechen:

Wenn wir ein Gemälde betrachten, so sind es immer einzelne Punkte, welche wir fixiren, nicht eine kontinuirliche Fläche; und wenn wir auch noch so oft die Punkte wechseln, so werden wir doch in Summa nur eine grosse Anzahl von Einzelpunkten wahrgenommen haben, nicht eine kontinuirliche Fläche; aber zu dieser Vielheit von wahrgenommenen Punkten fingirt das diskursive Denken die Fläche, bildet die Vorstellung Fläche. Die gewöhnliche Beobachtung wird dies allerdings in Frage stellen, jedoch der Physiolog weiss, dass die wahrnehmende Netzhaut unseres Auges nicht eine kontinuirliche Fläche, sondern ein diskontinuirliches Netz von wahrnehmenden Nerven ist, also auch keine Fläche direkt wahrgenommen, sondern nur zu den vielen Wahrnehmungen *hinzugedacht*, d. h. *vorgestellt wird*. Klarer wird dies, wenn wir an die Blinden denken. Dieselben besitzen zur Wahrnehmung von der Gestalt eines Körpers nur den Tastsinn. Niemand wird nun behaupten, dass das Betasten eines Körpers andere, als diskontinuirliche Wahrnehmung einzelner Stellen des Körpers zulässt. Nichtsdestoweniger bildet der Blinde die Vorstellung des kontinuirlichen Körpers; die Vorstellung: *Fläche, kontinuirlicher Körper*, ist also nur zum Theil bewirkt durch seine Wahrnehmungen, zum andern Theile aber Produkt seines diskursiven Denkens.

Wir können aber den Unterschied von *Wahrnehmen* und *Vorstellen* auch in entgegengesetzter Richtung entwickeln.

Wir betrachten ein polirtes Stück Glas und sagen: dasselbe wird von uns wahrgenommen als ein kontinuirliches Ganzes, denn der vorher beschriebene Prozess, unter welchem wir diese Vorstellung erzeugen, ist uns in dem gewöhnlichen Leben nicht beständig gegenwärtig; es ist ein unbewusster Denkprozess geworden.

Durch Verbindung dieser *direkten Wahrnehmung* (wie wir glauben) mit unseren Beobachtungen chemisch-fysikalischer Natur machen wir den Schluss, dass diese Wahrnehmung eines kontinuirlichen Körpers falsch sei. Zuerst konstatiren wir Porosität, nachher sogar ausser den Poren der Körpertheile auch noch leere Räume zwischen den Atomen. Die Summe aller Wahrnehmungen können wir nicht anders zu einer widerspruchsfreien Erklärung vereinigen, als indem wir annehmen, dass der Körper aus Molekeln oder in letzter Instanz Atomen, welche durch leere Zwischenräume getrennt sind, zusammengesetzt sei, und diese letztere Erklärung bezeichnet die konsequent sein wollende Induktion als eine aus der Erfahrung geschöpfte Thatsache. Was ist aber der wirkliche Thatbestand? Wir haben zweimal unsere sinnlichen Wahrnehmungen, also unsere Erfahrungen, als falsch erklärt; das erstemal, indem wir unsere Einzelwahrnehmungen desavouirten und statt deren die Vorstellung eines kontinuirlichen Körpers durch unsere Denkthätigkeit bildeten; sodann indem wir diese Vorstellung, welche durch die Gewohnheit unbeachtet (unbewusst) geworden und als direkte Wahrnehmung angenommen wurde, durch einen zweiten Denkprozess wiederum als falsch erklärten, und die Vorstellung eines diskontinuirlichen Körpers bildeten. Um dem Ganzen die Krone aufzusetzen, erklären wir jetzt noch, dass nicht unsere unzureichenden Hülfsmittel die Ursache seien, dass wir kein wirkliches Atom aufzuzeigen vermögen, sondern dass dies für alle Zukunft unmöglich sei, indem ja eben die Eigenschaften, wodurch sich der Körper wahrnehmbar macht, durch die Zerlegung eines Molekels in seine Einzelatome zerstört werden. Seien wir also nicht allein ehrlich, sondern logisch, indem wir zugeben, dass unsere Vorstellungen nicht einzig aus den Wahrnehmungen geschöpft werden, sondern dass es die Denkgebilde sind, welche unser logisches Schliessen konstruiren muss, um die sich wiedersprechenden Einzelwahrnehmungen mit einander verbinden zu können. Wir müssen es hiernach für eine ganz ungerechtfertigte Behauptung erklären, wenn H. sagt, dass Flächenwesen, weil sie direkt nur Flächengebilde wahrnähmen, auch keine anderen Vorstellungen zu bilden vermöchten, als solche von Flächen.

H. erläutert nun, wie Wesen, welche auf einer unendlichen ebenen Fläche leben, dieselbe Geometrie aufstellen würden, welche in unserer Planimetrie entwickelt ist. Ihr Raum könnte unendlich ausgedehnt sein, aber auch, wenn sie an Grenzen ihrer Bewegung und Wahrnehmung stiessen, so würden sie sich eine Fortsetzung jenseits dieser Grenzen anschaulich vorstellen können. Hiergegen ist nichts einzuwenden. Jedoch sieht man nicht ein, warum jene Wesen die nicht beobachtete Ausdehnung ihrer Fläche wohl in der Richtung dieser Fläche, nicht aber in einer anderen Richtung vorstellen könnten. Sobald aber dieses letztere zugegeben wird, wäre auch zugegeben, dass die Flächenwesen mehr als zwei Dimensionen vorstellen können. Untersuchen wir nun, was Flächenwesen, die etwa auf einer Kugel leben, wahrnehmen und was sie vorstellen können. H. sagt:

„Die kürzeste und geradeste Linie zwischen zwei „Punkten würde für solche Wesen der Bogen eines grössten „Kreises sein, der durch die betreffenden Punkte zu legen „ist. Jeder grösste Kreis, der durch zwei Punkte geht, „zerfällt dabei in zwei Theile. Wenn beide ungleich lang „sind, ist der kleinere allerdings die einzige kürzeste Linie,

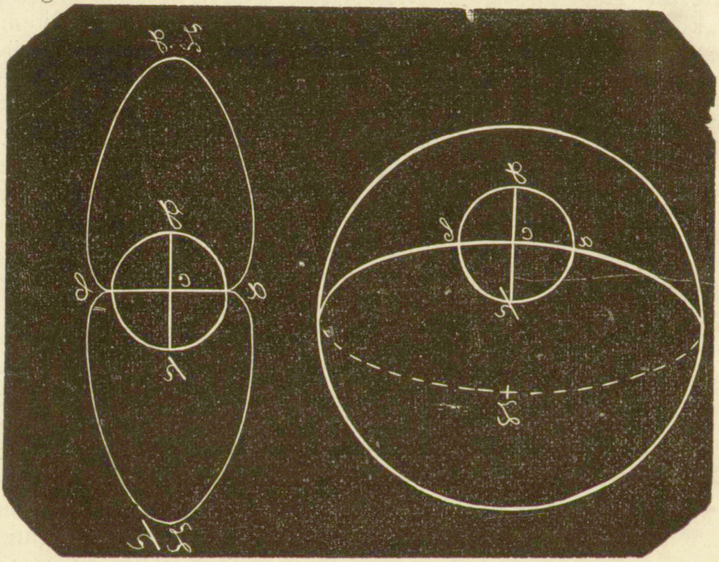
„die zwischen diesen beiden Punkten auf der Kugel besteht. „Aber auch der andere grössere Bogen desselben grössten „Kreises ist eine geodätische oder geradeste Linie, d. h. „jedes kleinere Stück desselben ist eine kürzeste Linie „zwischen seinen beiden Endpunkten. Wegen dieses Um- „standes können wir den Begriff der geodätischen oder ge- „radesten Linie nicht kurzweg mit dem der kürzesten Linie „identifiziren. Wenn nun die beiden gegebenen Punkte „Endpunkte desselben Durchmessers der Kugel sind, so „schneiden alle durch diesen Durchmesser gelegten Ebenen „Halbkreise aus der Kugelfläche, welche alle kürzeste Linien „zwischen den beiden Endpunkten sind. In einem solchen „Falle giebt es also unendlich viele untereinander gleiche „kürzeste Linien zwischen den beiden gegebenen Punkten. „Somit würde das Axiom, dass nur eine kürzeste Linie „zwischen zwei Punkten bestehe, für die Kugelbewohner „nicht ohne eine gewisse Ausnahme giltig sein. Parallele „Linien würden die Bewohner der Kugel gar nicht kennen. „Sie würden behaupten, dass jede beliebige zwei geradeste „Linien, gehörig verlängert, sich schliesslich nicht nur in „einem, sondern in zwei Punkten schneiden mussten. Die „Summe der Winkel in einem Dreieck würde immer grösser, „als zwei Rechte, und um so grösser, je grösser die Fläche „des Dreiecks. Eben deshalb würde ihnen auch der Be- „griff der geometrischen Aehnlichkeit der Form zwischen „grösseren und kleineren Figuren derselben Art fehlen. „Denn ein grösseres Dreieck muss nothwendig andere „Winkel haben, als ein kleineres. Ihr Raum würde aller- „dings unbegrenzt, aber endlich ausgedehnt gefunden, oder „mindestens vorgestellt werden müssen. Es ist klar, dass „die Wesen auf der Kugel bei denselben logischen „Fähigkeiten, wie die auf der Ebene, doch ein ganz „anderes System geometrischer Axiome aufstellen müssten, „als jene und wir selbst in unserem Raume von drei Di- „mensionen.“

Ich muss nun vorerst gegen die beständige Substituirung der Begriffe gerade Linie und geodätische oder kürzeste Linie unter gewissen Bedingungen protestiren, und bemerke nebenbei, dass viele Unbestimmtheiten der neueren Geometrie von der Definition der geraden, als einer Linie, welche durch zwei Punkte bestimmt und an allen Stellen gleichartig ist, herrühren. Diese durch die Analyse hervorgerufene Definition ist ungenügend und zuweilen ganz falsch. Ich werde an einem anderen

Orte darauf zurückkommen, bei der hier vorliegenden Untersuchung ist sie vorab von keiner Bedeutung.

Verfolgen wir jedoch diese Hypothese der Kugelflächenwesen etwas eingehender, so wird sie uns von selbst die Mittel an die Hand geben, in mathematischer Form den Irrthum aufzudecken, welcher durch dies beständige Verwechseln der Begriffe W a h r n e h m u n g und V o r s t e l l u n g sich einschleicht.

Denken wir uns, dass jene Kugelflächenwesen eine Karte ihrer Welt anfertigen. Ihre Maasstäbe sind natürlich krumm, ihre Gesichtlinien (Winkel) gehen in Kreislinien, ihr Zeichenpapier ist wie sie selbst ein kleines Stückchen Kugeloberfläche.



Geographische Karte. Planet (der Kugelflächenwesen).

Die Flächenwesen messen und zeichnen zuerst eine Standlinie, den Kreis a g b h mit dem Centrum c, wandern sodann von c über b stets in gerader Richtung vorwärts. Sie finden, dass sie über a nach c zurückgelangen. Bei einer zweiten Wanderung in gleicher Richtung werden ausser der direkten Längsmessung des Weges zur Controle die Distanzen der Wegetappen von dem rechts gelegenen Punkte g gemessen. Bei der Aufzeichnung des Weges auf der Karte ergiebt sich etwa die Linie c, b, zg, a, c.

Der Punkt z sei die Mitte des Weges. Es wird sich nun finden, dass keine Distanz genau aufgezeichnet werden kann. Zur Controle wird die Reise nochmals unternommen und dabei die Distanzen der Wegetappen vom Punkte h links von der Richtung der Reise gemessen. Die Aufzeichnung ergiebt ungefähr die Linie c, b, zh, a, c.

Hier ergiebt also die empirische Beobachtung und Aufzeichnung eines und desselben Gegenstandes, eines grössten Kreises des Planeten, ein total verschiedenes Resultat. Wo sucht nun der Empiriker die Hülfe, um einen solchen Widerspruch der Erfahrung zu lösen? Offenbar können neue Beobachtungen zu nichts führen; eine jede andere würde denselben Widerspruch ergeben.

Die Lösung kann nur das von der Einzelerfahrung unabhängige Denkgesetz geben, indem es die sich widersprechenden einzelnen Beobachtungen (Wahrnehmungen) in einem Produkte des Denkens, einem G e d a n k e n - d i n g e, einer Vorstellung, vereinigt. Wodurch sich die hier geforderten Vorstellungen, welche ich anderswo auch A n s c h a u u n g s b e g r i f f e nenne, von den Vorstellungen, welche empirische Elemente enthalten, unterscheiden (wie die Vorstellung von einem Pferde, Baume etc.), wird sich weiter unten ergeben. Ich gebrauche vorläufig das Wort wegen der gebräuchlichen Zusammensetzung „geometrische Vorstellung etc.“ An dieses Gedankending, die (ideelle) Vorstellung von dem Gegenstande, stellt der Verstand die Anforderung, dass es als Begriff konstant und widerspruchsfrei sei, und dass die einzelnen Beobachtungen, welche sich dem blosen Empiriker als einander widersprechend erschienen, auf Grund dieser V o r s t e l l u n g v o n d e m G e g e n s t a n d e erklärt werden können.

So lange wir nicht alle Beobachtungen auf Grund einer solchen Vorstellung von dem Dinge erklären, oder so lange wir noch nicht den Beweis der Widerspruchs-Freiheit in diesem Vorstellungsbegriffe führen können, nennen wir solche Vorstellungen H y p o t h e s e n. Häufig aber, besonders in den neueren Naturwissenschaften, begnügt man sich mit der scheinbaren Erklärungsmöglichkeit, und stellt eine Hypothese auf, deren logische Fehler gleich offenbar sind. Zur vorläufigen Orientirung sind solche scheinbar richtig erklärende, aber logisch falsche Vorstellungen (Imponderabilien oder Aether in seiner heutigen Gestalt) zweckdienlich. Die Aufstellung verschiedener gleich gut erklärender solcher Hypothesen kann zu der endgültig richtigen Vorstellung führen.

