Inw

Kat.

ERNESTO PASCAL.
Profesor uniwersytetu w Pawii.

RACHUNEK NIESKOŃCZONOŚCIOWY

PRZEŁOŻYŁ

S. DICKSTEIN.

CZĘŚĆ III.

RACHUNEK WARYACYJNY
i
RACHUNEK RÓŻNIC SKOŃCZONYCH.

WARSZAWA.
Wydawnictwo Redakcyi Prac matematyczno-fizycznych.
W drukarni J. Sikorskiego, Warszawa, Warecka 14.

1897.

Дозволено Цензурою
Варшава, 13 Ноября 1897 года.

Przedmowa.

Tom niniejszy ma podobne zadanie jak i inne tomy, niedawno przezemnie ogłoszone, a mianowicie przedstawienie stanu teraźniejszego pewnej określonej teoryi z dziedziny matematyki wyższej. Oczywiście, gdybyśmy zechcieli zebrać skrzętnie wszystkie rozważania, jakie o danym przedmiocie wypowiedzieli różni autorowie, wtedy i całe tomy nie byłyby wystarczającemi; lecz praca taka byłaby bez pożytku dla tych celów, jakie sobie w pracach naszych zakładamy.

W dzisiejszym stanie studyów matematycznych pożytecznemi są, jak mniemam, prace syntetyczne, w których podane są metody i rozważania ogólne, odnoszące się do różnych zagadnień danej teoryi; w których umiejętnie ugrupowane są metody różnych autorów, z podaniem tego, co w każdym z nich jest najlepszego; w których są należycie oświetlone związki pomiędzy pomysłami i poglądami różnych autorów, nie zawsze łatwemi do wykrycia; w których wreszcie udzielono sporo miejsca wskazówkom historycznym i bibliograficznym, racyonalnie uporządkowanym.

Te ostatnie właśnie pomijano zwykle, z małemi wyjątkami, w podręcznikach, gdy tymczasem one to nieraz rzucają najwięcej światła na metody i badania naukowe i dlatego są bardzo użytecznemi.

Podręcznik bowiem, nawet jasno i dobrze napisany, może nie wywrzeć skutecznego wpływu na umysł czytelnika. Czytanie pewnych książek, mających zresztą zalety innej natury, pozostawia nieraz w umyśle ciekawego czytelnika jakby próżnię; nie wie on, które postępowania, metody i twierdzenia należą do autora książki, które zaś do innych autorów; nie widzi racyi ich bytu, skąd pochodzą i dokąd dążą. Umysł pozostaje niejako obcym temu, czego się uczy, i nie wie, w jakim kierunku ma w dalszym ciągu sam postępować.

Stosowanie się do wyżej wyłuszczonych zasad jest szczególnie ważnem w wykładzie przedmiotów, pozostawiających jeszcze wiele do dyskusyi, a badaniu krytycznemu rozległe pole działania. Takim jest naprzykład przedmiot, traktowany w książce mojej: „Note critiche di calcolo infinitesimale" (Medyolan, 1895) *), takim przedmiot pierwszej części tomu niniejszego, t. j. rachunek waryacyjny. Metody tej trudnej nauki odkryli już przed dawnym czasem Euler, Lagrange i Jacobi, lecz ci autorowie zajmowali, rzec można, stanowisko formalne. Jeżeli zaś zajmiemy stanowisko, z którego bada się uprawnienie tych metod i stosowalność rezultatów, jakie za pomocą nich otrzymujemy, to będzie można powiedzieć, że metody te dopiero powstają. Na stwierdzenie tego dość tu przypomnieć, że dopiero przed niedawnym czasem poddano rozbiorowi kwestyę uprawnienia metody mnożników Lagrange'a, którą uważano dotąd jako opartą na twierdzeniu natury aksiomatycznej, co w rzeczy samej miejsca nie ma.

Program, wyżej skreślony, przewodniczył mi w pisaniu tej książki i innych.

---

*) Niechaj mi wolno będzie przytoczyć tu zdanie M. Cantora, który napisał o książce tej: . . . „eine Sammlung, welche bis jetzt einzig in der mathematischen Litteratur dasteht und gewiss zahlreiche Wünsche befriedigt . . .". (Zeitschrift für Mathematik und Physik, t. XL (1896), str. 190).

W rachunku waryacyjnym, stanowiącym gałęź rachunku nieskończonościowego, tkwią, a nawet mnożą się wszystkie niedoskonałości tego ostatniego. Stąd, z punktu widzenia krytycznego, rachunek waryacyjny jest nauką jeszcze bardzo niedoskonałą. Najlepiej będzie, gdy w podręczniku, poświęconym temu rachunkowi, nie ukryjemy tych niedoskonałości, lecz, owszem wystawimy je na światło, zwracając na nie wyraźnie uwagę czytelnika.

Daleki jestem od mniemania, że praca moja spełnia doskonale warunki programu, i dlatego będę zadowolony, jeżeli czytelnik, zgodziwszy się na porządek myśli w tej książce, zechce ją życzliwie poczytać za próbę pierwszą, jeszcze niedoskonałą.

Ernesto Pascal.

Pavia, w październiku, 1896.

TREŚĆ.

I.

RACHUNEK WARYACYJNY.

II.

RACHUNEK PROSTY I SZKIC RACHUNKU ODWROTNEGO RÓŻNIC SKOŃCZONYCH.

I.

RACHUNEK WARYACYJNY.

Rys historyczny rachunku waryacyjnego.

Wszystkie prace, należące do rachunku waryacyjnego, można odnieść do następujących trzech zagadnień zasadniczych.

1) Zagadnienie, dotyczące pierwszej waryacyi całek pojedyńczych: szukanie najdogodniejszej postaci równań różniczkowych, którym powinny zadość czynić funkcye niewiadome w zagadnieniu.

2) Badanie i przekształcenie tak zwanej waryacyi drugiej.

3) Rachunek waryacyj całek wielokrotnych o granicach zmiennych.

Zagadnienie pierwsze datuje się od samych początków rachunku waryacyjnego, a więc od Eulera (1744), a ściślej od Lagrange'a (1762); drugie od Jacobi'ego (1837), jakkolwiek już przedtem Legendre (1786) próbował był je rozwiązać; trzecie wreszcie zagadnienie, do którego dało pobudkę pewne poszukiwanie Gaussa, rozpoczyna się od Poissona (1833) i Ostrogradzkiego (1834).

Pierwsze zadanie z dziedziny rachunku waryacyjnego zawdzięczamy Newtonowi (1686), który podał też i rozwiązanie bez dowodu; szło w tem zadaniu o określenie postaci ciała okrągłego, które zanurzone w cieczy w kierunku swej osi, napotyka opór najmniejszy, przy założeniu, że opór jest proporcyonalny do kwadratu prędkości. (Patrz niżej § 30).

Właściwie jednak nie to zadanie dało początek rachunkowi waryacyjnemu, lecz sławne zadanie o brachystochronie lub krzywej najkrótszego spadku. (Patrz niżej § 31).

Zagadnienie to postawił Jan Bernoulli w r. 1696 i rozwiązał je w roku następnym.

Historyę tego zadania podamy w osobnym paragrafie; tu powiemy tylko, że brat Jana, Jakób Bernoulli, w r. 1697 podał inne jego rozwiązanie; nadto w rozprawie swej rozwinął poglądy na istotę zagadnienia i znalazł pokrewieństwo tegoż z zagadnieniami o największych powierzchniach przy danym obwodzie, badanemi już przez geometrów greckich. W zakończeniu swej pracy Jakób Bernoulli, objąwszy wszystkie podobne zagadnienia pod nazwą izoperymetrycznych, podał geometrom inne zagadnienie tegoż gatunku do rozwiązania w ciągu trzech miesięcy, przeznaczając za nie nagrodę w wysokości 50 dukatów. (Patrz § 34, nr. 1).

Prawie przez pół wieku różni autorowie, głównie zaś bracia Bernoulli i Euler, zajmowali się zagadnieniem o brachystochronie i zagadnieniami izoperymetrycznemi, zmieniając na różne sposoby warunki zagadnienia. Wśród prac Eulera nie brakło i rzeczy mylnych, jakiemi są np. ogłoszone w tomach VII i VIII dawniejszych Pamiętników Akademii petersburskiej.

W roku 1744 pojawiło się pierwsze, prawdziwie ważne o tym przedmiocie dzieło Eulera p. t.: „Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimaetrici latissimo sensu accepti" (Lausannae et Genevae)[1]. W dziele tem stara się Euler, jak to widać z tytułu, utworzyć metodę ogólną rozwiązania zadań

---

[1]) Ogłoszone po niemiecku wraz z rozprawami Jana i Jakóba Bernoullich w wydawnictwie „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften", Nr. 46, r. 1894, p. t.: „Abhandlungen über Variationsrechnung".

izoperymetrycznych i dochodzi do metody, która jest daleką jeszcze od prawdziwego rachunku waryacyjnego, opartego zasadniczo na rozważaniu nieskończenie małych. Euler rozważa przypadki maximum bezwzględnego, maximum względnego z jednym warunkiem danym, wreszcie przypadek, w którym zachodzi więcej warunków danych, i stosując metodę swoją do bardzo wielu przykładów, rozwiązuje prawie wszystkie o tym przedmiocie zagadnienia, jakiemi w owym czasie zajmowali się geometrowie. Metoda Eulera była prawdziwie godną jego geniuszu; znalazł on t. z. prawidło izoperymetryczne, które było niewątpliwie zarodkiem metody ogólnej, użytej potem przez Lagrange'a i noszącej nazwę metody mnożników.

Praca Eulera, prosta w swych wynikach, była wszakże zbyt sztuczną pod względem metody. „Nie pozostawiałaby ona nic do życzenia, powiada Lagrange (Oeuvres, X, str. 395), gdyby była opartą na analizie, bardziej zgodnej z duchem rachunku różniczkowego; lecz stosowany przez autora rozkład różniczek i całek na ich elementy pierwotne burzył mechanizm tego rachunku i zatracał jego najważniejsze zalety, t. j. prostotę i ogólność algorytmu".

Przytoczyliśmy dosłownie ten ustęp z Lagrange'a dla okazania, w jaki sposób powstało i rozwinęło się dzieło tego wielkiego analisty w rachunku waryacyjnym, za którego twórcę pod pewnym względem winien być uważany. Starał się Lagrange — że tu użyjemy jego własnego wyrażenia — nagiąć rachunek różniczkowy do tego nowego rodzaju zagadnień, które z istoty swej należały do zakresu tego rachunku. Sławna rozprawa, drukowana w tomie II-gim „Pamiętników Turyńskich", 1762[1]), miała ten cel na widoku; w tej pracy poraz pierwszy wykazano dogodność pojęcia nowej charakterystyki dla waryacyj i wprowadzono znak δ, który następnie wszedł w użycie ogólne.

[1]) Ogłoszona po niemiecku w Nr. 47 cytowanego poprzednio wydawnictwa „Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften", r. 1894.

Wprawdzie już Euler poznał niedogodność używania tych samych znaków dla różniczek nowych i dawnych; by uniknąć pomieszania, zamyślał oznaczać te różniczki za pomocą różnic kolejnych wartości zmiennych i funkcyi. Gdyby, powiada Cauchy (Exercices, III, str. 51), wpadł był na pomysł użycia różnych znakowań dla obu przypadków, byłby był niewątpliwie doszedł do rachunku waryacyjnego Lagrange'a.

Euler przyjął odrazu nowe pomysły i po dwóch latach (1764) wystąpił już w Nowych Pamięt. Akad. petersburskiej (t. X) z rozprawą: „Elementa calculi variationum", w której bardzo szczegółowo i, jak zwykł był to czynić, z licznemi zastosowaniami rozwinął podstawy zasadnicze nowego rachunku. Później zajmował się jeszcze w ciągu wielu lat tym rachunkiem i ogłosił badania swe w t. III „Instit. Calculi integr.", Petersburg, 1770, w t. XVI Nowych Pamiętników, 1771, wreszcie w t. IV „Instit. Calc. integr.", wyd. II, t. IV, 1794.

W roku 1767 Borda ogłosił w Pamiętnikach Akademii nauk w Paryżu rozprawę o rachunku waryacyjnym, w której skrytykował rozwiązanie Lagrange'a, odnoszące się do zagadnienia o brachystochronie w przypadku, gdy zakłada się, że punkt początkowy nie jest oznaczony, lecz ma znajdować się jedynie na krzywej oznaczonej. Borda miał słuszność, gdyż Lagrange nie spostrzegł był, że gdy rzędna punktu początkowego jest ruchoma, to należy do waryacyi całki dodać jeden wyraz, o ile się nie czyni odmiennej hypotezy o prędkości początkowej (patrz niżej § 31, w którym mówimy o tym przedmiocie). Lagrange przyznał ten błąd w następnej rozprawie swej z r. 1770 (Miscel. Taurin, IV)[1]). Niesłusznie więc twierdzi Darboux (Théorie des surfaces", t. I, str. 268), że rozprawa Bordy była bez pożytku, jako powtarzająca tylko rezultaty Lagrange'a; przeciwnie, ona to właśnie pobudziła Lagrange'a do napisania nowej rozprawy, w której podał inny wykład swej metody. Na początku tej pracy polemizuje

[1]) Ogłoszona w przekładzie niemieckim w Nr. 47 cytowanego wydawnictwa Ostwalda

L a g r a n g e z niektórymi autorami, którzy w przeciągu czasu ubiegłego pomiędzy pierwszą a drugą jego rozprawą, ogłosili prace o tym przedmiocie.

Pierwszy z nich F o n t a i n e ogłosił w r. 1769 w Pamięt. Akademii paryskiej pracę, w której twierdzi, że jego poprzednicy, nie znając prawdziwej teoryi, mylili się, i podaje dwie metody, które poczytuje jako nowe. L a g r a n g e zwraca uwagę na to, że jedna z tych metod, jeżeli pominąć znakowania, jest właściwie metodą E u l e r a, druga zaś nie różni się niczem od metody samego L a g r a n g e'a, o rok wcześniej ogłoszonej.

Także Le S u e u r i J a c q u i e r ogłosili w tym czasie w Parmie traktat rachunku całkowego, w którym powtarzają tylko metodę L a g r a n g e'a, przypisując ją wszakże E u l e r o w i.

Dwie cytowane przez nas rozprawy L a g r a n g e'a odnoszą się do tej epoki, kiedy on nie odczuwał jeszcze potrzeby usunięcia z rachunku nieskończonościowego znaku i pojęcia różniczki oraz ilości nieskończenie małej. Dopiero później, już jako autor sławnej „Teoryi funkcyj analitycznych", zmuszony był L a g r a n g e rachunek waryacyjny wyłożyć zupełnie niezależnie od pojęcia ilości nieskończenie małych, czemu poświęcił też rozdział 12-y swojego dzieła (1797). Tenże sam przedmiot sposobem prostszym i pełniejszym wyłożony jest w dziele „Calcul des fonctions", (Paryż, 1806). M e t o d ę m n o ż n i k ó w, służącą do redukcyi zagadnień na maximum i minimum względne do zagadnień na maximum i minimum bezwzględne, wyłożył L a g r a n g e po raz pierwszy w swojej „Mechanice analitycznej" (1788), a potem powtórzył w „Teoryi funkcyj analitycznych" i w „Rachunku funkcyj". Można tę metodę uważać za rozwinięcie metody, podanej przez E u l e r a na rozwiązywanie zagadnień izoperymetrycznych.

Pierwsze zagadnienie rachunku waryacyjnego, którego rozwój historyczny wyżej nakreślono, można uważać za zamknięte na L a g r a n g e'u, gdyż odtąd uwaga analistów została skierowaną przeważnie ku innym trudniejszym zagadnieniom tego rachunku. Zagadnienie, uważane za zamknięte, gdy idzie o prostotę wzorów, do których prowadzi, przedstawia się inaczej, gdy stajemy na stanowisku możności stosowania wzorów i rozszerzenia ich na inne zagadnienia. Pod tym względem dopiero niedawno podjęto badania i odczuto konieczność uzasadnienia pewnych twierdzeń, będących podstawą wspomnianych wyżej wzorów a uważanych przez pierwszych twórców rachunku waryacyjnego za prawdy aksiomatyczne, jakiemi w rzeczy samej nie są. Nadto powstało i drugie pytanie: Jeżeli przyjmiemy w ogólności stosowane postępowanie i otrzymane rezultaty za ścisłe, to do jakiego punktu dają one rozwiązania? Albo inaczej, czy rozwiązania, które otrzymujemy, są możliwie najogólniejszemi, lub też, czy stosowanie wzmiankowanych procesów opiera się milcząco na ograniczeniu rozwiązań do pewnych tylko kategoryj funkcyj ?

W tej drugiej części krytycznej, którą nazwiemy częścią, odnoszącą się do rozwiązań przerywanych, uczyniono bardzo mało postępów; będziemy o niej mówili potem, dlatego, że dotyka ona nietylko pierwszej z trzech kategoryj zagadnień, na początku wymienionych, lecz wszystkich. W tem miejscu powiemy tylko kilka słów o tej części krytyki, która dotyczy dowodów niektórych twierdzeń, uważanych przedtem za aksiomatyczne.

Pierwsze z tych twierdzeń odnosi się do metody mnożników; drugie do dowodu twierdzenia pomocniczego, będącego podstawą szukania maximów i minimów całek, mianowicie twierdzenia, że znikanie tożsamościowe waryacyi pociąga za sobą znikanie tożsamościowe funkcyi pod znakiem całkowym.

Pierwsze z tych twierdzeń było uważane za pewnik i szukano tylko dowodów znanego prawidła Eulera dla przypadku specyalnego izoperymetrycznego (patrz np. Bertrand, w t. VII dziennika Liouville'a, str. 55, [1842]). Tym samym przedmiotem zajmował się później Du Bois-Reymond (Math. Ann., XV), a przypadkiem ogólniejszym Scheeffer (Math. Ann., XXV, 1885); lecz dopiero pierwszy Mayer poświęcił temu pytaniu pracę specyalną (Math. Ann., XXVI; patrz niżej §§ 12, 13, 14). W ostatnich czasach Turksma podjął na nowo pytanie to (Math. Ann., XXVII) z odmiennego punktu widzenia i doszedł do rezultatów, potwierdzających w zupełności wyniki pochodne z metody Lagrange'a.

Co do drugiego twierdzenia, to pierwszy Heine w krótkim komunikacie w t. II Math. Ann. (1870) zauważył, że dowód, który zwykle dawano we wszystkich podręcznikach, pociąga za sobą konieczność przyjęcia pewnych hypotez o ciągłości i naturze waryacyi δy; hypotez, które mogą nie spełniać się w ogólności, mimo, że twierdzenie w mowie będące utrzymuje się w mocy. Po nim Du Bois-Reymond zajmował się jeszcze szczegółowiej tem pytaniem w pracy wyżej wspomnianej, pełnej wielu bystrych uwag i nowych myśli, lubo bezwątpienia bardzo jeszcze niezupełnej (1879).

Przechodzimy do drugiego z zagadnień zasadniczych o drugiej waryacyi. Wspomnieliśmy już o tem, że Legendre pierwszy w r. 1786 myślał o konieczności zwrócenia się do drugiej waryacyi, jeżeli idzie o rozpoznanie faktycznego istnienia i odróżnienia maximum od minimum. Legendre wpadł atoli w pewne błędy, z których niektóre sam poprawił, inne zaś spostrzegli Lagrange, Brunacci i t. p. (Patrz niżej § 16).

Zresztą rozwiązanie, do którego doszli ci autorowie w przekształceniu waryacyi drugiej, było skomplikowane skutkiem nowego całkowania ponad to, którego wymagało odszukanie możliwych maximów i minimów.

Jacobi'emu (1837) była pozostawiona sława wprowadzenia zupełnie nowych punktów widzenia do tego trudnego pytania; uczynił on to w rozprawie, ogłoszonej w tomie XVIII dziennika Crellego i przedrukowanej w t. III dziennika Liouville'a [1]).

Jacobi zauważył, że można wykonać mniej takich całkowań, i w tym celu podał bez dowodów niektóre twierdzenia ogólne rachunku różniczkowego, z których można było wywnioskować, że po zcałkowaniu pierwszego równania różniczkowego, które występuje w zagadnieniu rachunku waryacyjnego w przy-

[1]) Także w Nr. 47 wydawnictwa Ostwalda, 1894

padku jednej funkcyi niewiadomej, całki występujące przy przekształceniu waryacyi drugiej łatwo już otrzymać za pomocą prostych różniczkowań względem stałych.

Genialny pomysł Jacobi'ego zwrócił szybko na siebie uwagę analistów; Lebesgue, Delaunay i Bertrand pierwsi podjęli dowodzenie twierdzeń Jacobi'ego, któremi później zajmowali się także Mainardi i Brioschi (patrz niżej § 16). Spis wszystkich prac, odnoszących się do tego przedmiotu, podajemy w książce na właściwem miejscu. Twierdzenia Jacobi'ego przedstawiają prawdy bardzo ukryte i nie wiemy, w jaki sposób doszedł do nich Jacobi; przez długie lata były one przedmiotem rozważań najlepszych analistów epoki. Pomiędzy nimi należy wymienić Spitzera, który posunął o wiele naprzód dyskusyę nad przekształceniem Jacobi'ego, oraz Hessego, który w rozprawie swej podał jakby zupełnie nową teoryę o pewnym sposobie przedstawienia wyrażeń liniowych z kolejnemi pochodnemi tej samej funkcyi. Niektóre z twierdzeń Hessego podajemy w tej książce (§ 20).

Od Clebscha (1858) rozpoczyna się rozważanie jakiejkolwiek liczby funkcyj nieznanych i przypadek ogólniejszy, w którym pomiędzy temi funkcyami zachodzą związki różniczkowe. Tym samym przedmiotem (wszakże tylko w przypadku dowolnej liczby funkcyj niewiadomych, bez zakładania związków różniczkowych pomiędzy niemi) zajmował się Lipschitz i metodą odmienną doszedł do tych samych rezultatów (1864). Metodę tę rozciągnął później Mayer na wymieniony wyżej przypadek ogólniejszy (1868). Ten ostatni ogłosił kilka bardzo interesujących prac o tym przedmiocie.

W rozprawie, ogłoszonej w Math. Ann., XXV, 1885, stara się Scheeffer rozwiązać to zagadnienie na drodze odmiennej i ściślejszej, a w następnym tomie tegoż dziennika podaje bardzo ważne spostrzeżenia, dotyczące granic, pomiędzy któremi mają znaczenie rozwiązania zagadnienia.

Nakoniec wspomnieć jeszcze należy o najnowszych badaniach Weierstrassa, podanych w wykładach jego w Berlinie (1884). Ograniczając w rozmaitych kierunkach istotę zagadnień rachunku waryacyjnego, dochodzi Weierstrass za pomocą metod ścisłych, do wyników dokładnych; lecz wyniki te, z powodu wielu wprowadzonych ograniczeń, nie mają charakteru ogólności, do której dojście powinno być głównym celem dalszych postępów rachunku waryacyjnego.

Badania nad przekształceniem drugiej waryacyi nie są łatwemi; trudność tkwi może w naturze samego zagadnienia. Przed kilkunastu laty zdawało się Żmurce, że znalazł nowe i łatwiejsze drogi rozwiązania zagadnienia, lecz przekonano się, że prace jego były błędnemi [1]).

Przechodzimy do ostatniego z wymienionych na wstępie trzech zagadnień, t. j. do waryacyi całek wielokrotnych o granicach zmiennych.

Waryacyę całek wielokrotnych o granicach stałych otrzymał był, stosując metodę ogólną, już Lagrange, który na tej drodze znalazł równanie różniczkowe powierzchni minimalnych. Lecz przypadek granic zmiennych przedstawiał trudności znacznie większe i innej natury.

W r. 1833 Gauss natknął się po raz pierwszy na zadanie z mechaniki, które wymagało szukania minimum całki podwójnej o granicach zmiennych. Zadanie to brzmiało: „Określić formę równowagi płynu, zawartego w naczyniu danego kształtu“. Poisson w tymże roku zajął się szczegółowo tem pytaniem; w roku zaś następnym Ostrogradzki znalazł wzór ważny, który nosi jego nazwisko. Rozprawa tego ostatniego autora jest dziś jeszcze ważną dla następującego powodu. On pierwszy ustanowił ściśle pojęcia i wzory na waryacye pochodnych cząstkowych funkcyj wielu zmiennych, podawane przedtem błędnie lub bez należytej ogólności. Prawda, że Poisson znalazł był wzory, o których mowa, lecz do wywodu ich potrzebował sztucznych sposobów, przy wprowadzeniu pewnych zmiennych pomocniczych; dopiero Ostrogradzki pokazał po raz pierwszy, że w tych rozważaniach nie potrzeba oddalać się od metod Lagrange'a. Za pomocą zasad elementarnych rachunku różniczkowego możemy dziś wzory te

[1]) Cytowane niżej w § 16.

wyprowadzić bez wszelkiej trudności, lecz w owej epoce mogły one, jak łatwo rozumieć, być przedmiotem kontrawersyj.

Po wzorze Ostrogradzkiego pozostawała jeszcze do rozwiązania najtrudniejsza i najbardziej interesująca część zagadnienia o pierwszej waryacyi całek wielokrotnych, t. j. przekształcenie waryacyi całki na takie dwie części, z których jedna zależy tylko od granic całkowania, t. j. to, co uczynił Lagrange dla całek pojedyńczych.

Ogłoszony w r. 1842 przez Akademię paryską konkurs, na który nadesłali rozprawy Delaunay i Sarrus, dał rozwiązanie tego zagadnienia; albowiem otrzymano wzór, który jest rozszerzeniem wzoru Lagrange'a i do którego w istocie rzeczy w sposób niedość wyraźny doszedł był Ostrogradzki w końcu swojej rozprawy.

Po sprowadzeniu waryacyi pierwszej do postaci najdogodniejszej przyszła kolej na waryacyę drugą, której zbadanie jest, jak wiemy, niezbędne do rozstrzygnięcia, czy zachodzi maximum czy minimum.

Powiedzieliśmy już, że Clebsch pierwszy usiłował rozszerzyć rozważania Jacobi'ego na przypadek ogólniejszy; dodajmy jeszcze, że przy tych poszukiwaniach zajmował się on także waryacyą drugą całek wielokrotnych (1859). O tym samym przedmiocie istnieją też późniejsze badania Sabinina (1870—8--90). Wspominamy wreszcie, że w niedawno ogłoszonej pracy (1893) Kobb stara się rozciągnąć na całki wielokrotne rozważania analogiczne do tych, które czyni Weierstrass nad całkami pojedyńczemi. Nie potrzeba nadmieniać, że teorya waryacyj całek wielokrotnych pozostawia jeszcze wiele do życzenia i że niemałemi są braki, jakie przedstawia; jest naturalnem, że wszystkie trudności, spostrzeżenia krytyczne i zarzuty, które wypowiadano odnośnie do całek pojedyńczych, stosują się w wyższym daleko stopniu do całek wielokrotnych.

Powiemy jeszcze kilka słów o ograniczeniach, jakie co do istoty rozwiązań sprawiają postępowania rachunku waryacyjnego, oraz o tak zwanych rozwiązaniach przerywanych.

W rozmaitych paragrafach książki niniejszej zaznaczamy, że dla możności wykonania rozmaitych przekształceń, które prowadzą do zwykłych wzorów rachunku waryacyjnego, należy przyjąć, że funkcye nieznane mają pewne własności specyalne, głównie zaś, że są ciągłemi wraz ze swemi pochodnemi.

Stąd wynika, że gdy zadanie o maximum i minimum dopuszcza rozwiązanie przy pomocy funkcyi nieciągłej, albo, gdy przy ciągłości funkcyi, jest nieciągłą jej pochodna; gdy więc przedstawiona za pomocą krzywej, funkcya ma skończoną albo też nieskończoną liczbę punktów szczególnych (węzłów), wtedy procesy zwykłe nie mogą prowadzić do rozwiązania. Nasuwa się tedy myśl szukania innej metody, którąby nie wyłączała i owych rozwiązań przerywanych; zarazem należy powiedzieć, że w tym kierunku uczyniono postęp dość nieznaczny.

Zadanie, postawione przez uniwersytet w Cambridge w r. 1871, wywołało pojawienie się dużego tomu, napisanego przez Todhuntera: „Researches in the calculus of variations, principally on the theory of discontinous solutions", (Londyn, 1871); lecz autor gubiąc się w wielu szczegółach i w wielu przykładach, nie dochodzi w gruncie rzeczy do żadnej konkluzyi ogólnej. Inne prace o tym przedmiocie ogłosili: Cayley: „On a problem in the calculus of variations etc." (Proc. of Lond. Math. Soc.„ III, str. 221; 1871); Wilkinson: „Review of Todhunters researches etc." (Messenger, 2-a ser., t. VIII, str. 184; 1874); Erdmann: „Ueber unstetige Lösungen in der Variationsrechnung" (Dziennik Crellego, t. LXXXII, str. 21; 1876).

Niedawno Starkow sądził, że znalazł metodę ogólną, obejmującą i rozwiązania nieciągłe, i ogłosił o tym przedmiocie prace w rozmaitych czasopismach (Bul. Tow. mat. w Moskwie, 1884; Rend. di Palermo, t. II; Bul. Tow. mat. w Odesie, 1884—1885 i t. d.). Lecz rozważania jego są wogóle błędne, jak to pokazał Sonin i później August (patrz § 30). Na szczególną wzmiankę zasługuje praca Du Bois-Reymonda (Math. Ann., XV); dość czytać tę pracę, która zresztą jest tylko próbą, aby przekonać się, ile jeszcze jest niepewnego i niedoskonałego w teoryi waryacyj. Autor podejmuje jedno zadanie i to jedno z najprostszych, mianowicie o linii długości najmniejszej i przechodząc krok za krokiem w jego rozwinięciu, czyni spostrzeżenia krytyczne, wielce doniosłe, nad rozmaitemi używanemi procesami i granicami ich stosowalności.

Dla uzupełnienia naszego zarysu historycznego wspominamy jeszcze o tych autorach, którzy w rozmaity sposób oddalali się od metod ogólnie używanych.

Challis np. w roku 1871 ogłosił w Phil. Mag. (4-a serya, t. XLII, str. 28) pracę, której idea główna jest następująca: zamiast szukać wprost krzywej, szukajmy najprzód jej rozwiniętej, a od tej przejdźmy do rozwijającej. Praca ta wywołała polemikę, w której brali też udział Cayley i Todhunter. Do tej polemiki odnoszą się artykuły: Cayley: „On a supposed new integration of differential equations of 2 order" (Phil. Mag., t. XLII, str. 197); Challis: „In reply to Prof. Cayley" (tamże, str. 302); Todhunter: „On a problem etc." (tamże, str. 440); Challis „On the solution of three problems in the calculus of variations in reply to Mr. Todhunter" (Phil. Mag., 1872).

Wymieniamy jeszcze odnoszącą się do tego przedmiotu prace Curvelwela: „Researches in the calculus of variations" (Proc. Lond. Math. Soc., t. XXIII, str. 241, 1892 i t. XXV, str. 361; 1894), w których autor stara się utworzyć teoryę maximów i minimów przy granicach stałych i granicach zmiennych, porzucając postępowania analityczne i opierając się na podstawach geometrycznych.

Wymienimy na zakończenie większą część traktatów i prac historycznych, wydanych dotąd o rachunku waryacyjnym.

Najpierwszym był traktat Lacroix'a, zawarty w jego sławnym „Rachunku różniczkowym i całkowym", którego pierwsze wydanie ogłoszone zostało w r. 1797—1800, drugie w 1810—1819. Rachunek waryacyjny zajmuje 100 stronic drugiego tomu. W przekładzie polskim Niemczewskiego, [(wydanie 2-gie, poprawione przez Pełkę Polińskiego (Wilno, 1824)] rachunek waryacyjny, nazwany rachunkiem zmienności, zajmuje str. 466—492.

Jednocześnie pojawiło się we Włoszech dzieło „Corso di matematica sublime" Brunacci'ego (Florencya, 1808), której 100 stronic w tomie IV-ym poświęcone są rachunkowi waryacyj. W Anglii wyszedł traktat Woodhouse'a: „A Treatise on Isoperimetrical Problems and Calculus of variations", Cambridge, 1810. W Niemczech Buquoy: „Eine eigene Darstellung der Grundlehren der Variationsrechnung"; później wyżej cytowane dzieła Dirksena i Ohma; drugie z nich nie zupełnie udane (patrz rozprawę Jacobi'egow t. XVII dziennika Crellego).

Z kolei wymieniamy: Choisy: „Essai historique etc.", (1823); Graeffe: „Commentatio historiam calculi variationum complectens etc." (Getynga, 1821); Bordoni: „Lezioni di calcolo sublime", Medyolan, 1831 (str. 192—298 w t. II); Momsen: „Elementa calculi variationum etc.", Altona, 1833; Abbat: „A Treatise on the Calculus of Variations", Londyn, 1837, Almquist: „De principiis calculi variationum, I, II", Upsala, 1837; Senf: „Elementa calculi variationum", 1838; Bruun: „Podręcznik rachunku waryacyjnego" (po rosyjsku), Odessa, 1848; Strauch: „Theorie und Anwendung der sogenannten Variationscalculs", Zürich, 1849; Jellet: „An elementary treatise on the calculus of variations", Dublin, 1856, przekład niemiecki Schnusego, Brunświk, 1860; Stegman: „Lehrbuch der Variationsrechnung i t. d.", Kassel, 1857; Popow: „Początki rachunku waryacyjnego" (po rosyjsku), Kazań, 1856. Meyer: „Nouveaux éléments du calcul des variations", Liège i Lipsk, 1856; Simon: „Die Theorie der Variationsrechnung", Berlin, 1857; Giesel: „Geschichte der Variationsrechnung", Torgau, 1857; Lindelöff-Moigno: „Calcul des variations", Paryż, 1861; Natani: „Die Variationsrechnung", Berlin, 1866; Dienger: „Grundriss der Variationsrechnung" Brunświk, 1867; Carll: „Calculus of Variations", New-York, 1885; Waszczenko-Zacharczenko: „Rachunek waryacyjny" (po rosyjku), Kijów, 1889; Sabinin: „Rachunek waryacyjny" (po rosyjsku), Moskwa, 1893. Specyalnych traktatów rachunku waryacyjnego—po za rosyjskiemi — w najnowszym czasie, o ile wiemy, nie wydano.

W powyższym spisie nie pomieściliśmy najnowszych traktatów rachunku wyższego, w których znajduje się zawsze część, odnosząca się do rachunku waryacyjnego, traktowana niekiedy obszernie (np. w traktacie Jordana i innych).

Na szczególną wzmiankę zasługuje dzieło Todhundtera: „A History of the progress of the calculus of variations during the nineteenth century", Cambridge, 1861. W dziele tem na 530 stronicach autor stara się przedstawić historyę rachunku, począwszy od Lagrange'a. Niewątpliwie jest to książka bardzo obfita pod względem materyału, lecz autor rozumie historyę jako kronikę. Rozmieszcza chronologicznie wszystkie prace różnych autorów i podaje w krótkości treść tychże; stąd zmuszony jest wielokrotnie powtarzać jedno i to samo. Ilekroć razy ma mówić o nowej rozprawie, rozpoczyna rzecz od początku, powtarza zasady i znakowania zasadnicze, idąc krok za krokiem, prawie temi samemi słowy, za autorem, o którym mówi; niekiedy wprost tłomaczy całą pracę, jeżeli jest krótka. Byłby on stworzył dzieło bezwątpienia użyteczniejsze i bardziej wartościowe, gdyby owe pięćset kilkadziesiąt stronic poświęcił na przedstawienie istotnej zależności historycznej jednej pracy od drugiej; gdyby wykazał, w jaki sposób rozwijały się poglądy na różne szczególne zadania teoryi; gdyby pokazał, co w pracach opisywanych jest istotnie ważnem i co sprawiło postęp nauki, a pominął to, co poszło w zapomnienie. Mimo to, dzieło Todhuntera może oddać usługi, i sam korzystałem z niego, jakkolwiek utrzymuję, że ma tylko wartość źródła bibliograficznego.

§ 1.

Rozważania wstępne.

Niechaj y będzie funkcyą zmiennej x; $y = f(x)$. Aby lepiej uwydatnić pojęcie, które chcemy wyłożyć, wyobraźmy sobie funkcyę tę, przedstawioną geometrycznie sposobem zwykłym za pomocą krzywej f.

Wyobraźmy sobie dalej szereg krzywych, których krzywą graniczną niechaj będzie właśnie dana krzywa f i rozważajmy jedną z krzywych tego szeregu, np. krzywą f_1, której punkty odpowiadają jednoznacznie punktom krzywej f w ten sposób, że odległość pomiędzy dwoma punktami, odpowiadającemi sobie, jest nieskończenie mała. Wartość funkcyi y może zmieniać się wskutek trzech różnych okoliczności.

Wartość ta mianowicie zmieniać się może:

1) Skutkiem tego, że zmieniamy odpowiednią wartość zmiennej x; wtedy od punktu P przechodzimy do innego punktu P' tejże krzywej f.

2) Przez to, że zmieniamy funkcyę f na funkcyę f_1; wtedy od punktu P krzywej f przechodzimy do punktu P_1 krzywej f_1. Dwa punkty P, P_1 mają tedy tę samą odciętą, która pozostała niezmienioną.

3) Przez to, że zmieniamy funkcyę f i równocześnie zmieniamy odciętą x; wtedy od punktu P na krzywej f przechodzimy do innego punktu P'_1 na krzywej f_1, nie mającego z punktem P tej samej odciętej.

Zmiana, jakiej podlega y w pierwszym przypadku, ma związek z tem, co w rachunku różniczkowym nazywa się r ó ż n i c z k ą funkcyi y i istota tego związku jest znana z zasad tego rachunku. Wiemy tedy, że zmiana funkcyi y w przypadku pierwszym jest sumą nieskończenie małych, z których nieskończenie mała najniższego rzędu jest ściśle wyrażeniem, noszącem nazwę r ó ż n i c z k i.

Jest widocznem, że i w drugim przypadku zmiana, jakiej podlega y jest również ilością nieskończenie małą, lecz jest dowolną, gdyż dowolną jest krzywa $y = f_1(x)$, którą podstawiamy zamiast krzywej $y = f(x)$. Wartość tej zmiany nazwiemy w a r y a c y ą funkcyi y i przez analogię oznaczać ją będziemy za pomocą symbolu δy.

Dogodnem jest pisać dowolne δy w postaci:

$$\delta y = \delta a\, \lambda(x),$$

gdzie $\lambda(x)$ jest funkcyą dowolną zmiennej x, δa zaś jest ilością, zdążającą do zera; w ten bowiem sposób uwidocznia się własność zdążania do zera waryacyi δy, a zarazem i własność, że waryacya jest dowolną.

Należy wszakże zauważyć, że pod tą postacią waryacya jest specyalną. Ilość δy wyobraża różnicę pomiędzy rzędnemi y_1 i y dwu krzywych nieskończenie blizkich; otóż nie możemy twierdzić, że ta różnica zawsze daje się rozłożyć na iloczyn funkcyi samej zmiennej x przez ilość δa, zdążającą do zera; możnaby naprzykład łatwo wyobrazić sobie przypadek, w którym funkcya λ zawiera także ilość δa, byle tylko stało się zadość warunkowi, że $\lambda(x)\,\delta a$ dąży do zera.

Zresztą, gdy się przedstawia waryacyę pod powyższą postacią, czyni się zadość jeszcze innej własności podstawowej, którą ta waryacya ma spełniać, mianowicie, że ona sama i wszystkie jej pochodne względem x dążą do zera wraz z ilością δa.

W samej rzeczy, jeżeli dwie krzywe nieskończenie blizkie dążą do zlania się, to jest naturalne, że będą też dążyły do zlania się np. ich styczne i że powinny dążyć do zera i waryacye pochodnej ilości y względem x i t. d.

Jeżeli zaś przypuścimy, że w λ zawiera się i δa, to nie zawsze będzie można uczynić zadość powyższemu warunkowi; jeżeli np.:

$$\delta y = \delta a \sin \frac{x}{\delta a},$$

to wprawdzie δy dąży do zera wraz z δa, lecz ponieważ:

$$y'_1 - y' = \delta y' = \cos \frac{x}{\delta a},$$

więc waryacya ilości y' do zera nie dąży.

Ważnem jest i następujące spostrzeżenie. Kładąc waryacyę pod postacią $\delta a \cdot \lambda(x)$ ograniczamy (jak powiedziano już) gatunek krzywej uległej waryacyi, której równaniem będzie $y = f(x) + \delta a \cdot \lambda(x)$. Jedyny warunek, któremu dotąd ma zadość czynić funkcya $\lambda(x)$ jest ten, by była funkcyą skończoną dla każdej wartości zmiennej x w rozważanym obszarze, inaczej bowiem nie możnaby twierdzić, że waryacya jest nieskończenie mała, t. j., że dąży do zera.

Gdybyśmy waryacyę poddali innym warunkom, np. by funkcya $\lambda(x)$ była ciągłą, ograniczylibyśmy jeszcze bardziej naturę krzywej, zmienionej przez waryacyę. Lecz może zdarzyć się, że dla dojścia do pewnych rezultatów w postaci prostej lub przy specyalnym charakterze traktowanych zagadnień szczególnych, jest koniecznem i dogodnem ograniczyć naturę waryacyi lub, co na jedno wychodzi, funkcyi $\lambda(x)$. Rozumie się wszakże, że okoliczność ta jest równoważna wyłączeniu pewnych kategoryj krzywych, na które krzywa $y = f(x)$, za pomocą zmian nieskończenie małych, przekształcać się może tak, że punkty jej przechodzą na punkty odpowiednie tych krzywych.

Bywa wszakże niekiedy, że takie ograniczenie, wprowadzone implicite, może prowadzić do błędów. Co do tego przedmiotu patrz bystre uwagi S c h e e f f e r a (Math. Ann. XXVI, str. 197, Leipz. Ber., 1885, str. 92).

Przejdźmy teraz do trzeciego przypadku, który jest najogólniejszy.

Wyobraźmy sobie dwa łuki krzywych nieskończenie blizkich i ustalmy w pewien sposób odpowiedniość c i ą g ł ą pomiędzy punktami jednej i drugiej. Jeżeli punktami odpowiedniemi są punkty, mające tę samą odciętą, wtedy odpowiedniość jest taką, jaką rozważyliśmy w przypadku drugim; jeżeli zaś odcięte są różne, wtedy różnica pomiędzy dwiema odciętemi punktów odpowiednich będzie waryacyą zmiennej x; oznaczmy ją przez δx. Różnica pomiędzy dwiema rzędnemi, p r z y p o m i n i ę c i u n i e s k o ń c z e n i e m a ł y c h r z ę d u w y ż s z e g o, będzie waryacyą ilości y.

Jeżeli równaniem drugiej krzywej jest, jak wyżej:

$$y = f(x) + \lambda(x)\,\delta a$$

i jeżeli x_1 jest odciętą punktu drugiej krzywej, odpowiadającej odciętej x punktu pierwszej (t. j. krzywej o równaniu $y = f(x)$), to różnica dwu rzędnych będzie:

$$[f(x_1) + \lambda(x_1)\,\delta a] - f(x),$$

a ponieważ

$$\lambda(x_1)\,\delta a = \lambda(x)\,\delta a + \omega\,; \quad (x_1 - x = \delta x);$$

$$f(x_1) - f(x) = f'(x)\,\delta x + \omega_1\,,$$

gdzie ω, ω_1 są nieskończenie małemi rzędu wyższego niż odpowiednio δa, δx, których rząd uważamy za jednakowy, przeto waryacya ilości y wyrazi się w ten sposób:

$$\delta y = \lambda(x)\,\delta a + f'(x)\,\delta x.$$

W tym wzorze pominęliśmy nieskończenie małe rzędu wyższego, zgodnie z określeniem waryacyi funkcyi y w przypadku ogólnym.

Zobaczmy teraz, jak wyraża się waryacya pochodnej y' funkcyi y w przypadku ogólnym.

Podobnie, jak wyżej, przemienność $\delta y'$ będzie zbiorem wyrazów nieskończenie małych rzędu najniższego w wyrażeniu:

$$[f'(x_1) - \lambda'(x_1)\,\delta a] - f'(x).$$

Ponieważ zaś:

$$\lambda'(x_1)\,\delta a = \lambda'(x)\,\delta a + \varepsilon,$$

$$f'(x_1) - f'(x) = f''(x)\,\delta x + \varepsilon_1\,,$$

gdzie ε, ε_1 są nieskończenie małemi rzędu wyższego, możemy więc napisać:

$$\delta y' = \lambda'(x)\,\delta a + f''(x)\,\delta x.$$

Podobnież otrzymaćby można $\delta y''$, $\delta y'''$ i t. d.

Z określenia waryacyi wynika wprost jej własność zasadnicza, że symbole działań d i δ, t. j. różniczki i waryacyi są przemiennemi.

Okażemy to najprzód dla samej zmiennej x. Waryacya zmiennej x jest różnicą pomiędzy dwiema wartościami tej zmiennej; np. dla pewnego x jest:

$$\delta x = x_1 - x,$$

a więc waryacya różniczki dx dla tegoż x będzie:

$$\delta\, dx = dx_1 - dx.$$

Różniczkując zaś równość poprzednią, mamy:

$$d\,\delta x = dx_1 - dx,$$

a więc:

$$d\,\delta x = \delta\, dx$$

To ustaliwszy, przez różniczkowanie względem x wzoru

$$\delta y = \lambda\,(x)\,\delta a + y'\,\delta x,$$

otrzymujemy:

$$d\,\delta y = \lambda'\,(x)\,dx\,\delta a + y''\,dx\,\delta x + y'\,d\,\delta x.$$

Z drugiej zaś strony znaleźliśmy, że:

$$\delta y' = \lambda'\,(x)\,\delta a + y''\,\delta x,$$

nadto mamy tożsamość:

$$\delta\,(dy) = \delta\,(y'\,dx) = dx\,\delta y' + y'\,\delta\,dx,$$

a więc:

$$\delta\,dy = \lambda'\,(x)\,\delta a\,dx + y''\,\delta x\,dx + y'\,\delta\,dx.$$

Widzimy, że istotnie:

$$d\,\delta y = \delta\,dy,$$

co jest stwierdzeniem możności przemieniania symboli d i δ.

Podobnież możnaby dowieść tożsamości:

$$d\,\delta y' = \delta\,dy', \ldots$$

W rachunku różniczkowym różniczka zmiennej niezależnej jest dowolną i od niej zależy różniczka funkcyi. W rachunku waryacyjnym różniczka staje się tem, co nazwaliśmy waryacyą; dowolność zaś, która w rachunku różniczkowym była przywiązana do różniczki zmiennej niezależnej, jest tu przywiązaną nietylko do waryacyi zmiennej niezależnej, lecz także i do waryacyi funkcyi.

Aby dojść do ilości, której waryacya jest zależną od waryacyj, uważanych za dowolne, t. j. do ilości, która w pewien sposób spełnia tę samą rolę w rachunku waryacyjnym, jaką w rachunku różniczkowym spełnia funkcya, wyobraźmy sobie funkcyę F zmiennych x, y, y', y''. Przyjmujemy, że funkcya F jest zawsze różniczkowalną względem swoich argumentów.

Nadajmy zmiennej x przyrost $\Delta x = \delta x$, zmiennej zaś y przyrost $\Delta y = y_1 - y = \delta y + \varepsilon$; wtedy funkcya F dozna pewnego przyrostu nieskończenie małego, którego część rzędu najniższego nazwiemy, jak zwykle, waryacyą funkcyi F i oznaczać będziemy przez δF.

Utwórzmy różniczkę funkcyi F, nadając zmiennym $x, y, y', \ldots$, od których F zależy, przyrosty $\Delta x = \delta x, \Delta y, \Delta y', \ldots$. Będzie:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\Delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\Delta y' + \ldots,$$

a ponieważ:

$$\Delta x = \delta x, \quad \Delta y = \delta y + \varepsilon, \quad \Delta y' = \delta y' + \varepsilon', \ldots$$

więc pomijając nieskończenie małe rzędu wyższego, znajdujemy:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y' + \ldots$$

Jako uogólnienie wyżej dowiedzionego twierdzenia o przemienności symbolów d i δ, twierdzimy, że jest ogólnie:

$$d\,\delta F = \delta d\,F,$$

gdy F jest funkcyą, dla której zachodzi twierdzenie o przemienności różniczkowań względem jej argumentów. Gdyż obliczając $d\,\delta F = \delta d\,F$ i pamiętając, że

$$d\,\delta x = \delta\,dx, \quad d\,\delta y = \delta\,dy, \quad d\,\delta y' = \delta\,dy', \quad \ldots$$

znajdziemy, że powyższe dwa wyrażenia są równe.

Jeżeli w wyrażeniu waryacyi funkcyi F podstawimy zamiast δy, $\delta y'$ ich wartości, mieć będziemy:

$$\delta F = \left\{\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,y' + \frac{\partial F}{\partial y'}\,y'' + \ldots\right\}\delta x$$

$$+ \left\{\frac{\partial F}{\partial y}\,\lambda(x)\,\delta\alpha + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\lambda'(x)\,\delta\alpha + \ldots\right\},$$

gdzie część druga jest oczywiście waryacyą funkcyi F w przypadku szczególnym, gdy x pozostaje bez zmiany. Ponieważ zaś w nawiasie pierwszym zawiera się pochodna całkowita funkcyi F względem x, otrzymujemy więc rezultat taki: „Waryacya funkcyi F w przypadku ogólnym jest zawsze równa sumie, złożonej z waryacyi dla przypadku szczególnego, w którym x się nie zmienia, i z wyrażenia, które jest iloczynem pochodnej całkowitej funkcyi F względem x przez δx.

Jest widocznem, że wszystkie te rozważania można rozciągnąć na przypadek ogólniejszy, w którym funkcya F zależy nie tylko od jednej funkcyi y zmiennej x i jej pochodnych, lecz od większej liczby funkcyj $y, z, \ldots$ i ich pochodnych.

Zasady rachunku różniczkowego pozwalają na znalezienie wzorów, odnoszących się do tych przypadków bardziej złożonych.

§ 2.

Waryacya całki określonej pojedyńczej.

Rozpocznijmy od przypadku najprostszego, w którym mamy do obliczenia waryacyę całki:

$$\int_{x'}^{x''} y\,dx\,,$$

gdzie y jest funkcyą zmiennej x.

Załóżmy najprzód, że x jest niezmienne. Różnica

$$\int_{x'}^{x''} (y + \delta y)\,dx - \int_{x'}^{x''} y\,dx\,,$$

równa się:

$$\int_{x'}^{x''} \delta y\,dx,$$

a stąd jest widocznem, że waryacya całki w tym prostym przypadku jest równa wprost całce waryacyi funkcyi, znajdującej się pod znakiem całkowania.

Niechaj będzie całka postaci:

$$J = \int_{x'}^{x''} F(x, y, y', \ldots)\,dx.$$

Nadajmy zmiennnym $y, y', \ldots$ przyrosty $\delta y = \lambda\,(x)\,\delta a$, $\delta y' = \lambda'\,(x)\,\delta a, \ldots$; wtedy funkcya F, którą przyjmujemy jako ciągłą, dozna przyrostu $\delta F + \omega$, gdzie ω jest ilością nieskończenie małą rzędu wyższego niż rząd ilości δa. Całka J zyskuje przyrost:

$$\int_{x'}^{x''} \delta F \, dx + \int_{x'}^{x''} \omega \, dx .$$

Jeżeli druga z tych dwóch całek jest nieskończenie małą rzędu wyższego niż rząd ilości δa, wtedy waryacya całki jest ściśle równą:

$$\int_{x'}^{x''} \delta F \, dx ,$$

t. j. waryacya całki jest równa całce waryacyi.

Warunek powyższy spełnia się po największej części w przypadkach zwykłych; aby przekonać się o tem, przeprowadźmy następujące rozważanie.