Was werden nun unsere Flächenwesen diesen sich widersprechenden Beobachtungen gegenüber thun, wenn sie der Voraussetzung gemäss unsere Denkfähigkeiten besitzen? Dasselbe, was wir in ähnlichen Fällen thun. Sie ersinnen eine Hypothese, um die verschiedenen Wahrnehmungen in einer Vorstellung widerspruchsfrei mit einander zu verbinden. Sie werden schliessen: Unser Planet kann nicht auf unserem Papier, d. h. einem Theile seiner Oberfläche abgebildet werden; seine Gestalt ist heterogen allen uns wahrnehmbaren Gestalten; wir können kein Modell davon anfertigen. Wir können jedoch nach den Begriffen und Formeln unserer (sphärischen) Planimetrie behaupten, dass der Kreis cbza senkrecht auf dem Kreise agbh steht, mögen wir auch dieser Behauptung wegen verlacht werden, ähnlich wie es den Erdengeometern ergangen ist, die da behaupteten, dass die Erde nicht tellerförmig gestaltet sei. Wir sind gezwungen, unseren Planeten in einer Gestalt vorzustellen, welche uns keine Beobachtung, keine Erfahrung jemals sinnlich darbieten wird. Die Flächenwesen werden also genöthigt, eine neue nicht wahrnehmbare Dimension vorzustellen (in einem gewissen Sinne könnte man hier den Ausdruck imaginäre Dimension gebrauchen). Sobald sie diese Hypothese der Planetengestalt von drei Dimensionen annehmen, werden sich die Distanzen der einzelnen Reiseetappen von allen Punkten der Standlinie berechnen lassen, und die thatsächliche Messung, die vorher nirgendwo stimmte, wird die Rechnung bestätigen. Ausserdem wird aber auch ihre Algebra einen Ausdruck für die Entfernung zweier Punkte ergeben, welcher eine kleinere Maassrate ist, als die einer jeden geodätischen Linie; d. h. sie werden den algebraischen Ausdruck der Vorstellung einer absolut kürzesten Linie finden, obgleich sie nie im Stande sind, eine solche zu zeichnen oder mit Hülfe ihrer Maasstäbe zu messen.

Ich hatte vorhin den leicht misszuverstehenden Ausdruck imaginäre Dimension gebraucht. Thatsächlich bilden die Flächenwesen hiermit keine andersartige Vorstellung als die Blinden auf der Erde, wenn diese dorthin die Raumvorstellung ausdehnen, wo ihr Tastsinn eine solche Ausdehnung noch nicht wahrgenommen hat.

Die Kugelbewohner werden also eine ideelle Planimetrie entwickeln, welche sich nirgendwo auf die ihnen wahrnehmbaren Gegenstände anwenden lässt. Diese ideelle Planimetrie wird ihnen jedoch ermöglichen, aus ihren Karten, welche die wirkliche Ländergestalt gar nicht ähnlich wiederzugeben vermögen (grade wie auch unsere auf ebenes Papier gedruckten Karten), die richtigen Distanzen abzuleiten. Sie werden nicht, wie H. meint, ein anderes System von geometrischen Axiomen aufstellen als das unsrige, sondern ein von ihrer Wahrnehmung verschiedenes ideelles, nämlich dasselbe wie unser ideelles (das Euklidische), welches ja auch nicht auf unsere Wahrnehmungen genau, sondern nur annähernd passt, eben weil es ein ideell konstruirtes, nicht aber ein aus der Natur kopirtes (nach dem empiristischen Ausdruck „ein lediglich aus der Erfahrung gewonnenes") System ist.

II.

Hiermit sind alle Argumente, welche H. anführt, und welche sich auf die Meinung stützen, dass wir nur vorstellen können, was wir vorher wahrgenommen haben, widerlegt; ebenso ist die von ihm gegebene Definition der Vorstellung, als des Vermögens selbständigen sinnlichen Ausmalens (also Reproduziren) für den Fall der sogenannten geometrischen Vorstellungen als unrichtig dargelegt. Seine weiteren Ausführungen werden jedoch noch Gelegenheit zu interessanten Bemerkungen geben. H. sagt:

„Denken wir uns vernünftige Wesen, existirend an „der Oberfläche eines eiförmigen Körpers . . . An einer „solchen Fläche kann sich nicht einmal ein so einfaches „Raumgebilde, wie ein Dreieck ist, ohne Aenderung seiner „Form von dem stumpferen Ende nach dem spitzeren hin„bewegen . . . Daraus folgt, dass es eine besondere geo„metrische Eigenschaft einer Fläche ist, wenn sich in ihr „liegende Figuren ohne Veränderung ihrer sämmtlichen „längs der Fläche gemessenen Linien und Winkel frei „verschieben lassen und dass dies nicht auf jeder Art von „Fläche der Fall sein wird . . ."

und führt nun weiter aus, dass das Axiom von den Parallelen, wie es bisher aufgestellt wurde, in Verbindung mit dem Begriff geodätische Linie (welcher Begriff hier wie oben beständig unberechtigter Weise für den Begriff gerade Linie substituirt wird) auf verschiedenen krummen Flächen zu ganz anderen geometrischen Anschauungen führt, wie die Euklidische Geometrie. Alles dies dient dazu, um den Leser empfänglich zu machen für den Begriff des krummen oder mit Krümmungsmaass behafteten Raumes. Auf das Parallelenaxiom werde ich später zurückkommen.

Wir müssen einstweilen den Ausdruck „krummer Raum“ als lediglich barock passiren lassen, ohne an der unserem Gefühle offenbaren Absurdität Anstoss zu nehmen, dass ein Körper, welcher sich weder biegen noch dehnen kann, bei seiner Bewegung durch den leeren Raum plötzlich hängen bleiben solle, weil der Raum dort krumm geworden. Denn exakte Wissenschaften sind durchaus berechtigt, etwas lediglich von unserem Gefühle (welches in dieser Beziehung identisch ist mit dem sogenannten gesunden Menschenverstande) als absurd erklärtes desshalb noch nicht als ein solches anzunehmen; bei der Mathematik muss die Absurdität logisch nachgewiesen werden, und weil dies in dem Falle der Pangeometrie noch nicht geschehen, deshalb sehen wir auch, dass die Mathematiker ihren Principien zufolge von den lediglich absprechenden Bemerkungen der Philosophen keine Notiz nehmen, sich wenigstens nicht als widerlegt betrachten. Einen wesentlich anderen und ungünstigeren Eindruck macht es jedoch, wenn wir beobachten, dass Philosophen solche Hypothesen acceptiren, die zwar logisch noch nicht widerlegt, aber ebensowenig logisch als Möglichkeiten annehmbar erscheinen. Die vermeintlich kritische Methode führt hier in die Fesseln des Dogmatismus zurück.

Bemerken wir vorläufig, dass, was H. vorhin für die Flächen unbestreitbar richtig ausgeführt, desshalb noch nicht für den Raumbegriff gilt. Diese ganze Uebertragung entstammt der Analogie, welche zwischen den algebraischen Formeln herrscht, welche Flächen und Raum ausdrücken. Um hieraus jedoch ein Urtheil ableiten zu können, müsste vorher das Wesen der analytischen Formel untersucht werden, eine Untersuchung, welche noch von keiner Seite in Angriff genommen worden ist; hauptsächlich weil die meisten Mathematiker glauben, die Sache sei ja selbstverständlich. Gerade die Fragen der Pangeometrie haben jedoch gezeigt, dass diese Untersuchungen bei jedem Schritte neue Schwierigkeiten aufweisen und jene vermeintlich selbstverständlichen Analogien offenbare Verwirrung in den allereinfachsten Begriffen veranlassen.

H. z. B. entwirft ein ganz verführerisches Bild eines solchen mit Krümmungsmaass behafteten Raumes, er sagt:

„Jede Grössen vergleichende, sei es Schätzung, sei es „Messung räumlicher Verhältnisse, geht von einer Voraus-„setzung über das physikalische Verhalten gewisser Natur-„körper aus, sei es unseres eigenen Leibes, sei es der „angewendeten Messinstrumente . . . ., welche über das „Gebiet der reinen Raumanschauungen hinausgreift. Ja „es lässt sich ein bestimmtes Verhalten der uns als fest „erscheinenden Körper angeben, bei welchem die Messungen „im Euklidischen Raume so ausfallen würden, als wären „sie ausgeführt im pseudosfärischen oder sfärischen Raume „(. . . welcher also überall ein konstantes Maass der Bie-„gung aufweist, was wir uns aber anschaulich vorzustellen „unvermögend sein sollen) . . . Um dies einzusehen, erinnere „ich zunächst daran, dass, wenn die sämmtlichen linearen „Dimensionen der uns umgebenden Körper und die unseres „eigenen Leibes mit ihnen im gleichen Verhältnisse ver-„grössert würden, wir eine solche Aenderung durch unsere „Mittel der Raumanschauung gar nicht würden bemerken „können. Dasselbe würde aber auch der Fall sein. wenn „die Dehnung oder Zusammenziehung nach verschiedenen „Richtungen hin verschieden wäre, vorausgesetzt, dass unser „eigener Leib in derselben Weise sich veränderte und vor-„ausgesetzt ferner, dass ein Körper, der sich drehte, in „jedem Augenblick, ohne mechanischen Widerstand zu er-„leiden oder auszuüben, denjenigen Grad der Dehnung „seiner verschiedenen Dimensionen annähme, der seiner „zeitigen Lage entspricht . . . Ein gut gearbeiteter Con-„vexspiegel (die versilberten Kugeln in den Gärten) von „nicht zu grosser Oeffnung zeigt das Spiegelbild jedes vor „ihm liegenden Gegenstandes scheinbar körperlich und in „bestimmter Lage und Entfernung hinter seiner Fläche. „Aber die Bilder des fernen Horizontes und der Sonne „liegen in begrenzter Entfernung, welche der Brennweite „des Spiegels gleich ist, hinter dem Spiegel. Zwischen „diesen Bildern und der Oberfläche des Spiegels sind die „Bilder aller anderen vor letzterem liegenden Objekte ent-„halten, aber so, dass die Bilder um so mehr verkleinert „und um so mehr abgeplattet sind, je ferner ihre Objekte „vom Spiegel liegen . . . Jede gerade Linie der Aussen-„welt wird durch eine gerade im Bilde dargestellt. Das

„Bild eines Mannes, der mit einem Maasstab eine von „dem Spiegel sich entfernende gerade Linie abmisst, würde „immer mehr zusammenschrumpfen, jemehr das Original „sich entfernt; aber mit seinem ebenfalls zusammen- „schrumpfenden Maasstabe würde der Mann im Bilde „genau dieselbe Zahl von Centimetern herauszählen, wie „der Mann in der Wirklichkeit . . . Alle geometrischen „Messungen . . . alle Congruenzen würden in den Bildern „bei wirklicher Aneinanderlagerung der betreffenden Körper „ebenso passen, wie in der Aussenwelt . . . Kurz, ich „sehe nicht, wie die Männer im Spiegel herausbringen „sollten, dass ihre Körper nicht feste Körper seien und „ihre Erfahrungen gute Beispiele für die Richtigkeit der „Axiome des Euklid. Könnten sie aber hinausschauen in „unsere We't, wie wir hineinschauen in die ihrige, ohne „die Grenze überschreiten zu können, so würden sie unsere „Welt für das Bild eines Konvexspiegels erklären müssen „und von uns gerade so reden, wie wir von ihnen, und „wenn sich die Männer beider Welten mit einander be- „sprechen könnten, so würde, soweit ich sehe, keiner den „anderen überzeugen können, dass er die wahren Verhält- „nisse habe, der andere die verzerrten; ja ich kann nicht „erkennen, dass eine solche Frage überhaupt einen Sinn „hätte, so lange wir keine mechanischen Betrachtungen „einmischen.“

Alles dies ist ganz richtig, nur der Schluss auf die Geometrie, die unter solchen Verhältnissen konstruirt würde, ist falsch.

Es ist gar nicht nöthig, mit diesen Konvexspiegelwelten zu operiren, hier auf unserer Erde können wir uns in ganz ähnliche Verhältnisse versetzt denken.

Seien unsere Leiber aus demselben gleichmässigen Stoffe, wie die Erde konstruirt, so würden, wenn wir eine Reise vom Aequator zum Pol unternehmen, durch die Temperaturunterschiede wir und unsere Maasstäbe gleichmässig zusammenschrumpfen. Hätten wir nun weder durch unser Gefühl, noch durch die Möglichkeit künstlicher Wärmeerzeugung ein Mittel, Temperaturverschiedenheiten und deren Wirkungen zu konstatiren, so würden wir von diesem Zusammenschrumpfen gar keine Kenntniss haben. Beobachten wir jetzt den Mond am Aequator und am Pol, so wird sich ein verschiedenes Resultat ergeben. Die Distanzmessung des Mondes wird am Aequator kleiner, als am Pole ausfallen, weil durch die Wärmeausdehnung derselbe Maasstab am Pol effektiv kleiner, als am Aequator wird; die Parallaxe des Mondes jedoch, seine scheinbare Grösse wird an beiden Stellen dieselbe sein. Die Erscheinung soll jetzt erklärt werden. Zuerst wird gesagt: der Mond rückt während der Reise in eine grössere Entfernung und bläht sich dabei auf. Durch gleichzeitige Beobachtungen wird jedoch ausgefunden, dass der Mond stille stehen bleibt.