Załóżmy, że do funkcyi F można stosować wzór na wartość średnią, rozciągnięty aż do drugiej pochodnej, t. j. że jest:

$$F(x, y + \delta y, y' + \delta y', \ldots) - F(x, y, y', \ldots)$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \ldots\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta y^2 + \ldots\right)_{\substack{y + \theta\, \delta y \\ y' + \theta' \delta y' \\ \cdots\cdots}}$$

gdzie znaki umieszczone u spodu drugiego nawiasu wskazują, że zamiast $y, y', \ldots$ należy podstawić $y + \theta\, \delta y,\; y' + \theta'\, \delta y', \ldots$; $\theta, \theta', \ldots$ są liczby zawarte pomiędzy 0 i 1.

Pierwszy wyraz strony drugiej jest δF, druga zaś część jest ω; podstawiając w niej wartości $\delta y, \delta y', \ldots$, widzimy, że w ω wystąpi czynnik δa^2. Całka $\int \omega \, dx$ będzie tedy równa:

$$\delta a^2 \int_{x'}^{x''} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \lambda^2(x) + \ldots\right]_{\substack{y + \theta\, \delta y \\ y' + \theta' \delta y' \\ \cdots\cdots}} dx.$$

Jeżeli całka, stanowiąca drugi czynnik tego wyrażenia, nie dąży do nieskończoności — co spełnia się np. gdy dla każdej z wartości funkcyj $y, y', \ldots$, zawartych odpowiednio pomiędzy y i $y+\delta y, y'+\delta y', \ldots$ wartość bezwzględna całki pozostaje stale mniejsza od pewnej liczby skończonej — wtedy wartość całki $\int \omega \, dx$ będzie nieskończenie małą rzędu niższego, niż rząd ilości δa. Rozważanie dość podobne do powyższego znaleść można na str. 449—450 pierwszego tomu dzieła Stolza: „Grundzüge der Differential und Integralrechnung".

Przejdźmy teraz do rozważania waryacyi całki określonej, kiedy i granice całki są zmiennemi.

Niechaj granice x', x'' stają się skutkiem zmiany równemi $x' + \delta x'$, $x'' + \delta x''$. Waryacya całki jest zbiorem wyrazów najniższego rzędu w wyrażeniu:

$$\int\limits_{x'+\delta x'}^{x''+\delta x''} F(x, y+\Delta y, y'+\Delta y', \ldots)\, dx - \int\limits_{x'}^{x''} F(x, y, y', \ldots)\, dx,$$

gdzie $\Delta y, \Delta y', \ldots$ są przyrostami, jakie otrzymują funkcye $y, y', \ldots$, gdy pojedyńcze punkty krzywej pierwotnej $y = f(x)$ przechodzą na odpowiednie punkty krzywej $y = f(x) + \lambda(x)\,\delta a$. W pierwszej z dwóch powyższych całek uskutecznijmy zamianę zmiennej niezależnej, t. j. połóżmy $x = t + \delta t$, gdzie δt jest funkcyą nieskończenie małą zmiennej t, poddaną warunkom, aby stawała się równą $\delta x', \delta x''$, gdy t staje się odpowiednio równem x', x''. Jeżeli uczynimy $t = x'$, wtedy x staje się równem $x' + \delta x'$, gdy $t = x''$, x staje się równem $x'' + \delta x''$, a więc granicami całki będą wprost x' i x''. Funkcya pod znakiem całkowym jest funkcyą ilości $t + \delta t$; oznaczmy ją przez $\Phi(t + \delta t)$. Będziemy mieli tedy całkę:

$$\int\limits_{x'}^{x''} \Phi(t+\delta t)\, d(t+\delta t),$$

lub pisząc x zamiast t:

$$\int_{x'}^{x''} \Phi\,(x + \delta x)\,(dx + d\,\delta x),$$

Ponieważ:

$$\Phi\,(x + \delta x) = \Phi\,(x) + \Phi'\,(x)\,\delta x + \omega,$$

mamy przeto, rozwijając:

$$\int_{x'}^{x''} \Phi\,(x)\,dx + \int_{x'}^{x''} d\left[\Phi\,(x)\,\delta x\right] + \ldots$$

t. j.

$$\int_{x'}^{x''} \Phi\,(x)\,dx + \Big[\Phi\,(x)\,dx\Big]_{x'}^{x''} + \ldots$$

Zbadajmy wartość funkcyi $\Phi\,(x)$. Na podstawie założenia jest:

$$\Phi\,(x) = F\,(x, y + \Delta y, y' + \Delta y', \ldots)$$
$$= F\,(x, y, y', \ldots) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\,\Delta y + \ldots\right) + \omega_1,$$

a ponieważ $\Delta y = \delta y + \varepsilon, \ldots$, przeto:

$$\Phi\,(x) = F\,(x, y, y', \ldots) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \ldots\right) + \omega' = F + \delta F + \omega',$$

gdzie ω' jest ilością nieskończenie małą rzędu wyższego, δF zaś jest waryacyą funkcyi F w założeniu, że x jest niezmienne. Podstawiając, mamy:

$$\int_{x'}^{x'} F\,dx + \int_{x'}^{x''} \delta F\,dx + \Big[F\,\delta x\Big]_{x'}^{x''} + \Omega,$$

a więc waryacyą całki będzie:

$$\delta J = \int_{x'}^{x''} \delta F \, dx + \Big[F \, \delta x \Big]_{x'}^{x''}.$$

Postępowanie powyższe, napotykane zwykle w traktatach, jest dalekiem od ścisłości wymaganej dziś w postępowaniach analizy; nie mniej są takiemi warunki potrzebne na to, by można twierdzić z zupełną pewnością, że wzór dany przez nas na waryacyę całki jest ścisły. Stosuje się on bezwątpienia do funkcyj zwykłych; lecz pod tym względem postęp, uczyniony w najnowszych badaniach, nie jest wielkim.

Rozważmy jeszcze przypadek ogólniejszy. Załóżmy, że funkcya F, prócz $x, y, y', \ldots$, zawiera jeszcze i granice całkowania x', x''. Ten przypadek może zachodzić w różnych zagadnieniach. Spotykamy go np. w zagadnieniu o brachystochronie, gdy nie ustalamy punktu początkowego, a ustalamy tylko krzywą, na której ma się znajdować; w zagadnieniu tem sam Lagrange popełnił błąd (patrz § 31). Wtedy waryacyę pierwszą całki stanowi ogół wyrazów najniższego rzędu w wyrażeniu:

$$\int_{x'+\delta x'}^{x''+\delta x''} F(x, x' + \delta x', x'' + \delta x'', y + \Delta y, y' + \Delta y', \ldots)\, dx$$

$$- \int_{x'}^{x''} F(x, x', x'', y, y', \ldots)\, dx.$$

Możemy tu powtórzyć postępowanie powyższe i dojdziemy do przekształcenia wyrazu pierwszego powyższej różnicy na wyrażenie:

$$\int_{x'}^{x''} \Phi(x)\, dx + \Big[\Phi(x)\, \delta x \Big]_{x'}^{x''} + \ldots$$

gdzie:

$$\Phi(x) = F(x, x' + \delta x', x'' + \delta x'', y + \Delta y, y' + \Delta y', \ldots)$$

$$= F(x, x', x'', y, y', \ldots)$$

$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial F}{\partial x''} \delta x''\right) + \delta F + \omega'.$$

Podstawiając i znosząc, jak zwykle, wyrazy rzędu wyższego nad pierwszy, otrzymujemy waryacyę całki w postaci:

$$\delta J = \int_{x'}^{x''} \delta F \, dx$$

$$+ \int_{x'}^{x''} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial F}{\partial x''} \delta x''\right) dx + \Big[F \delta x\Big]_{x'}^{x''}.$$

W drugiej całce ilości $\delta x'$, $\delta x''$ można wysunąć przed znak całkowania, ponieważ nie zależą od x; będziemy mieli tu dwa wyrazy:

$$\delta x' \int_{x'}^{x''} \frac{\partial F}{\partial x'} dx + \delta x'' \int_{x'}^{x''} \frac{\partial F}{\partial x''} dx,$$

które się łączą z analogicznemi:

$$(F)_{x=x'} \delta x' - (F)_{x=x''} \delta x'',$$

znajdującemi się w ostatniej części waryacyi.

§ 3.

Przekształcenie wzoru na waryacyę całki określonej.

Połóżmy we wzorach powyższych:

$$M = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad M' = \frac{\partial F}{\partial y'}, \ldots,$$

to wyrażenie δF będzie równe $M\,\delta y + M'\,\delta y' + \ldots$, a stąd:

$$\delta J = [F]_{x''}\,\delta x'' - [F]_{x'}\,\delta x' + \int_{x'}^{x''} M\,\delta y\,dx + \int_{x'}^{x''} M'\,\delta y'\,dx + \ldots$$

Całki tu występujące należy rozumieć w ten sposób, że w $M\,\delta y, \ldots$ podstawiamy zamiast $y, y', \ldots$ ich wyrażenia w funkcyi x, a potem obliczamy całki.

Gdy waryacye $\delta y, \delta y', \ldots$ są wzięte w założeniu, że x jest niezmienne, to można napisać:

$$\delta y' = \delta\,\frac{dy}{dx} = \frac{\delta\,dy}{dx} = \frac{d\,\delta y}{dx},$$

. . . .

a wtedy całkując przez części, mamy:

$$\int M'\,\delta y\,dx = \int M'\,d\,\delta y = M'\,\delta y - \int \frac{dM'}{dx}\,\delta y\,dx,$$

$$\int M''\,\delta y''\,dx = \int M''\,d\,\delta y' = M''\,\delta y' - \int \frac{dM''}{dx}\,\delta y'\,dx,$$

$$= M''\,\delta y' - \frac{dM''}{dx}\,\delta y + \int \frac{d^2M''}{dx^2}\,\delta y\,dx,$$

. . . .

Widzimy, że stosując kolejno i odpowiednio całkowanie przez części oraz zasadę przemienności znaków d i δ, można przekształcić δJ w ten sposób, aby pod znakiem całkowania występowała tylko waryacya δy, a nie występowały waryacye $\delta y'$, $\delta y''$, ... Rozważona część waryacyi będzie postaci:

$$\left[M' - \frac{dM''}{dx} + \frac{d^2M'''}{dx^2} - \dots\right]_{x'}^{x''} \delta y$$

$$+ \left[M'' - \frac{dM'''}{dx} + \frac{d^2M''''}{dx^2} - \dots\right]_{x'}^{x''} \delta y'$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \int\limits_{x'}^{x''} \left[M - \frac{dM'}{dx} + \frac{d^2M''}{dx^2} - \dots\right] \delta y \, dx;$$

a gdy położymy dla skrócenia:

$$H = M - \frac{dM'}{dx} + \dots,$$

$$K = M' - \frac{dM''}{dx} + \dots,$$

$$K' = M'' - \frac{dM'''}{dx} + \dots,$$

otrzymamy następujące wyrażenie na całkowitą waryacyę:

$$\delta J = [F\,\delta x + K\,\delta y + K'\,\delta y' + \dots]_{x'}^{x''}$$

$$+ \int\limits_{x'}^{x''} H\,\delta y\,dx,$$

gdzie symbol $[\ ]_{x'}^{x''}$ oznacza różnicę dwu wartości wyrażenia objętego nawiasem, którą otrzymujemy, kładąc najprzód x'' a następnie x' zamiast x (rozumie się, że i $y, y', \ldots$ odpowiednio zmieniają swe wartości w pierwszym i drugim razie).

Zauważmy, że w nawiasie po stronie drugiej zawierać się będą $\delta y, \delta y', \ldots$ aż do $\delta y^{(k)}$, jeżeli funkcya F zawiera pochodną $y^{(k+1)}$; gdy zaś funkcya ta zależy tylko od y i y', wtedy w nawiasie będą tylko wyrazy z czynnikami δx i δy.

Jeżeli funkcya F, prócz y, y', y'', zawiera jeszcze inne funkcye $z, u, \ldots$ zmiennej x wraz z ich pochodnemi, wtedy za pomocą rachunku podobnego do powyższego, otrzymać można na δJ wyrażenie, w którem występują wyrazy, utworzone w sposób analogiczny, tylko że zmienną y zastępują odpowiednio z, u i t. d. Będzie tedy:

$$\begin{aligned}\delta J = [I\ \delta x + K_1\ \delta y + K'_1\ \delta y' + \ldots \\ + K_2\ \delta z + K'_2\ \delta z' + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots]_{x'}^{x''} \\ + \int_{x'}^{x''} (H_1\ \delta y + H_2\ \delta z + \ldots)\, dx,\end{aligned}$$

gdzie liczba wyrazów pod znakiem całkowym równa się liczbie funkcyj $y, z, \ldots$ Jeżeli w funkcyi F pochodne funkcyi y dosięgają rzędu r, pochodne funkcyi z rzędu s i t. d., to w pierwszej części powyższego wyrażenia ostatnim wyrazem pierwszego wiersza będzie $K_1^{(r-1)}\ \delta y^{(r-1)}$, ostatnim wyrazem drugiego: $K_2^{(s-1)}\ \delta z^{(s-1)}$ i t. d. Wreszcie $K_1, K_2', \ldots, H_2$, powstaje z $K_1, K_1', \ldots, H_1$ tylko wprost przez zamianę y na z.

W przypadku szczególnym, gdy krzywa zmieniona przez waryacyę ma te same krańce x', x'', co krzywa pierwotna $y = f(x)$, wtedy widocznie dla $x = x'$ i $x = x''$ waryacye δx, δy są zerem; wtedy, jeżeli F zawiera tylko y' i nie zawiera pochodnych następnych, znika w wyrażeniu waryacyi wyraz pierwszy i pozostaje tylko wyraz całkowy.

Toż samo miałoby miejsce, gdyby krzywa, zmieniona przez waryacyę, miała nietylko krańce krzywej pierwotnej, lecz i też same styczne w tych krańcach; gdy nadto F zawiera tylko pochodne aż do pochodnej y'' i t. d.

---

§ 4.

Uwagi o warunkach stosowania przekształceń, wykonanych w paragrafie poprzedzającym.

W paragrafie poprzedzającym wykonywaliśmy całkowanie przez części. Otóż, aby módz działanie to wykonać, potrzeba pewnych warunków, które tu w krótkości zbadamy.

Dla ustalenia myśli przyjmijmy, że funkcya F zawiera tylko x, y i y'. Wtedy w przekształceniu powyższem jedyne całkowanie przez części będzie następujące:

$$\int M' \delta y' \, dx = M' \delta y - \int \frac{dM'}{dx} \delta y \, \delta x.$$

Aby ten wzór można było stosować, jest koniecznem, by M było funkcyą różniczkowalną w całym rozważanym przedziale od x' do x''. Ponieważ zaś F, a więc i M', M'', ..., są danemi jako funkcye ilości x, y, y', ..., to gdy nawet założymy, że F jest funkcyą ciągłą i różniczkowalną swych argumentów, nie można stąd będzie jeszcze wnieść, że $M' = \dfrac{\partial F}{\partial y'}$, jest funkcyą różniczkowalną względem x. Postawienie warunku tej różniczkowalności jest równoważnem ograniczeniu natury funkcyj y i y' zmiennej x. Dla prostoty przyjmijmy także, że funkcya y' jest różniczkowalna, t. j. że istnieje pochodna y''; jeżeli nadto pochodne funkcyi M' względem y i y' są funkcyami ciągłemi, to wtedy, jak wiemy z rachunku różniczkowego, istnieje tak zwane twierdzenie o funkcyach złożonych, t. j. istnieje pochodna funkcyi M' względem x. Przy tych tedy warunkach wyłączone zostają funkcye, nie posiadające drugiej pochodnej.

Przytoczyliśmy powyższe uwagi dla pokazania, że dla utrzymania w mocy działań wyżej podanych, należy funkcyę y poddać nowym ograniczeniom co do jej natury.

W przedmiocie uwag tu podanych patrz artykuł Du Bois-Reymonda w t. XV Math. Ann., str. 294.

---

§ 5.

Twierdzenie pomocnicze podstawowe w rachunku waryacyjnym.

W paragrafie niniejszym przeprowadzimy badanie następujące:

Załóżmy, że całka:

$$\int_{x'}^{x''} H\,\delta y\,dx,$$

gdzie:

$$H = M - \frac{dM'}{dx} + \ldots \pm \frac{d^n M^{(n)}}{dx^n},$$

jest zerem, niezależnie od wartości waryacyi δy. Co możemy wtedy orzec o wartości wyrażenia H?

Jeżeli waryacyę δy można uważać za zupełnie dowolną, wtedy możemy powtórzyć bez zmiany rozumowanie, pomieszczone w wielu dawniejszych traktatach rachunku waryacyjnego.

Połóżmy $\delta y = H$ i wtedy mamy całkę funkcyi, która jest stale dodatnią; taka całka może być zerem tylko wtedy, gdy H^2 jest zerem dla wszystkich wartości x. W tym więc przypadku ze znikania całki wynika wprost znikanie funkcyi H.

Lecz załóżmy, że waryacya δy nie jest dowolna w znaczeniu bezwzględnem. Jeżeli ma być poddana choćby warunkowi ciągłości, wtedy powinna być ciągłą i funkcya $\lambda(x)$, co n. p. milcząco zakładamy, przyjmując istnienie pochodnej $\lambda'(x)$ i nie można już położyć $\delta y = H$, o ile nie przyjmiemy, że H jest funkcyą ciągłą zmiennej x.

Przy tem założeniu, ograniczającem oczywiście naturę funkcyi y, można, podobnie, jak wyżej, uzasadnić twierdzenie, że ze znikania całki wynika znikanie ilości H.

Załóżmy teraz, że H nie jest funkcyą ciągłą i że zmienia znak w skończonej liczbie punktów $a_1, a_2, \ldots$ Wtedy możemy przyjąć na δy wyrażenie ciągłe:

$$\delta y = (x - a_1)(x - a_2) \ldots,$$

także zmieniające znak w tychże samych punktach, i otrzymamy pod znakiem całki funkcyę stałego znaku; a ponieważ całka ma być zerem, stąd więc i $H = 0$ w ogólności, t. j. z wyjątkiem specyalnych punktów przedziału całkowania, gdyż wiemy, że całka nie zmienia wartości, jeżeli w danych punktach przedziału zmieniamy wartość funkcyi podcałkowej.

Załóżmy nakoniec, że δy ma być poddane warunkom innego rodzaju, np. że ma znikać w punktach danych, lub że pochodne tej waryacyi mają też znikać w punktach danych. Wtedy nie możemy już powtórzyć rozumowań powyższych, gdyż nie możemy już wziąć $\delta y = H$; lecz gdy $a_1, a_2, \ldots$ są punktami, w których znika δy, można napisać:

$$\delta y = (x - a_1)(x - a_2) \ldots \delta_1 y,$$

$$H_1(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots H(x),$$

i oczywiście:

$$\int H(x)\, \delta y\, dx = \int H_1(x)\, \delta_1 y\, dx = 0,$$

a wtedy z dowolności wyrażenia $\delta_1 y$ wynika znikanie funkcyi $H_1(x)$ dla każdego x, a więc i znikanie funkcyi $H(x)$.

Co do rozważań niniejszych porównać można: Heine, Math. Ann., II, str. 188 (1870); Du Bois-Reymond, Math. Ann., XV, str. 297 i nast. (1879); Méray, Ann. de l'École. Norm., (2), VII, str. 187.

W cytowanej pracy Du Bois-Reymonda znajdujemy także następujące twierdzenie:

Jeżeli waryacya δy wraz z pewną liczbą swych pochodnych ma być ciągłą a zresztą dowolną, wtedy ze znikania całki

$$\int_{x'}^{x''} H\, \delta y\, dx$$

dla każdej wartości δy i z założenia, że H jest funkcyą całkowalną zmiennej x wynika, że i całka funkcyi H pomiędzy temi samemi granicami jest także zerem.

§ 6.

Zagadnienie podstawowe w rachunku waryacyjnym.

Rachunek waryacyjny zajmuje się głównie jednym gatunkiem zagadnień, mianowicie zagadnieniem na maximum i minimum. Niechaj będzie całka określona:

$$J = \int_{x'}^{x''} F(x, y, y', \ldots, y^{(r)})\, dx,$$

gdzie y jest funkcyą nieoznaczoną zmiennej x. Szukajmy takiej funkcyi y, dla której całka poprzednia staje się maximum lub minimum.

Łatwo widzieć, że dla maximum i minimum potrzeba, aby waryacya całki stawała się zerem. Gdyż różnica pomiędzy dwiema wartościami, jakie przyjmuje całka, gdy za y kładziemy raz funkcyę, odpowiadającą maximum lub minimum, drugi raz zaś tęż funkcyę, po poddaniu jej dowolnej waryacyi, jest równą waryacyi, zwiększonej o pewną liczbę nieskończenie małych rzędu wyższego. Otóż wiemy, że sumę nieskończenie małych można dobrać tak, aby znak całego wyrażenia zależał od nieskończenie małej rzędu najniższego, która w naszym przypadku jest ściśle równa δJ. Lecz znak ilości δJ zależy od znaku dowolnych waryacyj $\delta x, \delta y, \delta y', \ldots$; jeżeli zmienimy ich znak, to zmieni się i znak wyrażenia δJ (patrz wyżej wyrażenie na δJ). A zatem różnica pomiędzy dwiema kolejnemi wartościami całki nie miałaby stałego znaku; tymczasem jest jasnem, że ta różnica musi mieć znak stały, jeżeli idzie o maximum lub minimum, to jest o różnicę pomiędzy wartością całki dla y, odpowiadającego wartości największej lub najmniejszej, a inną wartością y, zmienioną skutkiem waryacyi w jakikolwiek sposób. Różnica ta powinna być albo stale dodatnią, albo stale ujemną; wnosimy stad, że waryacya pierwsza całki musi być zerem.

Widzimy, że rozważania niniejsze są analogiczne do rozważań w rachunku różniczkowym, odnoszących się do teoryi maximum i minimum funkcyi jednej lub wielu zmiennych.

Znikanie waryacyi pierwszej nie jest warunkiem dostatecznym na maximum lub minimum, lecz tylko warunkiem koniecznym. Dla zbadania, kiedy istotnie ma miejsce jedno lub drugie dla krzywych $y = f(x)$, gdy $\delta J = 0$, należy podjąć pewne rozważania, któremi zajmiemy się w następstwie.

W rachunku różniczkowym, gdy przyrównamy do zera pierwszą różniczkę funkcyi lub oddzielnie jej pochodne cząstkowe względem każdej ze zmiennych, otrzymujemy szereg równań analitycznych, a rozwiązanie ich może służyć do wyszukania punktów, w których funkcya może stawać się maximum lub minimum. Zachodzi pytanie, czy coś podobnego ma miejsce w rachunku waryacyjnym?

Różnica polega na tem, że w rachunku waryacyjnym dla wyznaczenia szukanej funkcyi lub szukanych funkcyj, mamy nie zwyczajne równania lecz równania różniczkowe, których całkowanie prowadzi do funkcyj szukanych. Zobaczymy, w jaki sposób to się dzieje.

Widzieliśmy, że waryacya δJ może być napisana w postaci:

$$\delta J = [\Gamma]_{x'}^{x''} + \int_{x'}^{x''} H\, \delta y\, dx,$$

gdzie:

$$\Gamma = F\, \delta x + K\, \delta y + K'\, \delta y' + \ldots$$

Waryacya ma być zerem, bez względu na to, jakiemi są dowolne waryacye δx, δy, $\delta y'$, ... Rozporządźmy niemi na chwilę w sposób następujący: przypuśćmy, że wszystkie są zerami w punktach x', x'', które są granicami całki; w tym celu dość założyć, że $\delta x' = \delta x'' = 0$ i za δy wziąć taką funkcyę zmiennej x, że sama ta funkcya i jej pochodne aż do pochodnej rzędu $r—1$ (jeżeli we wzorach naszych występują waryacye aż do waryacyi $\delta y^{(r-1)}$) są zerami w dwu punktach wskazanych. Można np. przyjąć, że:

$$\delta y = \delta a \,.\, \lambda(x) = \delta a\, (x-x')^n\, (x-x'')^n\, \lambda_1(x),$$

gdzie $\lambda_1(x)$ jest funkcyą dowolną zmiennej x.

Dla tych wartości część pierwsza wyrażenia δJ, t. j. $[\Gamma]_{x'}^{x''}$, staje się zerem, a stąd powinna być zerem i część druga i to bez względu na to, jaką jest funkcya $\lambda_1(x)$, lub też bez względu na to, jaką jest waryacya δy, byleby tylko wraz ze swemi pochodnemi znikała w punktach $x = x'$, $x = x''$.

W paragrafie poprzedzającym rozważaliśmy ten przypadek i widzieliśmy, że okoliczność ta pociąga za sobą koniecznie znikanie wyrażenia H. Otóż H nie zawiera wcale waryacyj, którym nadaliśmy wartości specyalne, możemy zatem wnieść stąd, że ze znikania waryacyi δJ wynika w każdym przypadku znikanie funkcyi H.

Z drugiej strony ze znikania ilości H wynika znikanie całki, a więc i znikanie ilości $[\Gamma]_{x'}^{x''}$; dochodzimy zatem do rezultatu:

A b y i s t n i a ł o m a x i m u m l u b m i n i m u m, p o t r z e b a, b y b y ł o:

$$H = 0, \qquad [\Gamma]_{x'}^{x''} = 0.$$

Pierwsze z tych równań zawiera $x, y, y', \ldots, y^{(2n)}$, jest przeto równaniem różniczkowem rzędu $2n$; służy ono do wyznaczenia funkcyi y. Po zcałkowaniu tego równania, otrzymujemy funkcyę y z $2n$ stałemi dowolnemi, które wyznaczamy przy pomocy drugiego związku $[\Gamma]_{x'}^{x''} = 0$.

Sposób, w jaki to się uskutecznia, objaśnimy szczegółowiej w następnych paragrafach.

Podobnież możemy roztrząsnąć przypadek, w którym zachodzi więcej funkcyj $y, z, \ldots$

Wtedy waryacya całki jest tego samego typu, lecz część pierwsza zawiera jeszcze wyrazy o czynnikach $\delta z, \delta z', \ldots$, druga zaś część jest:

$$\int_{x'}^{x''} (H\,\delta y + H_1\,\delta z + \ldots)\,dx,$$

gdzie H_1 tworzy się w ten sam sposób jak H, przez zastąpienie zmiennej y zmienną z i t. d.

Jeżeli położymy $\delta z = 0$ i dobierzemy δx, δy, $\delta y'$, ... tak, aby te ilości stawały się zerami w punktach x', x'', otrzymamy najprzód $H = 0$; podobnież otrzymamy $H_1 = 0$ i t. d.

Dochodzimy zatem nie do jednego równania różniczkowego lecz do układu równań różniczkowych:

$$H = 0, \quad H_1 = 0, \ \ldots$$

zawierających funkcye niewiadome y, z, ... Całkując ten układ, znajdziemy szukane funkcye y, z, ... z pewną liczbą stałych dowolnych, które wyznaczymy z warunku $[\Gamma]_{x'}^{x''} = 0$, nazwanego równaniem dla granic.

§ 7.

Rozbiór warunków, określonych równaniem dla granic.

Pierwsza strona równania dla granic jest postaci:

$$[F\delta x + K\delta y + K'\delta y' + \ldots]_{x=x''} - [F\delta x + K\delta y + K'\delta y' + \ldots]_{x=x'};$$

zależy ona od wartości δx, δy, $\delta y'$, ..., $\delta y^{(r-1)}$ oraz y, y', ... w punktach $x = x'$, $x = x''$.

Rozpatrzmy to zagadnienie w postaci najbardziej dowolnej, t. j. załóżmy, że szukana funkcya y nie jest poddana żadnym warunkom, że więc nie są określone ani wartości jej, ani wartości jej pochodnych w punktach x', x'', ani też związki pomiędzy temi wartościami. Nadto niechaj pozostają nieoznaczonemi i same granice x', x''. Wtedy ilości δx, δy, $\delta y'$, ... w jakimkolwiek punkcie, a w szczególności w punktach granicznych, pozostają dowolnemi, jak to już dotąd było przyjmowane; stąd ze związku

$[\Gamma]_{x'}^{x''}=0$ wyniknie wprost, że spółczynniki pojedyńczych wyrazów powinny być zerami. Tym sposobem otrzymamy $2n+2$ równań:

$$F_{x''}=0,\quad K_{x''}=0,\quad K'_{x''}=0,\quad \ldots$$

$$F_{x'}=0,\quad K_{x'}=0,\quad K'_{x'}=0,\quad \ldots$$

Przez całkowanie równania $H=0$ otrzymamy y, a więc i $y, y', \ldots$ z $2r$ stałemi dowolnemi; podstawiając wartości tych funkcyj na granicach $x=x''$ i $x=x'$ w równania powyższe, otrzymamy $2r+2$ związków, które w ogólności będą mogły służyć do wyznaczenia $2r$ stałych całkowania oraz dwu granic x', x''.

Opiera się to oczywiście na założeniu, że $H=0$ jest w rzeczy samej równaniem różniczkowem rzędu $2r$, a do tego zaś potrzeba i wystarcza (jeżeli przypominamy sobie kształt funkcyi H), aby pochodna

$$\frac{dM^{(r)}}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y^{(r)}},$$

zawierała funkcyę $y^{(2r)}$, t. j. aby $\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(r)}\,\partial y^{(r)}}$ było różnem od zera. Jeżeli ten warunek nie spełnia się, zagadnienie jest nierozwiązalne. Lecz o tem mówić będziemy ogólniej w oddzielnym paragrafie. (Patrz § 15).

Załóżmy teraz, że granice całkowania x', x'' są określone; wtedy $\delta x', \delta x''$ są zerami i w wyrażeniu $[\Gamma]_{x'}^{x''}$ znikają dwa pierwsze wyrazy. O innych wyrazach można poczynić te same, co wyżej, uwagi. Otrzymamy tu nie $2r+2$, lecz tylko $2r$ związków, z których wyznaczymy $2r$ stałych całkowania.

Załóżmy wreszcie, że pomiędzy wartościami ilości $x, y, y', \ldots$ na granicach, t. j. pomiędzy $x', x'', y_1, y_2, y'_1, y'_2, \ldots$ (za pomocą znaczków 1 i 2 odróżniamy wartości w punktach x' i x'') zachodzi k związków danych:

$$R_1=0,\quad R_2=0,\quad \ldots,\quad R_k=0,$$

Związki te są stałemi dla każdego układu waryacyj:

$$\delta x', \delta x'', \delta y_1, \delta y_2, \delta y'_1, \delta y'_2, \ldots ;$$

stąd waryacye pierwszych stron tych związków, uważanych za funkcye ilości $x', x'', y_1, y_2, y'_1, y'_2, \ldots$, powinny być zerami, t. j. być winno:

$$\frac{\partial R_1}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial R_1}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial R_1}{\partial y'_1} \delta y'_1 + \ldots$$

$$+ \frac{\partial R}{\partial x_1} \delta x'' + \ldots\ldots\ldots = 0,$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial R_2}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial R_2}{\partial y'_1} \delta y'_1 + \ldots$$

$$+ \frac{\partial R_2}{\partial x''} \delta x'' + \ldots\ldots\ldots = 0,$$

. . . .

Stanowi to r związków pomiędzy waryacyami $\delta x', \delta x'', \delta y_1, \delta y_2, \ldots$; podstawiwszy otrzymane z nich wartości r waryacyj w równaniu $\left[\Gamma\right]_{x'}^{x''} = 0$, znajdziemy jeden związek, w którym będzie $2r + 2 - k$ waryacyj dowolnych. Przyrównawszy do zera spółczynniki tych waryacyj otrzymamy razem z k związkami danemi $2r+2$ równań, z których wyznaczymy $2r$ stałych całkowania oraz granice x', x''.

Jeżeli w szczególności $k = 2r + 2$, wtedy to postępowanie doprowadzi nas do $2r + 2$ równań liniowych jednorodnych pomiędzy tyluż zmiennemi; wyznacznik układu tych równań nie może być zerem, gdyż jest on jakobianem funkcyj $R_1, R_2, \ldots$ i gdyby był zerem, to jeden z k związków danych wynikałby tożsamościowo z pozostałych, co naturalnie z góry wyłączamy.

A zatem jako wartości waryacyi $\delta x', \delta x'', \delta y_1, \delta y_2, \delta y'_1, \delta y'_2, \ldots$ można wziąć tylko zera, i będzie:

$$\delta x' = \delta x'' = \delta y_1 = \ldots = 0;$$

tak więc równanie dla granic będzie tożsamościowo spełnionem.

Celem wyznaczenia $2r$ stałych całkowania zauważmy, że rozwiązując $2r+2$ związków $R=0$, możemy otrzymać wartości $2r+2$ ilości x', x'', y_1, y_2, y'_1, y'_2, ... Podstawiwszy te wartości w znalezionych wyrażeniach na y i na pochodne tej funkcyi, będziemy mieli $2r$ równań na wyznaczenie tyluż stałych.

Bardzo łatwo rozciągnąć te rozważania na przypadek, w którym mamy więcej funkcyj niewiadomych y, z, ... Jeżeli liczba tych funkcyj wynosi n, będziemy mieli $2nr+2$ równań dla granic.

W następującym paragrafie pokażemy, w jaki sposób różne przypadki, rozważane w tym paragrafie, sprowadzić można do ostatniego, t. j. do przypadku, w którym i wartości granic i wartości funkcyj nieznanych są na granicach określonemi.

---

§ 8.

Zagadnienie ogólne rachunku waryacyjnego z wartościami na granicach nieokreślonemi daje się zawsze sprowadzić do zagadnienia z wartościami na granicach określonemi.

Redukcya, o której tu mowa, jest dość ważną, gdyż służy do uproszczenia wielu rozważań, jakie podamy w następstwie.

Zagadnienie ogólne na maximum i minimum w rachunku waryacyjnym daje się zawsze rozłożyć na dwa inne zagadnienia, z których jedno należy do rachunku różniczkowego. W samej rzeczy, niechaj idzie o wyznaczenie maximum lub minimum całki określonej znanego gatunku. Niechaj wartości funkcyj niewiadomych nie będą na granicach określonemi; niechaj i same granice x', x'' określonemi nie będą, albo niechaj te ilości będą określonemi tylko w części lub poddane pewnym warunkom, nie wystarczającym do zupełnego ich określenia.

Możemy najprzód przyjąć, że nadaliśmy granicom wartości oznaczone i rozwiązaliśmy odpowiednie zadanie rachunku waryacyjnego; otrzymamy wtedy największą lub najmniejszą całkę, jako funkcyę wartości granicznych. Jeżeli te wartości są całkowicie lub w części nieokreślonemi i uważać będziemy je za zmienne, to całka będzie funkcyą tych zmiennych. Otóż pomiędzy nieskończenie wielu wartościami, które może przyjmować i całka, szukajmy jej wartości maximum i minimum, co oczywiście sprowadza się do zwyczajnego zagadnienia rachunku różniczkowego na maximum i minimum funkcyi wielu zmiennych; w ten sposób rozwiążemy zadanie postawione pierwotnie. Porównaj co do tego pracę A. Mayera: „Ueber die Kriterien des Maxim. und Minim. etc.“, Crelle, t. LXIX, str. 261—263.

---

§ 9.

Zagadnienia na względne maximum i minimum.

Pomiędzy zagadnieniami na maximum i minimum całki określonej mogą być zagadnienia natury odmiennej od rozważanych dotąd. W paragrafach poprzednich szło o znalezienie maximum i minimum całki określonej przez dobranie funkcyj $y, z, \ldots$, które wraz z pochodnemi swemi występują w funkcyi podcałkowej; te funkcye $y, z, \ldots$, były albo nieoznaczone, albo też były ustalone całkowicie lub w części wartości ich i ich pochodnych na granicach x' i x'' całki. Lecz mogą być zadania inne. Możemy starać się znaleść maximum lub minimum całki, gdy pomiędzy funkcyami $y, z, \ldots$ i ich pochodnemi istnieją pewne związki, t. j. gdy funkcye $y, z, \ldots$ mają czynić zadość pewnym równaniom różniczkowym. Albo też możemy szukać maximum lub minimum całki, poddając funkcye $y, z, \ldots$ warunkowi, aby jedna lub więcej całek określonych tejże natury pomiędzy temi samemi granicami miały wartość oznaczoną.

Zagadnienia tej natury można nazwać zagadnieniami na maximum i minimum względne, gdyż maximum lub minimum, którego szukamy, nie jest bezwzględnem, jak w zadaniach poprzednio rozważanych.

W zadaniach niniejszych nie możemy już tak postępować, jak poprzednio. Waryacya całki określonej jest:

$$\delta J = \lfloor \Gamma \rfloor_{x'}^{x''} + \int_{x'}^{x''} (H\,\delta y + H_1\,\delta z + \ldots)\,dx\,.$$

Gdyby $\delta y, \delta z, \ldots$ były niezależnemi od siebie, jak to było poprzednio, wtedy otrzymalibyśmy $H = 0$, $H_1 = 0, \ldots$; lecz taki wniosek jest nieprawdziwym, gdy istnieją pewne związki pomiędzy waryacyami tych funkcyj. Rozwiązanie zagadnienia będzie w zarysie takie: trzeba będzie starać się wyrugować z poprzedzającego wzoru niektóre z waryacyj $\delta y, \delta z, \ldots$ w ten sposób, aby pozostałe mogły być uważane za niezależne, a potem dopiero zastosować metodę już znaną. Rzecz cała sprowadza się tedy do znalezienia związku, który powinien zachodzić pomiędzy $\delta y, \delta z, \ldots$

Pokażemy, że drugie z wysłowionych zagadnień sprowadza się do pierwszego, które dla krótkości nazwiemy zagadnieniem Lagrange'a, dlatego, że ten wielki analista podał genialną metodę rozwiązania tego zagadnienia (t. z. metodę mnożników). Drugie zadanie nazwiemy (dla powodów niżej wyłuszczyć się mających) zadaniem izoperymetrycznem.

§ 10.

Forma kanoniczna zagadnienia Lagrange'a.

Powtórzmy wysłowienie zagadnienia Lagrange'a. Niechaj będzie całka:

$$J = \int_{x'}^{x''} F\, dx,$$

gdzie F jest funkcyą zmiennych $x, y, y', \ldots, y^{(n)}, z, z', \ldots$; $y, z, \ldots$ są funkcyami zmiennej x. Mamy wyznaczyć te funkcye tak, aby całka J stała się maximum lub minimum i aby stało się zadość zarazem równaniom różniczkowym:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots\ldots,$$

zawierającym zmienne $x, y, z, \ldots$ i ich pochodne i, ogólniej biorąc, inne jeszcze funkcye zmiennej x wraz z ich pochodnemi.

Zobaczymy najprzód, do jakiej postaci kanonicznej można sprowadzić dane zagadnienia.

Można bezpośrednio uskutecznić redukcyę podobną do tej, jaką uskutecznia się z układem równań różniczkowych jednoczesnych: wiadomo, że powiększając liczbę równań danych i liczbę funkcyj, możemy dojść do układu równoważnego równań różniczkowych, które wszystkie są rzędu pierwszego. Połóżmy w naszym przypadku:

$$y' = y_1, \; y'' = y'_1 = y_2, \ldots, y^{(n-1)} = y'_{n-2} = y_{n-1},$$

$$z' = y_n, \; z'' = y'_n = y_{n+1}, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

i wtedy rozważając razem z funkcyami niewiadomemi funkcye $y_1, y_2, \ldots$ i odpowiednio równania różniczkowe 1-go rzędu:

$$y' = y_1, \quad y'_1 = y_2, \ldots$$

sprowadzamy zagadnienie do takiej postaci, w której pochodne wszystkich funkcyj niewiadomych nie występują w rzędzie wyższym nad pierwszy.

Zmieniwszy odpowiednio znakowania, by uczynić je bardziej symetrycznemi, możemy zagadnieniu nadać postać następującą:

Niechaj będzie całka:

$$J = \int_{x'}^{x''} F(x, y_1, y_2, \ldots, y'_1, y'_2, \ldots)\, dx,$$

oraz równania różniczkowe 1-go rzędu:

$$\varphi_1 (x, y_1, y_2, \ldots, y'_1, y'_2, \ldots) = 0,$$
$$\varphi_2 (x, y_1, y_2, \ldots, y'_1, y'_2, \ldots) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

znaleść funkcye nieznane $y_1, y_2, \ldots$ w ten sposób, aby stało się zadość tym równaniom różniczkowym i aby całka była maximum lub minimum. W szczególnych przypadkach niektóre z funkcyj niewiadomych mogą nie występować wyraźnie pod znakiem F, a natomiast występować w równaniach różniczkowych. Mogą też w przypadkach szczególnych niektóre z funkcyj φ nie zawierać pochodnych funkcyj niewiadomych i być tylko związkami skończonemi pomiędzy samemi funkcyami.

Łatwo pokazać, że pod tą postacią przedstawić można dwa inne wyżej wysłowione zagadnienia, t. j. zagadnienie na maximum i minimum bezwzględne oraz zagadnienie, w którem dane całki określone mają wartości stałe.

Zagadnienie na maximum i minimum bezwzględne, gdy funkcya F zawiera pochodne funkcyj niewiadomych rzędu wyższego nad pierwszy, można oczywiście wprost przedstawić pod postacią zagadnienia Lagrange'a; dość bowiem wykonać też same podstawienia:

$$y' = y_1, \; y'' = y'_1 = y_2, \ldots,$$

które uskuteczniono w przypadku ogólnym.

Przejdźmy do zagadnień izoperymetrycznych. Całka J ma być maximum lub minimum, wtedy gdy inne całki $J_1, J_2, \ldots$ mają wartości oznaczone Zagadnienie to sprowadza się do zagadnienia Lagrange'a za pomocą następującego postępowania, które zawdzięczamy też Lagrange'owi.

Niechaj będzie:

$$J_1 = \int_{x'}^{x''} F_1 \, dx, \ldots\ldots;$$

wprowadźmy nową funkcyę niewiadomą, określoną za pomocą związku:

$$y_1 = \int_{x'}^{x} F_1 \, dx,$$

z warunkiem, aby dla $x = x'$ była ona zerem i aby dla $x = x''$ miała wartość oznaczoną J_1. Funkcyę y_1 określa także równanie różniczkowe $y'_1 = F$, a zatem zadanie sprowadza się do następującego: Uczynić całkę J maximum lub minimum, gdy funkcye $y, z, \ldots$ czynić mają zadość warunkom, danym przez równania różniczkowe $y'_1 = F_1, \; y'_2 = F_2, \; \ldots,$ w których, prócz funkcyj $y, z, \ldots$ występują jeszcze inne funkcye $y_1, y_2, \ldots$ z wartościami, ustalonemi przez warunki dla granic. Tym sposobem dochodzimy do spacyalnego zagadnienia typu Lagrange'a.

§ 11.

Zagadnienie ogólne Mayera.

Nazwiemy zagadnieniem Mayera zagadnienie podane i rozwiązane przez Adolfa Mayera za pomocą metody podobnej do metody Lagrange'a (Mayer: „Die Lagrange'sche Multiplicationsmethode und das allgemeinste Problem der Variationsrechnung bei einer unabhängigen Variabeln", Leipz. Ber. 1878 i 4 marca 1895). Zagadnienie to może być uważane za bezpośrednie uogólnienie zagadnienia Lagrange'a.

W zagadnieniu Lagrange'a połóżmy:

$$y_{n+1} = \int_{x'}^{x} F\,dx.$$

Funkcya y_{n+1} zmiennej x jest określona przez warunki, by była zerem dla $x = x'$, by czyniła zadość równaniu różniczkowemu:

$$y_{n+1}' = F$$

i aby nadto stawała się maximum i minimum dla $x = x''$.

Uogólnienie przedstawia się odrazu w ten sposób:

Wyobraźmy sobie pewną liczbę równań różniczkowych:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_m = 0,$$

zawierających zmienną x oraz funkcye niewiadome:

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, \qquad (m < n).$$

Wartości pierwszych n z tych funkcyj są dane w punktach x', x'', wartość funkcyi y_{n+1} jest dana tylko dla punktu x'. Wyznaczyć te funkcye tak, aby czyniły zadość danym równaniom różniczkowym i warunkom dla granic i aby funkcya y_{n+1} stawała się maximum lub minimum dla $x = x''$.

Jeżeli równanie różniczkowe, któremu czyni zadość funkcya y_{n+1}, jest formy specyalnej $y'_{n+1} = F$, gdzie F nie zawiera już funkcyi y_{n+1}, i gdy wartość na y_{n+1} dla $x = x'$ jest zerem, wtedy powracamy do zagadnienia Lagrange'a.

W drugiej z prac wyżej cytowanych autor rozciąga na przypadek ogólniejszy metodę mnożników Lagrange'a.

Podobne rozważanie przeprowadził później Jermakow w „Wiadomościach Uniw. kijowskiego" (patrz Fortschr. d. Math., t. XXII, 1890, str. 381).

§ 12.

Rozwiązanie zagadnienia Lagrange'a. Metoda mnożników.

Zagadnienie Lagrange'a rozwiązuje się za pomocą metody mnożników, obmyślonej a potem uzasadnionej przez samego Lagrange'a („Fonctions analytiques", str. 202, „Calcul des fonctions", str. 460). Można tę metodę uważać za rozwinięcie metody izoperymetrycznej Eulera.

Bertrand dał dowód prawidła Eulera (Liouville, VII, str. 55, 1842), a później Du Bois-Reymond (Math. Ann., XV) dał dwa dowody. Następnie Scheeffer (Math. Ann., XXV, str. 557: „Maxima und Minima der einfachen Integrale) zajmował się zagadnieniem, które nazwał izoperymetrycznem, odnoszącem się do powierzchni; w tym przypadku podane są całki, mające zachowywać wartości oznaczone, pomiędzy funkcyami niewiadomemi zaś zachodzą związki skończone. Mayer zajmował sie badaniem tego pytania w przypadku ogólnym („Begründung der Lagrangeschen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung", Math. Ann., XXVI, str. 74, także Leipz. Ber., 1885). W ostatnich czasach podjął na nowo to pytanie Turksma („Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung durch Vergleich derselben mit einer neuen Methode i t. d.", Math. Ann., XLVII, str. 33) i podał inną metodę rozwiązania, która prowadzi do tych samych równań, co metoda Lagrange'a; wynika stąd dowód pośredni tej ostatniej. Nadto za pomocą swojej metody mógł autor dowieść, że nie istnieją inne rozwiązania prócz tych, które daje metoda Lagrange'a, co nie wynikało z samych badań Mayera.

Podamy rozwiązanie zagadnienia Lagrange'a pod jego postacią najogólniejszą. Jak powiedziano już w paragrafie poprzedzającym, można zawsze przyjąć, że w danych zagadnienia występują tylko pochodne pierwsze funkcyj szukanych.

Pomiędzy równaniami warunkowemi rozróżnimy równania skończone od równań różniczkowych; niechaj pierwszych będzie m' drugich m' i niechaj będzie n funkcyj niewiadomych $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Dana jest, jak zwykle całka:

$$J = \int_{x'}^{x''} F\,dx,$$

która ma być maximum lub minimum;

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ \ldots, \ \varphi_{m'} = 0,$$

są równania warunkowe różniczkowe i

$$\psi_1 = 0, \ \psi_2 = 0, \ \ldots, \ \psi_{m''} = 0$$

równania warunkowe skończone. Oznaczmy przez:

$$\lambda_1(x), \ldots, \lambda_{m'}(x), \ \mu_1(x), \ldots, \mu_{m''}(x),$$

$m' + m''$ funkcyj nieoznaczonych i utwórzmy wyrażenie:

$$J = \int_{x'}^{x''} [F + \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_{m'} \varphi_{m'} + \mu_1 \psi_1 + \ldots + \mu_{m''} \psi_{m''}]\, dx$$

$$= \int_{x'}^{x''} F_1\, dx\,.$$

Jeżeli φ i ψ są zerami dla każdego x, to całka dana będzie maximum lub minimum, gdy będzie taką całka poprzednia, i odwrotnie. Przyrównajmy do zera waryacyę tej całki; można ją będzie, jak zwykle, napisać w postaci:

$$\Omega + \int_{x'}^{x''} \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F_1}{\partial y'_1}\right)\delta y_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F_1}{\partial y'_2}\right)\delta y_2 + \ldots\right] dx,$$

gdzie Ω jest częścią już zcałkowaną, której kształt znamy. W naszym przypadku (patrz § 3) jest:

$$\Omega = \left[F_1\, \delta x + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\, \delta y_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\, \delta y_2 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\, \delta y_n\right]_{x'}^{x''}.$$

Wyobraźmy sobie, że mamy znaleść maximum lub minimum bezwzględne całki F_1; w tym celu trzeba będzie przyrównać do zera spółczynniki przy $\delta y_1, \delta y_2, \ldots$ w funkcyi, znajdującej się pod znakiem całkowym (co do poprawności tego postępowania istnieje wyżej wspomniane ściślejsze uzasadnienie A. Mayera); będziemy mieli zatem n równań:

$$(a) \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F_1}{\partial y'_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

które wraz z $m' + m''$ równaniami danemi tworzą $n + m' + m''$ równań do wyznaczenia tyluż funkcyj niewiadomych y, λ, μ.

Liczba $m' + m''$ powinna być mniejsza od m, gdyż w przeciwnym razie warunki dane wystarczałyby już do wyznaczenia funkcyj y, prócz stałych, lub byłoby ich więcej niż potrzeba.

Pierwsze $m' + m''$ ze związków (a) można uważać za warunki do wyznaczenia funkcyj λ, μ; można więc powiedzieć: dobieramy funkcye dowolne λ i μ tak, aby stało się zadość pierwszym $m' + m''$ ze związków (a). Całe pytanie sprowadza się tedy do okazania, że i pozostałe ze związków (a) spełniają się. Rozumowanie mniej ścisłe jest następujące:

Ponieważ w wyrażeniu waryacyi δJ nie występują (pod znakiem całkowym) wyrazy o czynnikach $\delta y_1, \ldots, \delta y_{m'+m''}$, a tylko wyrazy o czynnikach $\delta y_{m'+m''+1}, \ldots, \delta y_n$ i ponieważ możemy uważać, że dane równania różniczkowe dają $y_1, \ldots, y_{m'+m''}$ w funkcyi pozostałych y, więc jeżeli waryacye pierwszych funkcyj y są połączone z waryacyami pozostałych, to waryacye tych pozostałych są od siebie niezależne i możemy przyrównać do zera spółczynniki przy waryacyach $\delta y_{m'+m''+1}, \ldots, \delta y_n$. (Patrz np. Jordan, Cours d'analyse, III, str. 479). Rozumowanie to nie przedstawia pożądanej ścisłości dlatego, że nie możemy a priori rozważać z całą pewnością możliwych związków, jakie dane równania różniczkowe ustanawiają pomiędzy funkcyami szukanemi. (Patrz co do tego Turksma, Math. Ann., XLVII, str. 35). Gdyby się miało do czynienia tylko z równaniami skończonemi, to ta metoda dowodzenia mogłaby nazwać się ścisłą. Zapełnienie tego właśnie braku jest przedmiotem cytowanych prac A. Mayera; nie możemy tu wszakże wchodzić w szczegóły jego rozważań.