Nun kommt ein Pangeometer und sagt: ich hab's; wir bewegen uns bei unserer Reise in einem krummen Raume. Und wirklich er ist im Stande, mit seinen Formeln und **mit dem, was er darin Raum nennt,** von allen Veränderungen Rechenschaft zu geben. Nun, welche Aufnahme wird eine solche Erklärungsweise finden? Man würde doch wohl erwidern: Freund, du scheinst eine von unserer Sprache ganz verschiedene zu reden; unsere Linie, Ebene etc. sind feste unveränderliche Begriffe, die deinen Formeln zuliebe nicht beständig geändert werden. Ebensowenig wir bei einer Temperaturveränderung sagen „heute hat der Raum ein anderes Krümmungsmaass wie gestern", ebensowenig lassen wir die Redensart zu, der Raum sei überhaupt krumm, sondern wir sagen, unsere Maasstäbe müssen sich durch eine uns unbekannte Ursache je nach den Oertern, wo wir sie hinbringen, verändern; denn der empirische Maasstab ist kein Begriff, der als solcher konstant bleiben muss, sondern ein Ding, welches sich verändern kann. Nach derselben Logik sagen wir auch, du seiest derselbe N. N., der du gestern warst; obschon du in Gewicht, Grösse, Farbe etc. dich verändert hast. Denn dein N.N.-thum, dein Ich ist eine ideelle Vorstellung von deiner Person, worauf wir alle deine Veränderungen beziehen; ebenso wie unsere geometrischen Anschauungen. Lass uns also mit deinem krummen Raume in Ruhe und studire lieber die Schwierigkeiten oder Möglichkeiten, unter welchen man Begriffe in algebraischen Formeln ausdrücken kann, sonst müssen wir gleicherweise behaupten, dass deine Person jeden Tag mit einem anderen Ichmaass behaftet ist.

Ebenso, würde die Thatsache konstatirt, dass unsere Erde auf ihrer Reise um die Sonne alle die Dehnungen und Zerrungen durchmache, wie die Männer im Konvexspiegel, nähmen wir keinen Stern ausser ihr wahr, so würden dennoch nicht allein der gesunde Menschenverstand, sondern auch die Astronomen sagen: die Erde bewegt sich in einem unendlichen Raume und erleidet durch uns unbekannte Ursachen jene regelmässigen Dehnungen,

und nicht, wie die Pangeometer vorschlagen: Die Erde bewegt sich in einem unbegrenzten aber nicht unendlichen Raume von konstantem Krümmungsmaass, bleibt aber sonst beständig der geometrischen Gestalt nach.

Der Raum mit Krümmungsmaass ist also ein Begriff, welcher der oben erläuterten Anforderung der Logik nicht entspricht; denn ein Begriff muss unter allen Verhältnissen, wo er gebraucht wird, identisch mit sich selbst bleiben, dasselbe bedeuten. Ganz einerlei ist es hierbei, ob die analytische Form, welche mit diesem Worte bezeichnet wird, bei verschiedenen Problemen Verwendung finden kann.

Bezeichnend für die Ausgangspunkte dieser pangeometrischen Raumanschauungen ist es, dass fast in jeder neuen Schrift ihrer Vertheidiger das merkwürdige Unternehmen Lobatschewky's wiederholt wird, wodurch dieser die Form des Raumes experimental auffinden zu können geglaubt hat. Die Winkel eines Dreiecks, gebildet durch einen Durchmesser der Erdbahn und einen Stern mit verschwindender Parallaxe, sollten gemessen und mit der Winkelsumme des Euklidischen Dreiecks verglichen werden. Eine Differenz der ersteren und letzteren Summe sollte Beweis eines mit Krümmungsmaass behafteten Raumes sein. Nun abgesehen davon, dass das ganze Experiment der skeptischen Methode jener Anschauungen zuwider ist, nach der man gar keinen Schluss ziehen sollte, ehe man den Winkel von jenem Stern aus nicht thatsächlich gemessen hat (man demnach auch über eine wirkliche oder scheinbar verschwindende Parallaxe gar nichts aussagen kann), so scheint auch Niemanden das unentrinnbare Dilemma aufgefallen zu sein, in welches die Schlussfolgerung verfällt, und welche die Nichtigkeit des Versuchs sowohl als des Schlusses darlegt.

Angenommen, es wird eine Differenz der Winkelsumme dieses Sterndreiecks von 2 Rechten Winkeln konstatirt, so kann man zur Erklärung dieser Beobachtungen sagen:

a) Entweder die Sehlinien, die Lichtstrahlen, pflanzen sich fort nach geodätischen Linien eines krummen Raumes (ähnlich wie bei der atmosphärischen Brechung der von den Sternen ausgehenden Strahlen), und dann haben wir einfach den Unterschied solcher empirischer geodätischen Linien von der absolut geraden d. h. der ideellen Euklidischen Linie konstatirt; oder

b) wir nehmen an, das unsere geometrischen Linien, auf welche wir unser Messen beziehen, jene geodätischen Linien seien (zum Zwecke der einfacheren Gestaltung unserer analytischen Formeln),

und müssen dann, um jene Differenz der Winkelsummen zu erklären, sagen, dass die Fortpflanzung des Lichtes sich nicht an jene analytische Fiktion stört, sondern in gerader Euklidischer Linie vor sich geht; die beiden Linienbegriffe sind dann einfach miteinander getauscht.

Anstatt also aus einer solchen Beobachtung, wenn sie jemals stattfinden könnte, einen Schluss zu Gunsten obiger Raumansicht machen zu können, wäre einfach die Konstanz zweier verschiedener geometrischer Anschauungen ausgesprochen, die natürlich ohne jenes Experiment auch schon in jedem logischen Satze stattfindet. Trotzdem ist das ganze Experiment in Formeln gesetzt, die Formeln werden beständig repetirt; dieselben sind auch algebraisch ganz richtig aufgebaut, sie sagen aber absolut gar nichts aus. Es ist dies ein Beispiel dafür, wie der beständige Gebrauch von graphischen Formeln, woran das Denken gewohnt wird sich anzulehnen, bei seinen unbestreitbaren Vortheilen und seiner Unersetzlichkeit in den mathematischen Wissenschaften zugleich die Fähigkeit abschwächt, ohne Formeln zu denken; ausserdem aber auch zu der Meinung verleitet, in jeder analytischen Formel sei ein Gedanke ausgesprochen.

Als scheinbar dritten Fall könnte man noch sagen: Jene Lichtstrahlen und auch unsere Dreieckskonstruktion laufen in geodätischen Linien, die aber nur von anderen Organisationen als solche geodätische d. h. nur relativ kürzeste erkannt werden, uns jedoch als absolut kürzeste erscheinen.

In diesem Falle, den ich wiederum als hypothetisch in der Diskussion zulässig gelten lasse, würde natürlich das obige Experiment zu gar nichts führen, denn es könnte keine Differenz der Winkelsummen gefunden werden. Dagegen ist klar, dass beide verschieden geartete Organisationen die gleiche Vorstellung des ideellen Euklidischen Dreiecks und des geodätischen, ihren Mitteln der Beobachtung gemäss, verwenden. Die ideelle Vorstellung der geraden Linie ist also bei beiden dieselbe, einerlei ob die empirisch ausgeführte Zeichnung oder Beobachtung verschieden ausfällt. Mit Hülfe des Mikroskops wird man manche Linie als krumm erkennen, welche das unbewaffnete Auge für gerade ansieht; und ebenso, wenn ein Käferauge tausend Linien dort sieht, wo wir nur eine einzige sehen, oder wenn einem Kugelflächenwesen die Linie als gerade erscheint, die wir für das Stück eines grössten Kreises ansehen, so ist doch die ideelle Vorstellung (gerade, absolut kürzeste) Linie bei allen logisch denkenden Wesen derselbe Begriff.

Wir können diese Betrachtung fortführen und uns Wesen denken, die dort, wo wir nur Atome oder unausgedehnte Punkte wahrnehmen, noch Unterschiede — etwa in Linienform — wahrzunehmen vermögen. Der Schluss wäre jedoch ganz falsch, dass diese Wesen deshalb zu unseren drei Dimensionen noch eine vierte, welche in unserem Punkte enthalten sei, beobachten und vorstellen; sondern dieselben würden die Begriffe Punkt und Linie nur auf eine andere Klasse von Naturerscheinungen anwenden, ebenso wie der Astronom am Sternenhimmel Räume beobachtet, wo die naive Vorstellung nur eine Fläche wahrnimmt; deshalb stellt aber der Astronom zu den drei Dimensionen des naiven Bewusstseins nicht noch eine vierte nachträglich vor. Ich werde hierauf bei Besprechung der analytischen Darstellung des Raumes durch mehrere von einander unabhängige veränderliche Grössen zurückkommen.

Es ist nun allerdings die Aufgabe der Philosophie der Mathematik, zu erklären, wodurch die charakteristische Eigenschaft des Raumes, nur in drei Dimensionen vorstellbar zu sein, oder was dasselbe ist, nur eine bestimmte Anzahl qualitativ verschiedener Begriffe zuzulassen (Punkt, Linie, Fläche, Körper), begründet ist, oder wie diese Eigenschaft mit dem logischen Denken verknüpft ist. So lange wir nur sagen: Zeit und Raum sind Anschauungsformen unserer Sinnlichkeit, haben wir allerdings eine Klasse von aus der Natur abgeleiteten Abstraktionen als zusammengehörig ausgesondert. Die Frage erhebt sich aber: Ist es denn wirklich nöthig, neben Empfinden und Denken noch ein drittes Element, genannt „sinnliche Anschauungsform“ anzunehmen? Empfinden und Denken sind allerdings ihrem Begriffe nach heterogen, nicht auf eine Einheit rückführbar; sobald ein solcher Monismus versucht wird, sinkt alle Existenz in's Nichts zurück, ausgenommen der Monist selbst, welcher vergisst, dass, indem er den Gedanken einer solchen Einheit zu fassen versucht, er nur insofern denken kann, als er vorher Empfindungen gehabt hat.

In der Schrift: „Zeit und Raum“ *) glaube ich diese Frage gelöst zu haben, indem ich diese Anschauungsformen der Sinnlichkeit (nach dem Ausdrucke Kant’s) nachwies als Formen des logischen Denkens, die genau so sich entwickeln müssen und nothwendiger Weise nicht anders entwickeln können, als wir sie scheinbar empirisch beobachten; in Wahrheit aber, weil wir unbewusst diese logischen Formen beständig bilden und gebrauchen, d. h. alle unsere Wahrnehmungen nach diesen logischen Formen zu einem Gesammtbilde, zu Vorstellungen ordnen.

An einem anderen Orte gedenke ich auszuführen, dass auf Grund dieses Resultates, unter einer gewissen Bedingung, der Raum nicht allein ein subjektives Erzeugniss unseres Denkens, sondern auch eine objektive Realität sein muss — eine Ansicht, welche bekanntlich Trendelenburg als den dritten möglichen Fall zu den von Kant besprochenen zweien angemerkt hat.

Ein interessanter Satz findet sich noch bei H., welcher eine Brücke zu bilden scheint zu dem in meiner obigen Schrift entwickelten Gedankengange. Es heisst bei H.:

„Man könnte freilich auch den Begriff des festen geo-„metrischen Raumgebildes als einen transcendentalen Be-„griff auffassen, der unabhängig von wirklichen Erfahrungen „gebildet wäre und dem diese nicht nothwendig zu ent-„sprechen brauchten, wie ja unsere Naturkörper thatsäch-„lich ganz rein und ungestört nicht einmal denjenigen „Begriffen entsprechen, die wir auf dem Wege der Induktion „von ihnen abstrahirt haben. Unter Hinzunahme eines solchen, „nur als Ideal concipirten Begriffes der Festigkeit könnte „dann ein strenger Kantianer allerdings die geometrischen „Axiome als a priori durch transcendentale Anschauung „gegebene Sätze betrachten, die durch keine Erfahrung „bestätigt oder widerlegt werden könnten, weil man erst „nach ihnen zu entscheiden hätte, ob irgend welche Natur-„körper als feste zu betrachten seien. Dann müssten wir „aber behaupten, dass unter dieser Auffassung die geo-„metrischen Axiome gar keine synthetischen Sätze im Sinne „Kant’s wären. Denn sie würden dann nur etwas aus-„sagen, was aus dem Begriffe der zur Messung noth-„wendigen festen geometrischen Gebilde analytisch folgen

*) Zeit und Raum von Schmitz-Dumont bei E. Koschny, Leipzig 1875.

„würde, da als feste Gebilde nur solche anerkannt werden „könnten, die jenen Axiomen genügen. Nehmen wir aber „zu den geometrischen Axiomen noch Sätze hinzu, die sich „auf die mechanischen Eigenschaften der Naturkörper be- „ziehen, wenn auch nur den Satz von der Trägheit oder „den Satz, dass die mechanischen und fysikalischen Eigen- „schaften der Körper unter übrigens gleichbleibenden Ein- „flüssen nicht vom Orte, wo sie sich befinden, abhängen „können, dann erhält ein solches System von Sätzen einen „wirklichen Inhalt, der durch Erfahrung bestätigt oder „widerlegt werden, eben deshalb aber auch durch Erfahrung „gewonnen werden kann."

Es ist hier Richtiges und Falsches vermischt, und die Schwierigkeit liegt an der hier misslungenen Scheidung von Wahrnehmungen und (denkendem) Ordnen der Wahrnehmungen.

Dass die geometrischen Axiome keine synthetischen Sätze sind, ist ganz meine Ansicht; denn das synthetische Element, die sinnliche Anschauungsform, welches nach Kant's Ansicht zu dem logischen Denken hinzutreten soll um ein geometrisches Axiom zu bilden, löst sich ja obiger Darstellung zufolge in eine Reihe logischer Operationen auf; also ist auch jedes Axiom nur ein analytisch entwickelter Begriff, und eben deshalb kann es ein Begriff a priori genannt werden, der nicht aus der Erfahrung (a posteriori) entlehnt wird. Die Wortbildungen a priori und a posteriori sind allerdings sehr unpassend und geben durch ihre etymologische Bedeutung zu beständigen Irrungen Anlass. Denn der Zeit nach ist die Wahrnehmung bei dem Menschen das Erste und das denkende Ordnen der Wahrnehmungen ist erst möglich, wenn das Bewusstsein verschiedene Wahrnehmungen gesammelt hat. Nichtsdestoweniger sind die Denkgesetze von jeder spezifischen Art der Wahrnehmungen durchaus unabhängig; denn sie werden nicht durch diese spezifisch verschiedenen Wahrnehmungen gemacht, sondern die Wahrnehmungen werden dem denkenden Ordnen unterbreitet. Also nicht diese oder jene Art von Wahrnehmung (Erfahrung) giebt Anlass zur Bildung dieses oder jenes Denkgesetzes — und daraus der Axiome —, sondern Wahrnehmung überhaupt ist die Bedingung dazu, dass ein Denkgesetz überhaupt, d. h. Logik, angewandt wird. Bevor wir leben, können wir nicht denken. Deshalb ist aber doch das Denkgesetz unabhängig von der Art des Lebens.

Der (transcendentale) Oberbegriff nun, aus welchem die geometrischen wie mechanischen Begriffe analytisch ableitbar sein müssen, ist — die Erfahrungsmöglichkeit — d. h. die Bedingungen, unter welchen Erfahrungen von dem Denken gesammelt und mit einander verknüpft werden können.

Diese Bedingungen werden aufzufinden sein, einerseits als logische Denkgesetze. Andrerseits finden wir diese Bedingungen in allen Erfahrungen wieder; aber nicht weil wir, wie der Empiriker meint, diese Bedingungen als Theilbestandtheile aus den Naturerscheinungen herausziehen, sondern weil unser Verstand nach diesen Gesetzen die sinnlichen Wahrnehmungen mit einander verknüpft und dadurch erst das gebildet hat, was wir Naturerscheinungen, (erscheinende) Welt nennen.

Finden wir nun durch die Erfahrung ein von uns so oder so formulirtes Denkgesetz (Axiom) bestätigt, so ist dies ein Zeichen, dass jenes Axiom logisch richtig d. h. den Bedingungen einer Erfahrungsmöglichkeit überhaupt konform war, also auch wieder aus jenem Oberbegriffe analytisch entwickelbar ist, einerlei ob die Logiker dies bis jetzt fertig gebracht haben oder nicht.

Findet sich aber ein vermeintliches Axiom durch die Erfahrung wiederlegt, so ist das ein Zeichen, dass es nur eine Hülfshypothese war, die sich schliesslich als im Wiederspruch mit der logischen Analyse ausweisen muss, einerlei wiederum, wie lange es dauern wird, bis Logiker und Empiriker, jeder nach seiner Methode die Analyse durchgeführt und ein Schlussresultat erreicht haben.

Dieser ganze Gedanke wird auch von Kant in einem kurzen Satze ausgedrückt, der allerdings vielen seiner Bemerkungen über synthetische Urtheile gegenüber in einem seltsamen Kontraste steht; er sagt:

„Die Möglichkeit der Erfahrung überhaupt ist das all-
„gemeine Gesetz der Natur und die Grundsätze der ersteren
„sind selbst die Gesetze der letzteren.“

Wie ausgeführt, sind also die anschaulichen Grundbegriffe so heterogen den durch die Erfahrung gesammelten Wahrnehmungen, wie die Empfindung der Bewegung, obschon wir sagen können, dass nur durch die Bewegung des Stoffes Empfindung erzeugt wird.

Die Atombewegung wie die Vorstellung des kontinuirlichen Körpers ist eine Fiktion unseres logischen Denkens, ersonnen (vorgestellt) zu dem Zwecke, um die

Erfahrungen, die Komplexe von Wahrnehmungen, den Gesetzen des Denkens gemäss ordnen, übersehen, (kausal) mit einander verbinden — oder nach einem anderen geläufigen Ausdrucke, erklären zu können. Insofern sind alle unsere Anschauungsvorstellungen transcendental (im Sinne von H.) sowohl die Euklidischen als die pangeometrischen; sowohl der Begriff zweier Linien, die sich nicht schneiden weil sie parallel sind, als der Begriff zweier geraden Linien, die sich schneiden trotzdem sie parallel sind. Der eine so gut wie der andere kann für gewisse Zwecke gebraucht werden. Die Philosophie der Mathematik muss jedoch untersuchen, ob diese zu gewissen Zwecken von unserem Verstande konstruirten Begriffe nicht logische Wiedersprüche enthalten; und in dem letzteren Falle müssen sie für falsch erklärt werden, einerlei, ob dieselben als Hülfsbegriffe bei speziellen Untersuchungen Resultate ermöglicht haben, einerlei ob ihre Erfinder dadurch zu der Meinung verleitet wurden, sie hätten durch Induktion eine genauere Kopie der Natur erzielt.

Wie nun aus dem letzten Citate hervorgeht, ist H. der Ansicht, dass — im Gegensatze zu solchen transcendentalen Begriffen, woraus etwa auch Axiome einer Geometrie konstruirt werden könnten —, der Satz von der Trägheit eine mechanische Eigenschaft der Naturkörper ausdrücke, welche bei einer Vereinigung mit vorgedachten Axiomen erst einen wirklichen Inhalt bilde, der wissenschaftlich erörtert, durch Erfahrung bestätigt oder wiederlegt werden könne. Es ist dies allerdings von jeher die Ansicht fast aller Mathematiker und Physiker gewesen. Riemann, welcher sich mit dieser Frage beschäftigte, kam auch zu der Konklusion, „dieses Bewegungsgesetz (der Trägheit) kann nicht aus dem Princip des zureichenden Grundes erklärt werden. Dass der Körper seine Bewegung fortsetzt, muss eine Ursache haben, welche nur in dem inneren Zustand der Materie gesucht werden kann.“ (G. W., S. 496).

Trotz aller dieser Autoritäten vermag ich jedoch in diesem Satz von der Trägheit, ebenso wie in den anderen ähnlichen der reinen Mechanik nichts anderes zu sehen, als einen ebenso formalen Ausdruck des Identitätsatzes wie bei den geometrischen Axiomen. Es wird nur bei diesem Trägheitsbegriffe vorausgesetzt, dass der Identitätsatz auf Naturkörper angewandt werden soll, deshalb die veränderte Fassung.

In diesen Gedankengang übertragen, heisst das Bewegungsgesetz: — Sollen die geometrischen Axiome auf Naturkörper (Komplexe von Wahrnehmungen, welche als kausal mit einander verbunden von uns betrachtet werden) angewandt werden, so müssen wir die Fiktion eines letzten Substrats dieser Naturkörper bilden, werde dies nun Substanz, Atom, reiner Stoff, Masse oder Bewegungsquantum genannt, und dieser Begriff muss natürlich stets identisch mit sich selber in allen Formeln erscheinen; sonst wäre es eben kein Begriff, wäre nicht die Fiktion, welche zum Zwecke der Erklärung dienlich sein könnte. Wird nun die Masse (wenn wir bei diesem Worte bleiben) in einem gewissen Zeitpunkte, welcher als Ausgangspunkt der Formelbildung festgesetzt wird, als ruhend oder aber als bewegt vorgestellt, so muss sie auch das eine Mal als ruhende, im zweiten Falle als bewegte Masse so lange vorgestellt werden bis ein anderes ihr homogenes Moment auftritt, welches mit ihr durch den Verstand kausal verbunden werden, den Bewegungszustand der Masse verändern kann.

Wollte man voraussetzen, dass dieser Bewegungszustand sich selbst verändern könnte, so würde man einfach gegen die Logik sündigen, in welcher sich nie ein Begriff durch sich selbst ändern kann. Dieser logische Irrthum entsteht dadurch, dass man glaubt, eine Masse in Bewegung sei zusammengesetzt aus Masse und Bewegung, während doch der Bewegungszustand der Oberbegriff ist, auf den die Veränderungen der Massen bezogen werden, der also stets mit sich identisch bleiben muss. Deshalb ist auch Bewegung ein relativer Begriff, eine ruhende Masse nur von der bewegten Masse verschieden je nach dem Standpunkte, den wir zur Vergleichung wählen, nicht aber ihrem Wesen nach. (Vergl. Zeit und Raum, S. 76.)

Wenn der Chemiker die Vorstellung eines Atoms oder Elementes fasst, so heisst dies, dass er alle Veränderungen der Materie auf einen letzten Begriff bezieht, der nothwendig identisch bleiben muss. Ebendasselbe thut der Mechaniker, wenn er den Begriff träge Masse bildet und auf diesen Begriff alle räumlichen Veränderungen der Naturkörper bezieht. Fängt er an der logischen Zulässigkeit dieses Begriffs zu zweifeln an, glaubt er, dieser Begriff sei ein Ding, welches unter einer anderen Sonne auch anders aussehen könne, so begiebt er sich der Möglichkeit des Denkens und Erklärens überhaupt.

Also nicht wie Riemann meint, ist es unmöglich das Bewegungsgesetz aus dem Princip des zureichenden Grundes zu erklären, sondern: das Bewegungsgesetz ist nichts anderes als das Princip der Identität, und dieses ist die einzige Möglichkeit, dass ein Princip des zureichenden Grundes aufgestellt werden kann. In dieser Beziehung ist die Mechanik keine Erfahrungswissenschaft, sondern gerade wie die Mathematik eine reine Methode des Verstandes, Ausdruck der Denkgesetze, und kann deshalb unabhängig von spezifischen Erfahrungen, lediglich nach den Bedingungen einer Erfahrungsmöglichkeit überhaupt (also nach dem alten Ausdrucke a priori) konstruirt werden.

Der Uebergang von dieser Methode des Verstandes zu einer Wissenschaft von empirischem Inhalte geschieht erst, wenn wir den Bewegungszustand eines abstrakten, etwa durch Zahlen oder die Variabeln m, t, x, y, z bezeichneten Massenquantums ausdrücken oder versinnlichen, als eine bestimmte Zahl von irdischen Pfunden in der Ortsveränderung von so viel Fuss per Sekunde.

Dass unsere Sinne eine Druckempfindung wahrnehmen, ein Gewicht, das ist das empirische; dass aber der Verstand hierzu die Fiktion träge Masse bildet, ist das logische; denn es blieb ihm hier keine Alternative, das war denknothwendig. Man versuche es doch einmal mit der Fiktion „selbsthätige (nicht träge) Masse“; man wird finden, dass man sich gleich bei dem ersten Satze in das Reich der Gespenster versetzt, wo alle Diskussion und Denken gleich ein Ende haben.

Ebenso, die bestimmte Empfindung roth, grün ist empirischer Inhalt. Dass wir aber statt dieser Empfindung in unseren Rechnungen so und soviel Schwingungen von Atomen setzen, das ist logische Konstruktion unseres Verstandes, unseres von spezifischen Einzelerfahrungen unabhängigen Denkens.

Resumirend: Dieses eiserne Lineal nenne ich ein Ding, einen empirischen Gegenstand, weil ich folgendes von ihm aussagen kann: Dieses Ding erregt in meinem Sinnen (sinnlichem, bewussten Auffassungsvermögen) verschiedene Empfindungen: grauschwarz, glänzend, hart, schwer, kalt etc. Alle diese Empfindungen bleiben dieselben, wenn ich den einen oder den anderen Theil des Lineals besehe, befühle, schmecke etc. Dieses Betasten etc. des Lineals an verschiedenen Stellen ist aber eine Verbindung der Empfindung eisern mit anderen Empfindungen (Innervationsempfindungen). Wir machen nun durch Betasten vieler Stellen des Lineals die Beobachtung, dass die Wahrnehmung eisern stets dieselbe bleibt, aber stets verbunden mit verschiedenen Innervationsempfindungen. Wir sagen desshalb: die Wahrnehmung ergiebt eine gleichzeitige Vielheit von gleichwerthigen Empfindungen. Die Innervationsempfindungen sind verschieden je nach den verschiedenen Stellen des Lineals, welche wir betasten. Das Lineal bleibt dasselbe; wir legen deshalb die Verschiedenheit der letzteren Empfindungen einer Aenderung unserer Art und Weise des Betastens bei; wir sagen: Aenderung der Betastungsorgane (Bewegung des eigenen Körpers). Jetzt tritt an unser logisches Denken die Anforderung, die gleichzeitige Vielheit identischer Empfindungen eisern zu einer konstanten Form (der Vorstellung von der Körpergestalt des Lineals) zu ordnen; denn wir mussten ja schliessen, dass die Aenderung der Innervationsgefühle nur durch die Vielheit jener Empfindungen eisern, wie wir jetzt sagen, durch die gegenseitige Lage der Einheiten jener Vielheit (Stellen des Körpers) hervorgerufen werde.

Die Innervationsempfindungen selbst haben ebensowenig etwas Räumliches an sich, als alle anderen Empfindungen. Um aber uns Rechenschaft geben zu können über die Art ihrer Thätigkeit etc., müssen wir wiederum die ganz ideale Vorstellung einer räumlichen Gestalt bilden, an deren verschiedene Stellen unser logisches Denken den Sitz jener Empfindungsinstrumente (Nerven) hinverlegt.

Es ist natürlich dasselbe, wenn ~~wir~~ Aufgabe und Schluss folgendermaassen stellen: Es soll die Vielheit der Innervationsempfindungen, welche alle von der Empfindung eisern begleitet sind, zu einem Ganzen logisch geordnet werden. In diesem letzteren Falle konstruiren wir die Bewegungen, welche nöthig sind, um die Form des Lineals zu bestimmen, in dem vorigen Falle dagegen direkt die Form des Lineals.