Dajmy, że wartości funkcyj $y_1, y_2, \ldots, y_n$ na granicach są określone i że same granice są też określone. Te wartości na granicach powinny być oczywiście dane tak, aby równania skończone $\psi_1 = 0, \ldots, \psi_{m''} = 0$ spełniały się same przez się; wtedy ilość Ω będzie zerem, gdyż $\delta y_1 = \ldots = \delta y_n = 0$. Podamy kilka uwag o wyznaczaniu stałych, jakie wynikają z całkowania. Równania (a) są rzędu drugiego względem funkcyj y i rzędu pierwszego względem funkcyj λ i μ. Zamiast równań $\varphi_h = 0$, $\psi_j = 0$ weźmy wynikające z nich równania:

$$(b) \qquad \frac{d\varphi_h}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\psi_j}{dx^2} = 0, \ \ldots$$

które są rzędu drugiego względem ilości y. Równania (a) po rozwinięciu i uwidocznieniu wyrazów, w których zachodzą $y'_1, \ldots, y''_n, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_{m'}, \mu_1, \ldots, \mu_{m''}$, można napisać tak:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_1} y''_1 + \ldots + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y'_i \partial y'_n} y''_n + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_i} \lambda'_1 + \ldots$$
$$+ \frac{\partial \varphi_{m'}}{\partial y'_i} \lambda'_{m'} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y_i} \mu_1 - \ldots - \frac{\partial \psi_{m''}}{\partial y_i} \mu_{m''} + S = 0,$$

gdzie i zmienia się od 1 do n i gdzie S przedstawia ogół wyrazów, nie zawierających ani y'', ani λ'_h, ani wreszcie μ_j.

Równania (b) możemy tak napisać:

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial y'_1} y''_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_h}{\partial y'_n} y''_n + T = 0,$$
$$\frac{\partial \psi_j}{\partial y_1} y''_1 + \ldots + \frac{\partial \psi_j}{\partial y_n} y''_n + R = 0,$$

gdzie T, R są wyrażeniami, nie zawierającemi żadnego y''_i.

Razem mieć będziemy $n + m' + m''$ równań liniowych względem ilości y''_i, λ'_h, μ_j, których jest też razem $n + m' + m''$. Aby te wszystkie równania liniowe dały się rozwiązać względem niewiadomych, trzeba, aby był różnym od zera wyznacznik:

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2_1}, \ldots, \frac{\partial^2 F}{\partial y'_1 \partial y'_n}, & \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{m'}}{\partial y'_1}, & -\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}, \ldots, -\frac{\partial \psi_{m''}}{\partial y_1} \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y'_n \partial y'_1}, \ldots, \frac{\partial^2 F_1}{\partial y'^2_n}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_n}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{m'}}{\partial y'_n}, & -\frac{\partial \psi_1}{\partial y_n}, \ldots, -\frac{\partial \psi_{m''}}{\partial y_n} \\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_n}, & 0, \ldots, 0, & 0, \quad 0 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial \varphi_{m'}}{\partial y'_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{m'}}{\partial y'_n}, & 0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \\
\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n}, & 0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial \psi_{m''}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \psi_{m''}}{\partial y_n}, & 0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0
\end{vmatrix}$$

Gdyby $m' + m''$ było większe od n, ten wyznacznik byłby tożsamościowo zerem; dla innego powodu, jak wiemy, przypadek $m' + m'' > n$ należy wyłączyć. Jeżeli ten wyznacznik jest od zera różnym, wtedy możemy rozwiązać równania poprzedzające względem ilości y''_i, λ'_h, μ_j.

Po za równaniami, dającemi bezpośrednio wartości funkcyj μ_j, rozważmy pozostałe równania różniczkowe w liczbie $n + m'$. Wprowadźmy nowe funkcye niewiadome $z_1, \ldots, z_n$, określone za pomocą równań:

$$z_k = \frac{dy_k}{dx};$$

będzie wtedy:

$$y''_k = \frac{dz_k}{dx}$$

i otrzymamy układ $2n + m'$ równań różniczkowych jednoczesnych rzędu pierwszego, sprowadzonych do postaci normalnej, t. j. rozwiązanych względem pierwszych pochodnych wszystkich funkcyj nieznanych, któremi są w naszym przypadku funkcye z, y i λ. Całkując, wprowadzamy $2n + m'$ stałych; z tych $2n$ stałych można wyznaczyć, gdy są ustalone wartości funkcyj y na granicach x', x''; pozostałe stałe wyznaczymy z warunku, że funkcye y winny czynić zadość m' równaniom $\varphi = 0$. Należy tu zauważyć, że posługiwaliśmy się dotąd warunkami $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, które dają właściwie $\varphi =$ stałej, nie zaś $= 0$. Znalazłszy funkcye y i podstawiwszy je w φ, będziemy mieli agregat samych stałych (x powinno zniknąć), a przyrównanie do zera takiej funkcyi ilości stałych stanowi warunek, któremu te stałe są poddane. Wszystkie warunki $\psi = 0$ powinny być tożsamościowo spełnione, gdyż, jak powiedziano już, wartości na granicach mają być tak dobrane, aby stało się warunkom tym zadość.

Jeżeli powyższy wyznacznik jest zerem, to układ równań różniczkowych może być sprowadzony do układu niższego rzędu; w całkach tego układu zawiera się mniej stałych. Stałe te nie są wtedy wystarczającemi do spełnienia wszystkich danych zagadnienia i dlatego wtedy nie będzie znikała wogóle pierwsza waryacya całki danej. (Patrz Jordan, Cours d'analyse, III, str. 566).

Co do rozważań powyższych nad stałemi porówn. Mayer, Crelle, tom LIX, str. 240; Scheeffer, Math. Ann., XXV, str. 559.

Zauważmy jeszcze, że redukcya powyższa, oparta w zasadzie na tem, by w danych zagadnienia występowały tylko pochodne pierwsze funkcyj nieznanych, jakkolwiek użyteczna dla uproszczenia wykładu metody rozwiązania, nie jest wszakże konieczną. Tęż samą metodę stosować możnaby i wtedy, gdyby zachodziły pochodne rzędu wyższego i doszłoby się wtedy do analogicznych rezultatów.

§ 13.

Przypadek szczególny zagadnienia izoperymetrycznego

Powiedzieliśmy już, że zagadnienie izoperymetryczne może być przekształcone w ten sposób, że staje się przypadkiem szczególnym zagadnienia Lagrange'a. Stąd jest oczywistem, że ustaliwszy z całą ścisłością metodę rozwiązania ostatniego zagadnienia, potrafimy rozwiązać i pierwsze.

Dajmy, że szukamy maximum i minimum całki J, tak, aby równocześnie całki $J_1, J_2, \ldots, J_n$ zachowywały wartości określone. Niechaj będzie:

$$J_k = \int_{x'}^{x''} F_k \, dx \, ;$$

wprowadźmy m funkcyj, określonych za pomocą wzoru:

$$y_{n+k} = \int_{x'}^{x} F_k \, dx,$$

lub

$$y'_{n+k} = F_k,$$

pod warunkiem, aby te funkcye stawały się zerami dla $x = x'$ i miały wartości oznaczone $J_1, J_2, \ldots, J_m$ dla $x = x''$. Mamy zatem przypadek szczególny zagadnienia Lagrange'a, w którym równania różniczkowe są postaci:

$$y'_{n+k} - F_k = 0,$$

gdzie funkcye F_k nie zawierają w sobie ani funkcyj $y_{n+1}, \ldots, y_{n+m}$ ani ich pochodnych.

Stosując metodę ogólną, połóżmy:

$$\Phi = F + \sum_{k=1}^{m} \lambda'_k (F_k - y_{n+k})$$

i napiszmy następujące równania rożniczkowe:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_n} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_n} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_{n+1}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_{n+1}} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_{n+m}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_{n+m}} = 0$$

Ponieważ żadna z funkcyj F_k nie zawiera ani y_{n+k}, ani y'_{n+k}, przeto m ostatnich równań sprowadzić się daje wprost do postaci:

$$\frac{d}{dx}\lambda_1 = 0, \; \frac{d}{dx}\lambda_2 = 0, \; \ldots, \; \frac{d}{dx}\lambda_m = 0,$$

skąd $\lambda_1 = \text{const.}$, $\lambda_2 = \text{const.}$, $\lambda_m = \text{const.}$

Pierwsze n równań sprowadza się do postaci:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F_k}{\partial y'_i}\right) = 0,$$

którą można w następujący sposób rozumieć:

Dajmy, że mamy całkę:

$$J = \int_{x'}^{x''} (F + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k F_k)\, dx,$$

w której λ_k są stałemi i że chcemy całkę tę uczynić maximum lub minimum. Równaniami różniczkowemi, którym funkcye szukane mają być poddane, będą powyższe n równań, jak wiadomo z teoryi ogólnej. Możemy więc twierdzić, że zagadnienie ogólne izoperymetryczne rozwiązuje się przez uczynienie całki J maximum lub minimum. Stałe λ w liczbie m wyznaczymy z warunku, że całki $J_1, \ldots, J_m$ powinny mieć wartości oznaczone.

Scisłość tego rezultatu, do którego doszedł już był Euler, uważana była przez czas długi za aksiomatyczną; lecz widzimy konieczność uzasadnienia go w sposób bardziej ścisły. Wprowadziliśmy tę metodę, rozważając zagadnienie izoperymetryczne jako przypadek szczególny zagadnienia Lagrange'a; ścisłość zaś metody rozwiązania tego ogólnego zagadnienia była, jak powiedziano na swojem miejscu, uzasadniona przez Mayera.

Jedno z pierwszych badań nad dokładnością Eulerowskiego rozwiązania zagadnienia izoperymetrycznego zawdzięczamy Bertrandowi (Journal de Liouville, t. VII, str. 55, 1842); potem pytaniem tem zajmowali się Weierstrass.

(Wykłady z r. 1877), Du Bois-Reymond (Math. Ann., t. XV, str. 310 i 573) i Scheeffer (tamże, t. XXV, str. 583)

Du Bois-Reymond w cytowanej pracy dał dwa dowody; pierwszy z nich polega na zastosowaniu pomysłu Reiffa, w rozprawie: „Ueber den Einfluss der Capillarkräfte auf die Form der Oberfläche einer bewegten Flüssigkeit", Tybinga, 1879; drugi dowód jest powtórzony w „Kursie analizy" Jordana.

Podajemy niżej te dowodzenia.

---

§ 14.

Dowód prawidła izoperymetrycznego, podany przez Du Bois-Reymonda.

Całka

$$J = \int_{x'}^{x''} F\,dx,$$

ma się stać maximum lub minimum i jednocześnie całki $J_1, \ldots, J_m$, gdzie:

$$J_k = \int_{x'}^{x''} F_k\,dx,$$

mają mieć wartości stałe.

Ponieważ waryacye wszystkich tych całek powinny być zerem, więc (w założeniu, że wartości wszystkich funkcyj szukanych są dla granic stałemi, że zatem są zerem i waryacye dla tychże granic) będzie:

$$\delta J = \int \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_1'} \right) \delta y_1 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial y_n} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_n} \right) \delta y_n \right] dx = 0,$$

$$\delta J_k = \int \left[\left(\frac{\partial F_k}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F_k}{\partial y'_1} \right) \delta y_1 + \dots + \left(\frac{\partial F_k}{\partial y_n} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F_k}{\partial y'_n} \right) \delta y_n \right] dx = 0.$$

Waryacye $\delta y_1, \dots, \delta y_n$ w pierwszej całce nie są od siebie niezależne, gdy są związane m warunkami $\delta J_k = 0$. Połóżmy:

$$\delta y_1 = \delta_0 y_1 + \varrho_1 \delta_1 y_1 + \dots + \varrho_m \delta_m y_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\delta y_n = \delta_0 y_n + \varrho_1 \delta_1 y_n + \dots + \varrho_m \delta_m y_n,$$

gdzie ϱ są stałemi, symbole zaś $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_m$ $m+1$ układami waryacyj funkcyj y. Bez względu na to, jakim jest układ waryacyj $\delta y_1, \dots, \delta y_n$, poddanych m warunkom $\delta J_k = 0$, można wyznaczyć stałe ϱ tak, aby stało się zadość poprzednim związkom i aby waryacye $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_m$ były dowolnemi. Innemi słowy, można okazać, że biorąc waryacye $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_m$ zupełnie dowolnie, można zawsze wyznaczyć stałe ϱ tak, aby $\delta y_1, \dots, \delta y_n$ były związane warunkami $\delta J_k = 0$. W tym celu wystarczy uskutecznić podstawienie; po redukcyi otrzymujemy związek:

$$\delta_0 J_k + \varrho_1 \delta_1 J_k + \dots + \varrho_m \delta_m J_k = 0,$$

który dla $k = 1, 2, \dots, m$ przedstawia układ m równań liniowych niejednorodnych ze stałemi ϱ. Waryacye $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ będą poddane tylko jednemu warunkowi, aby wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} \delta_1 J_1, & \dots, & \delta_m J_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_1 J_m, & \dots, & \delta_m J_m \end{vmatrix},$$

nie był zerem; waryacya zaś δ_0 może być zupełnie dowolną.

Podstawiwszy w δJ wartości waryacyj $\delta y_1, \dots, \delta y_n$, a potem za $\varrho_1, \dots, \varrho_m$ wartości tych stałych, znajdziemy taki sam rezultat, jaki otrzymujemy, rugując ilości ϱ pomiędzy równaniem:

$$\delta_0 J + \varrho_1 \delta_1 J + \dots + \varrho_m \delta_m J = 0$$

i równaniami:

$$\delta_0 J_k + \varrho_1 \delta_1 J_k + \ldots + \varrho_m \delta_m J_k = 0.$$

Dochodzimy więc do rezultatu:

$$\delta_0 J + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \delta_0 J_1 + \ldots + \frac{\lambda_m}{\lambda_0} \delta_0 J_m = 0,$$

gdzie λ są minorami macierzy:

$$\left\| \begin{matrix} \delta_1 J, & \ldots, & \delta_m J \\ \delta_1 J_1, & \ldots, & \delta_m J_1 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \delta_1 J_m, & \ldots, & \delta_m J_m \end{matrix} \right\|,$$

λ_0 zaś jest wyznacznikiem, który otrzymujemy z niej po zniesieniu pierwszego wiersza.

Dobierając odpowiednio waryacye $\delta_1, \ldots, \delta_m$, możemy sprawić, że stosunki $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \ldots \frac{\lambda_m}{\lambda_0}$ będą miały wartości dowolne. Mamy więc wynik następujący:

Aby rozwiązać zagadnienie, należy przyrównać do zera waryacyę:

$$\delta_0 (J + \mu_1 J_1 + \ldots + \mu_m J_m),$$

gdzie δ_0 jest symbolem waryacyi zupełnie dowolnej; waryacye $\delta_0 y_1, \delta_0 y_2, \ldots, \delta_0 y_n$ należy tedy uważać za zupełnie dowolne i niezależne od siebie; μ są stałemi dowolnemi, określonemi za pomocą jakichkolwiek warunków, np. w zagadnieniu, którem nas obecnie zajmuje za pomocą warunków, wyrażających, że całki J_k mają wartości przepisane. W ten sposób dochodzimy do znanego nam już prawidła izoperymetrycznego.

§ 15.

O możliwości znikania pierwszej waryacyi całki.

W § 12 podaliśmy kryteryum możliwości znikania pierwszej waryacyi całki, a w zagadnieniu ogólniejszem, t. j. w zagadnieniu Lagrange'a, do którego, jak wiemy, dają się sprowadzić wszystkie inne zagadnienia, traktujące o maximum lub minimum całki określonej i znaleźliśmy, że pewien wyznacznik powinien być różnym od zera. W razie przeciwnym liczba stałych jest wogóle niewystarczająca dla zadość uczynienia wszystkim warunkom zagadnienia. Zastosujmy ten rezultat ogólny do główniejszych przypadków szczególnych.

Przyjmijmy najprzód, że idzie tu o zagadnienie na maximum lub minimum bezwzględne; że mamy n funkcyj nieznanych; że wreszcie w funkcyi F występują tylko pochodne pierwsze.

Wtedy kryteryum możności znikania pierwszej waryacyi możemy otrzymać wprost z kryteryum, podanego w § 12, kładąc m' i m'' równemi zeru. Zauważmy, że w tym przypadku F_1 jest równe F, a więc wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2}, \dots, \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'_1\, \partial y'_n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_n'\, \partial y_1'}, \dots, \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_n'^2} \end{vmatrix},$$

powinien być różnym od zera. Wyznacznik ten jest hessyanem funkcyi F, uważanej za funkcyę ilości $y_1', y_2', \dots, y_n'$, a zatem:

Jeżeli idzie o wyznaczenie maximum lub minimum bezwzględnego i jeżeli funkcya podcałkowa nie zawiera pochodnych nieznanych funkcyj rzędu wyższego nad pierwszy, wtedy, aby zagadnienie było wogóle rozwiązalnem, jest koniecznem, by hessyan funkcyi F, uważanej za funkcyę pierwszych pochodnych, był różnym od zera.

Jeżeli zachodzi tylko jedna niewiadoma y, to warunek tén przechodzi wprost na następujący: pochodna druga funkcyi F względem y' powinna być różna od zera.

Weźmy teraz przypadek ogólniejszy, w którym idzie też o maximum lub minimum bezwzględne, lecz w funkcyi F występuje n funkcyj niewiadomych z ich pochodnemi aż do pochodnych rzędu r-tego włącznie.

Zastosujmy kryteryum ogólne § 12-go. Zredukujmy najprzód wzory w ten sposób, aby występowały tylko pochodne pierwsze; t j. wprowadźmy nowe funkcye niewiadome:

$$y_{1,1} = y_1', \; y_{1,2} = y_1'', \; \ldots, \; y_{1,r-1} = y_1^{(r-1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{n,1} = y'_n, \; y_{n,2} = y''_n, \; \ldots, \; y_{n,r-1} = y_n^{(r-1)}.$$

Funkcya F zależeć będzie od zmiennych:

$$y_1, \ldots, y_n, y_{1,1}, \ldots, y_{1,r-1}, y'_{1,r-1}, \ldots, y'_{n,r-1},$$

a zatem zachodzić w niej będą pochodne tylko n funkcyj $y_{1,r-1}, \ldots, y_{n,r-1}$. Równaniami różniczkowemi, które należy dołączyć do danych zagadnienia, są:

$$y'_1 - y_{11} = 0, \; y'_{11} - y_{12} = 0, \ldots, y'_{1,r-2} - y_{1,r-1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y'_n - y_{n,1} = 0, \; y'_{n,1} - y_{n,2} = 0, \ldots, y'_{n,r-2} - y_{n,r-1} = 0;$$

liczba tych równań, wynosi $n(r-1)$, co połóżmy równe m. Oznaczmy przez $\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_{m'}$ pierwsze strony tych równań różniczkowych i utwórzmy wyznacznik według wzoru w § 12.

Z powodu szczególnego kształtu funkcyj F i φ pewna część elementów wyznacznika zniknie. Ponieważ w wyrażeniu:

$$F_1 = F + \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_{m'} \varphi_{m'},$$

funkcye φ zawierają w sobie pochodne pierwsze funkcyj y co najwyżej w stopniu pierwszym, przeto pochodne drugie funkcyi F_1 względem tych pochodnych pierwszych będą równe odpowiednio pochodnym drugim funkcyi F. Stąd wynika, że z tych pochodnych drugich będą różnemi od zera tylko pochodne drugie zachodzące w macierzy:

$$\left\| \begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2_{1,r-1}}, \ldots, \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'_{1,r-1}\, \partial y'_{n,r-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'_{n,r-1}\, \partial y'_{1,r-1}}, \ldots, \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2_{n,r-1}} \end{array} \right\|.$$

Co do pochodnych funkcyj φ względem ilości y', to jest jasnem, że są one równe zeru albo jedności. Nadto, ponieważ w funkcyach φ nie zawiera się ilość, $y'_{k,r-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, a więc elementy, zawarte w tych samych wierszach i kolumnach z elementami poprzedniej macierzy, są wszystkie zerami. Ponieważ nie ma więc dwu funkcyj φ, zawierających tę samę pochodnę pierwszą, przeto elementy równe 1 są rozmieszczone w ten sposób, że żadne dwa z nich nie znajdują się w jednym wierszu lub w jednej kolumnie. Z drugiej strony, ponieważ w funkcyach φ występują pochodne pierwsze wszystkich funkcyj, prócz tych, których drugi skaźnik jest $r-1$, przeto te wartości równe 1 są rozmieszczone w ten sposób, że jest ich po jednym w każdym wierszu i po jednym w każdej kolumnie, z wyjątkiem wierszy i kolumn, do których należą elementy powyższej macierzy. Wszystkie inne elementy są zerami. Ostatecznie widzimy, że wyznacznik sprowadza się do iloczynu samych jedności przez powyższą macierz, która ze względu na równość $y'_{k,r-1} = y_k^{(r)}$ przekształca się na wyznacznik:

$$\left|\begin{array}{c} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^{(r)2}}, \ldots, \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^{(r)} \partial y_n^{(r)}} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_n^{(r)} \partial y_1^{(r)}}, \ldots, \frac{\partial^2 F}{\partial y_n^{(r)2}} \end{array}\right| .$$

Jest to hessyan funkcyi F, uważanej za funkcyę pochodnych r-tego rzędu.

Do tego rezultatu możnaby dojść prościej, gdybyśmy rozważali układ równań różniczkowych, do których prowadzi warunek znikania pierwszej waryacyi całki i wyrazili za pomocą teoryi układów równań różniczkowych jednoczesnych warunek, aby całka tego układu zawierała $2nr$ stałych dowolnych, t. j. że wartości funkcyj $y_1, \ldots, y_n$ i ich pochodnych aż do rzędu $(r-1)$-go o ile zachodzą, mogą być dowolnie obrane. Mamy tedy:

Aby znikała waryacya pierwsza całki określonej, gdy funkcya podcałkowa F zawiera pochodne n funkcyj niewiadomych aż do pochodnej rzędu r-tego, jest koniecznem, by hessyan funkcyi F, uważanej za funkcyę pochodnych r-tego rzędu, był różnym od zera. (Lipschitz w dzienniku Crellego, t. LXIX, str. 28).

W przypadku jednej funkcyi, t. j. gdy $n = 1$ otrzymujemy stąd warunek prosty, że pochodna druga funkcyi F względem pochodnej $y^{(r)}$ powinna być zerem. Warunek ten znaleźliśmy już w § 7. (Jacobi, Dziennik Crellego, t. XVIII, str. 68).

Przechodzimy wreszcie do przypadku zagadnienia izoperymetrycznego.

Przyjmijmy te same znakowania co w § 13. Połóżmy:

$$\varphi_1 = F_1 - y'_{n+1}, \ldots, \varphi_m = F_m - y'_{n+m};$$

i

$$\Phi = F + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_m F_m .$$

Łatwo poznać, że wyznacznik, o który nam idzie, przybiera postać:

$$
\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|}
 & & & & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{0,\ \ldots\ldots,\ 0}}^{m}} & & & \\
 & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2_1}, & \ldots, & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y'_1\,\partial y'_n} & 0, & \ldots, & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial y'_1}, & \ldots, & \frac{\partial F_m}{\partial y'_1} \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y'_n\,\partial y'_1}, & \ldots, & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2_n} & 0, & \ldots, & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial y'_n}, & \ldots, & \frac{\partial F_m}{\partial y'_n} \\
\hline
 & 0, & \ldots, & 0 & 0, & \ldots, & 0 & -1, & \ldots, & 0 \\
m\left\{\vphantom{\ldots}\right. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & 0, & \ldots & 0 & 0, & \ldots, & 0 & 0, & \ldots, & -1 \\
\hline
 & \frac{\partial F_1}{\partial y'_1}, & \ldots, & \frac{\partial F_1}{\partial y'_n} & -1, & \ldots, & 0 & 0, & \ldots, & 0 \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & \frac{\partial F_m}{\partial y'_1}, & \ldots, & \frac{\partial F_m}{\partial y'_n} & 0, & \ldots, & -1 & 0, & \ldots, & 0 \\
\end{array}
$$

Wartość jego, nie uwzględniając znaku, jest równa wartości wyznacznika:

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2_1}, & \ldots, & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y'_1\,\partial y'_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial y'_n\,\partial y'_1}, & \ldots, & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2_n}
\end{vmatrix},
$$

który jest hessyanem funkcyi Φ, uważanej za funkcyę pochodnych y'. Mamy tedy:

Aby znikała pochodna pierwsza całki w ogólnem zadaniu izoperymetrycznem, jest koniecznem, by hessyan funkcyi:

$$\Phi = F + \sum_{1}^{m} \lambda_i F_i,$$

był różnym od zera; λ są stałe, funkcye zaś F_i są funkcyami podcałkowemi całek danych.

---

§ 16.

Waryacya druga całki określonej. Wiadomości wstępne. Bibliografia zagadnienia.

Gdy nawet pierwsza waryacya całki jest zerem, nie można jeszcze twierdzić, że rozwiązaliśmy zadanie na maximum lub minimum, gdyż znikanie tej waryacyi jest tylko warunkiem koniecznym lecz niedostatecznym istnienia maximum lub minimum.

Komu znane są zasady rachunku różniczkowego i teorya maximów i minimów funkcyj jednej lub wielu zmiennych, tego ta rzecz nie zdziwi, gdyż i w tej teoryi trzeba, jak wiadomo, rozważać pochodną drugą lub wogóle pochodne rzędu parzystego, stosownie do okoliczności. Rozważanie to nie tylko ustala faktyczne istnienie maximum lub minimum, lecz ustanawia też kryteryum, na mocy którego można a priori rozpoznać, czy zachodzi maximum, czy też minimum.

W rachunku waryacyjnym również należy zająć się rozważaniem waryacyi drugiej.

Jeżeli Φ, jak zwykle, jest funkcyą ilości $x, y, y', \ldots$ i jeżeli zmiennym $y, y', \ldots$ nadamy przyrosty $\delta y, \delta y', \ldots,$ to przyrost, jakiego doznaje Φ, jest ilością nieskończenie małą (przy założeniu zwykłych warunków ciągłoś ci, różniczkowalności i t. p.) której część rzędu najniższego jest waryacyą pierwszą; ogół wyrazów rzędu najniższego w części pozostałej stanowi waryacyę drugą, którą oznaczać będziemy przez $\delta^2\Phi$.

Według zasad rachunku różniczkowego tą waryacyą drugą jest wtedy:

$$\delta^2\Phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial y'}\delta y\,\delta y' + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2}\delta y'^2 + \ldots\right),$$

jeżeli założymy, że x jest niezmienne.

Jest widocznem, że możnaby otrzymać $\delta^2\Phi$ z $\delta\Phi$, stosując do tej ostatniej waryacyi jeszcze raz to samo działanie, za pomocą którego otrzymuje się waryacya pierwsza, w założeniu, że x, a więc że i waryacye $\delta y, \delta y', \ldots,$ jako funkcye zmiennej x, są niezmienne.

Jeżeli funkcya Φ ma być maximum lub minimum, to jej przyrost nieskończenie mały powinien być stałego znaku, bez względu na to, jakiemi są nieskończenie małe waryacye $\delta y, \delta y', \ldots$; a więc jest koniecznem, aby ostatnia z kolejnych waryacyj funkcyi Φ, nie stawających się zerem, była rzędu parzystego. W przeciwnym bowiem razie, przy zmianie znaków ilości $\delta y, \delta y', \ldots,$ zmieni się znak przyrostu funkcyi Φ. Nadto, jeżeli założymy, że waryacya druga jest różna od zera, to dla tego samego powodu powinna być ona koniecznie stałego znaku; i mianowicie dodatniego dla minimum, ujemnego dla maximum.

Niechaj będzie całka określona:

$$I = \int_{x'}^{x''} F(x, y, y', \ldots)\, dx.$$

Wiemy, że w badaniu zagadnienia na maximum i minimum. możemy zawsze ograniczyć się najprzód na rozważaniu przypadku, w którym granice x', x'' są stałemi, a wartości $y, y', \ldots$ na granicach przepisanemi. Dajmy, że spełniają się warunki, aby waryacya druga całki była równa całce drugiej waryacyi funkcyi podcałkowej (warunki te spełniają się dla funkcyj zwyczajnych; patrz § 2); wtedy druga waryacya całki I będzie:

$$\delta^2 I = \int\limits_{x'}^{x''} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \, \partial y'} \delta y \, \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \delta y'^2 + \ldots \right) dx.$$

Pod znakiem całki znajduje się tu wyrażenie stopnia 2-go względem $\delta y, \delta y', \ldots$, i jeżeli funkcya F zawiera więcej niewiadomych $y_1, y_2, \ldots, y_n$, to pod znakiem całki mamy wyrażenie stopnia 2-go względem $\delta y_1, \delta y'_1, \ldots, \delta y_2, \delta y'_n, \ldots$, t. j. wyrażenie typu:

$$\sum c_{i,j,h,k} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i^{(h)} \, \partial y_j^{(k)}} \delta y_i^{(h)} \, \delta y_j^{(k)},$$

gdzie znak sumy rozciąga się na wszystkie kombinacye skaźników i, j, h, k i gdzie spółczynniki c równają się albo 1 albo 2.

Dochodzimy zatem do badania, kiedy to wyrażenie jest różnem od zera, oraz przy jakich warunkach zachowuje ono znak stały, gdy zmieniamy wartości waryacyj $\delta y, \delta y', \ldots$ na wszelkie sposoby, zgodne z warunkami zagadnienia.

Pierwsze badania nad drugą waryacyą podjął był Legendre w Mém. de l'Acad. des sciences, 1786, str. 7—37. Niektóre sprostowania do tej rozprawy podał tenże autor w następnym tomie „Pamiętników", 1789, str. 348. Porówn. co do tego uwagi Stäckela w Nr. 47 wydawnictwa „Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften" (Abhandlungen über Variationsrechnung, Zweiter Theil, na końcu). O błędach Legendre'a pisał Brunacci w rozprawie: „Sui criterii per distinguere i massimi e minimi nelle espressioni integrali" (w Mem. dell'Ist. Nazion. Italiano, Vol I, par. 2, Bologna, 1806, str. 191).

Lagrange w rozdziale XII-ym drugiej części „Teoryi funkcyj analitycznych" (Oeuvres, t. IX, str. 296 i nast.) zajmuje się krótko tem samem pytaniem i powtarza w gruncie rzeczy pod inną postacią rozważania Legendre'a, nie cytując jego nazwiska, a wymieniając tylko tom „Pamiętników Akad. paryskiej“ z r. 1786. To wprowadziło prawdopodobnie w błąd Jacobi'ego, który w pracy swej o tym przedmiocie wymienia swych poprzedników. (Patrz uwagi Stäckela w wyżej cytowanem dziełku).

Lagrange uczynił wszakże dość ważne spostrzeżenie o zmianie znaku całki, gdy funkcya podcałkowa, zachowując znak stały, staje się nieskończoną w jakimkolwiek punkcie (patrz Oeuvres, t. IX, str. 303).

Warunki, podane przez Legendre'a i Lagrange'a, powtórzyli mniej lub więcej dokładnie w traktatach swych Dirksen (Analytische Darstellung der Variationsrechnung i t. d., Berlin, 1823) i Ohm („Die Lehre vom Grössten und Kleinsten“, tamże, 1825).

Z Jacobim (Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen, Crelle, XVII, str. 68, 1838; przekład w dzienniku Liouville'a, t. III, 1838) rozpoczyna się nowa era w teoryi drugiej waryacyi. Z pracą Jacobi'ego wiąże się szereg prac innych autorów, którzy rozwinęli rozmaitemi sposobami punkty specyalne rozprawy Jacobi'ego, podane przez niego bez dowodu. Wymieniamy prace następujące: Lebesgue: rozprawa o wzorze Vandermonde'a i o zastosowaniu tegoż do dowodu twierdzenia Jacobi'ego (dziennik Liouville'a, t. VI, str. 17, 1841); Delaunay: Sur la distinction des maxima et des minima etc., tamże, VI, str. 209); Bertrand: Demonstration d'un théorème de Jacobi (Journ. de l'École polyt., Cah., XXVIII, str. 206, 1841); Mainardi: Richerche sul calcolo delle variazioni, Annali di Tortolini, III, str. 132, 379; 1852; Brioschi: Sul teorema di Jacobi e sui criteri etc., tamże, III, str. 322, 1852; Eisenlohr: Untersuchungen über Variationsrechnung, Mannheim, 1853; Spitzer: Ueber die Kriterien des Grössten u. Kleinsten u. s. w. Wiener Sitzungsberichte, t. XII, str. 1014, r. 1854; XIV, str. 41, 1854; Heine: Bemerkungen zu Jacobi's Abhandlungen u. s. w., Crelle, t. LIV, str. 68, 1857; Hesse:

Ueber die Kriterien der Maxima und Minima der einfachen Integrale, tamże, t. LIV, str. 227; Minding: Ueber die Transformationen, welche in der Variationsrechnung zur Nachweisung grösster oder kleinster Werthe dienen, tamże, t. LV, str. 300 (1857); Horner: On Jacobi's reduction etc., Quart. Journ., XIV, str. 218 (1876).

Badaniami w przypadku większej liczby funkcyj niewiadomych, pomiędzy któremi zachodzą związki różniczkowe, zajmował się pierwszy Clebsch: Ueber die Reduction der 2-ten Variation auf ihre einfachste Form, Dziennik Crellego, tom XV, str. 254; 1858; Ueber diejenigen Probleme der Variationsrechnung i t. d., tamże, LV, str. 335. O trzeciej pracy Clebscha, odnoszącej się do tego samego przedmiotu dla całek wielokrotnych, wspominamy w innym rozdziale.

Lipschitz zajmował się inną metodą tegoż zagadnienia i tak nazwanemi przekształceniami drugiej waryacyi: „Beiträge zur Theorie der Variation der einfachen Integrale", Crelle, LXV, str. 26 (1864). Jego metodę rozciągnął Mayer na maxima i minima względne: „Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale", Crelle, LXIX, str. 238 (1868). Inne badania, odnoszące się do tego przedmiotu, ogłosili: Stern: „Ueber die Bestimmung der Constanten in der Variationsrechnung", Gött. Abh., XIII (1868); Lundström: „Distinction des maxima etc." Nova acta Soc. Upsaliensis, ser. 3-a, t. VII (1869); w tej pracy zajmuje się autor specyalnem zadaniem izoperymetrycznem; Erdmann w Zaitschrift für Math., t. XXIII, str. 362; Krey: „Kriterien des Maxim. etc:", Math. Ann., XIII, str. 53, 518; Mayer: „Die Kriterien des Maximums etc.", Math. Ann., t. XIII, str. 53 (1878), gdzie autor bada specyalnie zagadnienie izoperymetryczne i uzasadnia pewne prawo wzajemności, o którem mówić będziemy później; Mayer: „Zur Aufstellung der Kriterien u. s. w.", Leipz. Berichte, str. 99 (1884), gdzie rozważa przypadek, w którym granice są zmienne; Scheeffer: „Die Maxima und Minima der einfachen Integrale zwischen festen Grenzen", Math. Ann., XXV, str. 522 i 594 (1885); Culverwell w rozprawie, ogłoszonej w London

Phil. Trans., t. CLXXVIII (A), str. 95; Winkler w pracy pomieszczonej w Sprawozdaniach Akad. Wied., XCVII, str. 1065. von Escherich: „Zur Theorie der 2-ten Variation. Wiener Berichte, XCVII, część II, str. 1416; t. XCIX, str. 1463. Jermakow w pracy ogłoszonej w Kijowskich Wiadomościach uniwersyteckich, Nr. 9 (1891).

Badania Weierstrassa, wygłaszane na jego wykładach, uwzględnia praca Zermelo: „Untersuchungen zur Variationsrechnung", Berlin, 1884.

Następujące prace Żmurki, odnoszą się do kwestyi traktowanej w tym rozdziale, lecz dla przypadku ogólnego całek wielokrotnych: „Ueber die Unzulänglichkeit der bis jetzt bekannt gewordenen Kriterien des Grössten und Kleinsten bestimmter Integrale und ihre Vervollständigung". (Tageblatt der 48 Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Graz, 1875); „Przyczynek do rachunku przemienności ze szczególnem uwzględnieniem znamion największości i najmniejszości całek oznaczonych, w których niewiadome funkcye podlegają danym warunkom", Pam. Akad. Um. w Krakowie, Wyd. mat.-przyr., t II (1876). „Theorie der relativen Maxima und Minima bestimmter Integrale". Deukschr. der math. nat. Classe d. k. Akad. d. Wissenschaft, t. XXXVI, 1876; „Ueber die Kriterien höherer Ordnung zur Unterscheidung der relativen Maxima und Minima bestimmter Integrale bei vorhandenen Systemen zweifelhafter Nachbarwerthe", tamże, t. XXXVII, 1876. Mertens w pracy: „O funkcyi oskulacyjnej prof. Żmurki" w II-gim tomie Pamiętnika Akad. Um. w Krakowie, 1876 i w artykule: „Ueber die Kriterien der Maxima und Minima bestimmter Integrale" w Zeitschrift Schlömilcha, t. XXI, str. 142, wykazał błędność kryteryów Żmurki. Porówn. też spostrzeżenia Mayera w Jahrbuch über die Fortschr. d. Mathematik, t. VIII, str. 220 i nast. Oprócz powyższych, Żmurko ogłosił jeszcze: „O ważności i zastosowaniu funkcyi oskulacyjnej w rachunku przemienności oraz odpowiedź na uwagi d-ra Mertensa, dotyczące tego przedmiotu." Pam. Wydz. mat.-przyr. Akad. Um., t. III, str. 24—34, 94—101, Kraków, 1877.

Badaniem waryacyj rzędów wyższych, gdy waryacya druga i trzecia jest zerem, mało się zajmowano; oprócz Żmurki (patrz wyżej cytowane prace w Pam. Akad. Wiedeńskiej, tom XXXVII) pisał o tem Erdmann w rozprawie: „Untersuchung der höheren Variationen einfacher Integrale“, Zeitschr. Schlömmilcha, t. XXII, str. 324; 1876 i XXVI, str. 73 (1881). Wzór, jaki na pochodne rzędu wyższego podaje autor w tej drugiej pracy, należy przypisać matematykowi włoskiemu, E. Fergola (Patrz Rend. Acc. Napoli, t. XXI, str. 161, 1882).

Obserwacye krytyczne wielkiej wagi nad prawdziwem znaczeniem zwykłych rezultatów rachunku waryacyjnego co do istnienia maximów i minimów zawdzięczamy Ludwikowi Scheefferowi, przedwcześnie, niestety, zabranemu nauce i studyom krytycznym. Jego prace, kilkakrotnie już cytowane, mieszczą się w t. XXVI Math. Ann., str. 197. (Ueber die Bedeutung der Begriffe Maximum und Minimum in der Variationsrechnung) i w Leipz. Berichte, 1885, str. 92.

§ 17.

Rozbiór ogólny zagadnienia o przekształceniu waryacyi drugiej.

Druga waryacya całki ma, jak to widzieliśmy w paragrafie poprzedzającym, postać:

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} \Omega\,(\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y'_1, \delta y'_2, \ldots, \delta y''_1, \ldots)\, dx,$$

gdzie Ω jest formą kwadratową ilości $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y'_1, \ldots$, które są funkcyami dowolnemi zmiennej x (podległemi zwykłym warunkom ciągłości, różniczkowalności i t. p.). Gdyby te argumenty, które chwilowo oznaczmy przez $z_1, z_2, \ldots$, były od siebie wszystkie niezależne—co nie ma miejsca, gdyż np. $\delta y'_1$ nie jest niezależne od δy_1, lubo δy_1 jest dowolne—wtedy łatwo byłoby zbadać, kiedy $\delta^2 I$ zachowuje znak stały. Trzebaby było tylko, by funkcya kwadratowa Ω zmiennych $z_1, z_2, \ldots$ zachowywała znak stały w granicach całkowania, bez względu na to, jakim jest punkt x pomiędzy temi granicami. Gdyż przedewszystkiem jest jasnem, że gdy dla każdej wartości x, zawartej pomiędzy x' i x'', funkcya Ω ma znak stały i nie staje się nieskończoną pomiędzy granicami całkowania, wtedy $\delta^2 I$ ma znak stały i mianowicie ten sam znak co Ω, jeżeli $x' < x''$.

Warunek, aby funkcya Ω nie stawała się nieskończoną w żadnym punkcie, dołączył Lagrange w wykładzie swym badań Legendre'a (Oeuvres, IX, str. 303). Podał on przykład taki:

Funkcya $\frac{1}{(1-x)^2}$ jest zawsze dodatnią dla rzeczywistych wartości x; jej całką jest $\frac{x}{1-x}$, a całka określona pomiędzy granicami $x' = \frac{1}{2}$, $x'' = 2$ ma wartość ujemną -3, a to dlatego, że funkcya $\frac{1}{(1-x)^2}$ staje się nieskończoną dla wartości $x = 1$, która jest wartością, zawartą pomiędzy granicami całkowania.

Dajmy na to, że całka ma mieć znak stały, np. dodatni. Jeżeli Ω w punkcie np. x_0, zawartym pomiędzy x' i x'' i dla pewnego układu wartości $\delta y_1, \delta y_2, \ldots$ ma znak ujemny, wtedy, na podstawie przyjętej ciągłości, znaleść można przedział w otoczeniu punktu x_0, w którym Ω jest ujemnem. Niechaj x_1, x_2 będą krańcami tego przedziału i niechaj $z_1 = \omega_1(x)$, $z_2 = \omega_2(x), \ldots$ będą takiemi funkcyami zmiennej x, dla których Ω jest ujemnem w przedziale od x_1 do x_2. Zbudujmy funkcyę ciągłą $\lambda(x)$ zmiennej x taką, aby była zerem w przedziałach $x'\,x_1$, $x''x_2$ i dodatnią w przedziale $x_1\,x_2$ i połóżmy $z_1 = \lambda(x)\,\omega_1(x)$, $z_2 = \lambda(x)\,\omega_2(x), \ldots$ Przy takiej postaci funkcyj z funkcya Ω będzie miała dla każdej wartości x albo wartość zero, albo ujemną, a więc całka jej będzie ujemną, wbrew założeniu. Wnosimy stąd, że aby waryacya $\delta^2 I$ była stale dodatnią, jest koniecznem, by nią była i funkcya Ω.

Oczywiście, że nie możemy stosować tego samego rozumowania wtedy, gdy ilości $z_1, z_2, \ldots$ są zależnemi od siebie, gdyż w takim razie nie możemy już więcej rozporządzać niemi dowolnie, co właśnie spożytkowaliśmy w powyższem rozumowaniu.

Jakaż myśl nasuwa się wtedy mimowolnie?

Załóżmy, że n z pomiędzy ilości $z_1, z_2, \ldots$ możemy wybrać dowolnie i że inne są zależnemi od tych wybranych. W przypadku np. jeżeli mamy n funkcyj nieznanych i ich pochodne, to możemy uważać $\delta y_1, \ldots, \delta y_n$ za niezależne, zaś $\delta y_1', \delta y_2', \ldots, \delta y_1'', \delta y_2'', \ldots$ za zależne od poprzednich.

Jeżeli możemy przekształcić formę kwadratową Ω na inne wyrażenie takie, które po za częściami całkowalnemi byłoby znów formą kwadratową tylko n zmiennych niezależnych od siebie, wtedy do funkcyi Ω możnaby już zastosować poprzednie kryteryum i tym sposobem zupełnie rozwiązać zagadnienie.

Zadanie o przekształceniu waryacyi drugiej polega więc na tem.

Przekształcić formę kwadratową Ω ilości $\delta y_1, \ldots, \delta y_n, \delta y_1', \ldots, \delta y'_n, \delta y_1'', \ldots$ na sumę: pochodnej funkcyi kwadratowej Ω_2, znikającej dla $x = x'$ i $x = x''$ i drugiej formy kwadratowej Ω_1 już nie zmiennych pierwotnych, lecz n innych zmiennych, które oznaczmy dla symetryi przez $\delta Y_1, \ldots, \delta Y_n$, a które zostały utworzone liniowo z pierwszych i są od siebie bezwzględnie niezależne. Funkcya Ω_1 nie powinna się stawać nieskończoną w granicach całkowania.

Będzie zatem:

$$\Omega = \frac{d}{dx}\,\Omega_2 + \Omega_1\,,$$

a całkując pomiędzy granicami x' i x'' i pamiętając o własności funkcyi Ω_2, mamy bezpośrednio:

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} \Omega \, dx = \int_{x'}^{x''} \Omega_1 \, dx \; ;$$

aby więc $\delta^2 I$ miało znak stały jest koniecznem i dostatecznem, by Ω_1 było stałego znaku.

Gdyby funkcya Ω_2 nie stawała się zerem na obu granicach, wtedy mielibyśmy o jeden wyraz więcej po za znakiem całkowym i nie moglibyśmy już łatwo znaleść warunku na to, aby $\delta^2 I$ było stałego znaku.

Załóżmy, że funkcya Ω zawiera ilości $\delta y_i, \delta y_i', \ldots, \delta y_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; wtedy funkcya Ω_2 nie może zawierać z pewnością $\delta y_i^{(r)}$, gdyż inaczej po różniczkowaniu względem x, pochodna zawierałaby $\delta y_i^{(r+1)}$, a z wzoru poprzedzającego wynika, że ta ilość powinna być zawarta w Ω.

Jeżeli są przepisane wartości funkcyj niewiadomych oraz ich pierwszych $r-1$ pochodnych na granicach (razem $2rn$ wartości), wtedy wszystkie waryacye $\delta y_i, \delta y'_i, \ldots, \delta y_i^{(r-1)}$ są na granicach zerem, a wraz z niemi i $\Omega_2 = 0$.

§ 18.

Pierwsze badania Legendre'a i Lagrange'a.

Rozpatrzmy przypadek $n=1$, t. j. gdy mamy jednę tylko funkcyę niewiadomą y. Funkcya F pod znakiem całkowym zawiera tylko x, y, y'. Druga waryacya ma postać:

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} [A \, \delta y^2 + 2B \, \delta y \, \delta y' + C \, \delta y'^2] \, dx \; ,$$

gdzie A, B, C są pochodnemi drugiemi funkcyi F względem

y i y'. Na podstawie zasad ogólnych, podanych w poprzedzającym paragrafie, należy przekształcić wyrażenie Ω pod znakiem się znadujące tak, aby otrzymać wyrażenie $\frac{d}{dx}\Omega_2 + \Omega_1$, gdzie Ω_2 jest formą kwadratową tylko jednej ilości δy, t. j. wyrażeniem postaci $a\,\delta y^2$, Ω_1 zaś jest formą kwadratową j e d n e j t y l k o z m i e n n e j, będącej funkcyą liniową jednorodną ilości δy i $\delta y'$, lub innemi słowy, jeżeli odwrócimy uwagę od czynnika, jest kwadratem funkcyi liniowej jednorodnej ilości δy, $\delta y'$.

Wyznaczenie funkcyi a zmiennej x prowadzi do równania różniczkowego. Połóżmy:

$$\Omega_2 = a\,\delta y^2,$$

skąd:

$$\frac{d}{dx}\Omega_2 = \frac{da}{dx}\delta y^2 + 2a\,\delta y\,\delta y'.$$

Będzie:

$$A\,\delta y^2 + 2\,B\,\delta y\,\delta y' + C\,\delta y'^2 - \frac{da}{dx}\delta y^2 - 2a\,\delta y\,\delta y' = \Omega_1,$$

lub:

$$\left(A - \frac{da}{dx}\right)\delta y^2 + 2\,(B-a)\,\delta y\,\delta y' + C\,\delta y'^2 = \Omega_1;$$

a ponieważ Ω_1 ma być kwadratem zupełnym funkcyi liniowej ilości δy, $\delta y'$, musi być tedy:

$$C\left(A - \frac{da}{dx}\right) - (B-a)^2 = 0.$$

Jest to właśnie równanie różniczkowe, służące do wyznaczenia ilości a.

Jeżeli przyjmiemy, że temu warunkowi staje się zadość, wtedy możemy funkcyę Ω_1 napisać w postaci:

$$C\left(\delta y' + \frac{B-a}{C}\,\delta y\right)^2,$$

w założeniu, że C jest różnem od zera. Jeżeli a nie jest rzeczywistem, to nie będzie można powiedzieć, że wyrażenie to ma znak stały i mianowicie znak ilości

$$C = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2};$$

nadto, gdy a staje się nieskończonem w jakimkolwiek punkcie przedziału całkowania, to nie będzie też można powiedzieć, że całka takiego wyrażenia ma znak stały, mianowicie znak ilości C, co wynika ze spostrzeżeń, uczynionych w paragrafie poprzedzającym.

Aby zatem zadanie dało się rozwiązać wskazanym sposobem, jest koniecznem, by funkcya a, otrzymana z poprzedzającego równania różniczkowego, była zawsze skończoną i rzeczywistą. Legendre usiłował dowieść, że można zawsze otrzymać a rzeczywiste (Mem. de l'Acad. de Paris, 1789, str. 348), lecz dowód jego był nieścisły; twierdzenie to zresztą, jak wiadomo z teoryi równań różniczkowych, jest prawdziwem.

Podobne postępowanie możnaby zastosować i w przypadku, w którym w funkcyi F występuje także i y''. Wtedy mamy trzy równania różniczkowe 1-go rzędu na wyznaczenie trzech funkcyj niewiadomych α, β, γ, które są spółczynnikami formy kwadratowej Ω_2; forma ta będzie postaci:

$$\Omega_2 = \alpha\,\delta y^2 + \beta\,\delta y\,\delta y' + \gamma\,\delta y'^2.$$

Różniczkując ją względem x, odejmując od Ω i wyrażając warunek, aby różnica była kwadratem zupełnym, otrzymujemy trzy wyżej rzeczone równania różniczkowe.

Istnieją tedy funkcye α, β, ... rzeczywiste, lecz nie wystarcza wiedzieć o ich istnieniu; trzeba znać je, aby módz rozstrzygnąć, czy funkcya Ω_2 nie staje się nieskończoną w jakimkolwiek punkcie przedziału; bo gdyby stawała się nieskończoną, to, jak wiadomo, nie moglibyśmy już stosować kryteryum na maximum i minimum.

Zbadajmy teraz, jaki postęp w tej teoryi zawdzięczamy Jacobi'emu.

---

§ 19.

Twierdzenia Jacobi'ego.

Spostrzeżenie zasadnicze Jacobi'ego polega na tem, że całka ogólna równania różniczkowego lub całki ogólne równań różniczkowych, służących do wyznaczenia funkcyj pomocniczych $\alpha, \beta, \ldots$ w poprzedzającym paragrafie wymienionych, można bezpośrednio wyznaczyć, gdy się zna całkę ogólną równania różniczkowego, określającego funkcyę niewiadomą y.

Twierdzenia Jacobi'ego, służące do tego celu i ogłoszone bez dowodu, można wypowiedzieć w ten sposób (porówn. Jellett: Die Grundlehren der Variationsrechnung, Brunświk, 1860, str. 62 i nast., Moigno-Lindelöff: Calcul des variations, Paryż, 1861, rozdz. VIII):

Twierdzenie I. Jeżeli napiszemy, jak zwykle, waryacyę pierwszą całki określonej pod postacią:

$$\delta I = \int_{x'}^{x''} \left(M - \frac{dM'}{dx} + \frac{d^2M''}{dx^2} - \ldots\right) \delta y \, dx = \int_{x'}^{x''} \mu \, \delta y \, dx,$$

gdzie:

$$M = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad M' = \frac{\partial F}{\partial y'}, \ldots,$$

wtedy waryacya funkcyi μ może być przedstawiona w ten sposób:

$$\delta\mu = A\, \delta y - \frac{d}{dx}(A_1\, \delta y') + \frac{d^2}{dx^2}(A_2\, \delta y'') - \ldots,$$

gdzie $A, A', A'', \ldots$ są oznaczonemi funkcyami zmiennej x.

Dowiedziemy tego twierdzenia nie metodą bezpośrednią (jak np. u Jelletta), lecz przy pomocy prostej metody Heinego (Crelle, t. LIV, str. 70).