Ist nun die Ordnung einer solchen Vielheit zu einem Ganzen überhaupt möglich, so muss es eine konstante Ordnung sein unter allen gleichzeitigen andern Verhältnissen jeder möglichen Beobachtungsreihe von Empfindungen gegenüber; denn sonst wäre es keine Ordnung überhaupt.

Die Frage stellt sich weiter: Liegt es im Denkgesetze, in dem Begriffe einer logischen Ordnung, dass eine solche gleichzeitige Vielheit ein System bildet, innerhalb dessen Gegensätze überhaupt oder nur Gegensätze in einer gewissen Anzahl möglich sind, ähnlich etwa wie jeder logische Begriff nur einen einzigen kontradiktorischen Gegensatz zulässt?

Die hierauf bezügliche Untersuchung (Zeit und Raum, S. 13—24) ergiebt, dass nur ein bestimmtes System (von drei Dimensionen) logisch möglich ist.

In jener Untersuchung wird als Ausgangspunkt die Existenz einer Welt überhaupt genommen, oder was dasselbe ist, die nackten Bedingungen einer Erfahrungsmöglichkeit überhaupt; aber durchaus keine Voraussetzung spezifischen (d. h. empirischen) Inhalts. Die Begriffe, mit welchen operirt wird, sind Identität, Unterschied, Kausalität. Einheit, Vielheit; und hieraus werden alle Anschauungsbegriffe in mathematischer Form aufgebaut.

Sind es nun vorzugsweise die Innervationsempfindungen, welche unser Denken zur Bildung einer Vorstellung von der räumlichen Gestalt des Körpers zwingen, so sind es die Sinnesempfindungen speziell, welche unser Denken zu einer Vorstellung von der inneren Konstitution der Körper (der hypostasirten Ursachen, welche Empfindungen in uns erregen) auffordern. Also die Empfindungen grau, glänzend etc. sollen auf hypostasirte einfache Ursachen zurückgeführt werden. Zu diesem Zwecke bilden wir die Vorstellung eines bewegten Atomkomplexes.

Ganz falsch wäre es nun, zu sagen, jenes Lineal ist ein bewegter Atomkomplex; denn das logische Atom ist ein mathematischer Punkt und das Lineal ist doch ein hartes, stossendes Ding, welches unmöglich aus körperlichen Nichtsen zusammengesetzt sein kann; sondern was wir von dem Dinge Lineal aussagen können, ist Folgendes:

Dasselbe erregt in uns eine Vielheit (ist die Ursache von) von empirischen Empfindungen, und um diese Vielheit zu einem Ganzen logisch (kausal) mit einander verbinden zu können — zu dem materiellen Zwecke des Gebrauches oder dem idealen Zwecke der Erkenntniss —, bilden wir obige Vorstellung eines bewegten Atomkomplexes. Der Materialismus begeht hier den Fehler, zu schliessen: Das Ding ist ein Atomkomplex; dann wird das Atom ein körperliches Ding, kein Begriff, taugt nicht zu einer Erklärung, sondern muss selbst wieder erklärt werden, und verfällt bei diesem Versuche dem logischen Widerspruch. Die weitere Frage: was denn aber das Ding eigentlich sei? -- gehört nicht hierher, ebensowenig die Untersuchung, ob dies überhaupt eine vernünftige Frage sei.

Hier sollte nur ausgeführt werden, dass die Dinge unser logisches Denkvermögen zur Bildung gewisser **konstanter Vorstellungsformen** zwingen, auf welche wir die von den Dingen in uns erregten Empfindungen beziehen, um diese Vielheit von Empfindungen zu Einheiten (zu kausal wirkenden Körpern) zusammenfassen zu können.

Diese Vorstellungsformen (Anschauungsbegriffe [Zeit und Raum, S. 72]) — Zeit, Raum, Masse, Kraft — sind also **die logischen Maasseinheiten**, den empirischen Maasseinheiten — Sekunde, Meter, Kilogramm, Schwerkraft, elektrische Kraft etc. -- gegenüber.

III.

Betrachten wir nun etwas eingehender die Riemann'sche Raumtheorie, womit H. die seinige identifizirt.

Ausgehend von der Thatsache, dass bisher die Axiome der Mathematik und Mechanik nicht von einem durch sich selbst evidenten Prinzipe abgeleitet werden konnten, stellte er die These auf: „diese Axiome sind überhaupt nicht de-„duzirbar, unsere Mathematik also eine Erfahrungswissenschaft. Es muss sich dann aber durch logisches Fortschreiten eine allgemeine Mathematik entwickeln lassen, welche alle denkbaren, wenn auch nicht anschaulich darstellbaren Kombinationen in sich begreift; und unter diesen müssen sich als Einzelfälle die Euklidische Geometrie und die Galileische Mechanik wiederfinden."

Historisch sei hierzu bemerkt, dass schon Kant in einer Jugendschrift diesen Gedanken aufstellte und dass Euler denselben zurückwies. In der neuesten Zeit hat es sogar nicht an Solchen gefehlt, welche auch das arithmetische Summirungsgesetz als einen Einzelfall des logischen Denkens auffassen. Hierdurch ist die erstere Idee zu ihrer letzten Konsequenz, dadurch aber auch ad absurdum geführt.

Ist nun auch obiger Schluss von dem bisher unbewiesenen auf das unbeweisbar überhaupt ungerechtfertigt, so hat doch der Kritizismus offenbar das Recht, einen solchen Ausgangspunkt aufzustellen, um die breiteste Grundlage zu gewinnen für die Gestaltung logischer Möglichkeiten, d. h. mathematischer Gebilde.

Riemann geht jedoch nicht von dieser Basis stufen weise vorwärts, sondern stellt im Hinblick auf den Gebrauch algebraischer Potenzen alsbald einen Oberbegriff auf (die n-fache Mannichfaltigkeit), woraus er alles weitere entwickeln zu können glaubt. In Worten von H. ist dieser Begriff dargelegt wie folgt:

„Riemann nennt ein System von Unterschieden, in „welchem das Einzelne durch n-Abmessungen bestimmt „werden kann, eine n-fach ausgedehnte Mannichfaltigkeit „oder Mannichfaltigkeit von n-Dimensionen. Somit ist der „uns bekannte Raum, in dem wir leben, eine dreifach aus„gedehnte Mannichfaltigkeit von Punkten; eine Fläche eine „zweifache, eine Linie eine einfache, die Zeit ebenso eine „einfache. Auch das System der Farben bildet eine drei„fache Mannichfaltigkeit, insofern jede Farbe nach Th. „Youngs Untersuchungen dargestellt werden kann als die „Mischung dreier Grundfarben, von deren jeder ein be„stimmtes Quantum anzuwenden ist. Ebenso könnten wir „das Reich der einfachen Töne als eine Mannichfaltigkeit „von zwei Dimensionen betrachten, wenn wir sie nur nach „Tonhöhe und Tonstärke verschieden nehmen und die Ver„schiedenheit der Klangfarbe bei Seite lassen. Diese Ver„allgemeinerung des Begriffes ist sehr geeignet, um her„vortreten zu lassen, wodurch sich der Raum von anderen „Mannichfaltigkeiten dreier Dimensionen unterscheidet."

Es werden hier die heterogensten Bestimmungen unter dem Namen Dimensionen innerhalb eines Systems zusammengestellt. Der Begriff Dimension ist nicht definirt; oder soll etwa unabhängige Abmessung diese Definition sein? Dann wären Temperatur, elektrische Spannung etc. Dimensionen eines betreffenden Punktes; dass dann aber die Definition für die Raumdimensionen falsch ist, wird sich weiterhin zeigen. Man kann diesen Begriff zu gewissen Klassifikationen verwenden, (in der Algebra), obschon nicht einzusehen ist, warum er den althergebrachten, Form von der n-ten Potenz, verdrängen soll. Aber dieser Begriff ist offenbar ersonnen worden in der Meinung, dass eine Abmessung durch n unabhängige

Variable und die Abmessung durch n-Potenzirungen unter einen gemeinsamen Modus des Abmessens vereinigt werden könnten; und dies ist der logische Fehler des Begriffs. Deshalb hält auch Helmholtz seine Untersuchung von 1868 für identisch mit denen Riemann's 1854. Bei den drei ersten Potenzen ist allerdings eine direkte Deutung der Zahlpotenz auf das Raumgebilde möglich; aber wir dürfen nicht vergessen, dass, wenn 4^2 in der Arithmetik gar nichts anderes bedeuten kann, als die Zahl 16, es in der Raumanwendung 16 Flächengebilde bedeutet, welche eine ganz verschiedene Qualität von den Gebilden hat, auf welche die Zahl sich bezieht, wenn sie in der Form 4^1 oder 4^3 vorkommt; dass also der Begriff der n-fachen Mannichfaltigkeit, wenn er zugelassen wird, eine mehrfache Deutung erfordert, also als Begriff falsch ist. (Zeit und Raum, S. 26).

Riemann und seine Schule übersahen, dass hier erst eine prinzipielle Untersuchung nöthig war; nämlich, inwiefern algebraische Formeln Gedanken und Begriffe ausdrücken können, inwiefern sie Deutungen zulassen wenn sie auf bestimmte Gegenstände bezogen werden; und wenn sie auf Begriffe angewandt werden (wie hier auf den Begriff Dimension), ob dann nicht dieser Begriff nur eine bestimmte Zahl von Variabeln oder aber von algebraischen Potenzen zulasse, wenn er nicht als ein solch spezifischer Begriff zerstört werden soll. Also kurz gesagt: die algebraische Potenz wurde verwechselt mit der geometrischen Dimension, beide für identisch angesehen und daraus entstand der scheinbare Oberbegriff n-fache Mannichfaltigkeit. Dass man bisher noch nicht diese Untersuchung unternommen (welche allerdings schwierig ist und sich nicht in rein mathematischer Form ausführen lässt) stammt zum grossen Theil auch daher, weil man es in der Mathematik nur mit Grössen zu thun zu haben glaubt.

Die Folge dieses Fehlers erscheint bei Riemann gleich im § 2 seiner epochemachenden Schrift, „Ueber die Hypothesen der Geometrie"; es heisst dort:

„Geht man bei einem Begriffe, dessen Bestimmungs- „weisen eine stetige Mannichfaltigkeit bilden, von einer „Bestimmungsweise auf eine bestimmte Art zu einer andern „über, so bilden die durchlaufenen Bestimmungsweisen eine „einfach ausgedehnte Mannichfaltigkeit, deren wesentliches „Kennzeichen ist, dass in ihr von einem Punkte nur nach „zwei Seiten, vorwärts oder rückwärts, ein stetiger Fort-

„gang möglich ist. Denkt man sich nun, dass diese Man-„nichfaltigkeit wieder in eine andere, völlig ver-„schiedene übergeht, und zwar wieder auf bestimmte „Art, d. h. so dass jeder Punkt in einen bestimmten Punkt „der andern übergeht, so bilden sämmtliche so erhaltene „Bestimmungsweisen eine zweifach ausgedehnte Mannich-„faltigkeit. In ähnlicher Weise erhält man eine dreifache „ausgedehnte Mannichfaltigkeit, wenn man sich vorstellt, „dass eine zweifach ausgedehnte in eine völlig verschiedene „auf bestimmte Art übergeht, und es ist leicht zu sehen, „wie man diese Konstruktion fortsetzen kann."

Gleich am Anfang wird, so scheint es, vorausgesetzt, dass ein Begriff, der verschiedene Bestimmungsweisen zulässt, überhaupt unbestimmt viele Bestimmungsweisen zulasse.

Es wird sodann gar nicht näher gesagt, wie man sich das Uebergehen in **völlig verschiedene** Art vorstellen soll oder wie sich die Bestimmungsweisen begrifflich von einander unterscheiden dürfen. Ebensowenig wird klar, was eine **völlig** verschiedene Art sein soll. Das sind aber Operationsverfahren oder Forderungen, die in keiner Wissenschaft, am allerwenigsten in der Mathematik zulässig sind.

Am Schlusse heisst es sogar: „Es ist leicht, einzusehen, „wie man diese Konstruktion fortsetzen kann." Mit Worten kann man solche Nachsätze allerdings beständig fortbilden, ob aber die geforderte Konstruktion sich fortsetzen kann oder vielmehr in logischen Widerspruch ausartet, das ist gar nicht so leicht einzusehen.

Soll nun etwa das Uebergehen in die völlig andere Art aufgefasst werden wie der Fortschritt eines Punktes in zu einer bestimmten ersten senkrechten Richtung (und dies war ja Riemann's Absicht) oder wie die Gestaltung einer Reihe von Reihen (nach Gauss), so sagt die Logik, dass ein Begriff nur einen kontradiktorischen Gegensatz zulässt; die völlig verschiedenen Arten, d. h. die Richtungsbegriffe also nur in begrenzter Anzahl denkmöglich sind. Von einem Punkte aus sind Uebergänge in unbestimmt viele verschiedene Arten (Richtungen) denkbar, aber eine jede einzelne kann nur **einer** anderen entsprechen, welche die **völlig** verschiedene Art benannt werden darf, sonst ist die Identität, das Wesen des Begriffs zerstört. Gerade auf dieser Ausführung beruht die Ableitung der drei denkmöglichen Raumdimensionen aus dem Begriffe der Bewegung

(Zeit und Raum, S. 45). Die Algebra mag immerhin die Formel eines Gebildes von n-Dimensionen aufstellen; in eine solche Form den Begriff von mehr als zwei entgegengesetzten Richtungen hineinzubringen, ist unmöglich. Mit Buchstaben lässt das sich allerdings fertig bringen, ebenso wie man zwei sich widersprechende Behauptungen in einem Satze vereinigen kann. Aber Formel wie Satz werden dadurch alogisch. Soll aber das von Riemann postulirte Uebergehen in völlig verschiedene Arten, etwa dem Wechsel der Qualitäten, Linie in Fläche, Fläche in Körper, entsprechen, so bleibt es eine leere Behauptung, dass dieser Qualitätswechsel unbeschränkt fortgehen, und dass von jenen imaginären Qualitäten durch die steigenden Potenzen etwas ausgesagt werden könne.