Oznaczmy przez δ i δ_1 dwa różne symbole waryacyi i utwórzmy waryacyę $\delta\, \delta_1 I$:

$$(1) \qquad \delta\delta_1 I = \sum_{i,j} \int_{x'}^{x''} \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(i)}\, \partial y^{(j)}} (\delta y^{(i)}\, \delta_1 y^{(j)} + \delta y^{(j)}\, \delta_1 y^{(i)})\, dx,$$

która powinna być równa:

$$(2) \qquad \delta \int_{x'}^{x''} \mu\, \delta_1 y\, dx = \int_{x'}^{x''} \delta\mu\, \delta_1 y\, dx\,.$$

Za pomocą kolejnych przekształceń przez części, możemy otrzymać z (1):

$$(3) \qquad \int_{x'}^{x''} (A\, \delta y\, \delta_1 y - A_1\, \delta y\, \delta_1 y' + A_2\, \delta y''\, \delta_1 y'' - \ldots)\, dx.$$

W samej rzeczy wyrazy w (1), w których $i = j$, są już tej postaci. Jeżeli $j = i + 1$, to wyraz:

$$\int_{x'}^{x''} \alpha\, [\delta y^{(i)}\, \delta y_i^{(i+1)} + \delta y^{(i+1)}\, \delta_1 y^{(i)}]\, dx,$$

—pomijając część zcałkowaną—jest równy:

$$-\int_{x'}^{x''} \frac{d\alpha}{dx}\, \delta y^{(i)}\, \delta_1 y^{(i)}\, dx,$$

gdyż całkując przez części to wyrażenie, otrzymujemy jako część niecałkowaną wyrażenie powyższe. Co się zaś tyczy części zcałkowanej, to jest ona zerem, gdy na granicach całkowania x', x'' są zerami wszystkie waryacye funkcyi y i pierwszych jej $r-1$ pochodnych (gdy w F występują pochodne aż do rzędu r-go). Jeżeli j jest różne od i i od $i+1$, to całkując przez części wyraz

$$\int_{x'}^{x''} \beta\, [\delta y^{(i)}\, \delta_1 y^{(j)} + \delta y^{(j)}\, \delta_1 y^{(i)}]\, dx,$$

otrzymamy po za częścią zcałkowaną, która jest zerem, dwa wyrazy:

$$\int_{x'}^{x''} \beta\, [\delta y^{(i+1)}\, \delta_1 y^{(j-1)} + \delta y^{(j-1)}\, \delta_1 y^{(i+1)}]\, dx,$$

$$\int_{x'}^{x''} \frac{d\beta}{dx}\, [\delta y^{(i)}\, \delta_1 y^{(j-1)} + \delta y^{(j-1)}\, \delta_1 y^{(i)}]\, dx.$$

Stosując więc kolejno ten sam proces, dojdziemy albo do przypadku, w którym skaźniki są równe, albo też do przypadku, w którym się różnią o jedność; ten zaś ostatni przypadek sprowadza się do przypadku dwu skaźników równych. Dowiedliśmy zatem, że wyrażenie (1) przekształca się w istocie na wyrażenie (3).

Rozważmy wyraz:

$$\int_{x'}^{x''} A_1\, \delta y'\, \delta_1 y'\, dx.$$

Za pomocą całkowań przez części, wyraz ten—jeżeli pominiemy równą zeru część całkowaną—sprowadza się do:

$$\int_{x'}^{x''} \frac{d\,(A_1\,\delta y')}{dx}\,\delta_1 y\,dx\,.$$

Postępując podobnie z innemi wyrazami w (3), spostrzeżemy, że to wyrażenie sprowadza się do:

$$(4)\qquad \int_{x'}^{x''} \left[A\,\delta y - \frac{d\,(A_1\,\delta y')}{dx} + \frac{d^2\,(A_2\,\delta y'')}{dx^2} - \ldots\right]\delta_1 y\,dx\,.$$

Z porównania wyrażeń (4) i (2) wynika wprost powyższe wyrażenie na $\delta\mu$.

Wyrażenie to jest pierwszą stroną równania różniczkowego liniowego względem funkcyi δy zmiennej x. W samej rzeczy, jeżeli rozwiniemy pochodne względem x, to otrzymamy, jak to wprost widać, wyrażenie liniowe względem ilości δy i jej pochodnych $\delta y', \delta y'', \ldots$ Zauważmy jeszcze, że:

$$A_n = \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)\,2}}\,,$$

gdyż $(-1)^n A_n$ jest spółczynnikiem wyrażenia $\delta y^{(2n)}$ w rozwinięciu:

$$\delta\mu = A\,\delta y - \frac{d\,(A_1\,\delta y')}{dx} + \ldots,$$

$(-1)^n \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)\,2}}$ zaś jest spółczynnikiem tegoż wyrażenia $\delta y^{(2n}$ w rozwinięciu ilości $\delta\mu$, obliczonej bezpośrednio z wyrażenia:

$$\mu = M - \frac{dM'}{dx} + \frac{d^2M''}{dx^2} - \ldots$$

Twierdzenie II. Równanie różniczkowe $\delta\mu = 0$, liniowe względem ilości δy i jej pochodnych, jest tożsamościowo spełnione przez $\delta y = \frac{\partial y}{\partial c}$, gdzie c jest którąkolwiek ze stałych całkowania, zachodzących w wyrażeniu ogólnem całki y, otrzymanej z równania różniczkowego $\mu = 0$.

Istotnie jest:

$$\mu = M - \frac{dM'}{dx} + \frac{d^2M''}{dx^2} - \ldots$$

Obliczając bezpośrednio $\delta\mu$, mamy:

$$\delta\mu = \left(\frac{\partial M}{\partial y}\delta y + \frac{\partial M}{\partial y'}\delta y' + \ldots\right)$$

$$- \frac{d}{dx}\left(\frac{dM'}{\partial y}\delta y + \frac{\partial M'}{\partial y'}\delta y' + \ldots\right) + \ldots$$

Jeżeli teraz w μ zamiast ilości y i jej pochodnych wstawimy wartości znalezione z $\mu = 0$, a następnie zróżniczkujemy pierwszą stronę tego równania względem c i przyrównamy ją do zera (ponieważ $\mu = 0$ jest tożsamościowo spełnionem, więc jest zerem dla każdego c), otrzymamy:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial M}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial c} + \ldots\right)$$

$$- \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial M'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial M'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial c} + \ldots\right) + \ldots = 0.$$

Lecz jest $\frac{\partial y'}{\partial c} = \frac{d}{dx}\frac{\partial y}{\partial c}$ i t. d.; pierwsza tedy strona tego związku jest ściśle taką samą, jaką otrzymujemy z $\delta\mu$, podstawiając $\frac{\partial y}{\partial c}$ zamiast δy. Przez to podstawienie staje się $\delta\mu$ tożsamościowo zerem, a więc równanie różniczkowe $\delta\mu = 0$ jest spełnionem. (Co do tego prostego dowodzenia patrz Hesse, Dziennik Crellego, t. LIV, str. 251).

Jeżeli przyjmiemy, że w funkcyi F pod znakiem całkowym występują pochodne funkcyi nieznanej aż do rzędu r-tego, wtedy $\mu = 0$ będzie równaniem różniczkowem rzędu $2r$; równanie zaś $\delta\mu = 0$ zawierać będzie pochodne waryacyi δy aż do pochodnych rzędu $2r$ włącznie. Po zcałkowaniu otrzymamy y z $2r$ stałemi dowolnemi $c_1, c_2, \ldots, c_{2r}$;

$$\frac{\partial y}{\partial c_1}, \frac{\partial y}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial c_{2r}},$$

zaś będą $2r$ całkami szczególnemi równania $\delta\mu = 0$.

Z teoryi równań różniczkowych liniowych wiemy, że całka ogólna tego równania będzie kombinacyą liniową o spółczynnikach stałych $2r$ całek szczególnych, a więc równaniu $\delta\mu = 0$ czyni zadość:

$$\delta y = C_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + \ldots C_r \frac{\partial y}{\partial c_{2r}},$$

gdzie $C_1, \ldots, C_{2r}$ są stałemi dowolnemi.

Aby wyrażenie to mogło nazwać się całką ogólną, jest koniecznem, by wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial c_1}, & \ldots, & \frac{\partial y}{\partial c_{2r}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y^{(2r-1)}}{\partial c_1}, & \ldots, & \frac{\partial y^{(2r-1)}}{\partial c_{2r}} \end{vmatrix}.$$

był różny od zera. (Patrz „Rachunek całkowy", str. 201). Otóż warunek ten sprawdza się istotnie, gdyż $y = f(x, c_1, \ldots, c_{2r})$ jest z założenia całką ogólną równania $\mu = 0$ rzędu $2r$, a więc na mocy teoryi całek ogólnych równań różniczkowych związki:

$$y - f(x, c_1, \ldots, c_{2r}) = 0,$$

$$y' - f'(x, c_1, \ldots, c_{2r}) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(2r-1)} - f^{(2r-1)}(x, c_1, \ldots, c_r) = 0,$$

dają się rozwiązać względem $2r$ stałych i są niezależnemi, a stąd jakobian funkcyj, które przedstawiają pierwsze strony tych związków, uważany za funkcyę ilości $c_1, c_2, \ldots, c_{2r}$, musi być różny od zera. Otóż jakobian ten jest właśnie wyżej wypisanym wyznacznikiem.

Zanim przejdziemy do trzeciego pomocniczego twierdzenia Jacobi'ego, musimy wprowadzić niektóre nowe pojęcia, w czem oprzemy się na pracy Hessego (l. c., str. 230 i nast.).

§ 20.

Twierdzenia Hessego o wyrażeniach różniczkowych.

Niechaj z będzie funkcyą zmiennej x; $a_0, a_1, \ldots$ niechaj będą danemi funkcyami tejże zmiennej. Rozważmy następujące wyrażenie różniczkowe jednorodne:

$$\varphi = a_0 z + a_1 z' + a_2 z'' + \ldots + a_n z^{(n)}.$$

Można dowieść, że takie wyrażenie daje się zawsze przedstawić w postaci:

$$\varphi = A_0 z - \frac{d(A_1 z)}{dx} + \frac{d^2(A_2 z)}{dx^2} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n(A_n z)}{dx^n},$$

W samej rzeczy, rozwinąwszy pochodne, zawarte w ostatniem wyrażeniu i porównywawszy spółczynniki przy tych samych pochodnych ilości z w obu wyrażeniach, otrzymamy związki:

$$a_0 = A_0 - A_1' + A_2'' - A_3''' + \ldots = \sum (-1)^s A_s^{(s)},$$

$$a_1 = \quad -A_1 + \binom{2}{1} A_2' - \binom{3}{1} A_3'' + \ldots = \sum (-1)^s \binom{s}{1} A_s^{(s-1)},$$

$$a_2 = \quad A_2 - \binom{3}{2} A_3' + \ldots = \sum (-1)^s \binom{s}{2} A_s^{(s-2)},$$

$$a_3 = \quad -A_3 + \ldots = \sum (-1)^s \binom{s}{3} A_s^{(s-3)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

od których za pomocą łatwego odwrócenia dojść można do wzorów odwrotnych takiejże postaci. W istocie, pomnożywszy wyrażenie na a_r przez $(-1)^r$, wyrażenie na pochodną pierwszą ilości a_{r+1} przez $(-1)^r \binom{r+1}{r}$, wyrażenie na pochodną drugą ilości a_{r+2} przez $(-1)^r \binom{r+2}{r}$ i t. d., i dodawszy następnie otrzymane iloczyny, znajdziemy:

$$(-1)^r \left\{a^r - \binom{r+1}{r} a'_{r+1} + \binom{r+2}{r} a''_{r+2} - \ldots\right\}$$

$$= A_r - \left(\binom{r+1}{r} - \binom{r+1}{r}\right) A'_{r+1}$$

$$+ \left\{\binom{r+2}{r} - \binom{r+2}{r+1}\binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r}\right\} A''_{r+2},$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm\left\{\binom{r+k}{r} - \binom{r+k}{r+1}\binom{r+1}{r} + \binom{r+k}{r+2}\binom{r+2}{r} - \ldots\right\} A^{(k)}{}_{r+k} \mp \ldots$$

Lecz:

$$\binom{r+k}{r} - \binom{r+k}{r+1}\binom{r+1}{r} + \binom{r+k}{r+2}\binom{r+2}{r} - \ldots$$

$$= \frac{(r+k)(r+k-1)\ldots(k+1)}{r!}\left(1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \ldots\right),$$

co jest oczywiście zerem, gdyż czynnik ostatni równa się rozwinięciu wyrażenia $(1-1)^k$. A więc:

$$a_r - \binom{r+1}{r} a'_{r+1} + \binom{r+2}{r} a''_{r+2} - \ldots = (-1)^r A_r.$$

Wzór ten wykazuje, że ilości A wyrażają się przez ilości a za pomocą takich samych wzorów, jak ilości a przez A. Ważnym stąd wnioskiem jest to, że gdy utworzymy wyrażenie różniczkowe:

$$\Phi = A_0 z + A_1 z' + A_2 z'' + \ldots + A_n z^{(n)},$$

to będzie ono równe:

$$\Phi = a_0 z - \frac{d(a_1 z)}{dx} + \frac{d^2(a_2 z)}{dx^2} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n(a_n z)}{dx^n}.$$

Formę Φ nazwiemy formą sprzężoną z formą φ.

Jest jasnem, że gdy utworzymy formę sprzężoną względem formy Φ, to dojdziemy do formy φ; a więc forma sprzężona względem sprzężonej z formą daną jest równa formie danej.

Jest widocznem, że sprzężona sumy lub różnicy dwu form danych równa się sumie lub różnicy dwu form sprzężonych względem form danych.

Dla naszego celu szczególnie ważnemi są formy, będące sprzężonemi względem samych siebie.

Można okazać, że forma rzędu nieparzystego nie może być sprzężoną względem samej siebie. W samej rzeczy, jeżeli n jest nieparzyste, to ilości a nie mogą być równe ilościom A, gdyż ze związku $a_n = (-1)^n A_n$ otrzymalibyśmy wtedy $a_n = -a_n$, t. j. $a_n = 0$, co się sprzeciwia założeniu.

Forma rzęda $2m$-tego

$$\frac{d^m (bz^{(m)})}{dx^m}$$

jest sprzężoną względem samej siebie.

W samej rzeczy, rozwinąwszy tę formę, znajdziemy:

$$b^{(m)} z^{(m)} + \binom{m}{1} b^{(m-1)} z^{(m+1)} + \binom{m}{2} b^{(m-2)} z^{(m+2)} + \ldots.$$

Ze związków zaś tożsamościowych:

$$b^{(m)}z = b^{(m)}z,$$

$$\frac{d}{dx}(b^{(m-1)}z) = b^{(m)} z + b^{(m-1)} z',$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(b^{(m-2)}z) = b^{(m)}z + \binom{2}{1} b^{(m-1)}z' + b^{(m-2)} z'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

po pomnożeniu pierwszego przez 1, drugiego przez $-\binom{m}{1}$, trzeciego przez $+\binom{m}{2}$ i t. d., po dodaniu ich i uwzględnieniu związków binomialnych:

$$1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \ldots = 0,$$

$$-1 + \binom{m}{2}\binom{2}{1} - \binom{m}{3}\binom{3}{1} + \ldots = 0,$$

$$+1 - \binom{m}{3}\binom{4}{2} + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

otrzymujemy:

$$\bar{b}\, z^{(m)} = (-1)^m \left[b^{(m)} z - \frac{d}{dx}\,(b^{(m-1)} z) + \frac{d^2}{dx^2}\,(b^{(m-2)} z) - \ldots \right].$$

Różniczkując obie strony m razy, dochodzimy do równości:

$$\frac{d^m\,(\bar{b} z^{(m)})}{dx^m} = (-1)^m \left[\frac{d^m\,(b^{(m)} z)}{dx^m} - \frac{d^{m+1}\,(b^{(m-1)} z)}{dx^{m+1}} + \ldots \right],$$

której strona pierwsza jest formą daną. Ten wzór pokazuje, że spółczynniki A są odpowiednio równe ilościom a, że tedy forma dana jest sprzężoną sama z sobą.

Z tego twierdzenia wynika jako wniosek, że każde wyrażenie typu

$$b_0\, z - \frac{d\,(b_1\, z')}{dx} + \frac{d^2\,(b_2\, z'')}{dx^2} - \ldots,$$

jest samo z sobą sprzężone, gdyż ta własność służy każdemu z pojedyńczych wyrazów tego wyrażenia.

Dowiedziemy teraz twierdzenia odwrotnego, mianowicie, że każda forma φ rzędu $2m$, która sama z sobą jest sprzężona, daje się wyrazić za pomocą formy:

$$\psi = b_0\, z - \frac{d\,(b_1\, z')}{dx} + \frac{d^2\,(b_2\, z'')}{dx^2} - \ldots$$

(Patrz Hesse, l. c., str. 233).

Dowód tego ważnego twierdzenia jest bardzo prosty. Jeżeli formy φ i ψ mają obie te własność, że są równe swym formom sprzężonym, to takąż własność posiadać musi i forma $\varphi - \psi$. Po rozwinięciu tej formy i uporządkowaniu jej według kolejnych pochodnych funkcyi z, można będzie dobrać $m+1$ funkcyj nieoznaczonych $b_0, b_1, \ldots, b_m$, w ten sposób, aby spółczynniki przy $m+1$ pochodnych parzystego rzędu funkcyi z były zerami; pozostaną wtedy tylko pochodne rzędu nieparzystego, a stąd (o ile wszystkie spółczynniki nie są zerami), forma $\varphi-\psi$ jest z pewnością rzędu nieparzystego. To być nie może, gdyż forma rzędu nieparzystego nie może być sprzężona sama z sobą. Wnosimy stąd, że wszystkie spółczynniki i przy pochodnych nieparzystego rzędu powinny być zerami, gdy ilości b są oznaczone w sposób wyżej wskazany. Innemi słowy forma ψ jest równa danej formie φ.

Dla zwięzłości nazwiemy formą typu ψ formę, która jest sprzężona sama z sobą.

Udowodnimy teraz twierdzenie:

Forma

$$\varphi = \frac{d^m(bz)}{dx^m} \pm bz^m, \qquad \begin{pmatrix} +, \text{ gdy } m \text{ parzyste} \\ -, \text{ gdy } m \text{ nieparzyste} \end{pmatrix},$$

daje się sprowadzić do typu ψ.

W tym celu dość wykazać, że forma φ jest sprzężona sama z sobą. W istocie, po rozwinięciu, mamy:

$$\varphi = b^{(m)}z + \binom{m}{1} b^{(m-1)}z' + \binom{m}{2} b^{(m-2)}z'' + \ldots + bz^{(m)} \pm bz^{(m)},$$

gdzie na końcu jest znak dodatni lub ujemny, stosownie do tego, czy m jest parzyste lub nieparzyste; widzimy stąd, że φ jest w każdym przypadku rzędu parzystego, t. j. rzędu m lub $m-1$. Spółczynnikami tej formy są:

$$a_0 = b^{(m)}, \ a_1 = \binom{m}{1} b^{(m-1)}, \ a_2 = \binom{m}{2} b^{(m-2)}, \ldots,$$

$$a_m = \begin{cases} 2b, \text{ gdy } m \text{ parzyste} \\ 0, \text{ gdy } m \text{ nieparzyste.} \end{cases}$$

Na wartości spółczynników $A_0, A_1, \ldots, A_m$ formy sprzężonej mamy, (gdy $r < m$):

$$A_r = (-1)^r \left[a_r - \binom{r+1}{r} a'_{r+1} + \binom{r+2}{r} a''_{r+2} - \dots\right]$$

$$= (-1)^r \left[\binom{m}{r} - \binom{r+1}{r}\binom{m}{r+1} + \binom{r+2}{r}\binom{r+2}{r}\binom{m}{r+2}\right.$$

$$\left. - \dots \pm \binom{m-1}{r}\binom{m}{m-1} + \omega\right] b^{(m-r)},$$

gdzie:

$$\omega \doteq \begin{cases} (-1)^{m-r}\, 2 \binom{m}{r}, & \text{gdy } m \text{ parzyste} \\ 0 & \text{, gdy } m \text{ nieparzyste.} \end{cases}$$

Uwzględniając związek wyżej udowodniony, odnoszący się do pewnych kombinacyj spółczynników binomialnych, widzimy, że w każdym przypadku jest:

$$A_r = \binom{m}{r} b^{(m-r)} = a_r.$$

Nadto jest widocznem, że dla m parzystego $A_m = 2b$, dla m nieparzystego $A_m = 0$.

Twierdzenie więc zostało udowodnione. Od niego dochodzimy do następującego twierdzenia:

Forma.

$$\varphi = \frac{d^m\,(bz^{(m')})}{dx^m} \pm \frac{d^{m'}\,(bz^{(m)})}{dx^{m'}}, \qquad (m > m'),$$

(znak + jeżeli $m - m'$ parzyste, —, jeżeli $m - m'$ nieparzyste), daje się sprowadzić do typu ψ. (Patrz Jellet, Variationsrechnung, str. 392).

W samej rzeczy, możemy napisać:

$$\varphi = \frac{d^{m'}}{dx^{m'}} \left\{ \frac{d^{m-m'}\,(bz^{(m')})}{dx^{m-m'}} \pm bz^{(m)} \right\},$$

a kładąc:

$$z^{(m')} = z_1, \quad m - m' = p, \quad z^{(m)} = z_1^{(m-m')} = z_1^{p}$$

mamy:

$$\varphi = \frac{d^{m'}}{dx^{m'}} \left\{ \frac{d^p (bz_1)}{dx^p} \pm bz_1^{\,p} \right\}.$$

Na zasadzie poprzedzającego twierdzenia forma zawarta w nawiasie daje się sprowadzić do typu:

$$b_0 z_1 - \frac{d(b_1 z'_1)}{dx} + \frac{d^2 (b_2 z_1'')}{dx^2} - \ldots;$$

będzie tedy:

$$\varphi = \frac{d^{m'} (b_0 z_1)}{dx^{m'}} - \frac{d^{m'+1} (b_1 z_1')}{dx^{m'+1}} + \ldots.$$

Kładąc $z_1 = z^{m'}$, sprowadzamy bezpośrednio formę φ do typu ϕ.

Teraz możemy już przejść do trzeciego twierdzenia Jacobi'ego.

---

§ 21.

Trzecie twierdzenie Jacobi'ego.

Niechaj t będzie oznaczoną funkcyą zmiennej x; forma:

$$\varphi = t \left\{ a_0 \, tz - \frac{da_1 (tz)'}{dx} + \frac{d^2 a_2 (tz)''}{dx^2} - \ldots \right\},$$

gdzie przez $(tz)', (tz)'', \ldots$ rozumiemy pochodne kolejne iloczynu tz, daje się sprowadzić do typu ϕ.

Aby tego dowieść, należy okazać, że każdy wyraz tego wyrażenia, np.:

$$t \frac{d^m a (tz)^{(m)}}{dx^m},$$

daje się sprowadzić do typu ϕ.

Łatwo znaleść wzór następujący, udowodniony zresztą przez nas w paragrafie poprzedzającym, gdzie użyto tylko innych znaków:

$$PQ^{(m)} = (PQ)^{(m)} - \binom{m}{1} (P'Q)^{(m-1)} + \ldots + (-1)^m P^{(m)} Q.$$

Stosując ten wzór do naszego przypadku, możemy napisać:

$$t \frac{d^m a (tz)^{(m)}}{dx^m} = \frac{d^m ta (tz)^{(m)}}{dx^m} - \binom{m}{1} \frac{d^{m-1} t' a (tz)^{(m)}}{dx^{m-1}} + \ldots$$

Rozwijając pochodną $(tz)^{(m)}$ według wzoru, zwanego wzorem Leibniza, widzimy, że ostatecznie dochodzimy do wyrazów typu:

$$(-1)^r \binom{m}{r} \binom{m}{s} \frac{d^{m-r} \left[t^{(r)} a \, t^{(m-s)} z^{(s)} \right]}{dx^{m-r}},$$

gdzie r, s mogą przyjmować wszelkie wartości od 0 do m. Jeżeli położymy $m - r = s'$, to poprzedzające wyrażenie staje się równem:

$$(-1)^{m-s'} \binom{m}{s'} \binom{m}{s} \frac{d^{s'} \left[a t^{(m-s')} t^{(m-s)} z^{(s)} \right]}{dx^{s'}},$$

a zmieniwszy s na s' i wzajemnie, mamy:

$$(-1)^{m-s}\binom{m}{s}\binom{m}{s'}\frac{d^s\left[at^{(m-s)}\,t^{(m-s')}\,z^{(s')}\right]}{dx^s}.$$

Oba te wyrazy są jednego znaku lub znaków przeciwnych, stosownie do tego, czy s—s' jest parzyste lub nieparzyste.

Jeżeli wprowadzimy czynnik liczbowy pod znak pochodnej, to dla $s = s'$ otrzymamy wyraz typu ψ; gdy zaś s jest różne od s', będziemy mieli dwa wyrazy typu:

$$\frac{d^{s'}\,(Az^{(s)})}{dx^{s'}} \pm \frac{d^s\,(Az^{(s')})}{dx^s},$$

a więc otrzymamy znak + lub —, stosownie do tego, czy s—s' jest parzyste lub nieparzyste. Według ostatniego twierdzenia paragrafu poprzedzającego, dwumian ten daje się sprowadzić do typu ψ. Ostatecznie tedy całe wyrażenie sprowadza się do tego typu i twierdzenie J a c o b i'ego zostało dowiedzionem.

Na podstawie tego twierdzenia jest tedy:

$$\varphi = b_0\,z - \frac{d\,(b_1\,z')}{dx} + \frac{d^2\,(b_2\,z'')}{dx^2} - \ldots$$

Wartość wyrazu b_0, którą łatwo równie znaleść, wyraża się tak:

$$b_0 = t\left\{a_0\,t - \frac{d\,(a_1\,t')}{dx} + \frac{d^2\,(a_2\,t'')}{dx^2} - \ldots\right\},$$

Możemy więc wypowiedzieć następujący rezultat:

J e ż e l i t j e s t f u n k c y ą o z n a c z o n ą z m i e n n e j x, c z y n i ą c ą z a d o ś ć r ó w n a n i u r ó ż n i c z k o w e m u l i n i o w e m u

$$a_0\,t - \frac{d\,(a_1\,t')}{dx} + \frac{d^2\,(a_2\,t'')}{dx^2} = \ldots = 0,$$

w t e d y f o r m a

$$\varphi = t\left(a_0\,t - \frac{da_1\,(tz)'}{dx} + \ldots\right),$$

daje się wyrazić przez formę typu

$$\varphi = -\frac{d\,(b_1\,z')}{dx} + \frac{d^2\,(b_2\,z'')}{dx^2} - \ldots,$$

a stąd całka

$$\int \varphi\,dx,$$

może być sprowadzona do tego samego typu, t. j. do

$$\int \varphi\,dx = -b_1\,z' + \frac{d\,(b_2\,z'')}{dx} - \ldots$$

W rozwinięciu wyrażenia φ wyraz, zawierający $z^{(2m)}$ ma spółczynnik $(-1)^m\,a_m\,t^2$, ten sam wyraz w rozwinięciu formy φ, wyrażony drugim sposobem ma spółczynnik $(-1)^m\,b_m$, a stąd $b_m = a_m\,t^2$.

§ 22.

Zastosowanie twierdzeń poprzedzających do przekształcenia waryacyi drugiej.

Rozpatrzmy przypadek najprostszy, w którym funkcya F pod znakiem całkowym zawiera tylko x, y, y', t. j. gdy:

$$I = \int_{x'}^{x''} F(x, y, y')\,dx.$$

Mamy:

$$\delta I = \int_{x'}^{x''} \mu \, \delta y \, dx,$$

gdzie:

$$\mu = M - \frac{dM'}{dx}.$$

Drugą waryacyą jest:

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} \delta\mu \, \delta y \, dx,$$

gdzie według twierdzenia w § 19:

$$\delta\mu = A_0 \, \delta y - \frac{d\,(A_1 \, \delta y')}{dx}; \quad A_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}.$$

Połóżmy:

$$\delta y = tz; \quad t = C_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial c_2},$$

gdzie y jest całką ogólną równania rzędu drugiego $\mu = 0$. Na podstawie jednego z wyżej dowiedzionych twierdzeń wyrażenie t czyni zadość równaniu różniczkowemu:

$$A_0 t - \frac{d\,(A_1 t')}{dx} = 0,$$

a więc na podstawie trzeciego twierdzenia J a c o b i'ego całka:

$$\int t \left(A_0 \, tz - \frac{d \, A_1 \, (tz)'}{dx} \right) dx,$$

równa się wyrażeniu typu $- b_1 z'$, gdzie $b_1 = A_1 t^2$. Wracając więc do znaków dawniejszych, możemy napisać:

$$\int t\,\delta\mu\,dx = -A_1\,t^2\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta y}{t}\right).$$

Teraz wykonajmy całkowanie przez części w wyrażeniu drugiej waryacyi. Możemy napisać:

$$\int_{x'}^{x''} \delta\mu\,\delta y\,dx = \int_{x'}^{x''} \delta\mu\,.\,t\,.\,z\,.\,dx$$

$$= \left[z\int t\,\delta\mu\,dx\right]_{x'}^{x''} - \int_{x'}^{x''} z'\left[\int t\,\delta\mu\,dx\right]dx$$

$$= \left[z\int t\,\delta\mu\,dx\right]_{x'}^{x''} + \int_{x'}^{x''} A_1\,z'^2\,t^2\,dx.$$

Ponieważ δy znika na granicach całkowania, więc znika tamże i $t.z$. Załóżmy, że stałe C w ilości t nie dają się wyznaczyć w ten sposób, aby t znikało na granicach; musi więc znikać z na tych granicach; stąd pierwsza część całki jest zerem. Nadto mamy:

$$z' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta y}{t}\right) = \frac{t\,\delta y' - \delta y\,.\,t'}{t^2},$$

a więc

$$z'^2\,t^2 = \left[\delta y' - \frac{t'}{t}\,\delta y\right]^2,$$

tak że waryacya druga staje się równą:

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} A_1\left[\delta y' - \frac{t'}{t}\,\delta y\right]^2 dx,$$

i tym sposobem sprowadza się do postaci żądanej.

Z warunku dla ilości t wynika, że nie będzie można wyznaczyć zachodzących w niej stałych w ten sposób, aby przez odpowiedni wybór funkcyi dowolnej δy, wyrażenie to stało się zerem, gdyż wtedy powinnoby być $\delta y = t$, a stąd zaś t powinnoby, podobnie jak δy, znikać na granicach.

Przechodzimy do przypadku ogólnego, w którym funkcya y zawiera pochodne aż do pochodnej rzędu r-tego.

Waryacya druga może być sprowadzona do postaci:

$$\int_{x'}^{x''} \left(A_0\, \delta y - \frac{d\,(A_1\, \delta y')}{dx} + \ldots + (-1)^r \frac{d^r\,(A_r\, \delta y^{(r)})}{dx^r}\, \delta y \right) dx .$$

Połóżmy:

$$\delta y = t_1\, z_1\,; \quad t_1 = C_1{}' \frac{\partial y}{\partial c_1} + \ldots + C'_{2r} \frac{\partial y}{\partial c_{2r}} ,$$

i załóżmy, że funkcya y jest taką, że stałych C' nie można wyznaczyć w ten sposób, by funkcya t i jej r—1 pochodnych znikały na granicach całkowania; stąd wynika, że z i pochodne tej funkcyi znikają na granicach.

Według dowiedzionego wyżej twierdzenia, mamy tożsamościowo:

$$A_0\, t_1 - \frac{d\,(A_1\, t_1)}{dx} + \ldots = 0 ,$$

a na mocy innego twierdzenia:

$$\int t_1\, \delta \mu\, dx = \int t_1 \left(A_0\, t_1\, z_1 - \frac{d\,(A_1\, t_1\, z_1)'}{dx} + \ldots \right) dx$$

$$= - b_1\, z_1{}' + \frac{d\,(b_2\, z_1{}'')}{dx} - \ldots + (-1)^r \frac{d^{r-1}\,(b_r\, z^{(r)})}{dx^{r-1}} .$$

Całkując przez części i uwzględniając okoliczność, że z_1 jest zerem na granicach całkowania, będziemy mieli:

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} \delta\mu\, dy\, dx = \int_{x'}^{x''} \delta\mu\, t_1 \,.\, z_1\, dx$$

$$= - \int_{x'}^{x''} z_1{}' \left[\int t_1\, \delta\mu\, dx \right] dx$$

$$= \int_{x'}^{x''} z_1{}' \left\{ b_1\, z_1{}' - \frac{d\,(b_2\, z_1{}'')}{dx} + \ldots \right\} dx\,.$$

Całka otrzymana jest takiej postaci, jak całka, której waryacyę drugą możemy napisać wprost, tylko że zamiast δy mamy tu $z_1{}'$ i zamiast $r+1$ wyrazów mamy tylko wyrazów r. Jeżeli położymy:

$$t_2 = C_1{}'' \frac{\partial y}{\partial c_1} + \ldots + C_{2r}{}'' \frac{\partial y}{\partial c_{2r}}\,,$$

to łatwo zauważyć, że $z_1 = \dfrac{t_2}{t_1}$ czyni zadość równaniu

$$b_1\, z_1{}' - \frac{d\,(b_2\, z_1{}'')}{dx} + \ldots = 0,$$

p r z y z a ł o ż e n i u, ż e z a c h o d z i z w i ą z e k p o m i ę d z y s t a ł e m i $C_s{}'$ i $C_s{}''$.

Ponieważ:

$$\int t_1\, \delta\mu\, dx = b_1\, z_1{}' - \frac{d\,(b_2\, z_1{}'')}{dx} + \ldots,$$

przeto dla każdej wartości waryacyi δy, która czyni zadość równaniu $\delta\mu = 0$, strona druga jest s t a ł ą; a więc dla $\delta y = t_2$ (t. j. dla wartości, która $\delta\mu$ zamienia na zero), mamy:

$$z_1 = \frac{\delta y}{t} = \frac{t_2}{t_1}\,,$$

a więc po wstawieniu $\delta y = t_2$ do całki po stronie pierwszej, albo, co na jedno wychodzi, przy $z_1 = \frac{t_2}{t_1}$ po stronie drugiej powinniśmy na rezultat otrzymać stałą dowolną. Czyniąc tę stałą równą zeru, dojdziemy do związku pomiędzy stałemi C' i C''.

Połóżmy teraz:

$$z_1' = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)' z_2,$$

z warunkiem, by z_2 było zerem na granicach, i postępujmy, jak wyżej. Waryacya druga przekształci się na

$$-\int_{x'}^{x''} z_2' \left\{b_2' z_2' - \frac{d\,(b_3' z_2'')}{dx} + \ldots\right\} dx.$$

Połóżmy jeszcze:

$$t_3 = C_1''' \frac{\partial y}{\partial c_1} + \ldots + C_{2r}''' \frac{\partial y}{\partial c_{2r}},$$

i zauważmy, że:

$$z_2 = \frac{t_1\, t_3' - t_3\, t_1'}{t_1\, t_2' - t_2\, t_1'},$$

czyni zadość równaniu

$$b_2' z_2' - \frac{d\,(b_3' z_2'')}{dx} + \ldots = 0,$$

o ile pomiędzy stałemi C istnieją dwa związki.

Ponieważ:

$$\int \left(\frac{t_2}{t_1}\right)' \left[b_1\, z_1' - \frac{d\,(b_2\, z_1'')}{dx} + \ldots\right] dx$$

$$= b_2' z_2' - \frac{d\,(b_3' z_2'')}{dx} + \ldots,$$

przeto ostatnie wyrażenie równa się też całce podwójnej:

$$\int \left(\frac{t_2}{t_1}\right)' \left[\int t_1 \; \delta\mu \; dx\right] dx .$$

Dla $\delta\mu = 0$ całka w nawiasie staje się wogóle stałą; oznaczmy tą stałą przez M, a wtedy całka podwójna będzie równa:

$$M \left(\frac{t_2}{t_1}\right) + N ,$$

gdzie N jest nową stałą całkowania.

Ponieważ $\delta\mu = 0$, gdy $\delta y = t_3$, t. j. gdy:

$$z_1 = \frac{t_3}{t_1}, \quad z_2 = \frac{z_1'}{\left(\frac{t_2}{t_1}\right)'} = \frac{t_1 \, t_3' - t_3 \, t_1'}{t_1 \, t_2' - t_2 \, t_1'} .$$

przeto dla tej wartości z_2 wyrażenie

$$b_2' \, z_2' - \frac{d\,(b_3 \, z_2'')}{dx} + \ldots$$

staje się tożsamościowo równem:

$$M \frac{t_2}{t_1} + N ,$$

gdzie M i N są dwiema stałemi, a mianowicie kombinacyami stałych, zachodzących w rozmaitych wyrazach tego wyrażenia. To wyrażenie będzie więc zerem, jeżeli dołączymy dwa warunki $M = N = 0$.

Tą drogą idąc, otrzymujemy po r przekształceniach:

$$\delta^2 I = (-1)^{r-1} \int_{x'}^{x''} z_r'^{\,2} \, B_r \; dx .$$

gdzie ilość z_r' po rozwinięciu wyrazi się liniowo przez $\delta y, \delta y', \delta y'', \ldots, \delta y^{(r)}$. Tym sposobem waryacya druga została sprowadzona do postaci żądanej.

Łatwo znaleść wyrażenie ogólne na B_r. W samej rzeczy, wiemy, że $b_r = A_r\, t_1^2$; podobnie będzie:

$$b'_r = b_r \left[\left(\frac{t_2}{t_1}\right)'\right]^2 = A_r\, t_1^2 \left[\left(\frac{t_2}{t_1}\right)'\right]^2,$$

a postępując tym sposobem dalej, znajdziemy:

$$B_r = A_r\, t_1^2 \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2\right] \ldots,$$

gdzie, jak już wiemy:

$$A_r = \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(r)2}}.$$

Zanim pójdziemy dalej, zatrzymajmy się przez chwilę nad wzmiankowanemi wyżej związkami, które istnieć powinny pomiędzy $2r^2$ stałemi $C_s', C_s'', \ldots$

Łatwo widzieć, że związków tych będzie wogóle $\frac{r(r-1)}{2}$. Gdyż wprowadzając stałe C'', przy zmiennej t_2, mamy jeden związek; wprowadzając zmienną t_3, otrzymujemy dwa związki i t. d., tak że razem będzie związków $1 + 2 + \ldots + r - 1 = \frac{r(r-1)}{2}$ pomiędzy $2r^2$ stałemi dowolnemi. Dla $r=1$ mamy tylko dwie stałe od siebie niezależne. Co do badań nad związkami pomiędzy stałemi porów. Hesse (l. c., str. 252), a zwłaszcza cytowaną wyżej pracę Sterna.

Wróćmy do dyskusyi ogólnej.

Gdy już waryacya druga została sprowadzoną do formy poprzedzającej, wtedy powstaje pytanie, jak należy postępować, aby zbadać, czy istnieje faktycznie maximum i minimum i jak jedno od drugiego odróżnić.

Przedewszystkiem waryacya druga nie powinna znikać dla żadnej wartości funkcyi dowolnej δy. Gdyby znikała tożsamościowo dla każdej wartości δy, wtedy nie możnaby wcale rozstrzygnąć kwestyi istnienia maximum i minimum, lecz należałoby przejść do badania waryacyi trzeciej, czwartej i t. d., podobnie, jak to się dzieje w rachunku różniczkowym przy szukaniu maximum i minimum funkcyj. P r z y p a d e k t a k i w y r a ż n i e w y ł ą c z a m y.

Nie ma tedy takiego δy, dla którego $\delta\mu = 0$. Otóż wiemy, że całką ogólną równania różniczkowego $\delta\mu = 0$ jest $\delta y = t_1$, a więc jest koniecznem, by funkcya dowolna δy nie mogła stać się równą funkcyi t_1, zawierającej $2r$ stałych dowolnych. Lecz funkcya δy jest poddana warunkowi, by znikała razem ze swemi pierwszemi $r-1$ pochodnemi w punktach x', x''; trzeba tedy, by te $2r$ stałych w funkcyi t_1 nie dały się wyznaczyć w ten sposób, aby funkcya t_1 wraz ze swemi $r-1$ pochodnemi stawała się zerem w tych dwu punktach. Jeżeli to nie spełnia się, to w takim razie możnaby zawsze przyjąć, że δy równa się specyalnej funkcyi t_1, która zamienia $\delta\mu$ na zero.

Wypada tu nadmienić, że warunek, by funkcya t_1 nie mogła być wyznaczoną tak, by wraz ze swemi $r-1$ pierwszemi pochodnemi znikała na granicach całkowania, można zastąpić warunkiem ogólniejszym, by f u n k c y a t_1, w r a z z e s w e m i $r-1$ p i e r w s z e m i p o c h o d n e m i n i e m o g ł a z n i k a ć n a g r a n i c y n i ż s z e j x', a n i t e ż w i n n y m j a k i m k o l w i e k p u n k c i e x_0, z a w a r t y m p o m i ę d z y x' i x''. Gdyby bowiem to być mogło, to łatwo widzieć, że możnaby wtedy dobrać waryacyę δy tak, aby waryacya druga całki stała się zerem. W samej rzeczy, możnaby wziąć $\delta y = t_1$ dla każdego x pomiędzy x' i x_0, oraz $\delta y = 0$ dla wartości x pomiędzy x_0 i x''; wtedy ilości $\delta y'$, $\delta y''$, ... byłyby wszystkie zerem dla każdej wartości x pomiędzy x_0 i x'', a więc pomiędzy x_0 i x'' waryacya byłaby z pewnością zerem. Byłaby również zerem pomiędzy x' i x_0, gdyż na mocy twierdzenia ogólnego $\delta y = t_1$ zamienia na zero waryacyę drugą.

Jeżeli ten warunek się spełnia, to dla istnienia maximum i minimum jest koniecznem, by funkcya A_r pod znakiem całkowym nie zmieniała znaku pomiędzy granicami całkowania i nadto, aby funkcya pod znakiem całki nie stawała się nieskończoną dla żadnej wartości x pomiędzy x' i x''.

Stałe C_s', C_s'', ..., zawarte w funkcyach $t_1, t_2, \ldots$, można wybrać dowolnie, aby tylko stało się zadość związkom, którym te stałe poddaliśmy; wybieramy je tak, aby funkcya pod znakiem całkowym nie stawała się n i e s k o ń c z o n ą. W założeniu, że to uczynić można (i że te stałe nie dają się tak wyznaczyć, aby ta sama funkcya była zerem dla jakiegokolwiek x) waryacya druga sprowadzi się do postaci, w której należy tylko zbadać naturę ilości $(-1)^{r-1} A_r$, by rozstrzygnąć, czy istnieje maximum czy minimum. Jeżeli $(-1)^{r-1} A_r$ jest ujemnem dla każdego x, mamy maximum; jeżeli jest dodatniem—minimum. Niema ani maximum ani minimum, jeżeli ilość A_r jest dodatnia dla niektórych punktów x i ujemna dla innych.

§ 23.

Przykład zastosowania przekształcenia J a c o b i'e g o.

Niechaj będzie funkcya:

$$F = \sqrt{1 + y'^2},$$

gdzie pierwiastnik przyjmujemy za dodatni dla każdej wartości x między granicami całkowania.

Mamy:

$$M = \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad M' = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Równanie różniczkowe $\delta\mu = 0$ będzie

$$\frac{dM'}{dx} = 0,$$

skąd:

$$M' = \text{const} = c_0,$$

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = c_0^2; \quad (1-c_0^2)\, y'^2 = c_0^2;$$

$$y' = \text{const.} = c_1; \quad y = c_1 x + c_2.$$

Funkcya t równa się $C_1 x + C_2$, stąd $t' = \frac{dt}{dx} = C_1$; ponieważ:

$$A_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

przeto podstawiając tę wartość w wyżej udowodnionym wzorze ogólnym, otrzymujemy:

$$\delta^2 I = \int\limits_{x'}^{x''} \frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\delta y' - \frac{C_1}{C_1 x + C_2}\, \delta y\right]^2 dx.$$

Otóż przedewszystkiem nie jest możliwem wyznaczenie waryacyi δy tak, aby funkcya pod znakiem całkowym była zerem, gdyż nie można wziąć $\delta y = t$. W samej rzeczy, gdyby δy mogło być równe t, wtedy t, podobnie jak i δy, znikałoby w punktach x' i x'' i mielibyśmy dwa równania:

$$C_1 x' + C_2 = 0; \quad C_1 x'' + C_2 = 0,$$

które równocześnie istnieć nie mogą.

To ustanowiwszy, wyznaczmy C_1 i C_2 w sposób dowolny, lecz tak (jeżeli to możliwe), aby funkcya podcałkowa nie stawała się nieskończoną dla żadnej wartości x pomiędzy x' i x''.

Połóżmy np. $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, wtedy waryacya druga sprowadza się do postaci najprostszej:

$$\int_{x'}^{x''} \frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \delta y'^2 \, dx.$$

Ponieważ przyjęliśmy, że pierwiastnik $\sqrt{1+y'^2}$ jest dodatni, to ilość zaś $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$ będzie ilością dodatnią, a funkcya y odpowiadać będzie minimum całki. Stałe wyznaczają się z warunków, by funkcya y miała wartości ustalone na obu granicach.

Przypadek, kiedy zachodzi nie jedna lecz więcej funkcyj niewiadomych i jeszcze ogólniej, kiedy pomiędzy temi funkcyami zachodzą związki różniczkowe, badał, jak powiedziano już, pierwszy Clebsch. Nie zatrzymamy się wszakże dłużej nad tym przedmiotem, ponieważ zaprowadziłoby nas za daleko od granic, jakie sobie wytknęliśmy; podamy tylko rezultat w postaci, do jakiej sprowadził go Mayer i zastosujemy ten rezultat do dowodu tak zwanego prawa wzajemności Mayera w przypadku specyalnym zagadnienia izoperymetrycznego.

---

§ 24.

Streszczenie rezultatów, odnoszących się do odróżnienia maximów i minimów w zagadnieniu ogólnem Lagrange'a.

Z rozprawy Mayera (Crelle, t. LXIX, str. 238) wyjmujemy rezultat, odnoszący się do waryacyi drugiej w przypadku ogólnego zagadnienia Lagrange'a.

Niechaj $y_1, y_2, \ldots, y_n$ będą niewiadomemi funkcyami zmiennej x, pomiędzy któremi zachodzą równania różniczkowe rzędu 1-go:

$$\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_m = 0.$$

Wyznaczmy funkcye y w ten sposób, aby całka:

$$I = \int_{x'}^{x''} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y'_n)\, dx,$$

była maximum lub minimum, w założeniu, że na granicach całkowania x', x'' wartości funkcyj y oraz ich pochodnych są z góry dane.

Na podstawie rozważań poprzednich (patrz § 12) to zagadnienie na względne maximum i minimum sprowadza się do zagadnienia na maximum i minimum bezwględne całki

$$J = \int_{x'}^{x''} \Omega\, dx,$$

gdzie:

$$\Omega = f + \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_m \varphi_m,$$

λ zaś są mnożnikami, mającemi się wyznaczyć.

Stosując metodę ogólną, mamy n równań różniczkowych 2-go rzędu:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{d\Omega}{dy_i'} = 0; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

razem z równaniem $\varphi_i = 0$ stanowią one układ $n + m$ równań różniczkowych, z którego można wyznaczyć $n + m$ funkcyj niewiadomych $y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ z $2n$ stałemi $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$. Rezultat, do którego dochodzi Mayer (l. c., str. 260), jest następujący:

Jeżeli wyznacznik

$$\Delta(x,x') = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial c_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial y_1}{\partial c_{2n}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial c_1} & , \ldots, & \dfrac{\partial y_n}{\partial c_{2n}} \\ \left(\dfrac{\partial y_1}{\partial c_1}\right)_{x=x'}, & \ldots, & \left(\dfrac{\partial y_1}{\partial c_{2n}}\right)_{x=x'} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \left(\dfrac{\partial y_n}{\partial c_1}\right)_{x=x'}, & \ldots, & \left(\dfrac{\partial y_n}{\partial c_{2n}}\right)_{x=x'} \end{vmatrix},$$

dla każdej wartości x, zawartej pomiędzy x' i x'', jest różny od zera, i jeżeli forma kwadratowa:

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i' \, \partial y_j'} \zeta_i \zeta_j,$$

— gdzie ilości ζ są poddane warunkom:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial y_i'}\right) \zeta_i = 0,$$

a zresztą dowolne — zachowuje znak stały dla każdego układu wartości ζ, wtedy faktycznie istnieje maximum lub minimum całki. Należy wszakże założyć, że spółczynniki waryacyi drugiej nie stają się nieskończonemi dla żadnej wartości x w przedziale całkowania.

W przypadku $n=1$ warunek, by wyznacznik Δ był różny oh zera, sprowadza się do warunku, by stałe C_1, C_2 nie mogły być wyznaczonemi w ten sposób, aby wyrażenie

$$C_1 \frac{\partial y_1}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial y_1}{\partial c_2}$$

było zerem dla granicy niższej x' lub w innym jakimkolwiek punkcie x pomiędzy granicami całkowania; rezultat ten znamy już z paragrafu 22-go.

---

§ 25.

Przypadek zagadnienia izoperymetrycznego.

Zbadajmy, jak zmienia się podane w paragrafie poprzedzającym kryteryum na maximum i minimum, jeżeli rozpatrujemy w szczególności zagadnienie izoperymetryczne.

Szukamy maximum lub minimum całki:

$$I = \int_{x'}^{x''} F\, dx,$$

przy warunku, by całki:

$$I_1 = \int_{x'}^{x''} F_1\, dx, \ldots\ldots, I_m = \int_{x'}^{x''} F_m\, dx,$$

zachowywały wartości określone $l_1, l_2, \ldots, l_m$. Zagadnienie to, jak to powiedziano już na właściwem miejscu, daje się sprowadzić do zagadnienia L a g r a n g e'a przez wprowadzenie m nowych funkcyj $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{n+m}$, związanych z dawnemi za pomocą równań różniczkowych:

$$y'_{n+1} - F_1 = 0 = \varphi_1; \ldots ; y'_{n+m} - F_m = 0 = \varphi_m.$$

Wyrażenie Ω będzie to, jak już wiemy, typu:

$$\Omega = F + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_m F_m,$$

gdzie ilości λ są stałemi. Po zcałkowaniu równań różniczkowych, otrzymamy w wyrażeniach funkcyj $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+m}$ $2(n+m)$ stałych. Stałe λ_{m+i} występują w równaniach, dających y_{n+i}, gdyż $y_{n+i} = \lambda_{m+i} + \int F_i\, dx$. Wyznacznik Δ, — jeżeli przez $\left(\frac{\partial y_1}{\partial c_1}\right)_0 \ldots$ rozumieć będziemy wartości pochodnych na granicy niższej $x = x'$, — staje się równy:

$$\left|\begin{array}{c} \frac{\partial y_1}{\partial c_1}, \ldots, \frac{\partial y_1}{\partial c_{2n}}, \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1}, \ldots, \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_{2m}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_1}\right)_0, \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_{2n}}\right)_0, \left(\frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_{2m}}\right)_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right|.$$

Na podstawie tego, co wyżej powiedziano, funkcye $y_1, \ldots, y_n$ nie będą zawierały stałych $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_{2m}$, każda zaś funkcya y_{n+i} z pomiędzy tych stałych zawiera tylko jednę λ_{m+i} i zawiera ją liniowo, tak że:

$$\frac{\partial y_i}{\partial \lambda_{m+j}} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \lambda_{m+j}}\right)_0 = \frac{\partial y_{n+i}}{\partial \lambda_{m+j}} = \left(\frac{\partial y_{n+i}}{\partial \lambda_{m+j}}\right)_0 = 0,$$

$$\frac{\partial y_{n+i}}{\partial \lambda_{n+i}} = \left(\frac{\partial y_{n+i}}{\partial \lambda_{n+i}}\right)_0 = 1.$$

Gdy przeto od elementów wiersza $(2n+m+i)$-tego odejmiemy elementy wiersza $(n+i)$-tego $(i=1, 2, \ldots, m)$, to wyznacznik powyższy — bez uwzględnienia znaku — zamienia się na następujący:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial c_1}, & \ldots\ldots\ldots, & \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_n}{\partial c_1}, & \ldots\ldots\ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial \lambda_m} \\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_1}\right)_0, & \ldots\ldots\ldots, & \left(\frac{\partial y_1}{\partial \lambda_m}\right)_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\frac{\partial y_n}{\partial c_1}\right)_0, & \ldots\ldots\ldots, & \left(\frac{\partial y_n}{\partial \lambda_m}\right)_0 \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial c_1} - \left(\frac{\partial y_{n+1}}{\partial c_1}\right)_0, & \ldots, & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial \lambda_m} - \left(\frac{\partial y_{n+1}}{\partial \lambda_m}\right)_0 \end{vmatrix}.$$

Co do formy kwadratowej, to ponieważ widocznie jest

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'_{n+i}\, \partial y'_{n+j}} = 0,$$

przeto ta forma staje się równą:

$$W = \sum_j \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'_i\, \partial y'_j} \zeta_i\, \zeta_j,$$

gdzie i, j przyjmują tylko wartości $1, 2, \ldots, n$ i gdzie ilości ζ powinny być poddane warunkom:

$$\sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y'_i} \zeta_i = 0,$$

które w naszym przypadku zamieniają się na

$$\sum_1^n \frac{\partial \varphi_h}{\partial y'_i} \zeta_i - \zeta_{n+h} = 0\,.$$

Lecz ponieważ w formie kwadratowej nie występują ilości ζ_{n+h}, warunki zaś powyższe w gruncie rzeczy ograniczają tylko zmienność ilości ζ_{n+h} w zależności od ilości $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, które pozostają dowolnemi; otrzymujemy tedy rezultat następujący:

W zagadnieniu izoperymetrycznem zachodzi istotnie maximum lub minimum, jeżeli dla każdej wartości x pomiędzy granicami całkowania wyznacznik Δ jest zawsze różny od zera i jeżeli funkcya kwadratowa W nie zmienia znaku przy dowolnej zmianie ilości ζ.

§ 26.

Prawo wzajemności Mayera w zagadnieniach izoperymetrycznych.

Zachowajmy oznaczenia paragrafu poprzedzającego i niechaj wartością maximum lub minimum całki I będzie l. Postawmy zagadnienie następujące.

Znaleść maximum lub minimum całki I_1 gdy równocześnie całki $I, I_2, \ldots, I_m$ mają wartości $l, l_2, \ldots, l_m$.

Można okazać, że dla całki I_1 istnieć będzie maximum lub minimum, jeżeli istnieje maximum lub minimum dla całki I i będzie ono właśnie równe l_1.

Na tem polega prawo wzajemności, podane przez Mayera (Math. Ann., t. XIII, str. 60).

Dowód twierdzenia jest prosty.

Najprzód równania różniczkowe zagadnienia są jednakowemi w obu przypadkach, mianowicie:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial \Omega}{\partial y'_i} = 0,$$

gdzie

$$\Omega = F + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_m \Phi_m .$$

Wprowadzając stałe jednorodne, mamy:

$$\mu\Omega = \mu F + \mu_1 F_1 + \ldots + \mu_m F_m = \Phi,$$

i poprzednie równanie różniczkowe, ponieważ μ jest stałe, można napisać tak:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial \Phi}{\partial y'_i} = 0.$$

Dalej widzimy, że dwa wyznaczniki Δ i dwie formy kwadratowe W, odpowiadające dwom tym zagadnieniom, różnią się tylko czynnikami stałemi. Nie zatrzymujemy się dłużej nad tym przedmiotem i odsyłamy czytelnika do rozprawy Mayera.

Jako zastosowanie twierdzenia, podajemy np. co następuje. Wiemy (patrz § 34), że krzywa danej długości pomiędzy dwoma punktami, mająca środek ciężkości możliwie najniżej, jest linią łańcuchową; stąd otrzymujemy: krzywa, której końce znajdują się w punktach stałych, a środek ciężkości na określonej wysokości i mająca nadto długość możliwie najmniejszą, jest linią łańcuchową.

Widzimy więc, że zasada wzajemności może być pożyteczną przy otrzymywaniu nowych twierdzeń z twierdzeń znanych rachunku waryacyjnego.

§ 27.

Waryacya całek wielokrotnych. Bibliografia.

Waryacyę całki wielokrotnej rozpatrywano już za czasów Eulera i Lagrange'a, lecz Gauss pierwszy, jak to wspomnieliśmy we Wstępie, rozpatrzył zagadnienie, związane z waryacyą całki wielokrotnej o zmiennych granicach całkowania (Gauss, Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii, Comm. Soc. Gott., VII, 1833). Do rozwiązania tego zagadnienia dochodzi się przez szukanie minimum całki podwójnej o granicach zmiennych. O tym przedmiocie po Gaussie pisali Poisson (Mem. de l'Acad., XII, 1833) i Ostrogradzki (Acad. St.-Pétersbourg, 1834, dziennik Crellego, XV, 332). W tomie XV dziennika Crellego znajduje się rozprawa Pagani'ego: „Résolution d'un problème relatif au calcul des variations", str. 84, w której autor traktuje zagadnienie, badane przez Gaussa.

Wspomniany we Wstępie konkurs Akademii paryskiej z r. 1842 wydał dwie prace: Sarrusa „Recherches sur le calcul des variations" (Mem. des Sav. étrang., 1846) i Delaunay'a (Journ. de l'École polyt. Cah., XXIX, 1843). Autorowie postawili sobie zadanie przekształcenia całki wielokrotnej i sprowadzania jej do postaci analogicznej z tą, jaką nadaje się całkom pojedyńczym.

Rozprawa Delaunay'a zawiera nadto pierwsze rozważania nad kryteryami, mającemi na celu odróżnienie maximów od minimów w całkach wielokrotnych. O tymże przedmiocie istnieje wcześniejsza praca Brunacci'ego (Mem. dell' Ist. Naz. Ital., Część II, Rozd. II, Bologna, 1810, str. 121), w której są rozwinięte rozważania Legendre'a, omówione przez nas w paragrafie 18-ym.

Rezultaty, do jakich doszedł Sarrus, wyłożył później odmiennym sposobem Cauchy (Mém. sur le calcul des variations, Exerc. d'analyse, t. III, str. 50).

Inne prace, odnoszące się do waryacyi całek wielokrotnych, są następujące: Björling „Calculi variationum integralium duplicium exercitationes“, Upsala, 1842; Strauch. „Anwendung des sogenannten Variationscalculs auf zwei- und dreifache Integrale, Wiedeń, 1859; Clebsch: „Ueber die zweite Variation vielfacher Integrale“, dziennik Crellego, t. LVI, str. 122, 1859; Lindelöf w Comptes Rendus Akad. paryskiej, t. L, str. 85, 1860: Sabinin: „Sur la méthode de distinguer les maxima et les minima des intégrales définies multiples“, Bull. de St.-Pétersbourg, t. XV, str. 70, 1870; „Développements analytiques pour servir à compléter la discussion de la variation seconde des intégrales définies multiples“, Bulletin des sciences math., 1878, str. 100; „O przekształceniu waryacyi całek określonych“ w Zbiorniku tow. mat. w Moskwie (po rosyjsku), t. XV, str. 99, gdzie do całek wielokrotnych stosowana jest metoda Clebscha dla całek pojedyńczych; „O metodzie Sarrusa“, tamże, t. XVI, str. 451, 1890, gdzie traktowanem jest specyalnie zagadnienie: „znaleść powierzchnię o polu danem, zamykającą największą objętość“. Zadaniem tem zajmował się był już Sarrus. W tej pracy poczynił pewne poprawki Zimmermann w rozprawie: „O rozróżnieniu maximum od minimum w całkach określonych“, tamże, t. XVII, str. 229 (1893).

Zastosowanie metody Weierstrassa do całek wielokrotnych znajduje się w dwu najnowszych pracach Kobba: „Sur les maxima et les minima des intégrales doubles“, Acta math., t. XVI, str 65, t. XVII, str. 321 (1893).

§ 28.

Wzór Ostrogradzkiego na pierwszą waryacyę całki wielokrotnej.

Niechaj z będzie funkcyą dwu zmiennych x i y. Dla ustalenia myśli załóżmy, że ta funkcya może być przedstawiona przez punkty pewnej powierzchni. Nadajmy tym punktom dowolne, nieskończenie małe przesunięcia, t. j. uważajmy nową powierzchnię, której krzywa graniczna jest lub nie. jest krzywą graniczną pierwszej powierzchni. Niechaj punkty tej drugiej powierzchni odpowiadają jednocześnie punktom pierwszej i niechaj odległości pomiędzy dwoma odpowiadającemi sobie punktami będą ilościami, równocześnie zdążającemi do zera.

Niechaj x, y, z będą spółrzędnemi punktu pierwszej powierzchni i równaniem jej niechaj będzie $z = f(x, y)$ (por. § 1). Równanie drugiej powierzchni napiszmy w postaci:

$$z_1 = f(x_1, y_1) + \lambda(x_1, y_1)\, \delta a,$$

gdzie x_1, y_1, z_1 są spółrzędnemi jej punktu, odpowiadającego punktowi pierwszej o spółrzędnych x, y, z; δa zaś jest ilością, zdążającą do zera.

Waryacyą ilości z będzie zbiór wyrazów najniższego rzędu w rozwinięciu różnicy $z_1 - z$, t. j. wyrażenia

$$[f(x_1, y_1) - f(x, y)] + \lambda(x_1, y_1)\, \delta a.$$

Ponieważ

$$f(x_1, y_1) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\, \delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\, \delta y + \omega,$$

$$\lambda(x_1, y_1)\, \delta a = \lambda(x, y)\, \delta a + \omega',$$

gdzie ω i ω' są nieskończenie małemi rzędu wyższego niż ilości δa, δx, δy, których rząd możemy uważać za jednakowy, przeto:

$$\delta z = \lambda(x, y)\, \delta a + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\, \delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\, \delta y\right).$$

Jest to wzór analogiczny z wzorem podanym w § 1. Część pierwsza strony drugiej tego wzoru może być uważana za waryacyę funkcyi z, w założeniu szczególnem, że zmienne x i y nie podlegają waryacyi, co wprost widać ze wzoru wyżej wyprowadzonego.

W podobny sposób otrzymać możemy wzór na waryacyę pochodnych cząstkowych funkcyi z. Mamy:

$$\delta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \lambda (x, y)}{\partial x} \delta a + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \delta y \right),$$

. . . .

Wzory te ujawniają zawsze własność, że waryacya całkowita równa się sumie waryacyj: jednej, wziętej w założeniu, że x i y waryacyi nie podlegają, drugiej, zależnej od waryacyi zmiennych x i y.

Jeżeli mamy funkcyę zmiennych x, y, z i pochodnych cząstkowych zmiennej z, to przy pomocy zasad rachunku różniczkowego łatwo znaleść jej waryacyę; mamy:

$$\delta F \left(x, y, z \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots \right)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial z}{\partial x}} \delta \frac{\partial z}{\partial x} + \ldots .$$

Przejdźmy teraz do waryacyi całki podwójnej określonej.

Jeżeli obszar całkowania jest ustalony, tak że x i y można uważać za n i e z m i e n n e, wtedy łatwo znaleść wzory na waryacyę całki, stosując postępowanie, oparte na zasadach przyjętych dla całek pojedyńczych. Znajdziemy, że waryacya całki otrzymuje się wprost przez podstawienie, zamiast funkcyi F pod znakiem, jej waryacyi δF.

Inaczej rzecz się ma, jeżeli obszar całkowania jest zmienny. Użyjemy wtedy metody analogicznej do tej, jaka była stosowana w przypadku całek pojedyńczych (porów. § 2, oraz J o r d a n, Cours d'Analyse, t. III, str. 534), która lubo ścisła, gdy idzie o funkcye zwykłe, daleką jest od ścisłości oraz od dokładności pożądanej w zasadniczych procesach analitycznych.

Niechaj będzie całka podwójna:

$$I = \int\int F\, dx\, dy.$$

W funkcyi F zamiast z i pochodnych z', z'', ... podstawmy $z + \Delta z$, $z' + \Delta z'$, ..., gdzie Δz, $\Delta z'$, ... są przyrostami, których doznają z, z', ... skutkiem waryacyj δx, δy zmiennych niezależnych oraz waryacyi samej funkcyi z. Odmieńmy obszar całkowania w ten sposób, aby każdemu punktowi x, y dawnego obszaru odpowiadał punkt $x + \delta x$, $y + \delta y$ nowego. Niechaj punktowi x_0, y_0 na obwodzie dawnym odpowiada punkt $x_0 + \delta x_0$, $y_0 + \delta y_0$ nowego obwodu; utwórzmy różnicę pomiędzy całką tak zmienioną a dawną. W pierwszej z tych całek możemy uskutecznić taką zamianę zmiennych niezależnych, aby zamienić ją na całkę o tym samym obszarze całkowania, co całka druga. W samej rzeczy, połóżmy $x = u + \delta u$, $y = v + \delta v$, gdzie δu, δv mają być funkcyami zmiennych u, v, takiemi, że zmieniają się na δx_0, δy_0, gdy u i v stają się odpowiednio równemi x_0, y_0. (Wiadomo, że przez x_0, y_0 rozumiemy ogólnie spółrzędne jakiegokolwiek punktu na obwodzie dawnego obszaru całkowania; że istnieje zatem nieskończenie wiele warunków, którym poddajemy funkcye dowolne δu, δv obu zmiennych).

Funkcya pod znakiem całkowania, jeżeli przyjmiemy, naturalnie, że w funkcyach z, z', ... podstawiono $u + \delta u$, $v + \delta v$ zamiast x, y, staje się funkcyą tych ilości. Oznaczmy ją przez $\Phi\,(u + \delta u, v + \delta v)$, to będzie:

$$\Phi\,(u + \delta u, v + \delta v) = \Phi\,(u, v) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\,\delta v\right) + \dots$$

i obszar całkowania pozostaje dawnym. Dla przekształcenia całki należy funkcyę pod znakiem całkowym pomnożyć przez jakobian dawnych zmiennych względem nowych, t. j. przez:

$$\begin{vmatrix} 1 + \dfrac{\partial\,(\delta u)}{\partial u}, & \dfrac{\partial\,(\delta u)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\,(\delta v)}{\partial u}, & 1 + \dfrac{\partial\,(\delta v)}{\partial v} \end{vmatrix} = 1 + \left(\frac{\partial\,(\delta u)}{\partial u} + \frac{\partial\,(\delta v)}{\partial v}\right) + \dots;$$

całka przekształcona będzie:

$$\int\int \Phi (u, v)\, du\, dv$$

$$+ \int\int \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}\, \delta u + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\, \delta v + \Phi\, \frac{\partial\, (\delta u)}{\partial u} + \Phi\, \frac{\partial\, (\delta v)}{\partial v}\right] du\, dv + \ldots$$

Pisząc x, y zamiast u, v, znajdujemy:

$$\int\int \Phi\, (x, y)\, dx\, dy + \int\int \frac{d}{dx}\, (\Phi\, \delta x)\, dx\, dy$$

$$+ \int\int \frac{d}{dy}\, (\Phi\, \delta y)\, dx\, dy + \ldots$$

Zbadajmy funkcyę Φ. Jest ona równa:

$$F\, (x, y, z + \Delta z, z' + \Delta z', \ldots),$$

t. j.:

$$\Phi\, (x, y) = F\, (x, y, z, z', \ldots) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\, \Delta z + \frac{\partial F}{\partial z}\, \Delta z' + \ldots\right) + \ldots,$$

a ponieważ:

$$\Delta z = \delta z + \omega,\ \Delta z' = \delta z' + \omega', \ldots,$$

przeto:

$$\Phi = F + \delta F + \Omega,$$

gdzie δF jest waryacyą funkcyi F w założeniu, że podlegają waryacyi tylko funkcya z i jej pochodne, Ω zaś jest ilością nieskończenie małą rzędu wyższego.

Jeżeli podstawimy to wyrażenie w całce poprzedzającej, odejmiemy wartość całki pierwotnej

$$\int\int F\, dx\, dy$$

i założymy, że rząd całki

$$\iint \left\{\Omega + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\delta F + \Omega)\,\delta x\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\delta F + \Omega)\,\delta y\right]\right\} dx\,dy,$$

może być istotnie uważany za wyższy od rzędu całek pozostałych wyrazów, znajdziemy:

$$\delta I = \iint \delta F\,dx\,dy$$

$$+ \iint \left[\frac{\partial}{\partial x}(F\,\delta x) + \frac{\partial}{\partial y}(F\,\delta y)\right] dx\,dy.$$

Jest to właśnie wzór Ostrogradzkiego, będący uogólnieniem wzoru, podanego w § 2 dla całek pojedyńczych.

Łatwo już rozumieć, w jaki sposób uogólnia się wzór ostatni, jeżeli zamiast całki podwójnej mamy wogóle całkę wielokrotną.

Inne dowodzenia wzoru Ostrogradzkiego znaleść można w cytowanej wyżej pracy Lindelöfa z r. 1860.

---

§ 29.

Przekształcenie waryacyi całki wielokrotnej. Wzór Delaunay'a.

W badaniu waryacyi pierwszej całek pojedyńczych ważnem jest przekształcenie, za pomocą którego staramy się o usunięcie z pod znaku całkowego waryacyj pochodnych funkcyj szukanych, aby módz otrzymać pod tym znakiem wyrażenie liniowe, zależne tylko od waryacyj funkcyj szukanych, nie zaś od ich pochodnych. Celem tej redukcyi jest pozyskanie pod znakiem całkowym takich waryacyj, któreby można uważać za wzajemnie niezależne.

Podobne rozważania należy oczywiście poczynić i dla całek wielokrotnych. Dochodzimy wtedy do wzoru, który podał już był Ostrogradzki w cytowanej przez nas rozprawie, lecz który nazwać należy wzorem Delaunay'a, ponieważ autor ten zajmuje się szczegółowo tym wzorem w pierwszej części swojej rozprawy.

Dla ustalenia myśli i dla prostoty przyjmijmy, że mamy tylko jednę funkcyę z i że występują tylko pierwsze pochodne cząstkowe tej funkcyi, które oznaczmy w ten sposób:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z_2 .$$

Napiszmy zamiast waryacyi δF wartość jej według wzoru, podanego w paragrafie poprzedzającym, i uporządkujmy wyrazy w ten sposób:

$$\begin{aligned} &\iint \frac{\partial F}{\partial z}\,\delta z\,dx\,dy \\ + &\iint \left[\frac{\partial F}{\partial z_1}\,\delta z_1 + \frac{\partial}{\partial x}(F\,\delta x)\right] dx\,dy \\ + &\iint \left[\frac{\partial F}{\partial z_2}\,\delta z_2 + \frac{\partial}{\partial y}(F\,\delta y)\right] dx\,dy, \end{aligned}$$

Dwie ostatnie całki możemy przekształcić przy pomocy całkowania przez części. Ponieważ, w założeniu, że x i y nie podlegają waryacyi, mamy:

$$\delta z_1 = \delta\,\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\,\delta z}{dx},$$

przeto:

$$\begin{aligned} &\int \left[\frac{\partial F}{\partial z_1}\,\delta z_1 + \frac{d}{dx}(F\,\delta x)\right] dx \\ = &\left[\frac{\partial F}{\partial z_1}\,\delta z + F\,\delta x\right] - \int \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial F}{\partial z_1}\,\delta z\,dx . \end{aligned}$$

Jeżeli wartość na y jest dana, wtedy całkowanie względem x uskuteczni się pomiędzy granicami, które będą funkcyami ilości y; granice te będą odciętemi punktów, w których prosta równoległa do osi x o danej rzędnej przecina krzywą, otaczającą obszar całkowania. Jeżeli założymy, że ta krzywa jest zamknięta i że prosta rzeczona spotyka ją w dwu punktach o odciętych x', x'', będących funkcyami ilości y, to całkowanie trzeba będzie rozciągnąć pomiędzy temi dwiema wartościami na x, i wtedy zamiast pierwszego wyrazu po stronie drugiej wzoru poprzedzającego, otrzymamy:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial z_1}\,\delta z + F\,\delta x\right]_{x=x''} - \left[\frac{\partial F}{\partial z_1}\,\delta z + F\,\delta x\right]_{x=x'}.$$

Wykonawszy następnie całkowanie względem y po obu stronach, znajdziemy:

$$\int dy \left[\frac{\partial F}{\partial z_1}\,\delta z + F\delta x\right]_{x'}^{x''} - \int\int \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial F}{\partial z_1}\,\delta z\,.\,dx\,dy,$$

gdzie całka pierwsza jest pojedyńczą i rozciąga się pomiędzy dwiema wartościami na y, przedstawiającemi rzędne najwyższej i najniższej stycznej do obwodu pola całkowania, druga zaś całka jest podwójną i rozciąga się na cały obszar dany.

Łatwo widzieć, że całkowanie pierwsze jest całkowaniem ilości

$$\frac{\partial F}{\partial z_1}\,\delta z + F\,\delta x,$$

rozciągniętem na cały obwód pola. W samej rzeczy wyobraźmy sobie w wyrażeniu tem zmienne x i y połączone związkiem, który jest równaniem obwodu, przyjmijmy y za zmienną niezależną i całkujmy; otrzymamy wtedy wyrażenie poprzedzające.

Rozumowanie, które należy przeprowadzić celem wyjaśnienia tego punktu, jest identyczne z rozumowaniem, które przeprowadziliśmy w „Rachunku całkowym“ nad wzorem Greena i dlatego nie będziemy go tu powtarzali. Jeżeli przyjmiemy łuk krzywej, t. j. s, za zmienną niezależną i położymy $dy = ds \,.\, \cos\omega$, gdzie ω jest kątem, który normalna do krzywej tworzy z osią x, to pierwszy wyraz powyższego wzoru można tak napisać:

$$\int ds \cos\omega \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\,\delta z + F\delta x\right).$$

Podobnież możemy napisać:

$$\iint \left[\frac{\partial F}{\partial z_2}\,\delta z_2 + \frac{\partial}{\partial y}\,(F\,\delta y)\right] dx\, dy$$

$$= \int ds \,.\, \sin\omega \left(\frac{\partial F}{\partial z_2}\,\delta z + F\,\delta y\right) - \iint \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial F}{\partial z_2}\,\delta z \,.\, dx\, dy,$$

tak że otrzymujemy wreszcie:

$$\delta I = \int ds \left\{\left(\cos\omega\,\frac{\partial F}{\partial z_1} + \sin\omega\,\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)\delta z\right.$$

$$\left. + F\cos\omega\,\delta x + F\sin\omega\,\delta y\right\}$$

$$+ \iint dx\, dy \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial F}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial F}{\partial z_2}\right]\delta z\,.$$

Jeżeli w funkcyi F występują także pochodne rzędu wyższego funkcyi z, wtedy wykonawszy dwa razy całkowanie przez części, otrzymalibyśmy nadto pod znakiem całkowym wyrazy:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\frac{\partial F}{\partial z_{1,1}}\,\delta z,\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\frac{\partial F}{\partial z_{2,2}}\,\delta z\,,\ \ldots,$$

gdzie:

$$z_{1,1} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,,\quad z_{2,2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,,\ \ldots.$$

Gdyby funkcya F zamiast jednej funkcyi niewiadomej z zawierała ich więcej, wtedy wystąpiłyby wyrazy, odnoszące się do tych funkcyj i tegoż typu, co powyższe. Gdybyśmy wreszcie mieli do czynienia z całką wielokrotną, a nie podwójną, to należałoby stosować tożsamo postępowanie. We wszystkich tych przypadkach ogólniejszych nie napotkalibyśmy zasadniczo nowych trudności, lecz tylko większą komplikacyę rachunków i wzory bardziej złożone, tak że niema potrzeby zatrzymywania się nad tym przedmiotem.

Po sprowadzeniu waryacyi do tej postaci, łatwo widzieć, że za pomocą metod stosowanych dla całek pojedyńczych dochodzi się do takich samych rezultatów odnośnie do znikania tożsamościowego tej waryacyi; znikanie to jest, jak zwykle, koniecznem, aby zachodziło maximum lub minimum. Rozważania, które w tym celu należałoby poczynić, będą mutatis mutandis takież same, jakie podaliśmy na właściwem miejscu, i dlatego mówić tu już o nich nie będziemy.

Pierwsza z całek w wyrażeniu zredukowanem na δI jest całką pojedyńczą, rozciągniętą na obwód obszaru całkowania; gdyby zatem granice całkowania były ustalonemi, a wraz z niemi i wartości funkcyi z, wtedy waryacye δx, δy, δz w punktach obwodu byłyby zerami, całka pierwsza byłaby zerem i pozostałaby tylko całka podwójna. (Patrz co do tego np. badanie Lagrange'a o powierzchniach najmniejszych, podane w tomie II Misc. Taur. i ostatnią lekcyę w „Calcul des fonctions“).

§ 30.

Zagadnienie Newtona. Bryła obrotowa o najmniejszym oporze.

Zagadnieniem, które historycznie pierwsze pomiędzy zagadnieniami rachunku waryacyjnego było badanem przez geometrów (jeżeli nie liczyć pewnych łatwych zagadnień, badanych już w starożytności), było zagadnienie Newtona, które można wyrazić w sposób następujący: „Znaleść krzywą przechodzącą przez dwa punkty dane taką, że obracając ją około osi danej, tworzymy ciało, które będąc zanurzone w cieczy w kierunku osi napotyka opór najmniejszy.

Zagadnienie to znajduje się w „Principiach" Newtona (Londyn, 1686, księga II, sek. VII, twierdz. 34, scholion), który podał bez dowodu równanie różniczkowe krzywej szukanej. Po Newtonie przedmiotem tym zajmowali się De l'Hôpital (Acta Erud., sierpień, 1699). Jan Bernoulli (tamże, listopad, 1699), Bouguer (Mém. de Paris, 1733), Euler („Methodus inveniendi etc.", 1754, art. 36), Saint-Jacques de Silvabelle (Mém. de Paris, t. III, 1760), Legendre (tamże, 1786, § VI). Zagadnienie, którem zajmuje się Legendre, jest bardzo ważnem, dlatego, że rozwiązalność wiąże się z naturą krzywej, którą wyobrażamy sobie jako krzywą południkową; spostrzeżenie to uczynił już był Silvabelle. Jeżeli wyobrazimy sobie, że krzywa południkowa ma być krzywą o stycznej ciągłej, wtedy mamy rozwiązanie, podane przez Newtona; lecz rozwiązanie to nie odpowiada wartości minimum, jeżeli w gatunku krzywych, mających rozwiązywać zagadnienie, obejmujemy także krzywe o stycznych nieciągłych. Z pomiędzy prac, poświęconych temu przedmiotowi, wyliczamy następujące: Tarleton w tomie XXXIV seryi 4-ej Phil. Magaz. (1867), gdzie zagadnienie rozpatrywane jest w założeniu, że punkty krańcowe krzywej południkowej nie są dane, lecz tylko określone są rzędne tego punktu i daną jest objętość ciała; Walton w Quart. Journ., tom X, str. 344 (1870); Todhunter „Researches in the calculus of variations", Londyn, 1871, Rozdz. IX i X, str. 167 i 196; Starkow w Zapiskach Tow. Odeskiego, t. V i VI (po rosyjsku) i w Bulletin de la Société math. de France, tom XIII, 1884—5, str. 132; Augustin: Ueber die Rotationsfläche kleinsten Widerstandes, Crelle, t. CIII (1888), str. 1. Rozważania Starkowa są błędne; patrz co do tego ostatnią stronicę cytowanej pracy Augusta i spostrzeżenia, które poniżej uczynimy.

Zagadnienia, o którem obecnie mówimy, nie możemy traktować w całej rozciągłości i ograniczymy się tylko na podaniu najważniejszych jego punktów.

Wprowadźmy, jak to czyni Newton, hypotezę, że opór, który napotyka ciało obrotowe, zanurzone w cieczy w kierunku swej osi, jest proporcyonalny do kwadratu rzutu prędkości jego na normalną do powierzchni i jest skierowany w kierunku tej normalnej. Jeżeli wtedy za oś x przyjmiemy oś obrotu ciała, to w założeniu, że wszystkie punkty ciała mają tę samą prędkość, opór, jakiego dozna punkt powierzchni, będzie proporcyonalny do $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$. Nadto, ponieważ ciało może przemieszczać się tylko w kierunku swej osi, to gdy rozłożymy opór według dwu kierunków, mianowicie według osi x i w kierunku prostopadłym do tej osi, składowa druga zostaje zniszczoną i pozostaną tylko składowe równoległe do osi x, które otrzymamy, mnożąc jeszcze opór przez $\frac{dy}{ds}$. Dla każdego pasa szerokości ds i prostopadłego do osi x, całkowity opór będzie równy:

$$k \,.\, y \,.\, \left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds\,,$$

a dla całej powierzchni będzie:

$$k \int y \left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds.$$

Całkę tę należy uczynić minimum. Wprowadziwszy x jako zmienną niezależną, znajdujemy:

$$\int \frac{y\, y'^2}{1+y'^2}\, dx.$$

Oznaczając, jak zwykle, funkcyę pod znakiem całkowym przez F, mamy:

$$F = \frac{y\,y'^3}{1+y'^2}; \quad M = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y'^3}{1+y'^2},$$

$$M' = \frac{\partial F}{\partial y'} = yy'^2 \cdot \frac{3+y'^2}{(1+y'^2)^2}.$$

Należy zcałkować równanie różniczkowe:

$$M - \frac{dM'}{dx} = 0,$$

lub:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Ponieważ funkcya F nie zawiera wyraźnie zmiennej x, przeto jej pochodna całkowita względem x będzie tożsamościowo:

$$\frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' = \frac{dF}{dx}.$$

Wyrugowawszy $\frac{\partial F}{\partial y}$ za pomocą poprzedzającego związku, otrzymujemy związek tożsamościowy:

$$\frac{\partial F}{\partial y'}y'' + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{dF}{dx} = 0,$$

lub:

$$\frac{d}{dx}\left[F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right] = 0.$$

Pierwsze całkowanie możemy wykonać bezpośrednio i znajdziemy:

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{stałej} = a,$$

a rozwiązując względem y:

$$y = \frac{a\,(1+y'^{2})^{2}}{y'^{3}}.$$

Jest to właśnie rozwiązanie Newtona.

Możemy znaleść też x w funkcyi ilości y' w sposób następujący. Z równania

$$dx = \frac{dy}{y'},$$

mamy:

$$x = \int \frac{dy}{y'} = \frac{y}{y'} + \int \frac{y\,dy'}{y'^{2}},$$

a kładąc za y wartość wyżej znalezioną, otrzymujemy:

$$x = \frac{a\,(x+y'^{2})^{2}}{y'^{4}} + a\int \frac{(1+y'^{2})^{2}}{y'^{5}}\,dy'$$

$$= a\left(\frac{3}{4y'^{4}} + \frac{1}{y'^{2}} + \log y'\right) + b.$$

Znaleźliśmy tedy spółrzędne x i y krzywej, wyrażone w funkcyi parametru y'. Krzywa, którą otrzymaliśmy, posiada ostrze w punkcie $y' = \sqrt{3}$.

Obliczywszy drugą pochodną funkcyi F względem y', znajdujemy:

$$\frac{\partial^{2} F}{\partial y'^{2}} = \frac{2yy'\,(3-y'^{2})}{(1+y'^{2})^{2}}.$$

Wyrażenie to jest dodatniem dla $y'^{2} < 3$, ujemnem dla $y'^{2} > 3$; jedna zatem z gałęzi krzywej, rozpoczynająca się od ostrza, odpowiada oporowi najmniejszemu, druga największemu.

Nad tym wynikiem poczynimy pewne dość ważne spostrzeżenia (porów. cyt. pracę Legendre'a).

Zagadnienie, które postawiliśmy sobie, jest następujące:

Dane są dwa punkty A i B; przeprowadzić przez nie krzywą taką, aby całka

$$\int y \left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds$$

była minimum. Stosując metodę waryacyj, powinniśmy przyjąć, że nietylko y lecz i y' jest funkcyą ciągłą zmienej x; tym sposobem milcząco wyłączamy wszystkie rozwiązania, odpowiadające krzywym o stycznych nieciągłych, np. linię łamaną. W samej rzeczy łatwo okazać, że pomiędzy punktami A i B możemy nakreślić linię łamaną tak, aby powyższa całka miała wartość tak małą, jak się podoba. Dość bowiem przez punkty A i B poprowadzić dwie proste, tworzące ten sam kąt z osią x i spotykające się w punkcie, dajmy na to, P. Rozważmy linię łamaną APB. Ponieważ $\frac{dy}{ds}$ odpowiada wstawie kąta ω, który dwie proste tworzą z osią x, to dla każdego punktu tej linii ilość $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$ ma wartość tęż samą (równą $\sin^2 \omega$), a więc całka sprowadza się do

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \int_A^B y\, dy = \sin^2 \omega \left(\frac{1}{2} y^2\right)_A^B$$

$$= \sin^2 \omega \, \frac{y_B^2 - y_A^2}{2},$$

gdzie przez y_A, y_B oznaczamy rzędne dwu punktów danych A i B. Z tego wzoru widać odrazu, że dość uczynić $\sin^2 \omega$ dostatecznie małem, by całka stała się dowolnie małą. Widzimy tedy, że gdy do krzywych możliwych w zagadnieniu dołączymy i linie łamane, to zagadnienie nie będzie miało właściwie rozwiązania.

Niedawno Starkow w pracach wyżej cytowanych, poddawszy na nowo badaniu to pytanie, mniemał, że rozwiązał zagadnienie powyższe wraz ze wszystkiemi innnemi tej samej natury przez przyjęcie za zmienną niezależną nie zmiennej x, lecz łuku s, i to bez założenia z góry, że $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$. Doszedł on do krzywej, którą znalazł był Legendre jako krzywą najmniejszą bezwzględnie, gdy tymczasem w zagadnieniu tem przybywa warunek, by łuk krzywej, zawarty pomiędzy punktami A i B, miał wartość stałą. Starkow nie spostrzegł, że, jeżeli przyjąwszy łuk s za zmienną niezależną, przy stosowaniu wzorów rachunku waryacyjnego otrzymał rezultat odmienny, to zależało to jedynie od faktu, że postępując tak, albo zmieniamy naturę zagadnienia, albo też dochodzimy do rezultatu złudnego. Jeżeli bowiem zwrócimy uwagę na granice całkowania względem s (czego rzeczony wyżej autor nie uczynił), widać, że gdy te granice z góry ustalimy, to rezultat otrzymany stosować się będzie do zagadnienia, rozpatrzonego już przez Legendre'a, w którem zakłada się, że długość łuku zawartego pomiędzy dwoma punktami A i B, jest stała. Jeżeli zaś zechcemy uważać granice całkowania s_0, s_1 za zmienne, wtedy powtarzając nasze powyższe rozumowania oraz rozumowanie Lagrange'a, łatwo poznać, że całka nie posiada minimum, gdy do szukanych linij włączamy i łamane. Zresztą można przekonać się łatwo na rachunku Starkowa, że rozwiązanie zagadnienia jest złudne. W tym przypadku bowiem waryacye δs_0, δs_1 są różne od zera; aby więc waryacya całki była zerem, trzeba koniecznie, by ilości:

$$\left[y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3\right]_0, \quad \left[y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3\right]_1,$$

które są spółczynnikami przy δs_0, δs_1 w wyrażeniu waryacyi całki, były zerami w punkcie A, oraz w punkcie B. Starkow zaś znajduje, że krzywa powinna mieć równanie (patrz niżej):

$$y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 = c_1,$$

gdzie c_1 jest oczywiście różnem od zera (p. Bulletin de la Société mathématique de France, t. XIII, str. 138).

Spostrzeżenia tego rodzaju, odnoszące się do rozważań Starkowa, uczynili też Sonin (w Zapiskach Tow. Odeskiego, t. VI, str. 1 i 93) i August (Crelle, t. 103, str. 22).

Na zakończenie tych rozważań powiemy jeszcze krótko o łatwym sposobie badania innego wspomnianego już przez nas zagadnienia, w którem dołącza się warunek, by łuk s, zawarty pomiędzy dwoma punktami, był długości stałej. Mamy wtedy zagadnienie, należące z istoty swej do zagadnień izoperymetrycznych, dające się wszakże traktować jako zagadnienie na maximum bezwzględne, jeżeli przyjmiemy s za zmienną niezależną, co łatwo uczynić możemy, ponieważ w całce specyalnej, którą badamy, zmienna x w sposób wyraźny nie występuje. Możemy wtedy stosować zwykłą metodę waryacyj i otrzymujemy:

$$F = y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3; \quad M = \frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{dy}{ds}\right)^3;$$

$$M' = \frac{\partial F}{\partial \frac{dy}{ds}} = 3y\left(\frac{dy}{ds}\right)^2,$$

a stąd:

$$M - \frac{dM'}{ds} = \left(\frac{dy}{ds}\right)^3 - 3\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 - 6y\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}$$

$$= -2\frac{dy}{ds}\left(\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + 3y\frac{d^2y}{ds^2}\right).$$

Przyrównywając do zera to wyrażenie, znajdziemy albo rozwiązanie $\frac{dy}{ds} = 0$, które przedstawia prostą równoległą do osi x, a więc wogóle nie przedstawia krzywej, przechodzącej przez punkty A i B, albo też równanie

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + 3y\,\frac{d^2y}{ds^2} = 0,$$

którego całką jest

$$y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 = \text{stałej} = c_1.$$

Podstawiając zamiast różniczki ds jej wartość

$$ds = dy\,\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'},\ \text{gdzie}\ y' = \frac{dy}{dx},$$

mamy:

$$y = c_1\,\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'^3}\,.$$

Tak wyraża się y w funkcyi ilości y'; dla otrzymania wyrażenia na x należałoby stosować sposób, wyżej w podobnej okoliczności wskazany.

Różnica pomiędzy tym rezultatem a rezultatem, podanym przez N e w t o n a, polega na tem że licznik strony drugiej ma wykładnik $\frac{3}{2}$ zamiast wykładnika 2.

---

§ 31.

Zagadnienie o brachystochronie.

Gdy zagadnienie N e w t o n a, traktowane w poprzedzającym paragrafie, nie zwróciło było na się w swoim czasie szczególnej uwagi analistów, to przeciwnie, zagadnienie o brachystochronie zrodziło, rzec można, rachunek waryacyjny tak, że historya tego zagadnienia zlewa się z historyą początków rachunku waryacyjnego.

Zagadnienie o brachystochronie podał Jan Bernoulli (Acta Erud., czerwiec, 1696, str. 269, Programma edit. Groningae, 1697), i sam je rozwiązał (Acta Erud., maj, 1698, str. 206)*). Jednocześnie (Act. Erud., 1697, str. 211) pojawiło się inne rozwiązanie tego zagadnienia, podane przez Jakóba Bernoulli'ego, który postawił nadto zadania ogólniejszej natury, objęte następnie pod ogólną nazwą zagadnień izoperymetrycznych. Jan Bernoulli ogłosił pracę, poświęconą tym zagadnieniom ogólniejszym (Recueil de Paris, 1706), lecz ta była błędna i grzeszyła przeciwko zasadom rachunku różniczkowego. Ważniejszą była praca Jakóba Bernoulli'ego: „Analysis magni problematis isoperimetrici" (Acta, 1701), po której nastąpiło rozwiązanie Taylora w dziele „Methodus incrementorum etc.", a dalej znów prace Jana Bernoulli'ego (Acad. de Paris, 1718) i Eulera (Comm. Ac. Petrop., t. VI, 1732—1733). Euler przeszedł następnie do badania przypadku ruchu, odbywającego się w ośrodku, stawiającym opór, lecz dał niedokładne rozwiązanie tego zagadnienia (Comm. Ac. Petrop., t. VII, 1734—35, „Mechanica etc.", t. II, Petersburg, 1736, Comm. Acad. Petrop., t. VIII, 1736). Pierwszą prawdziwie ważną pracą Eulera o tym przedmiocie jest wspomniane we wstępie dzieło „Methodus inveniendi etc." (1744), w którem w § 34 mowa jest o brachystochronie. Wspomnijmy jeszcze, że zagadnienie o brachystochronie, jest przykładem głównym, traktowanym przez Lagrange'a w sławnej rozprawie „Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales définies" w Miscellanea Taurinensia, t. II, 1760—1761; że toż samo zagadnienie było badane na nowo w tomie IV-ym tegoż zbioru, w założeniu, że punkty skrajne określonemi nie są, lecz są danemi krzywe na płaszczyznie, na których te punkty znajdować się powinny (patrz „Oeuvres etc." t. II, str. 58); że wreszcie z okoliczności nowego przedstawienia metody waryacyj, Lagrange traktował raz jeszcze zagadnienie o linii najkrótszego spadku w ośrodku, stawia-

*) Por. Nr. 46 wielokrotnie cytowanego wydawnictwa Ostwalda.

jącym opór, uważany za funkcyę dowolną prędkości. (Calcul des fonctions, Leçon, 22-ième, „Oeuvres“, t. X, p. 440). Później zagadnieniem tem zajmowali się Borda, Legendre (prace ich cytowane we Wstępie). Co do przypadków nieciągłości patrz Todhundter: „Researches etc.“, Londyn, 1871, rozdz. VII, str. 126.

Zagadnienie o brachystochronie jest następujące:

Jaką drogę powinno opisać ciało poruszające się, ożywione prędkością początkową v_0 i poddane jedynie sile ciężkości, aby w czasie możliwie najkrótszym przeszło od punktu o spółrzędnych x_0, y_0, z_0, do innego punktu o spółrzędnych x_1, y_1, z_1 w założeniu, że ośrodek, wewnątrz którego ruch się odbywa, albo jest próżnią, albo też stawia opór, będący funkcyą prędkości poruszającego się ciała.

Jeżeli przyjmiemy, że oś x jest linią pionową i oznaczymy, jak zwykle, przez g stałą ciążenia, to, jak wiadomo z zasad mechaniki, różnica między kwadratem prędkości, którą posiadać będzie w jakiejkolwiek chwili ciało poruszające się, a kwadratem prędkości początkowej, będzie proporcyonalna do wysokości spadku, t. j. że jest:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g\,(x_0 - x)}\,.$$

Ponieważ $v = \dfrac{ds}{dt}$, otrzymujemy więc:

$$t = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{ds}{\sqrt{v^2 + 2g\,(x_0 - x)}}$$

i zadanie sprowadza się do wyznaczenia minimum całki w tym wzorze. Wprowadzając x jako zmienną niezależną, mamy:

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2g\,(x_0 - x)}}\,dx\,,$$

gdzie y', z', są pochodnemi ilości y i z względem x.

Oznaczając, jak zwykle, przez M, M' pochodne funkcyi pod znakiem całkowym względem y i y' i analogicznie przez N i N' pochodne tejże funkcyi względem z i z', będziemy mieli:

$$M = 0, \quad N = 0,$$

$$M' = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \cdot \sqrt{v_0^2 + 2g(x_0 - x)}},$$

$$N' = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \cdot \sqrt{v_0^2 + 2g(x_0 - x)}};$$

a ponieważ (porówn. § 3):

$$H_1 = M - \frac{dM'}{dx}, \quad H_2 = N - \frac{dN'}{dx},$$

$$K_1 = M', \quad K_2 = N',$$

przeto:

$$H_1 = -\frac{d}{dx} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \cdot \sqrt{v_0^2 + 2g(x_0 - x)}},$$

$$H_2 = -\frac{d}{dx} \cdot \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \cdot \sqrt{v_0^2 + 2g(x_0 - x)}},$$

$$K_1 = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \cdot \sqrt{v_0^2 + 2g(x_0 - x)}},$$

$$K_2 = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \cdot \sqrt{v_0^2 + 2g(x_0 - x)}}.$$

Waryacya całki będzie:

$$\delta t = \left[F\,\delta x + K_1\,\delta y + K_2\,\delta z\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (H_1\,\delta y + H_2\,\delta z)\,dx,$$

a dla wyznaczenia funkcyj szukanych będziemy mieli dwa równania różniczkowe: $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, które dają:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,.\,\sqrt{v_0^2+2g\,(x_0-x)}} = c_1,$$

$$\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,.\,\sqrt{v_0^2+2g\,(x_0-x)}} = c_2,$$

gdzie c_1 i c_2 są stałemi. Stąd zaś wynika:

$$\frac{y'}{z'} = \text{const} = \frac{c_1}{c_2},$$

$$y' = \frac{c_1}{c_2}\,z',$$

a po zcałkowaniu:

$$y = \frac{c_1}{c_2}\,z + c,$$

gdzie c jest stałą dowolną. To równanie pokazuje, że krzywa szukana znajduje się w płaszczyźnie pionowej. Weźmy za płaszczyznę xy tę płaszczyznę pionową, której równanie będzie zatem $z = 0$; otrzymujemy je z poprzedzającego równania, kładąc $c_2 = 0$. Wstawiając tą wartość z do równania:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,.\,\sqrt{v_0^2+2g\,(x_0-x)}} = c_1,$$

i rozwiązując względem y', znajdujemy:

$$y' = \sqrt{\frac{a-x}{b+x}},$$

gdzie $a = x_0 + \dfrac{v_0^2}{2g}$, $b = \dfrac{1}{2g\,c_1^2} - x_0 - \dfrac{v_0^2}{2g}$.

Jeżeli położymy:

$$x = \frac{a-b}{2} - \frac{a+b}{2}\cos t,$$

będzie

$$y' = \frac{a+b}{2}(1-\cos t); \quad y = \frac{a+b}{2}(t - \sin t) + c.$$

Spółrzędne x, y krzywej szukanej, wyrażone w funkcyi zmiennej t, będą tedy:

$$x + b = \frac{a+b}{2}(1-\cos t), \quad y - c = \frac{a+b}{2}(t - \sin t),$$

co pokazuje, że krzywa szukana jest c y k l o j d ą o p o d s t a w i e p o z i o m e j.

Jeżeli dwa punkty skrajne krzywej są z góry dane, wtedy waryacye odpowiednie trzech spółrzędnych x, y, z są zerami, a część pierwsza wyrażenia na δt jest tożsamościowo zerem; dwie zaś stałe c i c_1, zachodzące w otrzymanych równaniach, wyznaczają się z warunku, by krzywa przechodziła przez dwa punkty dane.

Dajmy, że z góry dany jest tylko punkt początkowy i że punkt końcowy ma się znajdować na krzywej, położonej w płaszczyźnie pionowej. Weźmy tę płaszczyznę za płaszczyznę x, y i niechaj równaniem krzywej będzie $\varphi = 0$. Waryacye δz_0, δz_1, δx_0, δy_0 są zerami, waryacye zaś δx_1, δy_1 powinny czynić zadość związkowi:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_1 (y'_1\, \delta x_1 + \delta y_1) = 0,$$

Przyrównawszy do zera pierwszą część waryacyi całki, otrzymujemy:

$$(F)_1\, \delta x_1 + (M')_1\, \delta y_1 = 0,$$

a równanie to wraz z poprzedzającem, jeżeli położymy jeszcze $z = 0$ i podstawimy zamiast F i M' ich wartości, doprowadza do związku:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{1+y'^2_1}, & \dfrac{y'_1}{\sqrt{1+y'^2_1}} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1} y'_1, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1} \end{vmatrix} = 0,$$

Wyznacznik ten sprowadza się łatwo do postaci:

$$\begin{vmatrix} 1, & y'_1 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1} \end{vmatrix} = 0,$$

która wyraża własność, że krzywa najszybszego spadku przecina ortogonalnie daną krzywą φ.

Związek ten wraz z równaniem $\varphi = 0$ wyznacza punkt x_1, y_1; znając zaś ten punkt oraz uwzględniając dany punkt początkowy, wyznaczamy dwie stałe całkowania.

Jeżeli punkt początkowy x_0, y_0, z_0 nie jest dany, lecz z góry jest oznaczonem, że ma się znajdować na pewnej krzywej danej ψ, wtedy można zastosować podobną do powyższej analizę; trzeba wszakże pamiętać o tem, że parametr x_0, zachodzący w funkcyi F, nie może być uważany za ilość stałą, lecz należy go poczytywać jako ilość zmienną wraz z waryacyą ilości y, jako funkcyi ilości x (patrz § 2). Jeżeli natomiast będziemy uważali v_0 za ilość zmienną taką, że $v_0^2 + 2g\,x_0$ jest ilością stałą, np. zerem, t. j. że prędkość początkowa jest proporcyonalna do pierwiastka kwadratowego z wysokości spadku; lub innemi słowy, jeżeli przyjmiemy, że prędkość początkowa jest równą prędkości spadku ciała swobodnie i pionowo spadającego po osi y aż do punktu x_0, y_0, wtedy w funkcyi F ilość x_0 nie będzie występowała już jaka zmienna. W tym to przypadku będzie można postąpić jak wyżej i znajdziemy wtedy, że trajektorya ciała ruchomego jest ortogonalna tak do krzywej ψ, jak i do krzywej φ.

W tem właśnie badaniu Lagrange, jak już wspomniano we Wstępie, popełnił błąd (§ 4 jego rozprawy ogłoszonej w tomie II Miscell. Taur.); pierwszy Borda ten błąd spostrzegł i poprawił (Mém. de Paris, 1768), poczem Lagrange (w t. IV Miscell. Taur., t. IV, § 8) dał już dokładne rozwiązanie zagadnienia.

Jak się traktuje zagadnienie w przypadku, gdy ciało ruchome ma poruszać się w ośrodku, którego opór jest funkcyą prędkości ciała, można widzieć w „Rachunku funkcyj" Lagrange'a (także „Oeuvres", t. X, str. 440). Podobnież możnaby badać przypadek, w którym dana jest góry powierzchnia, na której leżeć ma trajektorya.

---

§ 32.

Zagadnienie o krzywej najmniejszej długości. Linie geodezyjne powierzchni.

Zagadnienie to jest najłatwiejszem pomiędzy zagadnieniami, do których stosujemy rachunek waryacyjny. Warunki tego zagadnienia mogą być najrozmaiciej zmieniane: można wyobrazić sobie, że albo danemi są punkty skrajne krzywej; albo danemi są krzywe lub powierzchnie, na których te punkty znajdować się mają, gdy zresztą sama krzywa pozostaje wolną w przestrzeni; albo wreszcie przyjmuje się, że cała krzywa powinna leżeć na powierzchni z góry danej. W tym ostatnim przypadku, najbardziej godnym uwagi, mamy tak nazwane linie geodezyjne na powierzchni; są to linie posiadające długość najmniejszą pomiędzy wszystkiemi liniami, leżącemi na powierzchni i przechodzącemi przez też same dwa jej punkty. W geometryi różniczkowej linie geodezyjne określane bywają inaczej, mianowicie, jako linie, których normalna główna w każdym z ich punktów zlewa się z normalną do powierzchni. Jest to jedna z najważniejszych własności linij geodezyjnych.

Zagadnienie o linii najkrótszej, traktowane ze stanowiska teoryi waryacyj, znajdujemy już w dziełach pierwszych wynalazców rachunku waryacyjnego; stanowi ono paragraf 33-ci sławnej pracy Eulera: „Methodus inveniendi etc.“ i jest obszernie traktowane w lekcyi 22-giej „Rachunku funkcyj“ Lagrange'a.

W ostatnich czasach Du Bois-Reymond (Math. Ann., t. XV), podjąwszy ściśle badanie metod rachunku waryacyjnego dla przekonania się, do jakiego stopnia metody te utrzymują się w obec krytyki, wybrał jako przykład zadanie o linii najkrótszej i na tem zagadnieniu oparł wszystkie rozważania rozprawy.