Betrachten wir nun etwas näher die Deutbarkeit algebraischer Formeln mit mehreren Variabeln

Wir können den Zustand einer Stelle irgend eines Körpers abmessen nach seiner Bewegung im Raume, seiner Dichte, Temperatur, elektrischer Spannung etc. Wir würden, um diese Abmessungen in einer Formel zu vereinigen, sieben oder mehr Variable gebrauchen, also etwa eine siebenfache Mannichfaltigkeit. Nun sind aber alle Mathematiker der Ansicht, dass es einmal gelingen wird, diese zu reduziren auf die drei Raum- und die eine Zeitvariable. Diese vier gedenkt jedoch Niemand je noch weiter reduziren zu können. Dies zeigt schon, dass das Wesen der verschiedenen Veränderlichen in den obengedachten Riemann'schen Systemen von n-Mannichfaltigkeiten sehr verschiedener Natur sein muss. Trotzdem werden sie schlechtweg von einander unabhängige Veränderliche genannt. Die Möglichkeit des unabhängigen Abmessens und Zusammenstellens in Formeln giebt also gar keine Garantie dafür, dass in jenen Formeln die Natur der Sache ausgedrückt wird, und umgekehrt: die Möglichkeit einer richtigen, aber willkürlich zusammengestellten algebraischen Formel ist gar keine Garantie dafür, dass, wenn wir ihren Buchstaben diesen oder jenen Abmessungsmodus unterlegen, nicht der Begriff, auf den sich die einzelnen Abmessungen beziehen, durch den Zusammenstellungsmodus der Gesammtformel zerstört wird. Die Homogenität geometrischer Gleichungen ist ein Einzelfall der hieraus sich ergebenden Bedingungen; der einzige Fall, welcher bis zur heutigen Entwickelung der Analyse in Betracht gezogen werden musste; andere werden folgen.

Nachdenken über die Natur der Raumkoordinaten, welche sich aus dieser gehofften Möglichkeit einer Reduktion der vielen unabhängigen Variablen vermuthen lassen als charakteristisch verschieden von anderen Variablen, muss uns eine Bemerkung aufdrängen, von welcher es zu verwundern ist, dass sie bisher noch nicht hervorgehoben worden; was ich mir nur erklären kann durch die wenige Beachtung, deren man bisher eine logische Analyse der Grundlagen der analytischen Geometrie gewürdigt hat. Ich meine nämlich, dass die Raumkoordinaten sehr mit Unrecht den Namen *von einander unabhängige Variable* führen; denn können ihre individuellen Abmessungen auch in allen Grösseverhältnissen ausgeführt werden, so bilden sie doch ein fest gegliedertes System, in welchem eine jede Koordinate zu den andern in einem bestimmten Verhältnisse steht, allerdings in keinem Grössenverhältnisse. Man kann dasselbe aber algebraisch ausdrücken; bei rechtwinkeligen Koordinaten etwa durch die Form $x_{,} = m\sqrt{-x_{,,}^{2}}$. Hier bezeichnet m das *Grösseverhältniss* zweier beliebiger Variabeln, $\sqrt{-x^{2}}$ ihr *Systemverhältniss*, bei der Anwendung auf den Raumbegriff speziell das Richtungsverhältniss.

Diese gegenseitige Abhängigkeit der Raumkoordinaten bedingt die nur beschränkte Möglichkeit ihrer Anzahl, und hieraus lässt sich wiederum ein Beweis für die Denkmöglichkeit von *nur drei* Dimensionen führen, welchen ich (Zeit und Raum, S. 31) als algebraischen Beweis angedeutet habe.

Hieraus folgt, dass *Riemann*'s analytischer Ausdruck für die Distanz $ds = \sqrt{dx_{,}^{2} + \ldots dx_{n}^{2}}$ *nicht zulässig* ist, denn er fusst auf der Voraussetzung, dass die Raumkoordinaten *schlechtweg* unabhängig von einander seien.

Noch weniger zulässig ist natürlich der Ausdruck, welcher ein Krümmungsmaass enthält.

Um den algebraischen Ausdruck des Begriffs *Entfernung* zu finden, ist es nothwendig, zu untersuchen, wie viel Variable zugleich in dem Verhältnisse $x_{,} = \sqrt{-x_{,,}^{2}}$ zu einander stehen können; sodann ob ein durch zwei Punkte bestimmtes Raumgebilde ein eindeutiges Minimum zulässt, und ob der solcherweise entstandene Ausdruck unabhängig ist von dem Grössenverhältniss der Variabeln. Denn alles, was diesen Bedingungen nicht genügt, das nennen wir eben nicht *Entfernung* (Zeit und Raum, S. 38). Die logische Konstanz des *Begriffs überhaupt*, in diesem Falle also der Begriffe Raum und Entfernung, fordert, dass das mathematische Krümmungsmaass des Raumes (oder vielmehr, des durch eine dritte Potenz dargestellten Gebildes) gleich Null sei; und dass das Integral des Bogenelementes (die Verbindung zweier Punkte), ein eindeutiges Minimum habe. Ein anderer mathematischer Ausdruck taugt nicht für den geforderten Begriff. Weil die allgemeine algebraische Gleichung diesen Bedingungen nicht entspricht, deshalb darf sie in allgemeinster Form nicht als Ausdruck des Raumes gebraucht werden. In obigen Bedingungen ist der wirkliche Raumbegriff ausgesprochen, und hierin liegt gerade sein Unterschied als eines bestimmten Begriffs mit dem formlosen, mannichfältig deutbaren einer n-fachen Mannichfaltigkeit. Hier ist auch der wesentliche Unterschied ausgedrückt von kürzesten Linien unter gewissen Bedingungen (geodätischen Linien) und absolut kürzesten Linien. Die letztere, die Gerade, ist nicht das in sich kongruente, durch zwei Punkte bestimmbare Gebilde, sondern die Linie, welche nirgendwo ihre Richtung ändert, sie ist schlechtweg Richtung. Die Richtung kann aber nicht beurtheilt werden, wenn sie nur im Verhältniss zu einem bestimmten Gebilde betrachtet wird. Das letztere thut die Pangeometrie, wenn sie die Richtung einer geodätischen Linie nur im Verhältniss zu der zugeordneten Fläche betrachtet *).

Der durchgehende Fehler bei Riemann ist, dass er den Richtungsbegriff auf Grösseverhältnisse zurückführen will; hier aber lediglich zeigt, dass ein algebraischer Ausdruck, bei welchem wir den Richtungsbegriff stillschweigend hinzudenken, ein Spezialfall eines anderen algebraischen Ausdrucks ist, von dem gar nicht untersucht wird, ob er gleichfalls das Hinzudenken des Richtungsbegriffes zulässt. Riemann sagt:

„Die Mannichfaltigkeiten, in welchen sich, wie in der „Ebene und im Raume, das Linienelement auf die Form „$\sqrt{S\,(dx)^2}$ bringen lässt, bilden daher nur einen besonderen „Fall der hier zu untersuchenden Mannichfaltigkeiten."

Sagt man statt dessen: Man kann algebraische Formeln klassifiziren nach der Zahl von Potenzen, Variabeln und Differenzialordnungen, in solcher Weise, dass der Ausdruck $\sqrt{S\,(dx)^2}$ sich als ein Spezialfall des Ausdrucks (ds) darstellt, so ist nichts hiergegen einzuwenden. Was aber solche Ausdrücke bedeuten und ob sie überhaupt etwas bedeuten

*) Diese Unterlassungssünde gestaltet sich — Riemann's G. M. W.; S. 262, § 3 — zu einer vollständigen petitio principii.

können, nicht allein der wirklichen Existenz, sondern auch der blossen Denkmöglichkeit nach, das ist eine Frage, welche eine ganz neue Untersuchung erfordert

Um dies klarer zu machen, gehe ich auf die petitio principii ein, welche man nach den Ansichten von Riemann und Gauss aufgestellt hat; nämlich dass der Raum nach Analogie der Fläche vorgestellt werden müsse, in welcher petitio principii sodann die verschiedenartigen Flächenweseu Raum fanden.

Gekrümmt nennen wir, was (stetig) seine Richtung ändert. Insofern ist der Begriff „Krümmung“ in normalem Gebrauche nur auf Linien anzuwenden. Man kann nicht einwenden, dass der mathematische Krümmungsbegriff etwas anderes sei, denn ich gehe aus von den Elementen des Begriffs, nämlich der Richtung und der Aenderung der Richtung Sprechen wir von der Richtung einer Fläche, so ist schon eine Erläuterung nothwendig, denn eine Fläche enthält unendlich viele verschiedene Richtungen. Wir wollen mit dem Ausdrucke Krümmung der Fläche sagen, dass gewisse Richtungen (oder Linien), welche die Fläche vollständig bestimmen, sich stetig ändern sollen. So wird die Ebene dadurch, dass alle parallelen Linien einer bestimmten Richtung sich stetig und nach demselben Maasse ändern, zu einer Cylinderfläche von einfacher Krümmung; werden nun noch die Linien parallel der Cylinderachse nach ebendemselben Maasse stetig gekrümmt, so entsteht die Kugelfläche, welche demzufolge Fläche doppelter Krümmung genannt wird. Dass wir also den Begriff Krümmung auf Flächen überhaupt anwenden können, beruht darauf, dass eine jede Fläche durch (zwei aufeinander senkrechte) Liniensysteme bestimmt werden kann und wir bei diesen Liniensystemen, bei jeder einzelnen Linie die stetige Richtungsänderung verfolgen können.

Man kann nun hypothetisch auch den Begriff eines mathematischen Gebildes fassen, welches durch mehr als zwei Richtungssysteme bestimmt werden solle. Wächst aber diese Zahl der Richtungssysteme in's Unbestimmte (∞) oder ist diese Anzahl für ein bestimmtes Gebilde nicht eine eindeutige, so hat es gar keinen Sinn mehr, den Begriff Krümmung noch anwenden zu wollen; denn es sind ja keine bestimmten Linien da, wodurch die Richtungsänderung gemessen werden kann. Dies ist aber der Fall bei dem Gebilde, Körper genannt.

Im Raume, wie in einem Körper überhaupt, lassen sich gar keine Linien oder bestimmte Syteme von Linien erdenken, welche den Körper als Volum eindeutig bezeichnen sollen. Wohlgemerkt, als Volum, nicht als Körpergestalt von dieser oder jener Figur; denn in dem letzteren Falle würde nicht der Körper als Theil des Raumes, sondern als ein System von geometrischen Figuren bestimmt. Der Begriff Krümmung ist also ebensowenig auf den Raum, wie auf die Farben, wie auf Töne anwendbar. Die algebraische Formel, welche die Krümmung einer Fläche ausdrückt, lässt sich allerdings analog für mehr Variable hinschreiben; aber wie wiederholt bemerkt, dass eine Formel von 3 Variabeln einen logischen Begriff ausdrückt, ist gar keine Garantie dafür, dass die analoge Formel für 4 Variable auch einen dem vorigen analogen Begriff bezeichnet.

In diesem Gedanken, dass die Vorstellung Körper analog wie die Vorstellung Fläche betrachtet und beurtheilt werden müsse, sagt nun Riemann weiterhin:

„Die mehrfach ausgedehnten Mannichfaltigkeiten lassen „sich auf die in ihnen enthaltenen Flächen zurückführen."

Die Formel für eine mehrfache Mannichfaltigkeit (im Sinne Riemann's) lässt sich nach dem Multiplikationsgesetze in einzelne Theile zerlegen, welche begriffliche Bedeutung haben, geometrische Vorstellungen bezeichnen können. Aber geometrische Vorstellungen sind lediglich Begriffe Begriffe lassen sich aber nicht miteinander multipliziren, sondern nur Zahlen. Flächen können weder mit Flächen, noch mit Körpern, noch mit Linien multiplizirt werden, obschon die gewöhnliche Ansicht wenigstens das letztere für statthaft hält. Das Wahre daran ist, dass die zu einer Fläche gehörige Maasszahl mit der Linienzahl multiplizirt eine Zahl ergiebt, welche mit der Maasszahl des aus jener Fläche und Linie konstruirten Körpers übereinstimmt. Diese Uebereinstimmung ist Folge eines logischen Gesetzes, welches aber zugleich aussagt, dass ein weiteres Aufsteigen der Potenzen nach Raumbegriffen unmöglich ist. Es ist also ein falscher Ausdruck, zu sagen, dass jene n-fachen Mannichfaltigkeiten sich in Flächen zerlegen lassen und sollte heisen: die n-fachen Mannichfaltigkeiten lassen sich in quadratische Formen zerlegen. Die Operationen mit n-fachen Mannichfaltigkeiten sind in der Algebra ganz allgemein zulässig, in der Geometrie aber nur in Spezialfällen.

Betrachten wir eine Folge dieser Theorie. Gauss nannte die Formel seines Flächenkrümmungsmaasses das Maass, um welches sich eine krumme Fläche aus der Ebene heraushebt.

Nun kann aber von einem mehr oder weniger Herausgehen einer Fläche aus der Ebene nach logischen Begriffen gar nicht die Rede sein. Eine krumme Fläche kann eine Ebene in einem Punkte berühren, ausserdem aber muss sie total ausserhalb der Ebene liegen, nicht mehr oder weniger. Ein bestimmtes Stück Fläche kann allerdings mit jener Ebene ein mehr oder minder grosses Volum begrenzen. Auf solche Fehler des Ausdrucks muss man aufmerksam machen, denn besonders von Autoritäten ausgesprochen, werden sie Quelle von Verirrungen. Jene selbige Formel wird aber heute auch als Strahlendichtigkeitsmaass interpretirt*) und in dieser Gestalt ist der Begriff logisch fehlerfrei. Man könnte nun glauben, dass hierdurch ja ein Volum durch ein System von Strahlen bestimmt, dass also der obigen Bedingung genügt sei, um den Begriff der Krümmung auf das Volum anwenden zu dürfen. Sieht man jedoch näher zu, so findet man, dass das Strahlendichtigkeitsmaass über das Volum als Theil des Raumes gar nichts aussagt, sondern nur über die Gestalt der begrenzenden Flächen.