Całka, przedstawiająca długość linii w przestrzeni, jest:

$$\int \sqrt{1+y'^2+z'^2}\, dx.$$

mamy tu tedy:

$$F = \sqrt{1+y'^3+z'^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

$$M'_1 = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}; \quad M'_2 = \frac{\partial F}{\partial z'} = \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}.$$

Stosując zwykłe wzory rachunku waryacyjnego, będziemy mieli tedy dwa dwa równania różniczkowe:

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0; \quad \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0,$$

z ktorych wynika:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = \text{const}; \quad \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = \text{const},$$

a więc także:

$$y' = \text{const}; \quad z' = \text{const}.$$

Po zcałkowaniu tych ostatnich równań otrzymujemy:

$$y = cx + c'; \quad z = c_1x + c_1';$$

są to równania prostej w przestrzeni.

Jeżeli danemi są punkty skrajne linii, to wyznaczymy cztery stałe z warunków, aby powyższe równania spełniały się dla $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, lub $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$.

Jeżeli danym jest tylko punkt pierwszy, drugi zaś ma się znajdować na powierzchni, której równaniem jest $\varphi(x, y, z) = 0$, wtedy δx_0, δy_0, δz_0 są także zerem, lecz δx_1, δy_1, δz_1 nie są już równe zeru. Te ostatnie waryacye są połączone związkiem:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(\delta y_1 + y_1'\,\delta x_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}(\delta z_1 + z_1'\,\delta x_1) = 0.$$

Pierwsza część waryacyi całki na mocy wzorów ogólnych jest równa:

$$(F)_1\,\delta x_1 + (M_1')\,\delta y_1 + (M_2')\,\delta z_1$$

i powinna znikać, gdy δx_1, δy_1, δz_1 są połączone powyższym związkiem. Mnożąc ostatnie wyrażenie przez $\sqrt{1 + {y'_1}^2 + {z'_1}^2}$ i przyrównywając je do zera, znajdujemy:

$$(1 + {y'_1}^2 + {z'_1}^2)\,\delta x_1 + y'_1\,\delta y_1 + z'_1\,\delta z_1 = 0,$$

lub

$$1\,.\,\delta x_1 + y'_1(\delta y_1 + y'_1\,\delta x_1) + z'_1(\delta z_1 + z'_1\,\delta x_1) = 0.$$

Ponieważ ten związek powinien istnieć równocześnie ze związkiem poprzednio podanym, przeto minory macierzy:

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_1} \\ 1, & y'_1, & z'_1 \end{matrix}\right\|,$$

powinny być zerem. Geometrycznie oznacza to, że prosta spotyka normalnie powierzchnię φ.

Zajmujemy się obecnie innem zagadnieniem.

Przez dwa punkty dane powierzchni $\varphi(x, y, z) = 0$ przeprowadzić linię, położoną całkowicie na powierzchni i mającą długość najmniejszą.

Jest to zagadnienie z gatunku zagadnień izoperymetrycznych; aby je rozwiązać, należy (według prawidła Eulera) całkę:

$$\int [\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda\varphi(x, y, z)]\, dx,$$

gdzie λ jest stałą nieoznaczoną, uczynić najmniejszą. Możemy wykonać rachunki te same, co w przypadku poprzednim, i otrzymamy, że drugą częścią waryacyi całki jest wyrażenie:

$$\int \left[\left(M_1 - \frac{dM'_1}{dx}\right)\delta y + \left(M_2 - \frac{dM'_2}{dx}\right)\delta z\right] dx$$

$$= - \int \left\{\left[- \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\delta y \right.$$

$$\left. + \left[- \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]\delta z\right\} dx,$$

skąd:

$$- \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0,$$

$$- \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Te związki można napisać w postaci:

$$- d \,.\, \frac{dy}{ds} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial y}\, dx = 0,$$

$$- d \,.\, \frac{dz}{ds} + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial z}\, dx = 0.$$

Mnożąc pierwsze równanie przez dy, drugie przez dz, dodając je i uwzględniając związki tożsamościowe

$$dx \,.\, d\,\frac{dx}{ds} + dy \,.\, d\,\frac{dy}{ds} + dz \,.\, d\,\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$dx\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + dy\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + dz\,\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

znajdujemy:

$$-\,d\,.\frac{dx}{ds} + \lambda\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx = 0.$$

Z tego związku i z analogicznych wynika, że ilości:

$$d\,\frac{dx}{ds},\; d\,\frac{dy}{ds},\; d\,\frac{dz}{ds},$$

są proporcyonalne do ilości:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x},\; \frac{\partial \varphi}{\partial y},\; \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Te ostatnie są proporcyonalne do dostaw kierunkowych normalnej do powierzchni, gdy pierwsze są proporcyonalne do dostaw kierunkowych normalnej głównej do krzywej danej (por. „Rachunek różniczkowy", str. 247, 253); wynika stąd, że krzywa najmniejszej długości na powierzchni ma własność, że jej normalna główna zlewa się z normalną do powierzchni. Takie krzywe nazywają się liniami geodezyjnemi powierzchni; badanie tych linij należy do geometryi różniczkowej.

Do prac, w których badanie linij geodezyjnych uskutecznia się ze stanowiska rachunku waryacyjnego należą prace: Bertranda w dodatku do tomu II „Mechaniki analitycznej" Lagrange'a wyd. z r. 1851 i Bonneta w Comptes Rendus, t. XL—XLI (1855).

§ 33.

Powierzchnie o polu najmniejszem.

Pomijając przypadek bardzo szczególny, traktowany przez Eulera w jego pracy: „Methodus inveniendi etc.", należy Lagrange'a uważać za pierwszego badacza, który w wielokrotnie cytowanej przez nas rozprawie (Misc. Taur., t. II) zastosował rachunek waryacyjny do zagadnienia, mającego za przedmiot powierzchnie o polu najmniejszem, zamkniętem przez dany obwód, i wyprowadził dla tych powierzchni równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych. Nadzwyczaj liczne późniejsze prace o tym przedmiocie nie odnoszą się właściwie do rachunku waryacyjnego, ponieważ zajmują się całkowaniem rzeczonego równania różniczkowego i własnościami powierzchni najmniejszych. Badanie tego równania różniczkowego było przedmiotem kolejnych prac Meusniera (1776), Monge'a (1784), Legendre'a (1787), Ampère'a (1820). Następnych licznych prac w tym kierunku wymieniać nie będziemy, ponieważ, jak powiedziano, do rachunku waryacyjnego właściwie nie należą; wystarczy odesłanie czytelnika do wskazówek, zawartych w rozprawach Beltrami'ego (Accad. di Bologna, t. VII, 1868) i Schwarza (Crelle, t. LXXX, 1875), do dzieła Darboux'a (Théorie des surfaces, t. I, 1887), do rozprawy W. Howego (Berlin, 1887), wreszcie do najnowszej książki Bianchi'ego (Geometria differenziale, Piza, 1894, przekład niemiecki, Lipsk, 1896).

Pole powierzchni wyraża się całką:

$$I = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy;$$

waryacyę tej całki należy przyrównać do zera, w założeniu, że granice całkowania są stałemi.

Jeżeli oznaczymy przez p i q pochodne cząstkowe funkcyi z, to z uwagi, że granice całkowania są stałemi i że pierwsza z dwóch całek we wzorze, nazwanym przez nas wzorem Delaunay'a (patrz § 29), jest zerem, otrzymamy:

$$\delta I = \iint dx\, dy \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial q}\right]\delta z = 0,$$

skąd wynika, że

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0,$$

stanowi równanie o pochodnych cząstkowych powierzchni najmniejszej.

Równanie to wskazuje własność osobliwą tych powierzchni, mianowicie, że promienie główne jej krzywizny są równe i znaków przeciwnych (Meusnier). Jeżeli rozwiązania tego równania są jednej z trzech postaci:

$$z = f(x^2+y^2);\quad z = f\left(\frac{y}{x}\right);\quad z = f(x) + f(y),$$

mamy trzy specyalne powierzchnie najmniejsze, noszące odpowiednio nazwy: katenojdy, helisojdy prostoliniowej (Meusnier) i powierzchni przesunięcia (Scherk, 1834).

Jeżeli nie jest dana część obwodu, lecz tylko danem jest, że obwód lub część jego ma się znajdować na powierzchni danej, znajdujemy wtedy rezultat, że powierzchnia najmniejsza przecina powierzchnię daną pod kątem prostym. Własność ta może być uważana za uogólnienie własności, odnoszącej się do krzywych o długości najmniejszej, które można poprowadzić od punktu danego do powierzchni danej.

§ 34.

Różne zagadnienia rachunku waryacyjnego.

W tym paragrafie wymienimy pospolitsze zagadnienia rachunku waryacyjnego i podamy niektóre wskazówki, odnoszące się do każdego z nich.

Większość tych zagadnień znajduje się już w sławnej pracy Eulera, który zebrał i zbadał wielką ich liczbę. Przez zagadnienie o brachystochronie, które rozpatrzyliśmy w § 31, stały się sławnemi zagadnienia izoperymetryczne, nazwane tak, jak wiadomo, dlatego, że szło w nich o znalezienie pomiędzy krzywemi, mającemi równy obwód, takich krzywych, które posiadały pewną określoną własność w stopniu największym lub najmniejszym. Pierwszy zagadnienia te badał Jakób Bernoulli (Acta Erudit., maj, 1697). Na końcu swej rozprawy, w której rozwiązuje w odmienny sposób zagadnienie o brachystochronie, postawione przez Jana Bernoulli'ego, wymienia on niektóre łatwiejsze zagadnienia izoperymetryczne, np.: pomiędzy krzywemi o jednakowym obwodzie znaleść krzywą, ograniczającą pole największe; pomiędzy krzywemi o danym obwodzie znaleść krzywą, dla której środek ciężkości pola lub linii znajduje się w największej odległości od podstawy. (Zagadnienia te zostały już rozwiązane najprzód przez geometrów greckich, następnie przez Jana Bernoulli'ego. (Dzieła, t. III, str. 497). Wreszcie postawił on następujące zagadnienie, przez siebie, jak twierdził, rozwiązane. które my tu powtórzymy, jako pierwsze z pomiędzy zagadnień zbioru poniższego.

1. Nakreślić krzywą długości danej, przechodzącą przez dwa punkty dane, i taką, że, gdy nakreślimy pomiędzy temi samemi punktami inną krzywą, której rzędne są potęgą lub pierwiastkiem odpowiednich rzędnych lub odpowiednich łuków pierwszej krzywej, to pole drugiej krzywej będzie maximum.

W przypadku szczególnym, gdy rzędna drugiej krzywej ma być równa odpowiedniemu łukowi pierwszej, otrzymujemy linię łańcuchową. Patrz co do tego przedmiotu: Mommsen „Elementa calculi variationum etc.", Altona, 1833, str. 45, oraz Todhunter „Researches etc.", Londyn, 1871, str. 220.

2. Pomiędzy wszystkiemi wielokątami zamkniętemi, mającemi boki równe odcinkom danym, znaleść wielokąt o polu największem.

Dowodzi się, że wielokąt szukany jest wielokątem wpisanym w koło. Zagadnienie to rozwiązał Lagrange za pomocą rachunku waryacyjnego w rozprawie „Nouvelle méthode etc." (Miscel. Taur., t. II), Cramer zaś rozwiązał je syntetycznie (Akad. Berlińska, 1752).

Analogicznem zagadnieniem, odnoszącem się do wielościanów o danej powierzchni i największej objętości zajmował się Lindelöf (Math. Ann., t. II, str. 150).

Jeżeli w zagadnieniu tego rodzaju idzie nie o wielokąt lecz o krzywą, mającą obwód dany, wtedy otrzymujemy okrąg koła. Twierdzenie to zostało już dowiedzione przez Zenodora i przekazane nam przez Pappusa (patrz Cantor, Geschichte der Mathematik, t. I, str. 308). Lagrange w § 8 swej rozprawy, ogłoszonej w pismach Akademii paryskiej w r. 1786, bada szczegółowo to zagadnienie ze stanowiska rachunku waryacyjnego; znajdujemy je także w rozdziale V, § 41 pracy: „Methodus inveniendi etc." Eulera. Zagadnieniami tego rodzaju na płaszczyźnie, na kuli i w przestrzeni z punktu widzenia czysto-geometrycznego zajmuje się Steiner w obszernej rozprawie, ogłoszonej w t. XXIV dziennika Crellego, str. 93 i 189 (p. dziennik Liouville'a, t. VI).

3. Pomiędzy dwoma punktami lub dwiema krzywemi danemi nakreślić krzywą taką, by ciało ciężkie, po niej spadające, osiągała w końcu spadku prędkość największą.

Zagadnieniem tem zajmuje się Lagrange na końcu ostatniej lekcyi swojego „Rachunku funkcyj" (p. Oeuvres, t. X str. 448). Jeżeli punkty skrajne znajdować się mają na dwóch krzywych danych, wtedy znajdujemy, że styczne do tych krzywych w punktach skrajnych winny być równoległemi. Jestto własność analogiczna do własności, jaką posiada brachystochrona.

4. Pomiędzy krzywemi o danym obwodzie, przechodzącemi przez dwa punkty dane, nakreślić krzywą, dla której środek ciężkości linii znajduje się w największej odległości od podstawy.

Zagadnienie to rozwiązał błędnie Galileusz (1638), który sądził, że żądana krzywa jest parabolą; potem zajmowali się niem bracia Bernoulli'owie Jan i Jakób, Huygens i Leibniz (Acta Erud. 1690—1692). Szukana krzywa jest linią łańcuchową; promień jej krzywizny równa się długości odcinka normalnej, zawartego pomiędzy krzywą a osią x, lecz ma kierunek przeciwny kierunkowi tej normalnej.

Dla rozwiązania tego zagadnienia należy znaleść maximum całki

$$\int (y+a)\, ds,$$

gdzie a jest ilością nieoznaczoną, gdyż

$$\frac{1}{s}\int y\, ds,$$

jak wiadomo z mechaniki, równa się rzędnej środka ciężkości linii.

Legendre, w § 7 rozprawy, ogłoszonej w r. 1786 w Mém. de l'Acad. de Paris, zajmuje się tem zagadnieniem. Patrz Mayer, Math. Ann., t. XIII, str. 65.

Zagadnienia poniższe od n-ru 5 do 11-go są wszystkie podane i rozwiązane w sławnej, wielokrotnie cytowanej przez nas rozprawie Eulera: „Methodus inveniendi etc."

5. Przez dwa punkty przeprowadzić krzywą taką, aby pole, zawarte pomiędzy nią sa-

mą, jej rozwiniętą i normalnemi w punktach skrajnych, było możliwie najmniejszem.

Krzywa żądana jest gałęzią cyklojdy (Euler, l. c Cap. II, § 51). Porówn. Jellet, Variationsrechnung, str. 191 i 422 i Todhunter „Researches etc.", str. 250.

6. Pomiędzy krzywemi, łączącemi dwa punkty dane i wytwarzającemi przez obrót naokoło osi powierzchnie o polach równych, znaleść krzywą, dla której taka powierzchnia zamyka największą objętość. (Euler, l. c., Cap. V, § 44).

Zagadnienie to dało powód do wielu kontrowersyj. Porówn. Moigno-Lindelöf „Calcul des variations", str. 218 oraz Greve: „Ein Problem aus der Variationsrechnung", Getynga, 1875.

7. Pomiędzy krzywemi, przechodzącemi przez dwa punkty i zamykającemi to samo pole, znaleść krzywe, które obrotem około danej osi wytwarzają powierzchnię o polu najmniejszem.

Znajdujemy krzywą trzeciego rzędu z punktem podwójnym.

8. Pomiędzy krzywemi o równym obwodzie, przechodzącemi przez dwa punkty, znaleść krzywe, które obrotem około osi danej wytwarzają ciało o największej objętości. (Euler, l. c., Cap., § 46).

Otrzymujemy tak nazwaną krzywą sprężystą, mającą tę własność, że promień jej krzywizny jest odwrotnie proporcyonalny do odciętej.

9. Znaleść krzywą, która pomiędzy wszystkiemi krzywemi równoobwodowemi posiada własność wytwarzania przez obrót około osi powierzchni o polu największem lub najmniejszem (tamże, Cap., V, § 47).

Szukana krzywa jest krzywą łańcuchową, otrzymana zaś powierzchnia nazywa się katenojdą (Plateau). Porówn. Goldschmidt: „Determinatio superf. min. etc.", Getynga, 1831, Lindelöf: „Sur les limites entre lesquelles la catenoide est une surface minime" (Math Ann., t. II, str. 160, 1870).

10. Pomiędzy wszystkiemi krzywemi równoobwodowemi, zamykającemi pole jednakowe, znaleść te krzywe, które obrotem około osi wytwarzają powierzchnię, zamykającą objętość największą lub najmniejszą (tamże, t. VI, str. 22).

Znajdujemy krzywą sprężystą.

11. Pomiędzy wszystkiemi krzywemi o tej samej odciętej, zamykającemi pole jednakowe i wytwarzającemi przez obrót około osi powierzchnie, zamykające tęż samą objętość, znaleść krzywe, których środek ciężkości znajduje się najniżej lub najwyżej (tamże, VI, 23).

Znajdujemy linię prostą.

12. Dane są dwie płaszczyzny równoległe i punkt na jednej z nich; poprowadzić z tego punktu do drugiej płaszczyzny linię danej długości taką, aby pole powierzchni walcowej, którą otrzymujemy, prowadząc z różnych punktów linii prostopadłe do obu płaszczyzn i na tych płaszczyznach kończące się, było największem.

Znajdujemy helisę, Patrz Moigno: „Calcul des variations", Paryż, 1861, str. 299 i Starkow, Rend. di Palermo, t. IV, str. 117. Przy ostatniej pracy trzeba mieć na pamięci uwagi, podane przez nas w § 30 o innej pracy tegoż autora.

13. Ustaliwszy dwie rzędne, przeprowadzić z punktu pierwszej do punktu drugiej krzywą taką, aby figura określona przez oś odciętych, dwie rzędne oraz samą krzywą, miała obwód z góry dany i pole największe. Patrz Challis: „On the solution of three problems etc." (Phil. Mag., 1872).

14. Znaleść powierzchnię o danem polu, zamykającem największą objętość. Patrz Sarrus w Mém. des Sav. étrang., t. X, 1846, Sabinin w Zbiorniku Tow. mat. w Moskwie, t. XIV, str. 451, 1880.

15. Znaleść krzywą o krzywiźnie pierwszej stałej, o punktach skrajnych, położonych na dwu danych krzywych lub powierzchniach, mającą długość największą lub najmniejszą.

Zagadnienie to badał pierwszy Delaunay, po nim zaś Jellet i Todhunter. Najnowszą pracą o tym przedmiocie jest rozprawa Venske'go, premiowana na konkursie w Getyndze, 1891.

16. Wyznaczyć krzywą, której moment bezwładności w odniesieniu do punktu danego jest najmniejszy lub największy.

Euler rozwiązał zadanie to błędnie; dokładne rozwiązanie podał Ossian-Bonnet w Dzienniku Liouville'a, t. IX, str. 97, 1844.

Analogiczne zagadnienie traktuje De la Goupillière w rozprawie „Sur le minimum du potentiel de l'arc", w Ass. Franç., Besançon, t. XXII, str. 164 (1893).

Rozmaite zagadnienia z dziedziny rachunku waryacyjnego znajdujemy nadto w pracach następujących autorów: Minding (Dziennik Crellego, V, 1830); Spitzer (Archiv Grunerta, t. XXIII, str. 125, 1854); Schellbach: „Probleme der Variationsrechnung" (Dziennik Crellego, t. XLI, str. 293, 1851; Walton: „On a problem in the calculus of variations" (Quart. Journ., X, p. 72, 1869); Borchardt: „Ueber das Ellipsoid von kleinstem Volumen bei gegebenen Flächeninhalte einer Anzahl von Centralschnitten" (Berl. Monatsber., 1872, str. 505); tenże autor w Berl. Abh., 1866 (zagadnienie o czworościanie); Wilkinson: „Two problems in the calculus of variations" (Messenger, ser. 2-ga, t. I, str. 175, 1872); Korkin i Zołotarew: „Sur un certain minimum etc." (Nouv. Ann., ser. 2-ga, t. XII, str. 337, 1873), Schuringa: „Les trajectoires minima" (Archiv. Néerl., t, VIII, str. 1, 1873); Minding: „Ueber einige isoperimetrische Aufgaben" (Bull. de St.-Péters., t. XXIV, 1877); tenże: „Théorie des courbes du plus petit perimètre sur des surfaces courbes" (Bull. da St.-Péters., t. XXI i XXV, 1876—8); D'Ocagne: „Sur certaines figures minima" (Bull. de la Soc. math. de France, t. XII, str. 168); Posse: „Quelques remarques sur une certaine question de minimum" (Math. Ann., t. XXVI, str. 593, 1886); Markow (w pracach Tow. mat. w Charkowie, serya 2-ga, t. 1, str. 250).

---

§ 35.

Zastosowanie rachunku waryacyjnego do analizy. Warunki całkowalności.

Następujące zagadnienie pozostaje w najściślejszym związku z rachunkiem waryacyjnym.

Dana jest funkcya $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ zmiennych x, y i pochodnych ilości y względem x. Chcemy znaleść, kiedy całka

$$\int F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

może być obliczoną bez uprzedniej znajomości funkcyi y zmiennej x i jej pochodnych; innemi słowy, kiedy funkcya F jest pochodną zupełną pewnej funkcyi φ ilości $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Gdy ten przypadek zachodzi, nazywamy funkcyę F całkowalną. Jest jasnem, jakie znaczenie nadajemy obecnie wyrażeniu „całkowalna"; oznacza ono wprost, że funkcya F daje się całkować, niezależnie od tego, czy funkcya y jest znana lub nie.

Przyjmijmy tedy, że rzeczony przypadek zachodzi i że istnieje funkcya φ; będzie tedy tożsamościowo:

$$F - \frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

Całkując to równanie pomiędzy dwiema granicami, biorąc waryacyę całki i przyrównywając ją do zera, mamy:

$$\delta \int_{x'}^{x''} \left(F - \frac{d\varphi}{dx}\right) dx = 0 = \delta \int_{x'}^{x''} F\, dx - \delta\, [\varphi]_{x'}^{x''}.$$

Obliczmy tę waryacyę i przekształćmy ją według znanego wzoru (patrz § 3). Będzie:

$$[F\,\delta x + K\,\delta y + K'\,\delta y' + \ldots]_{x'}^{x''} - \delta\,[\varphi]_{x'}^{x''}$$

$$- \int_{x'}^{x''} \left[M - \frac{dM'}{dx} + \frac{d^2M''}{dx^2} - \ldots\right] \delta y\, dx.$$

Aby ta waryacya była zerem niezależnie od postaci funkcyi y, trzeba, jak wiemy, by wyrażenie, znajdujące się w niej pod znakiem całkowym, było zerem; otrzymujemy tedy warunek:

$$M - \frac{dM'}{dx} + \frac{d^2M''}{dx^2} - \ldots = 0,$$

gdzie

$$M = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad M' = \frac{\partial F}{\partial y'}, \ldots$$

Jestto właściwie warunek konieczny całkowalności, lecz można łatwo okazać, że jest on zarazem warunkiem dostatecznym.

Istotnie, dla $n = 1$ warunek przybiera postać:

$$M - \frac{dM'}{dx} = 0$$

lub:

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

i jest warunkiem dostatecznym. Gdyż po rozwinięciu otrzymujemy:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}\,y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\,y'' = 0,$$

a ponieważ pierwsze trzy wyrazy nie zawierają ilości y'', musi być przeto:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0,$$

co wskazuje, że funkcya F jest postaci:

$$F = Py' + Q,$$

gdzie ilości P i Q nie zawierają w sobie pochodnej y'. Jeżeli teraz utworzymy funkcyę

$$\varphi = \int P\,dy\,,$$

uważając w funkcyi P tylko ilość y za zmienną, będziemy mieli funkcyę φ zmiennych x i y, której pochodna cząstkowa względem y jest równa P, a zatem:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,y' = Py' + R\,,$$

gdzie funkcya R nie zawiera w sobie pochodnej y'. Stąd wynika, że wyrażenie:

$$F - \frac{d\varphi}{dx} = Q - R$$

nie zawiera w sobie też pochodnej y'. Nie zawiera ono również w sobie ilości y, gdyż funkcya F czyni zadość powyższemu warunkowi (a); temuż warunkowi czyni zadość $\frac{d\varphi}{dx}$, jako zupełna pochodna, a stąd i różnica tych dwu funkcyj, t. j. $Q - R$ temuż warunkowi czynić musi zadość. Ponieważ y' nie zawiera się w tej różnicy, będzie tedy

$$\frac{\partial (Q-R)}{\partial y'} = 0,$$

skąd wynika, że i różnica $Q-R$ nie zawiera w sobie funkcyi y. Różnica ta będzie tedy pewną funkcyą samej zmiennej x, dającą się przedstawić w postaci pochodnej innej funkcyi tejże zmiennej, mianowicie funkcyi:

$$\int \psi (x)\, dx .$$

Znajdujemy więc:

$$F = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d}{dx} \int \psi (x)\, dx ,$$

t. j. że funkcya F daje się wyrazić jako pochodna zupełna pewnej funkcyi zmiennych x i y.

Twierdzenie nasze jest zatem prawdziwem dla $n = 1$. Możemy dowieść, że jeżeli jest prawdziwem aż do skaźnika $n - 1$, to będzie też prawdziwem i dla skaźnika n.

W samej rzeczy, rozwijając równanie warunkowe:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} - \ldots \pm \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0$$

i biorąc pod uwagę to, że wszystkie wyrazy w niem prócz jednego nie zawierają w sobie pochodnej $y^{(2n)}$, znajdujemy, że spółczynnik przy $y^{(2n)}$ powinien być zerem, t. j. być powinno

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} = 0.$$

Stąd wynika, że funkcya F powinna być postaci

$$F = P y^{(n)} + Q,$$

gdzie P i Q nie zawierają w sobie pochodnej $y^{(n)}$. Jeżeli więc utworzymy funkcyę

$$\varphi = \int P\, dy^{(n-1)},$$

gdzie w funkcyi P tylko ilość $y^{(n-1)}$ uważamy za zmienną i ustalimy inne zmienne, w funkcyi P występujące, znajdziemy, że pochodna funkcyi φ względem $y^{(n-1)}$ jest równa P. Będzie przeto:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} = P y^{(n)} + R,$$

gdzie R nie zawiera w sobie pochodnej $y^{(n)}$ i czyni zadość podobnym warunkom jak i funkcya F, gdyż po stronie prawej równości tak F jak i pochodna zupełna $\frac{d\varphi}{dx}$ czyni zadość tym warunkom. Na mocy uczynionego założenia będzie tedy różnica $Q—R$ pochodną zupełną ilości $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$; oznaczywszy tę pochodnę przez $\frac{d\psi}{dx}$ będziemy mieli:

$$F = \frac{d(\varphi + \psi)}{dx},$$

gdzie $\varphi + \psi$ jest funkcyą ilości $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Tym sposobem twierdzenie nasze zostało w zupełności udowodnione.

Podobne rozwiązanie możnaby przeprowadzić i dla przypadku, w którymby w funkcyi F, prócz zmiennej y, zachodziły jeszcze inne zmienne: z, u, v i t. d.

Stosując po kolei k razy powyższe kryteryum, można znaleść warunki na to, aby funkcya rozważanego gatunku była k razy całkowalną (porów. Jellet, l. c., str. 370). Można też stosować podobne rozważania do całek wielokrotnych.

Jeżeli F jest funkcyą k zmiennych, funkcyj tych zmiennych i pochodnych tych funkcyj, to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby całka k-krotna funkcyi F dała się sprowadzić do całki $(k-1)$-krotnej, bez uprzedniej znajomości funkcyj, występujących w wyrażeniu F, jest: by wyraz, znajdujący się pod znakiem całki k-krotnej we wzorze Delaunaya (patrz § 29), był tożsamościowo zerem.

Nie zatrzymujemy się dłużej nad tym przedmiotem i podajemy tylko niektóre odnoszące się do niego wskazówki bibliograficzne.

Twierdzenie o całkowalności, wszakże bez dowodu, podał pierwszy Euler w rozprawie „Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum" (Nov. Com. Petr., t. X, 1764); Condorcet ogłosił dowód bezpośredni tego twierdzenia w Mem. de l'Acad. de Paris w r. 1765, str. 54—55. W kilka lat poźniej pojawiły się dwie prace Lexella (Novi Conn. Petr., t. XIV, XV, 1771—72), który stara się podać dowód zupełny twierdzenia, t. j. wykazać, że znane warunki są nietylko koniecznemi lecz i dostatecznemi. Lecz wywody jego są bardzo skomplikowane; takiemiż są naprawdę i dowody Lagrange'a, odnoszące się do tego twierdzenia i podane w „Rachunku funkcyj" (wyd. z r. 1806, str. 409).

Inne prace z tej dziedziny wymieniamy w porządku chronologicznym: Sarrus (Ann. de Gergonne, t. XIV, str. 197. 1824); M. B. D. C. (tamże, t. XIV, str. 319), Poisson (Mém. de l'Acad., t. XII, str. 223, 1833); Sarrus (Comptes rendus, t. I, 1835, str. 115); Dirksen (Acad. Berl., 1838); Bertrand (Journ. de l'École Polyt. Cah., XXVIII, 1841, str. 249); Raabe (Crelle, t. XXXI, str. 181; 1844); Joachimsthal (tamże, t.

XXXIII, str. 95, 1846, gdzie autor zaprzecza Raabemu pierwszeństwa w ogłoszeniu niektórych twierdzeń); Bruun (Bull. phys. math. de l'Acad. de St.-Pétersbourg. t. VII, 1846); Bertrand (Liouville, t. XIV, str. 123, 1849); Sarrus (tamże, str. 131); Minich (Annali di Tortolini, t. I, 1850, str. 821); de Morgan (Cambr. Phil. Soc., t. IX, część 2-ga, 1851).

II.

RACHUNEK PROSTY I SZKIC RACHUNKU ODWROTNEGO RÓŻNIC SKOŃCZONYCH.

Wstęp.

Rachunek różnic skończonych można uważać za dopełnienie do algebry wyższej i zarazem za wstęp pożyteczny do rachunku nieskończonościowego.

Prawie wszystkim wzorom i zagadnieniom rachunku nieskończonościowego odpowiadają wzory analogiczne a nawet nieraz ogólniejsze w rachunku różnic skończonych. Z drugiej wszakże strony rachunek ten nie opiera się ani na pojęciach ilości nieskończenie małych, ani na pojęciu granicy i ma do czynienia tylko z ilościami i różnicami skończonemi; pod względem swych pojęć ogólnych rachunek ten należy tedy do algebry wyższej.

Mieszcząc się pomiędzy algebrą i rachunkiem nieskończonościowym, rachunek różnic skończonych, nie może wszakże, z punktu widzenia dydaktycznego, jak sądzimy, stanowić przejścia od jednej do drugiej z tych nauk; wielu bowiem postępowań i zagadnień tego rachunku nie może pojmować w całej rozciągłości ten, kto nie zna zasad rachunku nieskończonościowego; te zaś zagadnienia, które znajomości rachunku nieskończonościowego nie wymagają, razem wzięte nie mogą budzić szczególnego zajęcia uczących się.

Z tego to powodu rachunek różnic skończonych w dawnych traktatach uważany był prawie zawsze za dopełnienie do rachunku nieskończonościowego; z nowszych podręczników znikł prawie zupełnie, ustępując miejsca innym zagadnieniom, innym pytaniom i rozważaniom, w które tak obfituje rachunek nieskończonościowy.

Rachunek różnic skończonych wszakże i sam przez się jest niemałej wagi. Tak np. zagadnienie o interpolacyi, bardziej ogólne od wzoru Taylora w rachunku nieskończonościowym, stanowi niejako serce rachunku różnic. Dalej—jeżeli pominiemy inne rzeczy—zagadnienie o całkowaniu różnic ma związek najściślejszy z teoryą algebraiczną szeregów. Z tego powodu ostracyzm, na który w ostatnich czasach skazano rachunek różnic skończonych, jest co najmniej nieusprawiedliwiony.

Z powodu szczupłości miejsca nie możemy tu rozszerzać się nad rachunkiem odwrotnym różnic; dajemy przeto tylko szkic jego, rozszerzając natomiast bardziej wykład rachunku prostego; trzebaby bowiem książki całej dla należytego przedstawienia chociażby samej teoryi równań różnicowych, stanowiącej zagadnienie dość trudne, może nawet trudniejsze od analogicznego zagadnienia dla równań różniczkowych.

Kończąc wstęp niniejszy, wymieniamy główne dzieła, zajmujące się specyalnie rachunkiem różnic skończonych: Nicole: „Traité du calcul des différences finies", Paryż, 1717; Prony: „Méthode directe et inverse des différences etc.", Paryż, 1799; Lacroix: „Traité des différences et des séries", Paryż, 1800; Herschell: „Collection of examples of the applications of the Calculus of finite Differences", 1820; Schlömilch: „Theorie der Differenzen und Summen", 1848; Boole: „Treatise on the calculus of finite differences", Cambridge-Londyn, 1860; Sturm: „Cours d'analyse, t. II, Paryż, 1868; Heymann: „Studien über die Transformation und Integration der Differential und Differenzenrechnung", Lipsk, 1891; Markoff: „Differenzrechnung", Lipsk, 1891; przekład z rosyjskiego T. Friesendorffa i E. Prümma, Lipsk, 1896.

§ 1.

Różnice funkcyi.

Niechaj $f(x)$ będzie funkcyą zmiennej x; nadajmy tej zmiennej kolejno wartości $x_0, x_1, x_2, \ldots$, z których każda poprzedzająca ma być mniejsza od następnej. Utwórzmy różnice

$$f(x_1) - f(x_0), \quad f(x_2) - f(x_1), \ldots,$$

które oznaczmy odpowiednio za pomocą symbolów $\Delta f(x_0)$, $\Delta f(x_1), \ldots$ i które nazwijmy r ó ż n i c a m i p i e r w s z e m i funkcyi f.

Wykonawszy podobne działanie na różnicach pierwszych, t. j. utworzywszy różnice

$$\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0), \quad \Delta f(x_2) - \Delta f(x_1), \ldots$$

otrzymamy r ó ż n i c e d r u g i e, które oznaczamy za pomocą symbolów $\Delta^2 f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_1), \ldots$ i t. d.

Bezpośrednio widoczną jest własność następująca: R ó ż n i c a $(\alpha+\beta)$-t a f u n k c y i w p u n k c i e x_0 r ó w n a s i ę r ó ż n i c y α-t e j w y r a ż e n i a $\Delta^\beta f(x_0)$, t. j..

$$\Delta^{\alpha+\beta} f(x_0) = \Delta^\alpha (\Delta^\beta f(x_0)).$$

W rzeczy samej według określenia jest $\Delta^{\beta+1} f(x_0)$ różnicą $\Delta^\beta f(x_1) - \Delta^\beta f(x_0)$, t. j. różnicą pierwszą, obliczoną dla szeregu wartości:

$$\Delta^\beta f(x_0), \quad \Delta^\beta f(x_1), \quad \Delta^\beta f(x_2), \ldots;$$

przeto:

$$\Delta^{\beta+1} f(x_0) = \Delta (\Delta^\beta f(x_0)).$$

Podobnież

$$\Delta^{\beta+2} f(x_0) = \Delta\,(\Delta^{\beta+1} f(x_0)) = \Delta^2\,(\Delta^{\beta} f(x_0));$$

idąc tym sposobem dalej, uzasadnimy prawdziwość powyższego twierdzenia.

W poniższym wykładzie często przyjmować będziemy, że różnice pierwsze zmiennej niezależnej x są s t a ł e m i, t. j. że

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2, \ldots$$

i często też dla prostoty za taką wartość stałą przyjmować będziemy 1.

---

§ 2.

Pierwsze twierdzenia o różnicach.

Dla różnic można udowodnić twierdzenia analogiczne do twierdzeń, stosujących się do różniczek lub pochodnych funkcyi.

Widocznemi są dwa twierdzenia następujące:

R ó ż n i c a f u n k c y i t y p u $cf(x)$, g d z i e c j e s t i l o ś c i ą s t a ł ą, r ó w n a s i ę i l o c z y n o w i s t a ł e j p r z e z r ó ż n i c ę f u n k c y i f.

R ó ż n i c a s u m y a l g e b r a i c z n e j f u n k c y j r ó w n a s i ę s u m i e a l g e b r a i c z n e j r ó ż n i c t y c h f u n k c y j.

Prostym jest dowód twierdzenia następującego:

R ó ż n i c ę i l o c z y n u $\varphi(x)$, $\varphi(x)$ d w u f u n k c y j p r z e d s t a w i a w z ó r:

$$\Delta\,[\varphi(x_0)\,\psi(x_0)] = \varphi(x_1)\,\Delta\psi(x_0) + \psi(x_0)\,\Delta\varphi(x_0).$$

W samej rzeczy, różnica ta równa się $\varphi(x_1)\psi(x_1) - \varphi(x_0)\psi(x_0)$; dodając i odejmując $\varphi(x_1)\,\psi(x_0)$ i odpowiednio zbierając wyrazy, otrzymujemy wzór poprzedni.

Różnica ilorazu dwu funkcyi $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ma postać:

$$\Delta \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} = \frac{\psi(x_0)\,\Delta\varphi(x_0) - \varphi(x_0)\,\Delta\psi(x_0)}{\psi(x_0)\,\psi(x_1)}.$$

W rzeczy samej, różnica ta równa:

$$\frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)} - \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} = \frac{\varphi(x_1)\,\psi(x_0) - \varphi(x_0)\,\psi(x_1)}{\psi(x_0)\,\psi(x_1)};$$

dodając i odejmując w liczniku $\varphi(x_0)\,.\,\psi(x_0)$ i odpowiednio grupując wyrazy, dochodzimy do wzoru powyższego.

---

§ 3.

Wyrażenie n-tej różnicy funkcyi.

Łatwo znaleść wzór, dający wyrażenie różnicy $\Delta^n f$ za pomocą wartości $f(x_0), f(x_1), \ldots$

Wzór ten jest jeszcze godnym uwagi z tego względu, że daje się przedstawić w bardzo dogodnej i prostej postaci symbolicznej.

Rozpatrzmy najprzód różnicę drugą:

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x_0) &= \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)\\ &= [f(x_2) - f(x_1)] - [f(x_1) - f(x_0)]\\ &= f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0).\end{aligned}$$

Ostatnie wyrażenie napiszemy w postaci symbolicznej

$$[f(x) - 1]^2,$$

którą należy rozumieć w ten sposób, że przy rozwinięciu potęgi należy $[f(x)]^i$ zastąpić przez $f(x_i)$, a więc i $[f(x)]^0$ przez $f(x_0)$. Udowodnimy, że ogólnie jest:

$$\Delta^n f(x_0) = [f(x) - 1]^n .$$

Przyjmijmy, że wzór ten jest prawdziwym aż do różnicy $(n-1)$-tej włącznie; różnica n-ta będzie tedy:

$$\Delta^n f(x_0) = \Delta^{n-1} f(x_1) - \Delta^{n-1} f(x_0)$$
$$= f(x_n) - (n-1)_1 f(x_{n-1}) + (n-1)_2 f(x_{n-2}) - \ldots$$
$$- f(x_{n-1}) + (n-1)_1 f(x_{n-2}) - \ldots$$

Ponieważ jest ogólnie:

$$(n-1)_k + (n-1)_{k-1} = (n)_k ,$$

przeto:

$$\Delta^n f(x_0) = f(x_n) - (n)_1 f(x_{n-1}) + (n)_2 f(x_{n-2}) - \ldots ;$$

więc różnica n-ta ma w istocie postać wyżej wskazaną i twierdzenie nasze zostało udowodnionem.

§ 4.

Wyrażenie wartości funkcyi w punkcie x_n za pomocą kolejnych różnic funkcyi w punkcie x_0.

Również łatwo znaleść wyrażenie wartości $f(x_n)$ za pomocą kolejnych różnic funkcyi danej w punkcie x_0.

W istocie, mamy:

$$f(x_1) = f(x_0) + \Delta f(x_0),$$
$$f(x_2) = f(x_1) + \Delta f(x_1) = f(x_1) + \Delta f(x_0) + \Delta^2 f(x_0)$$
$$= f(x_0) + 2\Delta f(x_0) + \Delta^2 f(x_0).$$

Ostatnie wyrażenie można napisać w postaci symbolicznej

$$(1 + \Delta)^2 f(x_0).$$

Okażemy, że ogólnie będzie:

$$f(x_n) = (1 + \Delta)^n f(x_0).$$

Istotnie, jeżeli przyjmiemy, że jest

$$f(x_{n-1}) = (1+\Delta)^{n-1} f(x_0),$$

to biorąc różnice stron obu, będziemy mieli:

$$\Delta f(x_{n-1}) = \Delta\,[(1+\Delta)^{n-1} f(x_0)].$$

Lecz

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + \Delta f(x_{n-1}),$$

przeto:

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + \Delta\,[(1+\Delta)^{n-1} f(x_0)]$$
$$= (1+\Delta)^{n-1} f(x_0) + \Delta\,[(1+\Delta)^{n-1} f(x_0)].$$

Rozwinąwszy symbole, otrzymamy po prawej:

$$f(x_0) + (n-1)_1\,\Delta f(x_0) + (n-1)_2\,\Delta^2 f(x_0) + \ldots$$
$$+ \Delta f(x_0) + (n-1)_1\,\Delta^2 f(x_0) + \ldots,$$

a na podstawie własności spółczynników dwumianu, z której korzystaliśmy w paragrafie poprzedzającym, będzie:

$$f(x_0) + (n)_1\,\Delta f(x_0) + (n)_2\,\Delta^2 f(x_0) + \ldots,$$

co symbolicznie przedstawia się w ten sposób

$$(1+\Delta)^n f(x_0),$$

jak być powinno.

---

§ 5.

Inne wzory ogólniejsze na wyrażenie różnic rzędów wyższych.

Wzory, które poniżej podajemy, zawarte są w nocie Studniczki: Beiträge zum Operationscalcul, Prag. Berichte 2 Abth., 1871, str. 39; powtórzone w t. X, str. 76 dziennika „Giornale di Matematiche".

Z wzoru

$$\Delta^{m+1} f(a_h) = \Delta^m f(a_{h+1}) - \Delta^m f(a_h)$$

otrzymujemy:

$$(1) \qquad \Delta^m f(a_{h+1}) = (1+\Delta)\,\Delta^m f(a_h)\,.$$

Kładąc symbolicznie $f(a_{h+1}) = f(a_h)\,f(a)$, mamy stąd również symbolicznie:

$$(2) \qquad \Delta^{m+1} f(a_h) = \Delta^m f(a_h)\,[f(a) - 1],$$

Jeżeli we wzorze (1) zamiast h położymy kolejno $h+1$, $h+2$, . . . , $h+n$, znajdziemy:

$$\Delta^m f(a_{h+i}) = (1+\Delta)\,\Delta^m f(a_{h+i-1}),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Mnożąc przez siebie te wyrażenia przy $i = 1, 2, \ldots, n$ i znosząc czynniki wspólne po obu stronach, otrzymujemy:

(3) $$\Delta^m f(a_{h+n}) = (1+\Delta)^n \Delta^m f(a_h),$$

t. j.

$$\Delta^m f(a_{h+n}) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^{m+i} f(a_h).$$

Widzimy, że wzór ten otrzymano, uważając Δ nie za symbol działania lecz jakoby za ilość, którą poddajemy zwykłym działaniom rachunkowym. Metoda ta nie będzie ścisłą, o ile nie udowodnimy przedewszystkiem, że istotnie Δ może być poddane podobnym działaniom. Udowodnienie ścisłe powyższego wzoru nie byłoby zresztą trudnem; nie zatrzymamy się wszakże nad niem, zadawalając się dowodami, opartemi na rachunku operacyjnym, który jakkolwiek pozostawia nieco do życzenia pod względem ścisłości (o ile nie poprzedzamy wykładu teoryą rachunku operacyjnego, która zaprowadziłaby nas zadaleko od naszego celu), lecz za to przedstawia korzyści, wynikające z wielkiej jego prostoty i elegancyi.

Kładąc w poprzednim wzorze $m = 0$, $n = 0$, otrzymujemy wzór, podany już w paragrafach poprzedzających.

Kładąc we wzorze (2) zamiast m kolejno: $m+1, m+2, \ldots, m+n$, otrzymujemy $n+1$ równań postaci:

$$\Delta^{m+i} f(a_h) = \Delta^{m+i-1} f(a_h) \,.\, [f(a) - 1],$$

a mnożąc te równania przez siebie, znajdujemy:

(4) $$\Delta^{m+n} f(a_h) = \Delta^m f(a_h) \, [f(a) - 1]^n,$$

t. j.

$$\Delta^{m+n} f(a_h) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \Delta^m f(a_{h+n-i}).$$

Przy $m = 0$, $h = 0$ wynika stąd wzór już znaleziony.

We wzorze (3) położymy zamiast n kolejno: $0, 1, 2, \ldots, n-1$ i dodajmy otrzymane równania; będzie:

(5) $$\sum_{i=0}^{i=n-1} \Delta^m f(a_{h+i}) = \Delta^m f(a_h) \frac{(1+\Delta)^n - 1}{\Delta},$$

t. j.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta^m f(a_{h+i}) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} \Delta^{m+i} f(a_h).$$

Przy $m = 0$, $h = 0$ będzie:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} \Delta^i f(a_0).$$

---

§ 6.

Różnice funkcyj najprostszych.

Obliczymy różnice funkcyj najprostszych, a przedewszystkiem funkcyj całkowitych.

Przyjmijmy, że różnice pomiędzy kolejnemi wartościami zmiennej niezależnej x są stałemi i równemi h. Niechaj będzie funkcya $f(x) = x^m$, otrzymamy dla niej różnicę:

$$\Delta f(x_0) = (x_0 + h)^m - x_0{}^m = mx_0{}^{m-1} h + (m)_2\, x_0{}^{m-2} h^2 + \ldots,$$

która jest wielomianem stopnia $(m-1)$-go względem x.

Jeżeli $f(x)$ jest wogóle wielomianem stopnia m-tego względem x, to do każdego wyrazu tego wielomianu można zastosować postępowanie powyższe i otrzymamy w rezultacie wielomian stopnia $m-1$, w którym wyraz pierwszy ma spółczynnik równy spółczynnikowi pierwszego wyrazu wielomianu danego, pomnożonemu przez h i przez m.

Stosując po raz drugi to samo postępowanie, otrzymamy oczywiście wielomian stopnia $(m-2)$-go względem x, którego wyraz pierwszy ma spółczynnik, równy spółczynnikowi wyrazu pierwszego wielomianu danego, pomnożonemu przez h^2 i przez $m\,(m-1)$.

Postępując w tenże sposób dalej, dojdziemy do wyrażenia na m-tą róznicę wielomianu stopnia m-go; będzie ono $h^m \,.\, 1 \,.\, 2 \ldots m \,.\, a_0$, gdzie a_0 jest spółczynnikiem najwyższej potęgi ilości x w wielomianie danym. Ta różnica m-ta jest zatem ilością niezależną od punktu x_0, dla którego bierzemy różnicę funkcyi; jest ona tedy jednakową dla wszystkich wartości x, co możemy wypowiedzieć w ten sposób:

Różnice m-te wielomianu stopnia m-tego są stałe, t. j. niezależne od wartości x i wszystkie są równe ilości $h^m\,a_0$, pomnożonej przez faktoryalną liczby m.

Rozpatrzmy np. potęgi trzecie kolejnych liczb naturalnych, t. j. weźmy funkcyę x^3 i za $x_0, x_1, x_2, \ldots$ położmy kolejno $1, 2, 3, \ldots$ $(h=1)$. Otrzymujemy następującą tablicę:

$$\begin{array}{c} 1, 8, 27, 64, 125, 216, \ldots, \\ 7, 19, 37, 61, 91, \ldots, \\ 12, 18, 24, 30, \ldots, \\ 6, 6, 6, \ldots; \end{array}$$

widzimy, że różnice trzecie są wszystkie równe 6, t. j. faktoryalnej liczby 3. Własność ta może posłużyć do zbudowania tablicy sześcianów, przy pomocy prostych dodawań. Podobnym sposobem zbudować można tablicę potęg czwartych, piątych i t. d.

Niechaj będzie $f(x) = e^x$; dla tej funkcyi jest:

$$\Delta f(x) = e^{x+h} - e^x = e^x\,(e^m - 1).$$

Powtarzając to działanie, dochodzimy do wzoru

$$\Delta^n f(x) = e^x\,(e^h - 1)^n.$$

Niechaj będzie $f(x) = \frac{1}{x}$; mamy:

$$\Delta f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = -\frac{h}{x(x+h)},$$

$$\Delta^2 f(x) = -\frac{h}{(x+h)(x+2h)} + \frac{h}{x(x+h)} = \frac{2h^2}{x(x+h)(x+2h)}.$$

Wogóle będzie:

$$\Delta^n f(x) = \frac{(-1)^n\, n!\, h^n}{x(x+h)(x+2h), \ldots, (x+nh)},$$

gdyż, jeżeli przyjmiemy, że

$$\Delta^{n-1} f(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\, h^{n-1}}{x(x+h)(x+2h), \ldots, (x+(n-1)h)},$$

to będzie:

$$\Delta^n f(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\, h^{n-1}\left[\frac{1}{(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)} - \frac{1}{x(x+h)\ldots(x+(n-1)h)}\right]$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)!\, h^{n-1}\frac{nh}{x(x+h)\ldots(x+nh)}$$

$$= (-1)^n\, n!\, h^n \frac{1}{x(x+h)\ldots(x+nh)}, \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Niechaj będzie $f(x) = \sin x$; mamy:

$$\Delta \sin x = \sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Podobnie

$$\Delta \cos x = -2 \sin \frac{h}{2} \sin \left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Ogólniej:

$$\Delta \sin (ax + b) = 2 \sin \frac{ah}{2} \cos \left(ax + b + \frac{ah}{2}\right),$$

$$\Delta \cos (ax + b) = -2 \sin \frac{ah}{2} \sin \left(ax + b + \frac{ah}{2}\right).$$

Z wzorów tych wynika w szczególności

$$\Delta \cos \left(x + \frac{h}{2}\right) = -2 \sin \frac{h}{2} \sin (x + h),$$

a stąd

$$\Delta^2 \sin x = -4 \sin^2 \frac{h}{2} \sin (x + h).$$

Podobnie:

$$\Delta^2 \cos x = -4 \sin^2 \frac{h}{2} \cos (x + h).$$

Dalej będzie

$$\Delta^3 \sin x = -2^3 \sin^3 \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{3h}{2}\right),$$

$$\Delta^3 \cos x = -2^3 \sin^3 \frac{h}{2} \sin \left(x + \frac{3h}{2}\right)$$

i t. d.

§ 7.

Wyrażenie funkcyi za pomocą jej kolejnych różnic w punkcie początkowym. Wzór Newtona, jako uogólnienie wzoru Taylora.

Wiemy z „Rachunku różniczkowego“, że wartość funkcyi w pewnym punkcie może być pod pewnemi warunkami wyrażona przy pomocy kolejnych jej pochodnych w punkcie początkowym; wzór służący do tego celu nazywa się wzorem ogólnym na wartość średnią lub wzorem Taylora. Zobaczymy teraz, jaki jest wzór analogiczny w rachunku różnic skończonych.

W § 4-ym znaleźliśmy wartość funkcyi w punkcie specyalnym x_n, wyrażoną za pomocą różnic w punkcie x_0; wzór, o którym nam obecnie idzie, jest innej natury, ponieważ ma wyrażać wartość funkcyi nietylko w punkcie specyalnym x_n lecz w jakimkolwiek punkcie przedziału $x_0\, x_n$.

Rozpatrzmy funkcyę

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{x-x_0}{h}\,\Delta f(x_0)$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!\,h^2}\,\Delta^2 f(x_0)$$
$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)\ldots(x-x_0-(n-1)\,h)}{n!\,h^n}\,\Delta^n f(x_0),$$

która jest wielomianem stopnia n-tego względem x.

Dla $x = x_0$ mamy:

$$\varphi(x_0) = f(x_0);$$

dla $x = x_1 = x_0 + h$ znikają wszystkie wyrazy, począwszy od od trzeciego i pozostaje $f(x_0) + \Delta f(x_0) = f(x_0+h)$; wogóle dla $x = x_i - x_0 + ih$ $(i \leqq n)$ pozostanie:

$$f(x_0) + (i)_1 \, \Delta f(x_0) + (i)_2 \, \Delta^2 f(x_0) + \ldots + \Delta^i f(x_0),$$

które to wyrażenie na mocy wzoru w § 4 równa się $f(x_0 + ih)$. Widzimy tedy, że funkcya $\varphi(x)$ w punktach x_0, x_0+h, x_0+2h, ..., x_0+nh ma te same wartości, co funkcya $f(x)$.

Wynika stąd, że w przypadku, gdy $f(x)$ jest funkcyą całkowitą, musi ona zupełnie zlewać się z wielomianem φ, gdyż inaczej równanie $f - \varphi = 0$ stopnia n-tego miałoby $n+1$ pierwiastków.

Przyjmijmy teraz, że wogóle $f(x)$ nie jest funkcyą całkowitą lecz jakąkolwiek funkcyą ciągłą i skończoną wraz ze swemi pochodnemi. Utwórzmy funkcyę $\Phi(x)$, określoną za pomocą wzoru

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)\ldots(x-x_0-nh)}{(n+1)!\,h^{n+1}}\,\Omega(x'),$$

gdzie $\Omega(x')$ jest wyrażeniem jeszcze nieokreślonem, zależnem od wartości x', zawartej pomiędzy x_0 a x_0+ih $(i=1, \ldots, n)$. Funkcya $\Phi(x)$ ma oczywiście, podobnie jak i funkcya $\varphi(x)$ tę własność, że w punktach x_0, x_0+h, ..., x_0+nh przyjmuje też same wartości, co funkcya $f(x)$, albowiem dla tych punktów wyraz drugi po stronie drugiej poprzedzającego wzoru znika tożsamościowo.

Przystępujemy teraz do wyznaczenia wartości funkcyi f w punkcie x'. Przyrównajmy tę wartość do wartości funkcyi Φ w punkcie x', co możemy zawsze uczynić, wyznaczając odpowiednio funkcyę Ω, wyznaczając ją mianowicie tak, aby było $f(x') - \Phi(x') = 0$. W takim razie funkcya $f(x) - \Phi(x)$ staje się zerem w $n+2$ punktach x_0, x_0+h, x_0+2h, ..., x_0+nh, x', a przeto na podstawie twierdzenia Rollego, pierwsza jej pochodna znika w $n+1$ punktach, zawartych w $n+1$ przedziałach pomiędzy rzeczonemi punktami; pochodna druga znika w n punktach, zawartych w przedziałach pomiędzy $n+1$ punktami, w których znika pochodna pierwsza i t. d. To doprowadza nas do rezultatu, że pochodna $(n+1)$-a funkcyi $f(x) - \Phi(x)$ musi znikać w pewnym funkcie ξ, zawartym w przedziale, który ogranicza najmniejsza i największa z trzech wartości x_0, x_0+nh, x'. Możemy tedy napisać:

$$f^{(n+1)}(\xi) - \Phi^{(n+1)}(\xi) = 0,$$

ecz

$$\Phi^{(n+1)}(x) = \frac{\Omega(x')}{h^{n+1}},$$

a zatem:

$$\frac{\Omega(\xi)}{h^{n+1}} = f^{(n+1)}(\xi).$$

Ponieważ wyznaczyliśmy Ω w ten sposób, aby $f - \Phi$ było zerem dla $x = x'$, mamy przeto:

$$f(x') = \varphi(x') + \frac{(x'-x_0)\ldots(x'-x_0-nh)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

lub pisząc x zamiast x':

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{h} \Delta f(x_0) + \ldots$$

$$+ \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_0-(n-1)h)}{n!\,h^n} \Delta^n f(x_0)$$

$$+ \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_0-nh)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

gdzie ξ jest punktem, zawartym pomiędzy najmniejszą a największą z wartości x_0, x_0+nh, x.

Dla każdej wartości x mamy przeto rozwinięcie powyższej postaci, przyczem oczywiście ze zmianą wartości x zmienia się i wartość ξ. Doszliśmy tedy do wzoru, który można uważać za analogiczny z wzorem uogólnionym na wartość średnią, znanym z rachunku rożniczkowego. Wzór otrzymany nazywa się wzorem Newtona, a ostatni jego wyraz resztą (lub wyrazem dopełniającym).

Zauważmy, że funkcya $f-\varphi$ jest zawsze zerem w punktach $x_0, \ldots, x_0+nh$, a więc stosując do niej twierdzenie Rollego, znajdziemy, że funkcya $f^{(n)}-\varphi^{(n)}$ musi znikać przynajmniej w jednym punkcie, zawartym pomiędzy x_0 a x_0+nh. Jeżeli η jest tym punktem, to

$$f^{(n)}(\eta)-\frac{1}{h^n}\Delta^n f(x_0),$$

powinno być zerem, a więc różnica n-ta może być zawsze wyrażona w ten sposób:

$$\Delta^n f(x_0)=h^n f^{(n)}(\eta),$$

gdzie η zawiera się pomiędzy x_0 a x_0+nh.

To twierdzenie można uważać za uogólnienie twierdzenia o wartości średniej, które otrzymujemy, kładąc $n=1$.

Co do tego przedmiotu porówn. Genocchi, Archiv. Grunerta, t. XLIX, str. 341; Nouv. Ann. (2), t. VIII, str. 385 (1869).

---

§ 8.

Pochodna m-ta funkcyi, wyrażona za pomocą kolejnych różnic tejże.

Za pomocą postępowania, stosowanego w paragrafie poprzedzającym, możemy znaleść wzór, wyrażający pochodną m-tą funkcyi przez różnice tej funkcyi w punkcie początkowym.

W tym celu weźmy funkcyę $\Phi(x)$, rozważaną w paragrafie poprzedzającym, i różniczkujmy ją m razy względem x. Będzie:

$$\Phi^{(m)}(x) = \frac{1}{h^m}\Delta^m f(x_0) + \frac{d^m}{dx^m}\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_0-mh)}{(m+1)!\,h^{m+1}}\Delta^{m+1} f(x_0)$$

$$+\ldots+\frac{d^m}{dx^m}\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_0-(n-1)h)}{n!\,h^n}\Delta^n f(x_0)$$

$$+\frac{d^m}{dx^m}\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_0-nh)}{(n+1)!\,h^{n+1}}\Omega(x').$$

Jeżeli wyznaczymy funkcyę $\Omega(x')$ tak, aby wyrażenie $f^{(m)}(x) - \Phi^{(m)}(x)$ znikało przy $x = x'$, wtedy równanie

$$f^{(m)}(x) - \Phi^{(m)}(x) = 0$$

będzie miało z pewnością $n-m+2$ pierwiastków, z których jednym jest x', pozostałe zaś w liczbie $n-m+1$ są zawarte pomiędzy x_0 a x_0+nh. Na tej zasadzie, stosując wielokrotnie twierdzenie Rollego, dojdziemy z pewnością przynajmniej do jednego punktu, zawartego pomiędzy najmniejszą a największą z trzech liczb x_0, x_0+nh, x', w którym znika pochodna $(n-m+1)$-a tego wyrażenia. Tą pochodną jest

$$f^{n+1}(x) - \frac{\Omega(x')}{h^{n+1}},$$

będzie przeto:

$$\frac{\Omega(x')}{h^{n+1}} = f^{n+1}(\xi).$$

Wyraziwszy, że $f^{(m)}(x') - \Phi^{(m)}(x') = 0$ i pisząc x zamiast x', otrzymamy wzór:

$$f^{(m)}(x) = \frac{1}{h^m}\Delta^m f(x_0) + \frac{d^m}{dx^m}\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_0-mh)}{(m+1)!\,h^{m+1}}\Delta^{m+1} f(x_0)$$

$$+\ldots+\frac{d^m}{dx^m}\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_0-(n-1)h)}{n.\,h^n}\Delta^n f(x_0)$$

$$+\frac{d^m}{dx^m}\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_0-nh)}{(n+1)!}f^{n+1}(\xi),$$

analogiczny z wzorem, podanym w paragrafie poprzedzającym.

Ważną jest rzeczą mieć wzór na pochodną pierwszą w punkcie specyalnym $x = x_0$. Można go otrzymać z wzoru dopiero co wyprowadzonego, lecz dość łatwo też wyprowadzić go z wzoru, podanego w paragrafie poprzedzającym, przenosząc $f(x_0)$ na stronę pierwszą, dzieląc obie strony przez $x-x_0$, a następnie zbliżając nieograniczenie x do x_0. Będzie:

$$f'(x_0) = \frac{\Delta f(x_0)}{1.h} - \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2.h^2} + \frac{\Delta^3 f(x)}{3.h^3} - \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{\Delta^n f(x_0)}{n.h^n} + (-1)^n \frac{1}{(n+1)\,h^{n+1}} f^{n+1}(\xi).$$

Jeżeli wyraz ostatni po stronie drugiej dąży do zera, gdy n rośnie do nieskończoności, wtedy możemy stronę drugą, a stąd i wartość $f'(x_0)$ przedstawić w postaci symbolicznej

$$\log\left(1 + \frac{\Delta}{h}\right) f(x_0),$$

którą należy rozumieć w ten sposób, że w rozwinięciu potęgi symbolu Δ mają oznaczać rzędy różnic.

Co do przedmiotu poruszonego w tym paragrafie porów. Tisserand: „Sur un point du calcul des differences“, Comptes Rendus, t. LXX, str. 678 (1870).

---

§ 9.

Pochodna m-ta funkcyi w jakimkolwiek punkcie, wyrażona za pomocą kolejnych różnic tejże w punkcie początkowym.

W podobny do powyższego sposób postępujemy celem znalezienia wyrażenia m-tej różnicy przy pomocy pochodnych funkcyi.

Rozważmy funkcyę:

$$\Psi(x) = f(x) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0)$$
$$+ \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \omega(x'),$$

gdzie $\omega(x')$ jest funkcyą dotąd nieoznaczoną, zależną tak od x_0 jak i od innej wartości x'.

Niechaj h będzie różnicą stałą pomiędzy wartościami zmiennej niezależnej x; obliczmy różnicę m-tą wielomianu $\Psi(x)$ w punkcie $x = x'$ i wyznaczmy funkcyę $\omega(x')$ tak, aby

$$\Delta^m f(x') - \Delta^m \Psi(x')$$

było zerem. Niechaj będzie:

$$V(x) = f(x) - \Psi(x).$$

Stosując rezultat, podany na końcu § 7, możemy $\Delta^m V(x')$ wyrazić w postaci $h^m V^m(\xi)$, gdzie ξ jest punktem, zawartym pomiędzy x' i $x'+mh$; będzie zatem:

$$\Delta^m f(x') - \Delta^m \Psi(x') = h^m \left[f^{(m)}(\xi) - \Psi^{(m)}(\xi)\right].$$

Lecz

$$\Psi^{(m)}(\xi) = f^{(m)}(x_0) + \frac{\xi-x_0}{1} f^{(m+1)}(x_0) + \ldots$$
$$+ \frac{(\xi-x_0)^{n-m}}{(n-m)!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(\xi-x_0)^{n-m+1}}{(n-m+1)!} \omega(x'),$$

oraz

$$f^{(m)}(\xi) = f^{(m)}(x_0) + \frac{\xi-x_0}{1} f^{(m+1)}(x_0) + \ldots$$
$$+ \frac{(\xi-x_0)^{n-m}}{(n-m)!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(\xi-x_0)^{n-m+1}}{(n-m+1)!} f^{(n+1)}(\eta),$$

gdzie η jest wartością, zawartą między x_0 a ξ; stąd:

$$\Delta^m f(x') - \Delta^m \Psi(x') = h^m \frac{(\xi - x_0)^{n-m+1}}{(n-m+1)!} \left[f^{(n+1)}(\eta) - \omega(x') \right].$$

Jeżeli to wyrażenie ma być zerem, powinno być:

$$f^{(n+1)}(\eta) = \omega(x')$$

i wzór ten pozwala obliczyć ilość $\omega(x')$ tak, aby różnice m-te funkcyj f i ϕ w punkcie x' były równemi. Podstawiając tę wartość we wzorze

$$\Delta^m f(x') - \Delta^m \Psi(x') = 0,$$

pisząc x zamiast x' i pamiętając, że różnice m-te pierwszych m wyrazów wyrażenia Ψ są zerami, otrzymujemy:

$$\Delta^m f(x) = \frac{\Delta^m (x - x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \dots$$

$$+ \frac{\Delta^m (x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{\Delta^m (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta),$$

gdzie η jest liczbą zawartą pomiędzy najmniejszą i największą z trzech liczb $x_0, x, x+mh$.

Ten wzór znajduje się w ścisłym związku z wzorem analogicznym, podanym w paragrafie poprzedzającym.

---

§ 10.

Różne zastosowania poprzedzających wzorów. Różnice ilości 0^n.

Rozpatrzmy potęgi n-te liczb naturalnych i utwórzmy różnice kolejne, odnoszące się do pierwszego elementu 0^n. Różnice te posiadają pewne własności specyalne, które zbadamy.

Udowodnimy najprzód wzór:

$$\Delta^m 0^{n+1} = m(\Delta^m 0^n + \Delta^{m-1} 0^n).$$

Z wzoru w § 3 mamy:

$$\Delta^m 0^n = m^n - (m)_1 (m-1)^n + \ldots + (-1)^{m-1} (m)_{m-1} 1^n;$$

zamieniając m na $m-1$ i dodając do tak zmienionego wzoru poprzedzający, znajdujemy:

$$\begin{aligned} &\Delta^m 0^n + \Delta^{m-1} 0^n \\ &= m^n - (m)_1 (m-1)^n + \ldots + (-1)^{n-1} (m)_{m-1} 1^n \\ &+ (m-1)^n - \ldots + (-1)^{m-2} (m-1)_{m-2} 1^n \\ &= m^n - (m-1)_1 (m-1)^n + (m-1)_2 (m-2)^n - \ldots + (-1)^{m-1}. \end{aligned}$$

Po pomnożeniu strony drugiej przez m, otrzymujemy:

$$m^{n+1} - (m)_1 (m-1)^{n+1} + (m)_2 (m-2)^{n+1} - \ldots + (-1)^{m-1} (m)_{m-1} 1^{n+1},$$

co, na podstawie powyższego, równa się $\Delta^m 0^{n+1}$; tym sposobem wzór nasz został udowodniony.

Ponieważ jest ogólnie $\Delta^m x^m = m!$, przeto:

$$\Delta^m 0^m = m!,$$

a więc:

$$m! = m^m - (m)_1 (m-1)^m + (m)_2 (m-2)^m + \ldots + (-1)^{m-1} (m)_{m-1}.$$

Wyżej rozpatrzone różnice ilości 0^m obliczyliśmy w założeniu, że różnica stała pomiędzy kolejnemi wartościami zmiennej niezależnej jest równą 1; załóżmy obecnie, że ta różnica stała jest równa h. Oznaczając odpowiednie różnice badanego wyrażenia przez $\Delta^m (0h)^n$, będziemy mieli:

$$\Delta^m (0h)^n = h^n \Delta^m 0^n,$$

gdyż wszystkie wyrazy, składające tę różnicę, otrzymają czynnik h.

Kładąc w ostatnim wzorze paragrafu poprzedzającego $x = x_0$ (co jest równoważnem obliczeniu różnic funkcyi w punkcie x_0) i pamiętając, że występujące tu różnice oparte są na podstawie h, znajdujemy:

$$\Delta^m f(x_0) = h^m \frac{\Delta^m 0^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \ldots + h^n \frac{\Delta^m 0^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$+ h^{n+1} \frac{\Delta^m 0^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta),$$

gdzie η jest liczbą, zawartą pomiędzy x_0 i x_0+nh, różnice zaś $\Delta^m 0^p$ odnoszą się do podstawy 1.

Wzór ten wyraża różnicę m-tą funkcyi przez pochodne jej w tymże punkcie.

Wyprowadzimy teraz ważny wzór na $\Delta^m 0^n$ przy $n > m$.

Wiemy, że:

$$\Delta^m e^x = e^x (e^h - 1)^m.$$

Stosując wzór poprzedzający przy $x_0 = x$, mamy:

$$\Delta^m e^x = \left[\frac{\Delta^m 0^m}{m!} h^m + \ldots + \frac{\Delta^m 0^n}{n!} h^n\right] e^x$$

$$+ \frac{\Delta^m 0^{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} e^{x+\theta nh};$$

liczbie η nadaliśmy tu postać $x+\theta nh$. gdzie θ jest liczbą, zawartą pomiędzy 0 i 1.

Podstawiając za stronę pierwszą wartość tejże, znosząc czynnik wspólny e^x i kładąc x zamiast h, znajdujemy:

$$(e^x-1)^m = \frac{\Delta^m 0^m}{m!} x^m + \ldots + \frac{\Delta^m 0^n}{n!} x^n$$

$$+ \frac{\Delta^m 0^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} e^{\theta n x}.$$

Rozwijając $(e^x-1)^m$ według wzoru

$$(e^x-1)^m = \left[x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right]^m$$

i porównywając spółczynniki przy x^n po obu stronach wzoru poprzedzającego, otrzymujemy:

$$\frac{\Delta^m 0^n}{n!} = \Sigma \frac{1}{r_1{}' r_2{}' \ldots r_m{}'},$$

gdzie $r_1, r_2, \ldots, r_m$ są liczby całkowite dodatnie, których suma równa się n i gdzie znak sumy rozciąga się na wszystkie możliwe kombinacye tych liczb.

Aby przekonać się, że strona druga jest istotnie tej postaci, rozważmy potęgę m-tą wyrażenia

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

jako iloczyn m czynników równych. Dla otrzymania spółczynnika przy potędze x^n w rozwinięciu trzeba będzie jeden z wyrazów pierwszego czynnika pomnożyć przez jeden z wyrazów drugiego, przez jeden z wyrazów trzeciego i t. d., tak dobranych, aby suma wykładników ilości x w tych wszystkich wyrazach była równa n, a następnie wziąć sumę tych iloczynów. Doprowadzi to do powyższego wzoru.

§ 11.

Liczby Bernoulli'ego, wyrażone przez różnice ilości 0^n.

Liczby Bernoulli'ego są spółczynnikami rozwinięcia na szereg funkcyi

$$\frac{xe^x}{e^x-1}.$$

Jest mianowicie

$$\frac{xe^x}{e^x-1}=1+\frac{1}{2}x+\frac{B_2 x^2}{1.2}-\frac{B_4 x^4}{1.2.3.4}+\ldots,$$

gdzie $B_2, B_4, \ldots$ są liczbami Bernoulli'ego. Funkcya po stronie pierwszej nazywa się funkcyą tworzącą liczb Bernoulli'ego i łatwo widzieć, że w rozwinięciu jej wyrazy z potęgami $x^3, x^5, \ldots$ są równe zeru.

Dzieląc licznik i mianownik tej funkcyi przez e^x, mamy $\frac{x}{1-e^{-x}}$, a zmieniając x na $-x$ i rozwijając $\frac{x}{e^x-1}$, znajdujemy:

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{1}{2}x+\frac{B_2 x^2}{2!}-\frac{B_4 x^4}{4!}.$$

Za pomocą związków pomiędzy funkcyą wykładniczą i funkcyami trygonometrycznemi możnaby okazać, że spółczynniki rozwinięcia stycznej na szereg dają się wyrazić przez liczby Bernoulli'ego; mamy mianowicie:

$$\operatorname{tg} x=\sum_1^\infty \beta_{2m}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

gdzie

$$\beta_{2m} = \frac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{2m} B_{2m}.$$

(Porówn. E. Pascal, Determinanti, Medyolan, 1896, str. 176).

Możemy liczby Bernoulli'ego wyrazić za pomocą różnic ilości 0^n w sposób następujący (Boole, Finite diff., 1860, str. 82—83). Połóżmy $e^x - 1 = t$, stąd $x = \log(1+t)$:

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{\log(1+t)}{t}$$

$$= 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + \dots$$

$$= 1 - \frac{e^x-1}{2} + \frac{(e^x-1)^2}{3} - \frac{(e^x-1)^3}{4} + \dots$$

W poprzedzającym paragrafie znaleźliśmy:

$$(e^x-1)^m = \frac{\Delta^m 0^m}{m!} x^m + \frac{\Delta^m 0^{m+1}}{(m+1)!} x^{m+1} + \dots;$$

podstawiając to, otrzymujemy na spółczynnik przy x^m w całkowitem rozwinięciu funkcyi $\frac{x}{e^x-1}$ wyrażenie:

$$\frac{1}{m!}\left[0^m - \frac{1}{2}\Delta 0^m + \frac{1}{3}\Delta^2 0^m - \dots + \frac{(-1)^m}{m+1}\Delta^m 0^m\right].$$

Porównywając to rozwinięcie z otrzymanem poprzednio, widzimy, że wyrażenie to równa się

$$(-1)^{\frac{m}{2}-1} B_m,$$

gdzie m jest zawsze liczbą parzystą. Tym sposobem liczby Bernoulli'ego wyraziliśmy w postaci żądanej.

Liczby Bernoulli'ego mają wartości następujące:

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = \frac{1}{30},$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = \frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = \frac{3617}{510},$$

. . . .

Tablice tych liczb znaleść można w następujących pracach: M. Ohm (Crelle, t. XX, str. 11); Glaisher (Trans. of Cambridge, t. XII, 1, str. 384, 1873); Adams „Tables of the values of the first sexty two numbers of Bernoulli" (Crelle, t. LXXXV, 1878, str. 269); Wroński „Réforme des mathématiques", 1847, str. CCXVI—CXXVII; porówn. Dickstein, „Pojęcia i metody matematyki", Warszawa, 1891, str. 267.

---

§ 12.

Funkcye interpolacyjne. Wzór Ampère'a.

Funkcye interpolacyjne określamy w ten sposób:
Połóżmy:

$$f_1(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

$$f_2(x_0, x_1, x_2) = \frac{f_1(x_0, x_2) - f_1(x_0, x_1)}{x_2 - x_1},$$

. . . .

Wyrażenia $f_1(x_0, x_1)$, $f_2(x_0, x_1, x_2)$, . . . nazywają się funkcyami interpolacyjnemi rzędu 1-go, 2-go, . . .

Pierwsza własność tych funkcyj jest następująca: Funkcye interpolacyjne są symetrycznemi względem wszystkich zmiennych, które w sobie zawierają.

Własność ta jest widoczną dla funkcyj interpolacyjnych rzędu pierwszego, gdyż przemieniając x_0 i x_1, nie zmieniamy wartości funkcyi. Aby własność tę wykazać ogólnie, udowodnimy wzór Ampère'a, służący do przekształcenia funkcyi interpolacyjnej.

Mamy tożsamościowo:

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}+\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}.$$

Podobnież dla funkcyi interpolacyjnej rzędu 2-go mamy:

$$\begin{aligned}
f(x_0,x_1,x_2) &= \frac{f_1(x_0,x_1)}{x_1-x_2}+\frac{f_1(x_0,x_2)}{x_2-x_1} \\
&= \frac{f(x_0)}{(x_1-x_2)(x_0-x_1)}+\frac{f(x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_0)} \\
&\quad+\frac{f(x_0)}{(x_2-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)} \\
&= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)};
\end{aligned}$$

co wskazuje, że funkcya $f_2(x_0, x_1, x_2)$ jest symetryczna względem x_0, x_1, x_2.

Udowodnimy, że każda funkcya interpolacyjna może być przekształcona za pomocą wzoru analogicznego do wyżej napisanego (Ampère, Ann. de Gergonne, t. XVI, str. 329, 1826).

W samej rzeczy, załóżmy, że funkcya $f_{n-1}(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ daje się przekształcić na wyrażenie:

$$\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_{n-1})}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)\ldots(x_1-x_{n-1})}$$

$$+\ldots\frac{f(x_{n-1})}{(x_{n-1}-x_0)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})};$$

wtedy:

$$f_n(x_0,\ldots,x_{n-1},x_n)=\frac{f_{n-1}(x_0,\ldots,x_{n-2},x_{n-1})-f_{n-1}(x_0,\ldots,x_{n-2},x_n)}{x_{n-1}-x_n}$$

przekształci się na wyrażenie:

$$\frac{1}{x_{n-1}-x_n}\Big[\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_{n-2})(x_0-x_{n-1})}$$

$$+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)\ldots(x_1-x_{n-2})(x_1-x_{n-1})}+\ldots+\frac{f(x_{n-1})}{(x_{n-1}-x_0)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}\Big]$$

$$+\frac{1}{x_n-x_{n-1}}\Big[\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_{n-2})(x_0-x_n)}$$

$$+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)\ldots(x_1-x_{n-2})(x_1-x_n)}+\frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-2})}\Big].$$

Dwa ułamki, mające licznik $f(x_0)$, razem wzięte, sprowadzają się do wyrażenia:

$$\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)}\left\{\frac{1}{x_0-x_{n-1}}-\frac{1}{x_0-x_n}\right\}$$

$$=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_{n-2})(x_0-x_{n-1})(x_0-x_n)}.$$

Podobną redukcyę wykonać można z wyrazami o liczniku $f(x_1)$, o liczniku $f(x_2)$ i t. d. Widzimy tedy, że f_n wyraża się za pomocą wzoru analogicznego do wzoru na f_{n-1}, albo innemi słowy, że wzór Ampère'a, jeżeli jest prawdziwym dla skaźnika

$n-1$. to jest też prawdziwym i dla skaźnika n. Ponieważ zaś jest prawdziwym dla $n=1$, przeto jest ogólnie prawdziwym.

Możemy wyprowadzić jeszcze godny uwagi związek pomiędzy funkcyami interpolacyjnemi tego samego rzędu. Możemy napisać:

$$f_{n+1}(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) = \frac{f_n(x_0, x_2, x_3, \ldots) - f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots)}{x_0 - x_1}$$

$$= \frac{f_n(x_0, x_1, x_3, \ldots) - f_n(x_0, x_2, x_3, \ldots)}{x_1 - x_2},$$

skąd odrazu wynika:

$$f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots)(x_1 - x_2) + f_n(x_2, x_0, x_3, \ldots)(x_2 - x_0)$$
$$+ f_n(x_0, x_1, x_3, \ldots)(x_0 - x_1) = 0.$$

Podamy jeszcze kilka danych historycznych, odnoszących się do tej teoryi. Po Amperze zajmowali się nią: Cauchy (Comptes rendus, XVI, str. 776, 835, 1340), później Bellavitis (Ist. Veneto, 22 czerwca 1856, 17 czerwca 1860) i Genocchi (Accad. Torino, t. XIII, str. 716, 1878). Ten ostatni wyraził funkcye interpolacyjne za pomocą całek wielokrotnych. Wymieniamy jeszcze: Genocchi: „Sopra una proprieta delle funzioni interpolari Accad. di Torino, XVI“, str. 269, (1881); Schwarz, „Démonstration élémentaire d'une propriété des fonctions interpolaires“, Accad. di Torino, XVII. str. 740, 1882; Peano, „Sulle funzioni interpolari“, Accad. di Torino, XVIII, str. 73 (1883).

§ 13.

Związki pomiędzy fnnkcyami interpolacyjnemi o elementach równoodległych a różnicami, oraz pomiędzy temiż funkcyami interpolacyjnemi a pochodnemi.

Przyjmijmy, że różnice pomiędzy kolejnemi wartościami zmiennej x, t. j. różnice pomiędzy wartościami $x_0, x_1, x_2, \ldots$ są stałemi i równemi h. Mamy widocznie:

$$\Delta f(x_0) = h f_1(x_0, x_0 + h),$$

$$\Delta^2 f(x_0) = h\, \Delta f_1(x_0, x_0 + h),$$

$$= h\,[f_1(x_0 + h, x_0 + 2h) - f_1(x_0, x_0 + h)]$$

$$= 2h^2 f_2(x_0, x_0 + h, x_0 + 2h).$$

Można dowieść, że jest ogólnie:

$$\Delta^n f(x_0) = n!\, h^n f_n(x_0, x_0 + h, \ldots, x_0 + nh).$$

W istocie, jeżeli ten wzór utrzymuje się aż do skaźnika $n-1$ włącznie, t. j. jeżeli:

$$\Delta^{n-1} f(x_0) = (n-1)!\, h^{n-1} f_{n-1}(x_0, \ldots, x_0 + (n-1)\, h),$$

to stosując raz jeszcze to działanie Δ, będziemy mieli:

$$\Delta^n f(x_0) = (n-1)!\, h^{n-1} \Delta f_{n-1}(x_0, \ldots, x_0 + (n-1)\, h)$$

$$=(n-1)!\, h^{n-1}[f_{n-1}(x_0+h, \ldots, x_0+nh) - f_{n-1}(x_0, \ldots, x_0+(n-1)h)].$$

Lecz różnica w klamrach jest licznikiem funkcyi interpolacyjnej rzędu n-tego, której mianownikiem jest różnica $(x_0+nh) - x_0$, t. j. nh, a więc różnica w klamrach równa się $f_0(x_0, \ldots, x_0+nh) . nh$, jak właśnie być powinno.

Ustaliwszy te wzory, łatwo już znaleść związek pomiędzy funkcyami interpolacyjnemi a pochodnemi tego samego rzędu; w tym celu dość przypomnieć sobie związek:

$$\Delta^n f(x_0) = h^n f_n(\xi), \qquad x_0 \leqq \xi \leqq x_0 + nh$$

dowiedziony w § 7, skąd wyniknie:

$$f_n(x_0, x_0 + h, \ldots, x + nh) = \frac{f^n(\xi)}{n!}.$$

W następnym paragrafie uogólnimy ten wzór dla przypadku jakiejkolwiek funkcyi interpolacyjnej.

---

§ 14.

Związki pomiędzy funkcyami interpolacyjnemi a całkami.

Wzory podane w tym paragrafie znajdują się w pierwszej z cytowanych rozpraw G e n o c c h i'ego.

Widzimy z łatwością, że całka

$$\int_0^1 f'(x_0 + (x_1 - x_0)\, t)\, dt$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_0} \left[f(x_0 + (x_1 - x_0)\, t) \right]_0^1,$$

t. j. równa się

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Wynika stąd, że pierwsza funkcya interpolacyjna $f_1(x_0, x_1)$ wyraża się w ten sposób:

$$f_1(x_0, x_1) = \int_0^1 f'(x_0 + (x_1 - x_0)\, t)\, dt.$$

Podobnie

$$f_2(x_0, x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{f'(x_0 + (x_2 - x_0)\, t) - f'(x_0 + (x_1 - x_0)\, t)}{x_2 - x_1}\, dt$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 t\, f''(x_0 + (x_1 - x_0)\, t + (x_2 - x_1)\, tu)\, dt\, du\,.$$

Wogólności jest:

$$f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 t_1^{n-1}\, t_2^{n-2} \ldots t^{n-1}$$

$$\times f^{(n)}(x_0 + (x_1 - x_0)\, t_1 + (x_2 - x_1)\, t_1\, t_2 + \ldots$$
$$+ (x_n - x_{n-1})\, t_1\, t_2 \ldots t_n)\, dt_1 \ldots dt_n\,.$$

Można całkom tym nadać postać odmienną; porówn. cyt. pracę Genocchi'ego.

---

§ 15

Wzór ogólny Newtona i Gaussa. Związek pomiędzy funkcyami interpolacyjnemi jakiemikolwiek, a pochodnemi. Granica funkcyi interpolacyjnej, gdy wszystkie jej elementy zlewają się.

W § 7 podaliśmy wzór Newtona, w którym przyjęto, że wartości zmiennej niezależnej, t. j. $x_0, x_1, x_2, \ldots$ mają różnice stałe. Obecnie uogólnimy ten wzór, przyjmując elementy jakiekolwiek. Wywód ten sprowadza się do przypadku poprzedzającego; korzystamy w nim z własności funkcyj interpolacyjnych.

Zauważmy, że:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f_1(x_0, x),$$

$$f_1(x_0, x) = f_1(x_0, x_1) + (x-x_0) f_2(x_0, x_1, x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x) = f_{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}) \\ + (x-x_{n-1}) f_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x),$$

$$f_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x) = f_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\ + (x-x_n) f_{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n, x).$$

Mnożąc drugie z tych równań przez $x-x_0$, trzecie przez $(x-x_0)(x-x_1)$ i t. d., następnie dodając je do siebie i redukując, otrzymujemy:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f_1(x_0, x_1) \\ + (x-x_0)(x-x_1) f_2(x_0, x_1, x_2) + \ldots \\ + (x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) f_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\ + (x-x_0)\ldots(x-x_n) f_{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n, x).$$

Przekształcimy ostatni wyraz tego wyrażenia. W tym celu należy znaleść wyrażenie funkcyi interpolacyjnej o elementach nierównoodległych przez pochodne funkcyi, i to za pomocą wzoru, będącego uogólnieniem wzoru, podanego w paragrafie poprzedzającym dla szczególnego przypadku elementów równoodległych.

Funkcya, składająca się z $n+1$ pierwszych wyrazów powyższego wzoru, jest wielomianem stopnia n-tego względem x; oznaczmy go przez $\varphi(x)$. Łatwo widzieć, że $f(x) - \varphi(x)$ jest funkcyą, znikającą dla $x = x_0, x = x_1, \ldots, x = x_n$; wynika to z wzoru powyższego, jeżeli zwrócimy uwagę na to, że

$f(x) - \varphi(x) = (x-x_0)\ldots(x-x_n\, f_{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n, x)$ i że funkcya $f_{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n, x)$ nie staje się nieskończoną dla żadnej z wartości $x = x_0$, $x = x_1, \ldots$ Można uniknąć rozważania granicy, do jakiej dąży funkcya interpolacyjna f_{n+1}, gdy dwa elementy stają się równemi, a to sposobem następującym.

Metodą podobną do tej, jaką otrzymano wzór powyższy, można otrzymać wzory następujące:

$$f(x_0) = f(x_0),$$

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)\, f_1(x_0, x_1),$$

$$f(x_2) = f(x_0) + (x_2 - x_0)\, f_1(x_0, x_1)$$
$$+ (x_2 - x_0)\, f_2(x_0, x_1, x_2),$$

. . . .

Otóż $\varphi(x)$ dla $x = x_0, x_1, x_2, \ldots$ staje się właśnie wyrażeniem, jakie przedstawiają strony drugie powyższych równań; stąd widać, że $f - \varphi$ staje się zerem.

To ustaliwszy, dochodzimy za pomocą kolejnego stosowania twierdzenia Rollego, t. j. za pomocą postępowania, stosowanego wielokrotnie w paragrafach poprzedzających, do wniosku, że istnieje pewien punkt ξ w największym przedziale, zawartym pomiędzy punktami $x_0, \ldots, x_n$, dla którego pochodna n-ta funkcyi $f - \varphi$ jest zerem. Lecz pochodna n-ta funkcyi φ jest $n!\, f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, a zatem:

$$f^n(\xi) - n!\, f_n(x_0, \ldots, x_n) = 0,$$

skąd wynika następujący wzór na funkcyę interpolacyjną ogólną:

$$f_n(x_0, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)\,.$$

Z wzoru tego wypływa, że funkcya interpolacyjna $f_{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ równa się $\dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$, gdzie ξ jest wartością, zawartą pomiędzy minimum i maximum wartości $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Podstawiając te wartości, otrzymujemy wzór ogólny Newtona, który można też nazwać wzorem Gaussa:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ (x-x_0) f_1(x_0, x_1) \\ &+ (x-x_0)(x-x_1) f_2(x_0, x_1, x_2) \\ &+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi). \end{aligned}$$

Jeżeli przedziały $x_0\, x_1,\ x_1, x_2, \ldots$ są równemi h, wtedy funkcye interpolacyjne stają się kolejnemi różnicami funkcyi $f(x_0)$ (patrz § 13) i od wzoru tego przechodzimy do wzoru, podanego w § 7. Jeżeli zaś punkty $x_0, x_1, \ldots, x_n$ schodzą się wszystkie w jednym punkcie x_0, wtedy i ξ przypadnie w tym punkcie, a funkcya interpolacyjna stanie się równą $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$ i otrzymujemy wzór Taylora.

---

§ 16.

Interpolacya. Wzór Lagrange'a.

Jednym z wzorów zasadniczych rachunku różniczkowego jest tak zwany wzór Taylora, za którego pośrednictwem, mając wartości pochodnych funkcyi w jednym punkcie, możemy przy pewnych warunkach zbudować samą funkcyę. Pierwsze $n+1$ wyrazów tego wzoru stanowią wielomian stopnia n-tego; zadanie sprowadza się tedy do wyznaczenia w jakiej postaci dla pewnej wartości x daje się przedstawić różnica pomiędzy funkcyą a tym wielomianem (który możnaby nazwać wielomianem Taylora). Z badania tej różnicy można wywnioskować możliwość rozwinięcia funkcyi na szereg nieskończony. Należy zauważyć, że wielomian Taylora posiada pochodne aż do pochodnej n-tej włącznie w punkcie początkowym, odpowiednio równe pochodnym funkcyi danej.

Zagadnienie interpolacyjne może być uważane za uogólnienie zagadnienia Taylora.

Załóżmy, że danemi są wartości funkcyi w pewnej liczbie punktów; w jaki sposób wyznaczyć samą funkcyę?

Przyjmijmy najprzód, że liczba punktów wynosi $n+1$; wtedy można wyznaczyć wielomian jedyny stopnia n-tego, który w punktach danych posiada wartości z góry dane. Wielomian ten nazywa się wielomianem interpolacyjnym.

Wypowiedzmy zagadnienie nasze w ten sposób: Wyrazić różnicę pomiędzy funkcyą a wielomianem interpolacyjnym.

Powstaje tu pytanie, jak wyrazić funkcyę za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia n-tego oraz wyrazu—nazwijmy go resztą — którego natura jest związana z naturą funkcyi danej.

Wzór Newtona, podany w paragrafie poprzedzającym, rozwiązuje to zagadnienie i dlatego właśnie różne występujące w nim spółczynniki nazwano funkcyami interpolacyjnemi. We wzorze Newtona wielomian interpolacyjny ma postać określoną.

Jakkolwiek wielomian interpolacyjny jest określony jednoznacznie, gdy danemi są wartości funkcyi w $n+1$ punktach, wszakże w przypadkach specyalnych może być dogodnem nadanie mu postaci innej, i dlatego dobrze jest poznać inny wzór, nazwany wzorem interpolacyjnym Lagrange'a (Dzieła, tom VII), który różni się od wzoru Newtona jedynie postacią wielomianu interpolacyjnego. Wzór Lagrange'a można otrzymać i bezpośrednio, lecz wolimy wyprowadzić go z wzoru Newtona.

Rozpatrzmy wielomian interpolacyjny, jaki występuje we wzorze Newtona; zamiast każdej funkcyi interpolacyjnej podstawimy jej wartość według wzoru Ampère'a, zbierzmy następnie wszystkie wyrazy, zawierające $f(x_0)$, wszystkie, zawierające $f(x_1)$ i t. d. Będzie:

$$f(x_0)\left[1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\ldots\right]$$

$$+f(x_1)\left[\qquad\frac{x-x_1}{x_1-x_0}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\ldots\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+f(x_n)\left[\qquad\qquad\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})}\right].$$

Spółczynnik przy $f(x_0)$ można sprowadzić do postaci takiej, aby mianownikiem był iloczyn

$$(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n);$$

licznik będzie wtedy wielomianem stopnia n-tego względem x, w którym spółczynnik najwyższej potęgi tej zmiennej jest 1. Łatwo widzieć, że ten wielomian znika dla $x=x_1, x=x_2, \ldots, x=x_n$ a ponieważ dla tych wartości zmiennej wielomian interpolacyjny Newtona równa się odpowiednio $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, a więc dla tych wartości powinien zawsze znikać wyraz, zawierający $f(x_0)$. Spółczynnik przy $f(x_0)$ będzie tedy równy:

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}.$$

Podobnie znaleść można spółczynniki przy $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... Ostatecznie wielomian interpolacyjny przybiera postać:

$$\Sigma=\sum_{i=0}^{i=n} f(x_i)\,\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

Wzór Lagrange'a będzie tedy postaci:

$$f(x) = \Sigma + R,$$

gdzie R jest resztą, którą można przedstawić tak samo, jak we wzorze Newtona.

Wielomian Σ można jeszcze wyrazić inaczej. Połóżmy:

$$\varphi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n),$$

wtedy widocznie spółczynnikiem przy $f(x_i)$ będzie:

$$\frac{\varphi(x)}{x-x_i}\,\frac{1}{\varphi'(x_2)},$$

a wzór Lagrange'a przybierze postać:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_2)}{\varphi'(x_i)}\,\frac{\varphi(x)}{x-x_i} + R.$$

---

§ 17.

Ogólniejsze zagadnienie interpolacyjne Hermite'a. Literatura zagadnienia.

Możemy postawić zagadnienie ogólniej, niż w paragrafie poprzedzającym.

W zagadnieniu Taylora mamy dane wartości pierwszych n pochodnych funkcyi w punkcie x_0 (n może być liczbą rosnącą do nieskończoności); we wzorach Newtona i Lagrange'a mamy dane wartości funkcyi w $n+1$ punktach. Drugi przypadek sprowadza się do pierwszego, gdy te punkty w liczbie $n+1$ przyjmiemy za nieskończenie blizkie. Ogólniejsze zadanie będzie takie: wyznaczyć funkcyę, gdy danemi są: wartość jej oraz wartości jej r pierwszych pochodnych w punkcie x_0; jej wartość i wartości jej r_1 pierwszych pochodnych w innym punkcie x_1 i tak dalej; wreszcie jej wartość oraz wartości jej r_n pierwszych pochodnych w punkcie x_n. To zadanie postawił Hermite (Crelle, tom LXXXIV, str. 70).

Za pomocą danych zagadnienia należy tedy wyznaczyć wielomian interpolacyjny stopnia:

$$(r_0+1)+(r_1+1)+\ldots+(r_n+1)$$
$$=r_0+r_1+\ldots+r_n+n+1$$

Pytanie sprowadza się do wyznaczenia różnicy pomiędzy funkcyą a tym wielomianem, t. j., jak zwykle, do wyznaczenia postaci reszty w odpowiednim wzorze interpolacyjnym. Hermite wyraża tę resztę za pomocą całki wielokrotnej, co opiera się na fakcie znanym, że funkcya interpolacyjna daje się wyrazić za pomocą całki wielokrotnej, jak to widzieliśmy w paragrafie 14-ym, w którym podano wzór Genocchi'ego, wyjęty z jego pracy, napisanej pod wpływem badań Hermite'a.

Jest jasnem, że ponieważ przy $x=x_0$ ma znikać nietylko różnica $f-\varphi$ (φ jest wielomianem interpolacyjnym), lecz i wszystkie pochodne tej różnicy aż do pochodnej rzędu r_0, to czynnikiem reszty powinno być $(x-x_0)^{r_0+1}$; podobnież drugim czynnikiem powinno być $(x-x_1)^{r_1+1}$ i t. d., tak że reszta będzie miała czynnik:

$$(x-x_0)^{r_0+1}(x-x_1)^{r_1+1}\ldots(x-x_n)^{r_n+1}.$$

Inne prace o funkcyach interpolacyjnych, prócz cytowanych, są następujące: Gauss, Werke, t. III; Lagrange, Oeuvres, t. VII; Genocchi, „Intorno ad alcune formole sommatorie“, Ann. di Tortolini, t. VI, str. 78, 1855; Czebyszew, Acad. de St.-Pétersbourg, 1859; Nell, Ueber Interpolation, Archiv. Grunerta, LXI, str. 185, 1877; Genocchi, Comptes rendus, t. LXXXVI, str. 406, 1878; Frobenius, „Ueber die Entwickelung etc.“, Crelle, t. LXXIII; Cazzaniga, „Espressione di una funzione trascendente intera che prende valori dati in punti arbitrariamente dati", Annali di mat., X, 1881; Méray „Observations sur la legitimité de l'interpolation", Ann. de l'École normale, 3 série, t. I, str. 165, 1884; Fouret, Comptes rendus, t. XCIX, str. 963, 1011, 1062 (1884), gdzie autor zajmuje się interpolacyą przy pomocy funkcyj trygonometrycznych; Bendixson „Sur la formule de Lagrange etc.", Comptes rendus, t. CI, str. 1050, 1129 (1885); Teixeira, Nouv. Ann., 3 série, t. IV, str. 351; Crelle, t. C, str. 83; Eneström, „Note historique sur une série dont le terme général est de la forme $A(x-a_1)\ldots(x-a_n)$", Comptes Rendus, t. CIII, str. 423, 1886; Bendixson „Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss", Acta math., t. IX, str. 1, 1876; Possé, Acad. de St.-Pétersbourg, 1886; Carvallo, „Formules d'interpolation", Comptes rendus, t. CVI, str. 346, 1888; Pincherle, „Sui sistemi ricorrenti", Rendinconti Lincei, t. V, 1889; Diestel, „Beiträge zu der Interpolationsrechnung", Getynga, 1890; Williot, Bulletin des sciences math. (2), t. XIV, str 218; Laisant, „Sur l'interpolation succesive", Bull. de la Soc. math. de France, t. XIX, str. 44 i 121; Radau, „Sur les formules d'interpolation", Paryż, 1891; Echols, „On some forms of Lagrange's interpolation formula", Annals of math., t. VIII, str. 22 (1873); Netto „Zur Cauchy'schen Interpolationsaufgabe", Math. Ann., t. XLII, str. 453 (1893); Pincherle, „Sull'interpolazione", Accad di Bologna, t III, 1893; Markoff, „Differenzenrechnung etc." (cytowane już wyżej).

§ 18.

Wzory przybliżone na kwadraturę. Wzór Simpsona.

Jak rozwinięcie funkcyi na szereg Taylora może służyć do przybliżonego obliczenia całki określonej tej funkcyi, podobnież ogólniej, wzór interpolacyjny ogólny służyć może do tego samego celu. Pytanie sprowadza się do zbadania, jaki jest najogólniejszy sposób przystosowania wzoru interpolacyjnego do przybliżonego obliczania kwadratur.

Jeżeli wyjdziemy z wzoru Lagrange'a i będziemy go całkowali wyraz po wyrazie, to całka reszty będzie miała postać:

$$\int_a^b \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\, dx,$$

gdzie ξ jest punktem pośrednim pomiędzy punktami $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i x. Jeżeli $(x-x_0)\ldots(x-x_n)$ jest zawsze tego samego znaku dla wszystkich wartości x, zawartych w przedziale całkowania, wtedy na podstawie twierdzenia rachunku całkowego powyższe wyrażenie będzie równe:

$$\frac{f^{n+1}(\eta)}{(n+1)!}\int_a^b (x-x_0)\ldots(x-x_n)\, dx,$$

gdzie η jest wartością pośrednią pomiędzy wartościami $x_0, \ldots, x_n, a, b$.

Przyjmijmy najprzód, że $n=2$ i że $x_0=a$, $x_1=\dfrac{a+b}{2}$, $x_2=b$. Trzy pierwsze wyrazy wzoru Lagrange'a dadzą:

$$\frac{f(a)}{\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)(a-b)}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)$$

$$+\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)}(x-a)(x-b)$$

$$+\frac{f(b)}{(b-a)\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right)}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right).$$

Całki tych trzech wyrazów będą:

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx = \frac{1}{12}(b-a)^3,$$

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{1}{6}(b-a)^3,$$

$$\int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx = \frac{1}{12}(b-a)^3.$$

Uwzględnienie tylko trzech pierwszych wyrazów wzoru Lagrange'a daje nam tedy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\} + \int_a^b R\,dx,$$

gdzie:

$$\int_a^b R\,dx = \frac{1}{6}\int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,f'''(\xi)\,dx\,,$$

Ilość, mnożąca funkcyę $f'''(\xi)$ pod znakiem całkowym, nie ma znaku stałego dla wszystkich wartości x pomiędzy a i b, gdyż dwumian $x - \dfrac{a+b}{2}$ dla $x = a$ i $x = b$ ma znaki przeciwne. Nie możemy tu więc stosować znanego twierdzenia, na podstawie którego funkcyę f''' można przenieść poprzed znak całkowy. Lecz możemy nadać funkcyi R kształt dogodniejszy w obecnym przypadku. Oznaczmy przez $\varphi(x)$ sumę trzech pierwszych wyrazów wzoru Lagrange'a i połóżmy:

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \Omega(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b).$$

Dla każdej wartości Ω, niezależnej od x, mamy zawsze:

$$f(a) = \Phi(a); \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right); \quad f(b) = \Phi(b).$$

Wybierzmy Ω tak, aby było:

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = \Phi'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

i połóżmy:

$$f(x) = \Phi(x) + (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)\, T,$$

gdzie T jest funkcyą skończoną zmiennej x, dotąd nieoznaczoną. Czynnik przy tej funkcyi wskazuje, że różnica $f - \Phi$ znika w trzech punktach a, $\frac{a+b}{2}$, b i nadto, że pochodna tej funkcyi znika w punkcie $\frac{a+b}{2}$.

Stosując twierdzenie Rollego, możemy napisać, że wartością funkcyi T w punkcie x będzie:

$$T = \frac{1}{4!} f''''(\xi),$$

gdzie ξ jest punktem, zawartym pomiędzy a, $\frac{a+b}{2}$, b, x. Ponieważ $\frac{a+b}{2}$ z pewnością zawiera się pomiędzy a i b, możemy przeto powiedzieć, że ξ zawiera się pomiędzy a, b i x.

Całkując, otrzymujemy:

$$\int_a^b R\,dx = \Omega \int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx$$

$$+ \frac{1}{4!}\int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)\, f''''(\xi)\,dx,$$

gdzie w drugiej całce można przenieść funkcyę $f''''(\xi)$ przed znak całkowy, ponieważ nie zmienia ona znaku dla wartości x, zawartych pomiędzy a i b.

Położywszy $x - \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{a-b}{2}\,.\,t$, będziemy mieli:

$$\int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx$$

$$= \frac{(a-b)^4}{16}\int_{+1}^{-1} t\,(t^2-1)\,dt = 0,$$

a zatem:

$$\int_a^b R\,dx = \frac{(a-b)^5}{4!\,32} f''''(\eta) \int_{+1}^{-1} t^2\,(t^2-1)\,dt$$

$$= -\frac{4}{15}\cdot\frac{1}{4!\,32}(a-b)^5 f''''(\eta),$$

gdzia η jest wartością, zawartą pomiędzy a i b.

Ta wartość r e s z t y dąży do zera, gdy a dąży do b.

Zobaczmy, czy można otrzymać przybliżoną postać kwadratury, dzieląc całkowity przedział na przedziały cząstkowe i stosując do każdego z nich wzór powyższy.