Es ist zu verwundern, dass in der weiteren Anwendung jener Krümmungstheorie nicht auch schon Untersuchungen über Flächen n-facher Krümmung gemacht worden sind; vielleicht, dass die hierbei implizirte Bedingung — von mehr als zwei in einem Punkte zu einander senkrechten Linien in derselben Ebene — als zu abenteuerlich abschreckte; aber algebraisch ist der Begriff ebenso zulässig, wie der des krummen Raumes. Man kann ebensogut ein Produkt aus 3 oder mehr Krümmungsradien algebraisch bilden, wie aus nur zweien. Auf einem Umwege scheint jedoch auch ein solcher Begriff entstehen zu wollen. Es ist nämlich (von Kronecker) das Strahlendichtigkeitsmaass als eine dem Falle $n = 3$ entsprechende Spezialisirung eines allgemeineren, im Raume von n-Dimensionen gültigen Begriffs nachgewiesen worden. Hieraus scheint mir der Begriff einer drei- oder mehrfach gekrümmten Fläche demnächst folgen zu können.

*) Ein jeder Punkt eines bestimmt abgegrenzten Körpers wird durch eine Linie eines anderen Körpersystems repräsentirt. Die Möglichkeit einer solchen Repräsentation unterliegt aber einschränkenden Bedingungen.

Riemann hat nun, um seinen Formeln eine weitere metaphysische Bedeutung geben zu können, die Begriffe unbegrenzt und unendlich als verschiedene gesetzt, und hat diese Aufstellung grossen Anklang gefunden, weil charakteristisch verschiedene Formelarten sich darnach klassifiziren lassen. Logisch ist diese Unterscheidung aber **nichtig.** Eine Kreislinie (nach Riemann unbegrenzt) ist ebenso begrenzt, wie eine gerade Linie; um diese Begrenzung zur Anschauung zu bringen, braucht man auf der Kreislinie nur eine, auf der geraden zwei Grenzen zu setzen. Nach einem anderen Modus der Klassifikation könnte man also im Gegentheil behaupten, eine Kreislinie sei doppelt so stark begrenzt wie eine Gerade.

Dass die algebraischen Formeln, aus welchen man die Kreislinien berechnet, unbegrenzte periodische Summirungsreihen von endlicher Summe sind, gab wohl den Anlass zu solchen Bestimmungen, und später schienen sie bei dem Krümmungsmaass des Raumes aus der Klemme zu helfen.

Das Bemühen, durchaus Begriffe in gewisse Formeln hineinzuzwängen, führte zu dieser Unterscheidung, welche an Hegel's schlechte und wahre Unendlichkeit erinnert. —

Wenn wir eine algebraische Funktion finden, welche bei dem Versuche, dieselbe geometrisch zu deuten, sich darstellt als eine unendlich oft widerholte Ausdehnung über eine und dieselbe geschlossene Curve, so bleibt diese Curve desshalb doch eine ebenso begrenzte Linie wie vorher, ehe wir sie zu Hülfe nahmen, um uns das Anwachsen obiger Funktion anschaulich zu machen; und diese Funktion bleibt eben eine solche sogenannte unendliche Reihe wie vorher; sie ist nicht durch die Veranschaulichung zu einer nur unbegrenzten Funktion geworden (diese Begriffe im Sinne Riemann's genommmen). Es ist also wieder wie vorher bei den Potenzen die Verkennung des Unterschiedes bei algebraischer und geometrischer Deutung einer und derselben Formel, welche zu der vermeintlichen Entdeckung eines unbegrenzten aber nicht unendlichen Raumes führte.

IV.

Auch das Axiom von den Parallelen hat seit Riemann erneute Bearbeitung gefunden; aus seiner Unbeweisbarkeit folgerte man die Richtigkeit der neuen Ansichten.

Uebersieht man die Literatur über diesen Gegenstand, so zeigt sich, dass die Hauptschwierigkeit darin besteht, die Frage richtig zu stellen; die meisten der Bearbeiter haben gar keine Idee davon, um was es sich eigentlich handelt. Insbesondere macht es einen merkwürdigen Eindruck auf den Logiker, dass die Mehrzahl heutiger Mathematiker den Beweis Legendre's für die Winkelsumme des Dreiecks nicht grösser als 180⁰ richtig, denselben Beweis für nicht kleiner als 180⁰ aber unrichtig nennen. Der simple Logiker würde dafür halten: entweder ist der Beweis für beide Fälle zulässig, oder aber für keinen von beiden. Meiner Ansicht nach entsteht der verschiedentliche Schluss, welchen jene Mathematiker ziehen, dadurch, weil sie den in der Figur abgegrenzten Raum für sicherer abgegrenzt halten, als den übrigen äusseren Raum.

Auch bei H. kommt der Kern der Frage nicht zum Vorschein. Er sagt: „Das Axiom von den Parallelen sagt „aus, dass, wenn zwei gerade Linien in derselben Ebene „sich nicht schneiden (parallel sind) die Wechselwinkel, be„ziehentlich die Gegenwinkel an einer dritten sie schneiden„den paarweise gleich sind, oder dafür wird der Satz ge„setzt, dass die Summe der Winkel in jedem Dreieck gleich zwei Rechten ist. Auch das sind Grössenbestimmungen.“ Wenn lediglich Grössenbestimmungeu hier in Frage kämen, dann wären allerdings die wunderlichen Sätze, welche seitdem über Parallelismus aufgestellt worden, ebenso berechtigt, wie irgend eine wunderliche algebraische Formel. Der Begriff Parallelismus wäre dann aber ein ganz anderer geworden, als er in der Euklidischen Geometrie ist; welche letztere ihn allerdings ungenügend definirt.

Es handelt sich beim Parallelensatz noch um etwas ganz anderes als um Grössen, nämlich um die logische Verbindung der beiden **qualitativ verschiedenen** Grössen **Linie** und **Winkel.** Die erste Bedingung hierzu ist, die Begriffe Linie und Winkel bestimmt zu definiren.

Ich möchte also das Problem folgendermaassen stellen: Man soll die Begriffe Richtung und Entfernung logisch miteinander verbinden, also entweder beide aus einem unmittelbar klaren Oberbegriffe ableiten, oder aber den einen unter der alleinigen Zuhülfenahme des Denkgesetzes in den andern überführen.

Macht man sich klar, dass die Hauptschwierigkeit darin besteht, zwei verschiedene Begriffe, einen Grössenbegriff und einen anderen, worin unmittelbar von Grösse gar nichts steckt, den einen durch den anderen zu erklären, dann sieht man auch gleich die Vergeblichkeit und Nutzlosigkeit aller Versuche ein, Richtung durch Grösseverhältnisse bestimmen, also für den Euklidischen Parallelensatz einen (algebraischen) Beweis finden zu wollen.

Die Ausbildung und Benutzung des Punktkoordinatensystems hat den Parallelbegriff nur noch mehr verwirrt; denn die Benutzung des Begriffs unendlich ferne Punkte, Linien etc., so bequem es für die Rechnung ist und so schmiegsam sich dieselben der beliebten Methode des allmähligen Ueberführens einer Anschauung in die andere fügen, so sind die betreffenden Formeln der Grenzfälle ebenso der falschen Deutung ausgesetzt, wie alle unbestimmten Symbole.

Das Resultat dieses auf Punktkoordinaten gegründeten Parallelenbegriffs lautet:

„Eine Gerade hat entweder einen unendlich fernen „Punkt, und auf diese Voraussetzung ist die Euklidische „Geometrie gegründet, oder zwei getrennte (reale oder imagi- „näre) unendlichferne Punkte, und auf diese letztere Voraus- „setzung ist die Pangeometrie gegründet. Welche von diesen „möglichen Fällen stattfindet, kann weder empirisch noch „spekulativ entschieden werden.“

In diesem Satze, wie er heute in vielen Lehrbüchern zu finden ist, verbindet sich die barocke Sprache synthetischer Geometrie, welche in diesem Punkte der Identitätsphilosophie ziemlich ähnlich geworden ist, mit dem Unvermögen gewisse algebraische Formeln in logische Rede zu übersetzen. Gegen das Erstere wäre nichts einzuwenden, wenn die gewöhnliche Sprache hier nicht ausreichte. Dass die gemeine gerade Linie nur einen unendlich fernen Punkt haben soll, macht den gewöhnlichen Menschenverstand stutzig. Dieser unendliche ferne Punkt ist aber auch gar kein Punkt, sondern nur eine bestimmte algebraische Form. Weil nun gewöhnlich eine bestimmte Form der Liniengleichung einen

Punkt derselben bezeichnet, so glaubt man, auch jene Unendlichkeitsform müsse als Punkt gedeutet werden, obschon man sagen müsste: „in diesem Falle ist die Formel falsch.“ Man hat sich jedoch daran gewöhnt, den Formeln Unfehlbarkeit zuzuschreiben und deshalb muss der logische Begriff, die Deutung der Formel, in sein Gegentheil verkehrt werden; für nur empirisch, nicht denknothwendig erklärt werden. Es wäre möglich, durch Aufstellung neuer Koordinatensysteme noch viel barockere Parallelensätze zu entdecken.

Die Gestaltung eines Parallelaxioms gehört gar nicht in die Formelbilduug, sondern in die Philosophie der Mathematik, wo die logische Erzeugung und Berechtigung der Begriffe Grösse, Richtung etc. untersucht wird. In Zeit und Raum, S. 13—18*) glaube ich diese logische Entwickelung möglichst kurz gegeben d. h. aus dem Denkgesetze die Definition und logische Richtigkeit der Begriffe Linie, Entfernung, Richtung etc. dargelegt zu haben, woraus das Parallelenaxiom als ein spezifisch gefasster Ausdruck unserer Denkgesetze folgt. Die Begriffe Ausdehnung, Richtung werden dort unter dem Begriff Unterschied subsummirt und dieser als correlativ mit dem Urbegriff allen Denkens, der Identität, nachgewiesen. Ausdehnung und Richtung werden sodann zum Begriff gerade Linie verbunden; und so liegt es denn in diesem Begriffe, dass zwei verschiedene gerade Linien von derselhen Richtung (oder was dasselbe ist, beide senkrecht zu einer dritten in derselben Ebene) sich nie schneiden können (parallel sind). Die gerade Linie unserer Geometrie ist aber nichts anderes, als dieser Anschauungsbegriff — eine ideelle Vorstellung — auf welche wir alle unsere empirischen Messungen beziehen, nicht aber ein unserer empirischen Messung unterworfenes Ding.

---

*) Ein Kritiker hat das dort Angeführte für eine Wiederholung von Fichte's Konstruktion des Nicht-Ich aus dem Ich gehalten. Dem wirklich aufmerksamen Leser dürfte das wohl nicht passiren, denn abgesehen von der Verwendung des Zeichens $A = A$, ist sowohl Ausgangspunkt wie Resultat das Gegentheil von Fichte's Deduktion.

V.

Bin ich nun Schritt für Schritt der von der Riemann'schen Schule gegebenen Deutung der betreffenden Formeln entgegengetreten, und habe ausgeführt, dass die sogenannte Pan- oder absolute Geometrie in ihrem allgemeinen Theile gar keine Geometrie, dass nur ihre Planimetrie eine allgemeine Planimetrie auf krummen Flächen ist und in dieser Beziehung die Eintheilung in hyperbolische parabolische elliptische, je nach dem charakteristischen Vorzeichen des Krümmungsmaasses der betrachteten Fläche statthaft ist, so erhebt sich die Frage: was bedeuten denn aber jene Formeln, die man immerhin Resultate der Analysis nennen kann?

Die vollständige Antwort hierauf kann erst gegeben werden, wenn einmal die Deutbarkeit analytischer Formeln von breitester logischer Grundlage aus untersucht worden ist. Dass eine algebraische Formel eine begriffliche Deutung überhaupt haben müsse, kann durchaus nicht a priori behauptet werden. Wenn z. B. gesagt würde (wie H. es an einer Stelle zu thun scheint): „jener Krümmungsbegriff ist ein analytischer Ausdruck, welcher den Mathematikern gewisse Dienste leistet, aber ganz unabhängig davon ist, was die menschliche Organisation für Krümmung ansieht", so ist zu erwiedern: Dann darf man aber gar nicht insinuiren wollen, dass dieser analytische Ausdruck in seiner allgemeinen Form überhaupt etwas vom Raume aussagen kann; es ist vielmehr möglicherweise eine vollständig bedeutungslose Formel, ein Produkt willkürlicher algebraischer Zusammensetzung; eine sichere Bedeutung hat dieselbe nur in dem Falle, dass die Variabeln reine Zahlgrössen bedeuten. Bei dieser Deutung wird aber die ganze Formel zu nichts weiterem, als einem komplizirten Ausdruck, für den wir ebensogut die äquivalente Ziffer unserer gemeinen Zahlreihe setzen können. In der Zahltheorie hat deshalb eine jede Formel eine gewisse begriffliche Bedeutung.

Die begriffliche Art des Schlusses in den pangeometrischen Untersuchungen muss also geändert werden. Man fand bei Klassifikation der Formeln nach Potenzen, Variabeln etc., dass die den Raum ausdrückende Formel ein Spezialfall des ganzen Schemas war und schloss daraus: die uns bekannte räumliche Gestalt der Dinge ist ein

Spezialfall der Gestalten, welche die Dinge überhaupt haben können. Der Schluss ist falsch, er muss heissen: Der Raum ist einer von den vielen Begriffen, welche zu bilden unserm logischen Denken möglich ist. Raum als Begriff des Nebeneinander, als gleichzeitige Vielheit von Dingen, kann mathematisch nur durch drei Dimensionen oder drei gleichwerthige Variable, oder was gleichbedeutend ist, durch ein Koordinatensystem ausgedrückt werden.

Die algebraische Formelbildung hat jedoch ein viel weiteres Feld, als die Zählung und Beschreibung der Gestalt der Dinge; sie umfasst alle mögliche Verknüpfung von Einzelnem zu einem Ganzen nach dem Funktionenbegriff, welcher wiederum nichts anderes ist als der Kausalbegriff. Wenn nun die Pangeometrie die hier algebraisch möglichen Gestaltungen unter den höchst unpassenden Namen von Flächen und Räumen von n-Dimensionen untersucht, unter gemeinsame Gesichtspunkte (Oberbegriffe) bringt, so sind das höchst werthvolle Vorarbeiten für eine zukünftige Arbeit, nämlich die begriffliche Deutung derselben. Wollte man dies letztere ausschliessen (nach der Ansicht der radikalen Empiriker), dann hätte allerdings diese ganze mathematische Arbeit nur den Werth einer algebraischen Gymnastik, gelegentlich verbunden mit einem naturphilosophischen Hirngespinnst, obgleich man sich gerade vor dem letzteren gesichert glaubte. Dass nun hier häufig absolut Undeutbares auftritt, liegt daran, weil die Analyse, unbekümmert um das Gesetz der Homogenität, heterogene Begriffe zu einer Summationsform zusammenstellt, auch nicht darauf achtet, dass bei jeder Potenzirung die Bedeutung des in der vorigen Potenz ausgedrückten Begriffes zerstört wird. Durch analytische Kunstgriffe wird zuweilen unbewusst die Sache wieder gut gemacht. So hat Riemann es durch geniale Zerlegung der Formeln fertig gebracht, dass man vermittelst der logisch falschen Vorstellung von Blätterfiguren (imaginäre Figuren, welche aus vielen unendlich nahen Flächen bestehen, die in bestimmten Punkten oder Linien aneinander haften) die Veränderungen von algebraischen Funktionen, die keine geometrische Deutung zulassen, dennoch in anschaulicher Weise verfolgen kann. Solch ein anschaulicher Ueberblick ist aber die erste Bedingung dazu, dass einmal eine begriffliche Deutung gefunden werden kann, vorausgesetzt dass eine solche überhaupt möglich ist.

Dass man noch nicht weiter in diesen Fragen gekommen ist, liegt zum Theil an der übergrossen Bedeutung, welche man dem algebraischen Schematismus beilegt. So sagt H.: „Das Hamilton'sche Prinzip ist der zusammenfassende „Ausdruck aller Gesetze der Dynamik und lässt sich auf „Räume von n-Dimensionen übertragen."

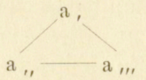
Das Hamilton'sche Prinzip ist jedoch nur eine bequemere Formel als andere, wenn man die Bewegungsformeln daraus ableiten will. Dagegen steht sie logisch weit zurück gegen die Formeln, welche die lebendige Kraft oder die Arbeit eines Systems ausdrücken, insofern ihre Bedeutung sich gar nicht in einem elementaren logischen Satze aussprechen lässt, wie die Formeln von Lagrange und d'Alembert dies zulassen. Ja ich zweifle, ob eine direkte logische Deutung, wie ich sie oben als letzte Aufgabe der Mathematik stellte, für die Hamilton'sche Formel überhaupt möglich ist. Deshalb ist sie eine algebraische Formel, aus welcher sich die dynamischen Gesetze ausscheiden lassen, aber nicht selbst ein Ausdruck der Gesetze der Dynamik; ähnlich wie eine Gleichung von höherem, als dem dritten Grade zerfällt werden kann in Gleichungen von geometrischer Bedeutung, obschon die erstere Gleichung eine solche nicht hat.

Ich muss mir die weitere Ausführung dieser logischen Deutbarkeit analytischer Formeln auf eine grössere Arbeit vorbehalten und will hier nur eine Andeutung geben über die Art und Weise, wie das Auftreten einer neuen Variablen häufig den ganzen begrifflichen Inhalt verändern kann, obschon die algebraische Formel in ganz analoger Weise geschrieben wird.

Zahlen können auf verschiedene Weise betrachtet werden: Als Summe von mehr oder weniger Einheiten, als eine bestimmte Stelle in der allgemeinen Zahlreihe, aber auch als Ausdruck eines spezifischen Charakters. Die Zahl 4 ist algebraisch bestimmt durch $3 + 1$. Verbindet man jedoch 3 und 4 Einheiten (Punkte) anstatt durch das Zeichen $+$ durch Linien — und dem logischen Denken stehen beide Methoden zu Gebote —, so sieht man, dass die Natur des Vierecks durchaus nicht erklärt ist durch die Natur des Dreiecks und einen Punkt. Die zwischen 15 Positionen möglichen Rösselsprünge können nicht erklärt werden durch die zwischen 8 plus den zwischen 7 möglichen. Aber jeder Rösselsprung entspricht einer bestimmten algebraischen Funktion der betreffenden Zahlen.

Die Natur der Determinante von sieben Positionen im Verhältniss zu einer von acht Positionen ist durchaus nicht bestimmt durch die Summen oder Quadratsummendifferenz mit acht Positionen.

Betrachten wir nun die Zahl 3, schreiben sie zum Zweck der Permutationen ihrer Einheiten a, a,, a,,, und machen die arithmetischen Permutationen, oder schreiben sie anschaulich:



so bemerken wir bei dieser Kombination von 3 Einheiten eine Eigenschaft, welche keine andere Zahl aufweist; nämlich, dass man von jedem einzelnen nach den anderen Elementen des Komplexes auf dieselbe Weise übergehen kann. In beschränkterer Weise könnte man auch von der Zahl zwei dasselbe aussagen.

Nun haben wir aber vorher bei Betrachtung der Raumkoordinatensysteme gesehen, dass dies eine für den Raumbegriff charakteristische Eigenschaft ist. Eine jede Koordinate stand nämlich zu allen anderen in einer und derselben bestimmten Beziehung. Offenbar wird an dieser charakteristischen Beziehung nichts durch Anwendung eines anderen Koordinatensystems geändert; nur der formale Ausdruck würde sich ändern. Wir können uns deshalb schon ohne weitere Untersuchung darauf gefasst machen, dass das Auftreten eines neuen Elementes, hier einer vierten Variabelen, die ganze Deutung der Formel auf einen Raumbegriff unmöglich macht; einerlei ob das algebraische Schema in einer ganz ähnlichen Form für vier wie für drei Variable ausgeführt werden kann.

Hier zeigt sich also, dass bei der logischen Deutung algebraischer Formeln die Zahl der Variabeln oder Potenzen durchaus nicht nach ihrer Stelle in der Zahlenreihe, sondern nach ihrem zahltheoretischen Charakter beurtheilt werden muss, und wäre eine Untersuchung der spezifischen Eigenschaften der in der Natur am häufigsten vorkommenden Zahlen heute schon möglich und werthvoll. Die Zahlentheorie hat sich bis jetzt nur mit unbestimmten Zahlen beschäftigt; die Entwickelung der Eigenschaften bestimmter Zahlen wird aber als eine demnächstige Aufgabe sich ebenso darstellen, wie die Beobachtung der Verhältnisse unseres speziellen Sonnensystems den allgemeinen Formeln der theoretischen Mechanik gegenüber.

Eine ähnliche Erscheinung, wobei die Potenzen statt der Variabeln der vorigen Aufgabe in's Spiel kommen, zeigen die algebraischen Gleichungen. Nur bis zum vierten Grade lassen dieselben sich durch Rechnungsoperationen auflösen. Höhere Grade führen zu transcedenten Ausdrücken. Obschon nun die heutige Mathematik auch die Darstellung einer Unbekannten durch solche Ausdrücke Lösung nennt, so wird doch Niemand den radikalen Unterschied verkennen wollen, der algebraische von transcedenten Funktionen trennt. Den logischen Grund dieser Erscheinung hat man bis jetzt noch nicht entdeckt; man hat nur nachgewiesen, dass die Rechnungsregeln die erstere Lösung nicht zulassen. Jener logische Grund nun (der Seinsgrund, wie Schopenhauer sagen würde) liegt in dem zahltheoretischen Unterschied des Charakters der Zahlen vier und fünf, oder vielmehr: die gesammte allgemeine Zahlenreihe theilt sich einer gewissen Eigenschaft nach in zwei Gruppen. Zu der Ersteren gehören die Zahlen 1 bis 4, zu der zweiten die 5 und alle folgenden. Obschon also das Schema der allgemeinen algebraischen Gleichung ganz dasselbe bleibt, so tritt dennoch mit der fünften Potenz auf einmal ein ganz neuer Begriff auf, wenn die Gleichung gedeutet werden soll. Was diese Deutung möglicherweise sein kann, bleibt zukünftigen Forschungen vorbehalten.

Das Resultat also ist:

Die Riemann-Helmholtz'sche Theorie sagt: Alle geometrischen Verhältnisse sind Grössenverhältnisse; unsere Algebra lässt uns die Möglichkeit anderer Raumverhältnisse als der unsrigen erkennen und deren Eigenschaften berechnen.

Die Untersuchung hier ergiebt: Alle geometrischen Verhältnisse lassen sich durch algebraische Zeichen (was man gemeiniglich Grössen nennt) ausdrücken. Jedoch nicht alle solche Grössenausdrücke bezeichnen auch geometrische Verhältnisse, denn es handelt sich in der Geometrie nicht lediglich um den Grössenbegriff, sondern auch um den ihm heterogenen Richtungsbegriff. Der Richtungsbegriff ist allerdings durch algebraische Ausdrücke darstellbar, jedoch nur durch einen bestimmten Complex von Variabeln und Potenzen. Dass nur einzig ein Complex von 2 oder 3 Variabeln oder derselben Potenz Ausdrücke für den Richtungsbegriff zu geben vermag, ist eine Folge des spezifischen (zahltheoretischen) Charakters der Zahlen **zwei** und **drei**. Andere Complexe von Variabeln mögen Ausdrücke für andere Begriffe liefern, aber nicht für den Raumbegriff.

Auch für diesen Zweig der Wissenschaft ist die kurze Lebensdauer Riemann's zu beklagen; denn ganz abgesehen von der besprochenen Abhandlung, welche in vielseitigster Weise anregend wirkte, dadurch dass sie überhaupt dort Probleme stellte, wo man vor ihm keine fand, einerlei, ob die gegebene Lösung gleich schon richtig ausfiel — so finden sich in seinen Schriften eine grosse Zahl kleinerer Bemerkungen über solche Fragen der Philosophie der Mathematik, welche ahnen lassen, dass er auch hier Bedeutendes geleistet haben würde, wenn er sich einmal eingehend mit diesem Gegenstande beschäftigt hätte. Aber um die Erscheinung eines Leibniz zu wiederholen, ist auch eine lange Arbeitszeit Bedingung.

Ich glaube in Obigem alle Streitfragen in Betracht gezogen zu haben, welche durch die Arbeiten der Neuzeit in dem Raumproblem hervorgerufen wurden. Mit dem Resultate dürfte die Forschung aller Parteien sich zufriedengestellt fühlen. Der gesunde Verstand einerseits, insofern seine instinktive Logik sich als richtig erwies, und er nicht zu fürchten braucht, dass unter dem Schatten geheimnissvoller analytischer Formeln höhere Welten einherwandeln, welche einmal die Gültigkeit der bisher gebräuchlichen einfachsten Begriffe in Frage stellen könnten; die mathematische Analyse andererseits, insofern nach Widerlegung metamathematischer Deutungen sich ihre Produkte auf diesem Felde nicht lediglich als eine zwecklose Uebung des Scharfsinns herausstellte, sondern ihrer Thätigkeit ein weit bedeutenderes Gebiet in dem Leben des menschlichen Geistes prognostizirt werden musste, als Mathematiker im Allgemeinen bis jetzt beanspruchen. Ich musste mich in diesen Blättern auf Andeutungen über das letztere beschränken; wer immer eine sympathische Ader für dies Thema hat, wird herausfühlen wohin sie zielen und sich zur Mitarbeit aufgefordert finden. Leibnitzens Hoffnung, einmal eine allgemeine mathematische Philosophie aufstellen zu können, ging allerdings zu weit. Bis wohin das Gebiet möglicher Weise reicht, in welchem die mathematische Methode zur Verbindung der Begriffe angewandt werden, (nach Leibnitz's Ausdruck) Begriffe und Urtheile berechnet werden können, habe ich zu erörtern gesucht (Zeit und Raum, Cap. IX). Dass seine Idee aber eine grosse Tragweite haben dürfte, ist wohl die Meinung Vieler geblieben. Bevor hier jedoch irgend ein weiterer Schritt versucht werden kann, ist eine neue Grundlegung der logischen Elemente aller exakten Wissenschaften nothwendig. So lange noch irgend ein Zweifel über die Natur von Zeit, Raum, Bewegung etc. herrscht, so lange nicht ein jeder in solchen Untersuchungen gebrauchte Begriff auf seine logische Berechtigung geprüft und so lange man nicht ohne den Gebrauch von Unbegriffen, wie „unendlich Kleines, imaginäre Grösse, grösser als irgend eine bestimmte (d. h. denkbare) Grösse“ etc., die unzweifelhaft richtigen Methoden der Logik gegenüber zu rechtfertigen, zu erklären vermag, bleiben obige Aussichten neckende Schattenbilder. Dass diese Probleme aber lösbar, dass für dieses Gebiet eine streng mathematische Metaphysik möglich ist, dafür gedenke ich demnächst weitere Belege liefern zu können.

Dresden, September 1876.

Lehmann'sche Buchdruckerei, Dresden.