Podzielmy przedział całkowania $b-a$ na n równych przedziałów $\dfrac{b-a}{n}$ i napiszmy:

$$\int_a^b = \int_a^{a+\frac{b-a}{n}} + \int_{a+\frac{b-a}{n}}^{a+2\frac{b-a}{n}} + \ldots + \int_{a+(n-1)\frac{b-a}{n}}^{b} .$$

Stosując do każdej z całek wzór powyższy, znajdziemy:

$$\int_a^b = \frac{b-a}{6n}\Big\{f(a) + 4f\Big(a+\frac{b-a}{2n}\Big) + f\Big(a+\frac{b-a}{n}\Big)$$

$$+ f\Big(a+\frac{b-a}{n}\Big) + 4f\Big(a+3\frac{b-a}{2n}\Big) + f\Big(a+2\frac{b-a}{n}\Big)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ f\Big(a+(n-1)\frac{b-a}{n}\Big) + 4f\Big(a+(2n-1)\frac{b-a}{n}\Big) + f(b)\Big\} + R'$$

$$= \frac{b-a}{6n}\Big\{f(a) + 4f\Big(a+\frac{b-a}{2n}\Big) + 2f\Big(a+2\frac{b-a}{2n}\Big) + 4f\Big(a+3\frac{b-a}{2n}\Big)$$

$$+ 2f\Big(a+4\frac{b-a}{2n}\Big) + 4f\Big(a+5\frac{b-a}{2n}\Big) + \ldots + f(b)\Big\} + R' .$$

Prawo tworzenia argumentów, zawartych pod znakiem f w nawiasach, jest jasnem: rosną one kolejno o $\dfrac{b-a}{2n}$. Prawo spółczynników jest też prostem: prócz ostatniego, który jest jednością, wszystkie pozostałe są kolejno równe 4 i 2.

Reszta R' jest postaci:

$$R' = -\frac{4}{15}\cdot\frac{1}{4!\,32}\,\frac{(a-b)^4}{n^5}\Big[f''''(\eta_1) + f''''(\eta_2) + \ldots\Big] ,$$

gdzie η_1, η_2 są kolejnemi wartościami, zawartemi w przedziałach cząstkowych. Jeżeli przyjmiemy, że f'''' jest funkcyą skończoną i ciągłą, to wyrażenie

$$\frac{f''''(\eta_1)+f''''(\eta_2)+\ldots}{n}$$

będzie miało wartość, zawartą pomiędzy maximum i minimum wartości funkcyi f'''' w całkowitym przedziale; jeżeli więc przez η oznaczymy pewną wartość, zawartą pomiędzy a i b, będzie można napisać:

$$f''''(\eta)=\frac{f''''(\eta_1)+f''''(\eta_2)+\ldots}{n},$$

reszta zaś R' przybierze postać:

$$R'=-\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{8.4!}\,\frac{(b-a)^5}{n^4}\,f''''(\eta).$$

Widzimy stąd, że dla wartości n dostatecznie wielkiej można uczynić R' mniejszem od ilości danej, dowolnie małej, wzór zaś wyżej napisany jest wzorem przybliżonym na kwadraturę. Wzór ten nazywa się wzorem Simpsona. Literaturę tego wzoru podajemy w § 20.

---

§ 19.

Wzór Cotesa.

Całkujmy wyraz po wyrazie we wzorze Lagrange'a. Mamy:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)}\int_a^b\frac{f(x_i)}{x-x_i}\,dx+\int_a^b R\,dx,$$

gdzie

$$\varphi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

Wybierzmy punkty $x_0, x_1, \dots, x_n$ w sposób następujący:

$$x_0 = a;\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ x_2 = a + 2\frac{b-a}{n};\ \dots;\ x_n = a + n.\frac{b-a}{n} = b,$$

wtedy wyrażenie $\frac{1}{\varphi'(x_i)}$ staje się równem:

$$\frac{1}{\left(i\frac{b-a}{n}\right)\left((i-1)\frac{b-a}{n}\right)\left((i-2)\frac{b-a}{n}\right)\dots\left(1.\frac{b-a}{n}\right)\left(-1.\frac{b-a}{n}\right)\dots\left((-n-i)\frac{b-a}{n}\right)}$$

$$= (-1)^{n-i}\frac{n^n}{(b-a)^n}\,\frac{1}{i!\,(n-i)!}\,.$$

Jeżeli przez $h_n^{(i)}$ oznaczymy spółczynniki:

$$(-1)^{n-i}\frac{n^n}{(b-a)^{n+1}}\,\frac{1}{i!\,(n-i)!}\int_a^b\frac{\varphi(x)}{x-x_i}\,dx\,,$$

to łatwo widzieć, że spółczynniki te nie zależą od granic a i b. W samej rzeczy, położmy $x - a = \frac{b-a}{n}t$; stąd $dx = \frac{b-a}{n}dt$ i będzie:

$$h_n^{(i)} = (-1)^{n-i}\frac{n^n}{(b-a)^n}\cdot\frac{1}{i!(n-i)!}$$

$$\times\int_0^n\frac{(b-a)^{n+1}}{n^{n+1}}\,t.(t-1)\dots(t-i+1)(t-i-1)\dots(t-n)\,dt$$

$$= (-1)^{n-i}\frac{1}{n!.\,i!\,(n-i)!}\int_0^n t(t-1)\dots(t-i+1)(t-i-1)\dots(t-n)\,dt,$$

co nie zależy już ani od a ani od b. Wzór nasz zamienia się na następujący:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} h_n^{(i)} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) + R'.$$

Jest to tak zwany wzór Cotesa, któremu zawdzięczamy tablice wartości liczebnych spółczynników h dla różnych wartości n i i. Tak np. jest

$$h_2^{(0)} = h_2^{(i)} = \frac{1}{2},$$

$$h_3^{(0)} = h_2^{(1)} = \frac{1}{6}; \quad h_3^{(1)} = \frac{2}{3},$$

$$h_4^{(0)} = h_4^{(3)} = \frac{1}{8}; \quad h_4^{(1)} = h_4^{(2)} = \frac{3}{8},$$

. . . .

---

§ 20.

Wzór Gaussa na kwadraturę.

Przechodzimy obecnie do wzoru na przybliżoną kwadraturę, który zawdzięczamy Gaussowi (Werke, III).

Cel, jaki sobie zakładamy, jest taki: wzór szukany ma być dokładnym, jeżeli funkcya $f(x)$ jest funkcyą całkowitą stopnia wyższego niż stopień, bezpośrednio określony przez liczbę punktów, w których danemi są wartości funkcyi f. Otrzymuje się mianowicie wzór dokładny, gdy f jest funkcyą stopnia nie wyższego nad $2n + 1$, jeżeli jak zwykle funkcya f jest co do wartości swej dana dla $n+1$ punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

W ten sposób za pomocą rachunku całkowego można otrzymać większe przybliżenie niż za pomocą metod poprzednich dla jakiejkolwiek funkcyi niecałkowitej, jeżeli ta oczywiście nie staje się nieskończoną pomiędzy granicami całkowania.

Wzór Gaussa otrzymujemy, dobierając w odpowiedni sposób punkty $x_0, x_1, \ldots x_n$, dla których mają być danemi wartości funkcyi.

Wyjdźmy i tu z wzoru Lagrange'a i połóżmy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-x_i}\,dx + R'.$$

Pytanie sprowadza się do odpowiedniego wyboru punktów x_i, lub wielomianu

$$\varphi(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Połóżmy:

$$\varphi(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}\right].$$

Taki wielomian stopnia $n+1$ nazywa się zwykle funkcyą Legendre'a, liczby $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są pierwiastkami funkcyi Legendre'a stopnia $n+1$.

Jeżeli funkcya $f(x)$ jest wielomianem stopnia n-tego, wtedy we wzorze powyższym jest $R' = 0$ i wzór na kwadraturę jest dokładnym.

Okażemy, że wybierając na ilości x_i pierwiastki wielomianu Legendre'a, otrzymujemy wzór dokładny i dla wielomianu stopnia $(2n+1)$-go, jeżeli dla tego wielomianu jest jeszcze $R' = 0$.

Niechaj $\psi(x)$ będzie jakimkolwiek wielomianem stopnia $(n+1)$-go (lub niższego od $n+1$); utwórzmy wielomian $f(x)\,\psi(x)$ stopnia $2n+1$ (lub niższego od $2n+1$). Jeżeli prócz punktów

$x_0, \ldots, x_n$ obierzemy jeszcze $n+1$ punktów $x_{n+1}, \ldots, x_{2n+1}$, będziemy mogli napisać wzór dokładny:

$$\int_a^b f(x)\, \psi(x) = \sum_0^{2n+1} \frac{f(x_i)\, \psi(x_i)}{\Phi'(x_i)} \int_a^b \frac{\Phi(x)}{x-x_i}\, dx,$$

gdzie:

$$\Phi(x) = \varphi(x)\,(x-x_{n+1})\,(x-x_{n+1}) \ldots (x-x_{2n+1})$$

$$= \varphi(x)\, \Omega(x).$$

Pokażemy, że w tym wzorze: 1) wszystkie wyrazy, odpowiadające skaźnikom $i=n+1, n+2, \ldots, 2n+1$, znoszą się; 2) funkcyę Φ można zastąpić funkcyą φ. Na tej zasadzie z wzoru znikną wszystkie elementy nieoznaczone $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}$ i pozostanie wzór, zależny jedynie od elementów $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

W samej rzeczy, łatwo widzieć, że wyrazy, odpowiadające skaźnikom $i = n+k$, $k=1, 2, \ldots, n+1$, znikają. Gdyż wyrazy te zawierają czynnik całkowy:

$$\int_v^b \varphi(x)\,(x-x_{n+1}) \ldots (x-x_{n+b-1})\,(x-x_{n+k-1}) \ldots (x-x_{2n+1})\, dx,$$

a gdy uporządkujemy wielomian:

$$(x-x_{n+1}) \ldots (x-x_{n+k+1})\,(x-x_{n+k-1}) \ldots (x-x_{2n+1}),$$

według potęg ilości x, to całka rozpadnie się na sumę całek postaci

$$\int_a^b \varphi(x)\, x^h\, dx, \qquad (h=0, 1, 2, \ldots).$$

Każda taka całka da się całkować przez części:

$$\int_a^b \varphi(x)\, x^h\, dx = \left[x^h \int \varphi(x)\, dx\right]_a^b - h \int_a^b x^{h-1} \int \varphi(x)\, dx\,,$$

gdzie ze względu na postać specyalną funkcyi $\varphi(x)$, mamy:

$$\int \varphi(x)\, dx = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x-a)^{n+1} (x-b)^{n+1}\right].$$

Strona druga ostatniej równości staje się zerem dla $x = a$ i dla $x = b$, gdyż w pochodnej n-tej iloczynu $(x-a)^{n+1} (x-b)^{n+1}$ zachodzić będzie z pewnością czynnik $(x-a)(x-b)$. Będzie zatem:

$$\int_a^b x^h \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[(x-a)^{n+1} (x-b)^{n+1}\right] dx$$

$$= -h \int_a^b x^{h-1} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x-a)^{n+1} (x-b)^{n+1}\right] dx\,.$$

Stosując powtórnie toż postępowanie, dojdziemy do całki

$$\int_a^b x^{h-2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[(x-a)^{n+1} (x-b)^{n+1}\right] dx\,,$$

i idąc w ten sposób dalej (i pamiętając że $h \leqq n$), wreszcie do całki:

$$\int_a^b \frac{d^{n-h+1}}{dx^{n-h+1}} \left[(x-a)^{n+1} (x-b)^{n+1}\right] dx\,,$$

równej oczywiście wyrażeniu

$$\frac{d^{n-h}}{dx^{n-h}} \left[(x-a)^{n+1} (x-b)^{n+1}\right],$$

która, jak to już wyżej objaśniono, jest zerem tak dla $x=a$ jak i dla $x=b$.

Wnosimy tedy, że

$$\int_a^b \varphi(x)\, x^h\, dx = 0, \qquad h \leqq n,$$

stąd zaś wynika, że jest ogólnie:

$$\int_a^b \varphi(x)\, \Omega(x)\, dx = 0,$$

gdzie $\Omega(x)$ jest jakąkolwiek funkcyą całkowitą stopnia równego n lub mniejszego od n.

Tym sposobem własność podana pod 1) została udowodniona.

Dla udowodnienia własności drugiej należy tylko stwierdzić, że dla $i \leqq n$ jest zawsze

$$\frac{1}{\Phi'(x_i)} \int_a^b \frac{\Phi(x)}{x-x_i}\, dx = \frac{1}{\varphi'(x_i)} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-x_i}\, dx.$$

Zauważmy, że

$$\Phi'(x) = \varphi(x)\, \Omega'(x) + \varphi'(x)\, \Omega(x),$$

skąd dla $x=x_i$ $(i \leqq n)$:

$$\Phi'(x_i) = \varphi'(x_i)\, \Omega(x_i).$$

Twierdzenie, które mamy udowodnić, przyjmuje tedy postać:

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)\, \Omega(x)}{x-x_i}\, dx = \Omega(x_i) \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-x_i}\, dx,$$

lub

$$\int_a^b \varphi(x) \frac{[\Omega(x) - \Omega(x_i)]}{x-x_i} dx = 0,$$

co istotnie jest prawdą, gdyż

$$\frac{[\Omega(x) - \Omega(x_i)]}{x-x_i}$$

jest funkcyą całkowitą stopnia n-go, do której stosuje się zasada, wyżej przy udowodnieniu własności pierwszej stwierdzona. A zatem i druga własność została sprawdzona.

Z tego wszystkiego wypływa, że wzór Gaussa

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-x_i}\, dx,$$

gdzie ilości x_i są pierwiastkami wielomianu Legendre'a jest wzorem dokładnym i wtedy jeszcze, gdy stopień funkcyi całkowitej $f(x)$ jest wyższy od $n+1$, wszakże nie wyższy od $2n+1$.

Dla wszelkich innych funkcyj wzór ten, na zasadzie dopiero co wysłowionej własności, daje przybliżenie wyższe, niż inne wzory.

O kwadraturach przybliżonych traktują następujące prace: Gauss „Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi“, Werke, III, str. 163, 202; Jacobi, „Ueber Gauss'neue Methode“, Crelle, I, str. 301 (1826); Christoffel, tamże, LV, str. 61, 82 (1858); Tisserand, „Sur l'interpolation“, Comptes rendus, t. LXVIII, str. 1101 (1869); Steen, „Zeuthen Tidskr. (3), I, str. 90 (1870); Chevilliet, „Sur le degrè d'exactitude de la formule de Simpson“, Comptes rendus, LXXVIII, str. 1841 (1879); Czebyszew „Sur les quadratures“, Liouville, (2), t. XIX, str. 19, (1874); Chevilliet, „Sur l'erreur de la formule de Poncelet à l'évaluation des aires", Comptes rendus, t. LXXX, p. 823 (1875); Permantier, „Simplification de la méthode de Simpson", Nouv. Ann. (2), t. XV, str. 24 (1876); Ligowski, Grunert. Archiv., t. LX, str. 336 (1877); Hall, Analyst, t. III, str. I (1877); Pujet, Comptes rendus, LXXXIV, str. 1071; Callandreau, „Sur la formule de Gauss", Comptes rendus, t. LXXXIV, str. 1225 (1877), t. XC, str. 1067 (1880); Radau, Liouville (2), t. VI, str. 283 (1880), Comptes rendus, t. XC, str. 250, 913 (1880); Catalan, Nouv. corresp. math., t. VI, str. 336, Mém. de Belgique, t. XLII1; August, Archiv. Grunerta, t. LXVI, str. 72 (1880); Stieltjes, Comptes rendus, t. XCVII, str. 740; t. XCVIII, str. 798; Czebyszew, Mém. de St.-Pétersbourg, t. XLVII (1883); Posse w „Bulletin des sciences mathém." (2), t. VII, str. 214; Stieltjes, Ann de l'École norm. (3), t. I, str. 409 (8884), Comptes rendus, t. XCIX, str. 850; Mansion, Soc. scient. Bruxelles, t, VIII B, str. 11, (1884), Hoczevar, Wiener Ber., t. XC, str. 908 (1884); Schellbach „Ueber mechanische Quadratur", Berlin (1884); Markow, Math. Ann., XXV, str. 427 (1885); Mansion. Acad. de Belgique (3), XI (1886), Comptes rendus, t. CII, str. 412; t. CIV, str. 488, Mathesis, t. II; Deruyts, Bull Belg. (3), t. XI, str. 307; Soc. math. de France, t. XIV, str. 151 (1886); Czebyszew, Mém. de St.-Pétersbourg, t. LX, str. 1; Mansion, Soc. scient. Bruxelles, t. XII, A, str. 63, t. XV, A, str. 57; Sonin, Mém. de St.-Pétersbourg, t. LXIX, str. 1 (1892; Peano „Generalizzione della formola di Simpson", Accad. di Torino, tom XXVII (1892).

---

§ 21.

Rachunek odwrotny różnic. Rzeczy ogólne.

Zagadnienia z rachunku odwrotnego różnic są analogiczne z zagadnieniami rachunku całkowego: idzie w nich o znalezienie funkcyi $F(x)$, której różnice w jakimkolwiek punkcie x są równe wartościom funkcyi danej f w tymże punkcie, w założeniu, że różnice pomiędzy kolejnemi wartościami zmiennej niezależnej są stałe i równe h. Ta funkcya F nazywa się całką nieokreśloną różnicową funkcyi f i oznacza się zapomocą symbolu

$$F(x) = \Sigma f(x),$$

którego użycie usprawiedliwimy niżej przy pomocy zasadniczej własności funkcyi F.

Jest jasnem, że gdy do funkcyi F dodamy stałą dowolną, to ta nowa funkcya będzie czyniła zadość zagadnieniu, gdyż w każdym punkcie różnica ilości stałej jest zerem. Ogólniej biorąc, otrzymamy funkcyę, czyniącą zadość zagadnieniu, jeżeli do funkcyi F dodamy inną funkcyę, której różnica dla przyrostów h zmiennej niezależnej jest zerem, albo inaczej mówiąc, jeżeli dodamy funkcyę peryodyczną, która nie zmienia swej wartości, jeżeli zmienną niezależną powiększamy o stałą h.

Taką funkcyą jest np.

$$\varphi\left(\sin\frac{2\pi x}{h}, \cos\frac{2\pi x}{h}\right).$$

Zagadnienie wyznaczenia funkcyi F jest tedy, ściśle biorąc, zagadnieniem nieoznaczonem, gdyż dwie funkcye, mające te same różnice, różnić się mogą o funkcyę, której różnica jest zerem.

Zobaczmy, czem jest całka określona w tym rachunku?

Weźmy sumę wartości funkcyi f w n punktach równoodległych o ilość h; łatwo widzieć, że suma ta daje się wyrazić za pomocą dwu wartości funkcyi F (całki nieokreślonej), gdyż z równań

$$F(x+h) - F(x) = f(x),$$
$$F(x+2h) - F(x+h) = f(x+h),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F(x+nh) - F(x+(n-1)h) = f(x+(n-1)h),$$

otrzymujemy:

$$F(x+nh) - F(x) = f(x) + f(x+h) + \ldots + f(x+(n-1)h).$$

Sumę po stronie drugiej możemy oznaczyć przez

$$\sum_{x}^{x+nh} f(x)$$

i przez analogię nazwać ją całką określoną od x do $x+nh$. Z powyższego wzoru wynika tedy, że jeżeli znamy całkę nieokreśloną, t. j. funkcyę F, to dla otrzymania całki określonej od $x=a$ do $x=b=a+nh$ dość wziąć różnicę dwu wartości funkcyi F od $x=a$ do $x=b$. Jest jasnem, że w takiej różnicy ginie wszelki ślad jakiejkolwiek innej funkcyi, która wchodzi do całki nieokreślonej i ma różnicę równą zeru.

Jeżeli granica wyższa całki jest nieskończonością, otrzymujemy wtedy szereg. Jeżeli przyjmiemy, że ten szereg jest zbieżny, to do obliczenia go wystarczy znajomość całki nieokreślonej różnicowej, odpowiadającej ogólnemu wyrazowi szeregu. Z tego punktu widzenia całkowanie różnicowe ma ważne zastosowanie w teoryi szeregów.

Jest jasnem, że do całek różnicowych stosują się następujące twierdzenia elementarne rachunku całkowego:

Całka sumy algebraicznej pewnej liczby funkcyj równa się sumie algebraicznej całek tych funkcyj.

Całka iloczynu ilości stałej przez funkcyę równa się iloczynowi tej stałej przez całkę funkcyi.

§ 22.

Całkowanie przez części.

Podajemy tu wzór analogiczny do znanego wzoru w rachunku całkowym.

Wiemy (§ 3), że

$$\Delta\,[\varphi(x)\,\psi(x)] = \varphi(x)\,\Delta\psi(x) + \psi(x+h)\,\Delta\varphi(x);$$

stąd:

$$\Sigma\,\varphi(x)\,\Delta\psi(x) = \varphi(x)\,\psi(x) - \Sigma\,\psi(x+h)\,\Delta\varphi(x);$$

a gdy weźmiemy całkę określoną od $x=a$ do $x=a+nh$, będzie:

$$\sum_a^b \varphi(x)\,\Delta\psi(x) = \varphi(b)\,\psi(b) - \varphi(a)\,\psi(a)$$

$$- \sum_a^b \psi(x+h)\,\Delta\psi(x).$$

---

§ 23.

Całkowanie funkcyj całkowitych.

Wiemy, że różnica funkcyi całkowitej stopnia n-tego jest funkcyą całkowitą stopnia $(n-1)$-go; stąd wynika, że całka różnicowa funkcyi całkowitej stopnia m-tego jest funkcyą całkowitą stopnia $(m+1)$-go, której spółczynniki można łatwo otrzymać przy pomocy wzorów zwrotnych.

Niechaj będzie:

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m;$$

połóżmy:

$$F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{m+1} x^{m+1}.$$

Utwórzmy różnicę funkcyi F i porównajmy spółczynniki jej ze spółczynnikami funkcyi f; otrzymamy tym sposobem związki:

$$\begin{aligned}
&(m+1)_1 c_{m+1} h &&= b_m, \\
&(m+1)_2 c_{m+1} h^2 + (m)_1 c_m h &&= b_{m-1}, \\
&(m+1)_3 c_{m+1} h^2 + (m)_2 c_m h^2 + (m-1)_1 c_{m-1} h &&= b_{m-2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

których prawo tworzenia jest widocznem i które służyć mogą do wyznaczenia spółczynników c.

Niechaj będzie np. $f(x)=x^n$, t. j. $b_m=1, b_{m-1}=\ldots=b_0=0$, wtedy z równań poprzedzających dla $h=1$ znajdujemy:

$$(m+1)_1 c_{m+1} = 1; \quad (m+1)_2 c_{m+1} + (m)_1 c_m = 0, \ldots,$$

skąd

$$c_{m+1} = \frac{1}{m+1}, \quad c_m = -\frac{1}{2}, \quad c_{m-1} = \frac{m}{12}, \ldots.$$

Stąd można otrzymać wyrażenie na sumę m-tych potęg pierwszych n liczb naturalnych, t. j.

$$\Sigma x^m = \frac{1}{m+1} x^{m+1} - \frac{1}{2} x^m + \frac{1}{12} m x^{m-1} - \ldots,$$

Całkując pomiędzy granicami $x=0$ i $x=n+1$, otrzymujemy na stronie pierwszej:

$$1^m + 2^m + \ldots + n^m,$$

po drugiej zaś:

$$\frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1} - \frac{1}{2}(n+1)^m + \frac{1}{12}m(n+1)^{m-1} - \ldots$$

Stąd dla $m = 1, 2, 3, \ldots$ znajdujemy:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2\ldots 3},$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

. . . .

Co do tego przedmiotu patrz prace: Glaisher, „Note on the formula etc.", Messenger (2), t. V, str. 168 (1875); Seitz i Gander, The Analyst, t. VI, str. 58 (1879), gdzie okazano, że:

$$\sum_1^n x^9 = \frac{1}{5}(6s^5 - 20s^4 + 12s^2 - 3s^2); \quad s = \sum_1^n x.$$

Dostor, Archiv. Grunerta, t. LXIII, str. 435, t. LXIV, str. 310, Nouv. Ann. (2), t. XVIII, str. 459, 513 (1879); Cesàro, Mathesis, V, str. 54 (1885); Appell, „Sur les polynômes qui expriment la somme des puissances p-mes des premiers nombres entiers", Nouv. Ann. (3), t. VI, str. 312 (1887); Duporcq, Nouv. Ann. (3), t. IX, str. 594 (1889); Glaser, Archiv. Hoppego (2), t. XIII, str. 106 (1894).

§ 24.

Całkowanie innych funkcyj.

Jeżeli

$$f(x) = c^x \varphi(x),$$

gdzie $\varphi(x)$ jest funkcyą całkowitą stopnia $(m-1)$-go, to stosując całkowanie przez części, znajdziemy (patrz Markoff, l. c., str. 103):

$$\Sigma c^x \varphi(x) = \frac{c^x}{c^h - 1}\left\{\varphi(x) - \frac{c^h}{c^h-1}\Delta\varphi(x) + \ldots \right.$$

$$\left. + (-1)^m \left(\frac{c^h}{c^h-1}\right)^m \Delta^m \varphi(x)\right\}.$$

Stąd można znaleść wzór na obliczenie szeregu

$$c^x \varphi(x) + c^{x+h} \varphi(x+h) + c^{x+2h} \varphi(x+2h) + \ldots$$

dla $c < 1$.

Kładąc

$$c = \varrho(\cos\alpha + i \sin\alpha); \quad \varrho \leqslant 1; \quad \varphi(x) = 1,$$

otrzymujemy wzory następujące ($\varrho = 1$):

$$1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos(n-1)\alpha = \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{2n-1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin(n-1)\alpha = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{2n-1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Dla $\varrho < 1$ i w granicy dla $n = \infty$, będzie:

$$1 + \varrho \cos a + \varrho^2 \cos 2a + \ldots = \frac{1-\varrho \cos a}{1-2\varrho \cos a + \varrho^2},$$

$$\varrho \sin a + \varrho^2 \sin 2a + \ldots = \frac{\varrho \sin a}{1-2\varrho \cos a + \varrho^2}.$$

Co do całkowania różnic innych funkcyj patrz prace: Abel, „Les fonctions transcendantes $\Sigma \frac{1}{a^2}$, $\Sigma \frac{1}{a^3}$, ...“, Oeuvres, t. II; „Sommation de la série $\varphi(0) + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \ldots$“, tamże, „L'intégrale finie $\Sigma^{(n)} \varphi(x)$, ...“, tamże; Minding, „Eine Anwendung der Differenzenrechnung“, Bull. de St.-Pétersbourg, t. XXV (1879); Russell „On the calculus of finite differences“, Messenger (2), t. XI, str. 33; Guichard, Ann. de l'École. norm. (3), t. IV, str. 361 (1887).

Nadmieniamy jeszcze, że dla całek różnicowych można postawić zagadnienia podobne do tych, jakie stawia rachunek waryacyjny dla zwyczajnych całek określonych. Do tego przedmiotu odnoszą się dwie młodzieńcze, niedoskonałe i dlatego wyłączone z drugiego wydania dzieł prace Abela: „Sur les maxima et minima des intégrales des différences“ (Oeuvres, I-re édit., t. II, str. 1) i „Sur les conditions nécessaires pour qu'une fonction de plusieurs variables et de leurs différences soit une différence complète“ (tamże, str. 9). Ta ostatnia zajmuje się zagadnieniem podobnem do tego, jakie podaliśmy w § 35 „Rachunku waryacyjnego“.

§ 25.

Różnica pomiędzy całką określoną zwyczajną a całką określoną różnicową. Wzór Eulera.

Niechaj będzie dana funkcya $f(x)$; obliczmy najprzód jej całkę zwyczajną w granicach a i b, potem jej całkę różnicową między temi samemi granicami. Zachodzi pytanie, w jaki sposób można jednę z tych całek wyrazić przez drugą. Wzór, który wyraża jedną z tych całek przez drugą, nazywa się wzorem Eulera.

Wyjdźmy z wzoru Taylora, zastosowanego do całki

$$\int f(x)\,dx\,.$$

Mamy:

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = hf(a) + \frac{h^2}{2!}f'(a) + \frac{h^3}{3!}f''(a) + \ldots + R_1\,,$$

$$\int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx = hf(a+h) + \frac{h^2}{2!}f'(a+h) + \frac{h^3}{3!}f''(a+h) + \ldots + R_2\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

dodając te równości i kładąc $b=a+nh$, znajdujemy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\,\sum_a^h f(x) + \frac{h^2}{2!}\sum_a^b f'(x) + \ldots + R\,.$$

Wyjdźmy teraz z funkcyi

$$\int f(x)\,dx\,,$$

której kolejnemi pochodnemi są $f(x)$, $f'(x)$, ... Mamy:

$$[f(x)]_a^b = h \sum_a^b f'(x) + \frac{h^2}{2!} \sum_a^b f''(x) + \ldots + R',$$

$$[f'(x)]_a^b = h \sum_a^b f''(x) + \frac{h^2}{2!} \sum_a^b f'''(x) + \ldots + R'',$$

. . . .

Dodając te równości, po pomnożeniu ich odpowiednio przez czynniki 1, Ah, Bh^2, Ch^3, ..., będziemy mieli:

$$\int_a^b f(x)\,dx + Ah\,[f(x)]_a^b + Bh^2\,[f'(x)]_a^b + \ldots$$

$$= h \sum_a^b f(x) + h^2\left(\frac{1}{2!} + A\right) \sum_a^b f'(x)$$

$$+ h^3\left(\frac{1}{3!} + \frac{A}{2!} + B\right) \sum_a^b f''(x) + \ldots + \text{reszta}.$$

Możemy wyznaczyć liczby dotąd nieoznaczone A, B, ... w ten sposób, aby wszystkie spółczynniki po stronie drugiej, prócz pierwszego były zerami, t. j. możemy przyjąć, że:

$$\frac{1}{2!} + A = 0, \quad \frac{1}{3!} + \frac{A}{2!} + B = 0, \ldots;$$

otrzymamy wtedy żądany wzór Eulera:

$$h \sum_a^b f(x) - \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= Ah\,[f(x)]_a^b + Bh^2\,[f'(x)]_a^b + \ldots + \text{reszta}.$$

Pozostaje wyznaczyć jeszcze spółczynniki A, B i t. d. W tym celu połóżmy $f(x) = e^x$, wtedy będzie:

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a; \quad \sum_a^b e^x = \frac{e^b - e^a}{e^h - 1},$$

$$\Big[f(x)\Big]_a^b = \Big[f'(x)\Big]_a^b = \Big[f''(x)\Big]_a^b = \ldots = e^b - e^a,$$

i po zniesieniu czynnika wspólnego, otrzymamy:

$$\frac{h}{e^h - 1} = 1 + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots$$

Porównywając ten wzór z wzorem, podanym w § 11, widzimy, że liczby $A, B, C, \ldots$ tylko czynnikami stałemi różnią się od liczb Bernoulli'ego; jest mianowicie:

$$A = -\frac{1}{2}, \; B = \frac{B_2}{2!}, \; C = 0, \; D = -\frac{B_4}{4!}, \ldots,$$

gdzie B_2, B_4, ... są liczbami Bernoulli'ego.

Prace Eulera, odnoszące się do badań w tym i w poprzednich paragrafach podanych, są następujące: „Methodus generalis summandi progressiones“ (Comm. Ac. Petrop., tom VI, 1732—33); „Inventio summae etc.“ (tamże, t. VIII); „Methodus universalis series summandi etc.“ (tamże, t. VIII). Patrz także: Malmstèn, „Sur la formule etc.“, Acta math., t. V, str. 1 (1884), Sonin, Ann. de l'École norm. (3), t. VI, str. 257; Comptes rendus, t. CVIII, str. 725 (1889).

§ 26.

Równania o różnicach skończonych. Rzeczy ogólne.

Punkt wyjścia dla badań nad równaniami różnicowemi jest taki sam, jak w równaniach różniczkowych. Jeżeli przyjmiemy, że y jest funkcyą zmiennej x i że mamy związek pomiędzy x, y i kolejnemi różnicami funkcyi y, t. j. Δy, $\Delta^2 y, \ldots, \Delta^m y$, to taki związek nazywa się równaniem różnicowem rzędu m-tego.

Możemy równanie takie przedstawić i w odmiennej postaci. Wiadomo, że różnica k-ta funkcyi y może być wyrażona liniowo za pomocą wartości, które funkcya y przyjmuje w punktach x, $x+h$, $x+2h, \ldots, x+kh$; jeżeli te wartości podstawimy w równaniu, to zamieni się ono na związek pomiędzy x, $y\,(x)$, $y\,(x+h), \ldots, y\,(x+mh)$. Od tej ostatniej postaci można przejść do związku w postaci pierwszej, ponieważ wiadomo, że odwrotnie, wartości funkcyi w wyżej wskazanych punktach mogą być wyrażone liniowo za pomocą różnic kolejnych funkcyi w punkcie x.

Genezę równań różnicowych możemy wyobrazić sobie za pomocą procesu podobnego jak dla równań różniczkowych. Niechaj będzie funkcya y zmiennej x; obliczmy jej różnicę Δy. Jeżeli ta funkcya zawiera stałą dowolną lub funkcyą, której różnica jest zerem (patrz § 21), t. j. funkcyą peryodyczną, to rugując tę stałą lub tę funkcyę pomiędzy y i Δy, otrzymamy równanie różnicowe rzędu 1-go. W podobny sposób, wychodząc z funkcyi, zawierającej m funkcyj peryodycznych, dojść można do równania różnicowego rzędu m-tego.

Funkcya taka nazywa się całką ogólną równania rzędu m-tego.

Niechaj będzie np.

$$y = c\,a^x + c'\,b^x.$$

Dla $h = 1$ różnica pierwsza i druga będą:

$$\Delta y = c\, a^x\, (a-1) + c'\, b^x\, (b-1),$$

$$\Delta^2 y = c\, a^x\, (a-1)^2 + c'\, b^x\, (b-1)^2.$$

Rugując c i c', otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} y\,, & 1\,, & 1 \\ \Delta y\,, & a-1\,, & b-1 \\ \Delta^2 y, & (a-1)^2, & (b-1)^2 \end{vmatrix} = 0;$$

Jest to równanie różnicowe rzędu 2-go. Możemy stosować i inne postępowanie, oparte na zasadzie podanej na początku tego paragrafu, a mianowicie szukać związku nie pomiędzy x, y, Δy, $\Delta^2 y$, lecz pomiędzy x, $y\,(x)$, $y\,(x+1)$, $y\,(x+2)$.

Z równania

$$y\,(x) = c\, a^x + c'\, b^x,$$

otrzymujemy:

$$y\,(x+1) = c\, a^{x+1} + c'\, b^{x+1},$$

$$y\,(x+2) = c\, a^{x+2} + c'\, b^{x+2},$$

a rugując c i c', dochodzimy do związku:

$$\begin{vmatrix} y\,(x)\,, & 1\,, & 1 \\ y\,(x+1)\,, & a\,, & b \\ y\,(x+2), & a^2, & b^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Uczynimy jeszcze jedno pożyteczne spostrzeżenie, mianowicie, że rząd równania różnicowego może niekiedy wydawać się wyższym, niż nim jest istotnie po redukcyi. Równanie naprzykład

$$2y + 3\,\Delta y - \Delta^3 y = x$$

zdaje się być rzędu 3-go. Przekształćmy je sposobem wyżej wskazanym, biorąc wartości funkcyi y w punktach x, $x+1$, $x+2$, $x+3$. Otrzymamy:

$$3y(x+2) - y(x+3) = x,$$

a kładąc $x-2$ zamiast x:

$$3y(x) - y(x+1) = x-2.$$

Jest to równanie rzędu 1-go, nie zaś 3-go.

Jeżeli napiszemy

$$y(x+1) = \Delta y + y,$$

będzie:

$$2y - \Delta y = x - 2$$

równaniem równoważnem danemu.

Należy jeszcze nadmienić, że i dla równań różnicowych istnieją całki ogólne i całki szczególne; ostatnie z nich otrzymuje się z pierwszych, jeżeli zamiast funkcyj peryodycznych podstawimy wartości szczególne.

---

§ 27.

Równania liniowe różnicowe.

Dość ważną klasą równań różnicowych jest klasa tak zwanych równań liniowych. Formą ogólną takich równań dla $h=1$ jest:

$$Ay(x+m) + By(x+m-1) + \ldots + My(x) = N,$$

gdzie $A, B, \ldots, M, N$ są funkcyami zmiennej x.

Zwykłe twierdzenia rachunku całkowego, odnoszące się do równań różniczkowych liniowych, utrzymują się bez zmiany i dla równań różnicowych. Gdybyśmy je chcieli tu udowodnić, musielibyśmy powtórzyć z małemi zmianami rozważania, podane przez nas w „Rachunku całkowym". Z tego powodu ograniczymy się tylko na wypowiedzeniu tych twierdzeń, a po dowód ich odsyłamy czytelnika do cytowanego dzieła Markowa.

Odróżniamy przypadek równania jednorodnego, w którym $N = 0$, od przypadku równania zupełnego, w którym N zerem nie jest.

1. W przypadku równania jednorodnego gdy y_1 jest rozwiązaniem szczególnem, będzie i $c_1\, y_1$ takiemże rozwiązaniem; c_1 jest funkcyą peryodyczną.

2. W tymże przypadku, jeżeli y_1 i y_2 są dwoma rozwiązaniami szczególnemi, będzie także $c_1\, y_1 + c_2\, y_2$ takiemże rozwiązaniem.

3. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego może być dane w postaci

$$y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \ldots + c_n\, y_n\,,$$

gdzie $c_1, c_2, \ldots, c_n$ są funkcyami peryodycznemi, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — rozwiązaniami szczególnemi, pod warunkiem wszakże, by wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} y_1\,(x), & y_2\,(x)\,, & \ldots. & y_m\,(x) \\ y_1\,(x+1), & y_2\,(x+1), & \ldots, & y_m\,(x+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1\,(x+m-1), & y_2\,(x+m-1), & \ldots, & y_m\,(x+m-1) \end{vmatrix}$$

był różny od zera.

4. Jeżeli do szczególnego rozwiązania równania zupełnego dodamy rozwiązanie ogólne odpowiedniego równania jednorod-

nego, otrzymamy rozwiązanie równania zupełnego.

5. Rozwiązanie równania zupełnego daje się sprowadzić—po za całkowaniem skończonem—do rozwiązania odpowiedniego równania jednorodnego.

Całka równania liniowego nazywa się całką wyróżnioną (integrale distinto), gdy posiada własność, że stosunek jej do każdej innej całki tegoż równania dąży do zera dla $x=\infty$. (Patrz Pincherle „Delle funzioni ipergeometrische", Giornale di Batt., t. XXXII, § 13). Taka całka szczególna (jeżeli istnieje) będzie z pewnością jedyną na zasadzie określenia. Można okazać, że dla równań 2-go rzędu warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby całka $c_1 y_1 + c_2 y_2$, gdzie y_1 i y_2 są dwiema całkami szczególnemi zasadniczemi, była wyróżnioną, jest, by stosunek $\frac{y_1}{y_2}$ posiadał granicę dla $x=\infty$ (Pincherle, l. c., § 15).

Nadmieniamy jeszcze, że badanie równań różnicowych wiąże się z badaniem tak zwanych układów zwrotnych. W samej rzeczy, każde równanie różnicowe, ustanawiające związek pomiędzy wartościami $y(x)$, $y(x+1)$, $y(x+2)$, ... tej samej funkcyi y dla kolejnych równoodległych wartości zmiennej niezależnej, można uważać za związek zwrotny pomiędzy wartościami funkcyi. Związek ten pozwala z wartości znanych w punktach 0, 1, 2, ... wyznaczyć wartości w innych punktach, odpowiadających liczbom całkowitym. Gdy równanie różnicowe jest liniowem, otrzymujemy układ zwrotny liniowy rzędu równego rzędowi równania.

Niektórzy autorowie z tego punktu widzenia badali równania różnicowe; patrz np. cytowane już rozprawy Pincherlego i inne prace tegoż autora, wymienione niżej w § 34.

§ 28.

Równania liniowe rzędu 1-go.

Ogólna postać równań liniowych rzędu 1-go jest:

$$y(x+1) - Py(x) = Q.$$

Połóżmy (podobnie jak to się dzieje w równaniach różniczkowych liniowych):

$$y(x) = u(x)\,v(x),$$

skutkiem czego dane równanie zamieni się na następujące:

$$u(x+1)\,v(x+1) - Pu(x)\,v(x) = Q.$$

Dodajmy i odejmijmy $u(x+1)\,v(x)$ i uporządkujmy odpowiednio wyrazy; będzie:

$$u(x+1)\,[v(x+1) - v(x)] + v(x)\,[u(x+1) - Pu(x)] = Q.$$

Połóżmy $u(x+1) - Pu(x) = 0$, t. j.

$$\Delta u + u(1-P) = 0.$$

Jest to równanie liniowe rzędu 1-go jednorodne; łatwo widzieć, że rozwiązanie jego wyraża się tak:

$$u(x) = P(x_0)\,P(x_0+1)\,.\,.\,.\,P(x-1),$$

gdzie x_0 jest wartością różną od x i mniejszą od x dla wartości x całkowitych. W samej rzeczy, z tego równania mamy:

$$u(x+1) = P(x_0)\, P(x_0+1) \ldots P(x-1)\, P(x),$$

a więc:

$$u(x+1) - P(x)\, u(x) = 0,$$

jak być powinno. Przy takiem założeniu, równanie nasze zamienia się na następujące:

$$\Delta v(x) = \frac{Q}{u(x+1)},$$

skąd wynika:

$$v(x) = \Sigma \frac{Q}{u(x+1)} + \text{const.},$$

gdzie stała jest wogóle funkcyą peryodyczną.

Tym sposobem znaleźliśmy rozwiązanie ogólne danego równania.

---

§ 29.

Równania różnicowe liniowe jednorodne o spółczynnikach stałych.

Rozważmy równanie różnicowe typu

$$a_m y(x+m) + a_{m-1}\, y(x+m-1) + \ldots + a_1\, y(x+1) + a_0\, y(x) = 0,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_m$ są ilościami stałemi.

Własności tych równań są dość podobne do własności równań różniczkowych liniowych o spółczynnikach stałych.

Weźmy równanie charakterystyczne:

$$a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

i niechaj $z = a$ będzie pierwiastkiem r-krotnym tego równania Wtedy łatwo okazać, że

$$a^x, \quad xa^x, \quad \frac{x(x-1)}{2!}\, a^x, \ldots, \quad \frac{x(x-1)\ldots(x-r+2)}{(r-1)!}\, a^x,$$

są całkami szczególnemi danego równania różnicowego (zamiast czynników tu podanych przy a^x możnaby wziąć jakiekolwiek funkcye całkowite odpowiednio stopnia 1-go, 2-go i t. d.; lecz funkcye wybrane są ze stanowiska teoryi różnic prostszemi). Istotnie, jeżeli $y(x) = a^x$, to będzie: $y(x+1) = a\, a^x$, $y(x+2) = a^2\, a^x, \ldots$; podstawiając te wartości i znosząc czynnik wspólny a^x, otrzymamy wyrażenie równe tożsamościowo zeru, na mocy własności liczby a, czyniącej zadość równaniu charakterystycznemu. Podobnież, jeżeli $y(x) = xa^x$, to będzie:

$$y(x+1) = x \,.\, a^x \,.\, a + a^{x+1},$$

$$y(x+2) = x \,.\, a^x \,.\, a^2 + 2\, a^{x+1} \,.\, a,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y(x+m) = x \,.\, a^x \,.\, a^m + m\, a^{x+1} \,.\, a^{m-1}.$$

Podstawiwszy te wartości, spostrzeżemy, że i $x\, a^x$ jest całką równania, gdyż a jako pierwiastek wielokrotny zamienia też na zero i pochodną strony pierwszej równania charakterystycznego. Weźmy dalej.

$$y(x) = \frac{x(x-1)}{2!}\, a^x;$$

będzie:

$$y(x+1) = \frac{(x+1)\,x}{2!}\,a^{x+1} = \frac{x\,(x-1)}{2!}\,a^x \,.\, a + \Delta\left(\frac{x\,(x-1)}{2!}\right) a^{x+1},$$

$$y(x+2) = \frac{(x+2)\,(x+1)}{2!}\,a^{x+2}$$

$$= \frac{x\,(x-1)}{2!}\,a^x \,.\, a^2 + 2\Delta\left(\frac{x\,(x-1)}{2!}\right) a^{x+1} \,.\, a + \Delta^2\left(\frac{x\,(x-1)}{2!}\right) a^{x+2},$$

. . . .

$$y(x+m) = \frac{(x+m)\,(x+m-1)}{2!}\,a^{x+m}$$

$$= \frac{x\,(x-1)}{2!}\,a^x \,.\, a^m + (m)_1\,\Delta\left(\frac{x\,(x-1)}{2!}\right) a^{x+1} \,.\, a$$

$$+ (m)_2\,\Delta^2\left(\frac{x\,(x-1)}{2!}\right) a^{x+2} \,.\, a^{m-2}.$$

przy uwzględnieniu związku:

$$\frac{(x+r)\,(x+s-1)}{2!} = \frac{x\,(x-1)}{2!} + (s)_1\,\Delta\left(\frac{x\,(x-1)}{2!}\right)$$

$$+ (s)_2\,\Delta^2\left(\frac{x\,(x-1)}{2!}\right),$$

zawierającego po stronie drugiej tylko różnicę pierwszą i drugą, gdyż różnice rzędu wyższego funkcyi $x\,(x-1)$, jako funkcyi stopnia 2-go, znikają.

Jeżeli podstawimy te wartości i zauważymy, że przy $z = a$ znika tożsamościowo strona pierwsza równania charakterystycznego, a także pierwsza i druga pochodna tej strony, to przekonamy się, że

$$\frac{x\,(x-1)}{2!}\,a^x$$

jest całką tego równania. W podobny sposób można przeprowadzić dowodzenie i dla pozostałych rozwiązań.

Tak więc każdy pierwiastek r-krotny równania charakterystycznego daje r różnych całek; jeżeli więc $a_1, a_2, \ldots, a_i$ są różnemi pierwiastkami równania charakterystycznego i jeżeli $r_1, r_2, \ldots, r_i$, (gdzie $r_1 + r_2 + \ldots + r_i = m$) są stopniami ich wielokrotności, to otrzymamy $r_1 + r_2 + r_i$, t. j. m całek szczególnych, które, jak łatwo sprawdzić, nie zamieniają na zero wyznacznika, o którym mówimy w paragrafie poprzedzającym, stanowią zatem układ zasadniczy. Kombinacya liniowa tych całek daje nam całkę ogólną równania danego.

§ 30.

Wyznacznik różnicowy **Wrońskiego.** *Badania* **Casorati'ego.**

Wiadomo z rachunku różniczkowego, jak się tworzy wyznacznik Wrońskiego (patrz „Raohunek różniczkowy", str. 181 i dal. i „Rachunek całkowy", str. 201 i dal.); elementy pierwszego wiersza są m funkcyami danemi, elementy pozostałych wierszy tworzymy, biorąc pochodne kolejnych wyrazów wiersza pierwszego. Wyznacznik ten ma dwie ważne własności: 1) pochodna jego względem x tworzy się wprost, jeżeli zamiast elementów ostatniego wiersza napiszemy ich odpowiednie pochodne; 2) znikanie tego wyznacznika jest warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby funkcye dane były połączone związkiem jednorodnym o spółczynnikach stałych. W teoryi równań różniczkowych liniowych rzędu m-tego rozważamy taki wyznacznik, wyznaczony z m liniowo-niezależnych m całek szczególnych danego równania i wyrażamy go za pomocą kombinacyi spółczynników samego równania (wzór Liouville'a; patrz „Rachunek całkowy", str. 215). Otóż można utworzyć analogiczny wyznacznik, biorąc zamiast pochodnych różnice kolejne funkcyj danych; taki wyznacznik ma postać:

$$D = \begin{vmatrix} y_1(x), & \ldots, & y_m(x) \\ \Delta y_1(x), & \ldots, & \Delta y_m(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta^{m-1} y_1(x), & \ldots, & \Delta^{m-1} y_m(x) \end{vmatrix};$$

można go przedstawić i w ten sposób:

$$D = \begin{vmatrix} y_1(x), & \ldots, & y_m(x+1) \\ y_1(x+1), & \ldots, & y_m(x+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1(x+m-1), & \ldots, & y_m(x+m-1) \end{vmatrix}.$$

Że postać druga daje tą samą wartość wyznacznika, łatwo przekonać się w sposób następujący. Od elementów drugiego wiersza wyznacznika postaci pierwszej odejmijmy odpowiednie elementy pierwszego wiersza; będzie:

$$D = \begin{vmatrix} y_1(x), & \ldots, & y_m(x) \\ \Delta y_1(x), & \ldots, & \Delta y_m(x) \\ y_1(x+2), & \ldots, & y_m(x+2) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1(x+m-1), & \ldots, & y_m(x+m-1) \end{vmatrix}.$$

Następnie od elementów wiersza 3-go w ostatniem wyrażeniu odejmijmy elementy pierwszego i elementy drugiego, pomnożone przez 2, otrzymamy wtedy w trzecim wierszu:

$$\Delta^2 y_1(x), \ldots, \Delta^2 y_m(x),$$

gdyż $y(x+2) = y(x) + 2\,\Delta y(x) + \Delta^2 y(x)$.

Postępując w ten sposób dalej, dojdziemy wreszcie do postaci drugiej.

Do wyznacznika D stosuje się następujące twierdzenie Casorati'ego („Il calcolo delle differenze finite etc.", Mem. Acc. Lincei, t. V, 1880).

„Znikanie wyznacznika D jest warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby pomiędzy m funkcyami $y_1, \ldots, y_m$ istniał związek liniowy, jednorodny o spółczynnikach peryodycznych (t. j. o spółczynnikach, które są funkcyami zmiennej x, przyjmującemi te same wartości, gdy wartość zmiennej powiększamy o 1).

W samej rzeczy, jeżeli dane funkcye łączy taki związek, wtedy spełniają się tożsamościowo równania:

$$c_1\, y_1\,(x) + c_2\, y_2\,(x) + \ldots + c_m\, y_m\,(x) = 0,$$
$$c_1\, y\,(x+1) + c_2\, y_2\,(x+1) + \ldots + c_m\, y_m\,(x+1) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_1\, y_1\,(x+m-1) + c_2\, y_2\,(x+m-1) + \ldots + c_m\, y_m\,(x+m-1) = 0,$$

a stąd wyznacznik tego układu równań liniowych musi być zerem.

Dowiedziemy, że ten warunek jest dostateczny.

Dla $m = 2$ mamy:

$$\begin{vmatrix} y_1\,(x), & y_2\,(x) \\ y_1\,(x+1), & y_2\,(x+1) \end{vmatrix} = 0\,,$$

skąd:

$$\frac{y_2\,(x+1)}{y_1\,(x+1)} = \frac{y_2\,(x)}{y_1\,(x)}\,.$$

Z tego związku wypływa, że funkcya $\dfrac{y_2\,(x)}{y_1\,(x)}$ jest funkcyą peryodyczną w znaczeniu wyżej wskazanem; jeżeli więc uczynimy ją równą $-\mu$, gdzie μ jest funkcyą peryodyczną, znajdziemy związek:

$$y_2(x) + \mu\, y_1(x) = 0,$$

wykazujący, że twierdzenie jest prawdziwem w przypadku $m = 2$. Udowodnimy teraz, że jeżeli jest prawdziwem dla skaźnika $m-1$, to będzie też prawdziwem i dla skaźnika m.

Jeżeli od elementów 1-go, 2-go i t. d. wiersza, pomnożonych odpowiednio przez $y_1(x+1)$, $y_2(x+2)$, ..., odejmiemy elementy wiersza 2-go, 3-go, ..., pomnożone odpowiednio przez $y_1(x)$, $y_1(x+1)$, ..., wyznacznik D przekształci się na następujący:

$$\frac{1}{y_1(x+1)\ldots y_1(x+m-2)}\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,m-1} \\ a_{2,1}, & \ldots, & a_{2,m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m-1,1}, & \ldots, & a_{m-1,m-1} \end{vmatrix},$$

gdzie

$$a_{ij} = y_{j+1}(x+i-1)\, y_1(x+i) - y_1(x+i-1)\, y_{j+1}(x+i).$$

Jeżeli przyjmiemy, że funkcya $y_1(x)$ nie staje się nieskończoną i że D jest zerem, to będzie zerem wyznacznik, występujący w tym wzorze. Jest to wyznacznik, utworzony w sposób podobny jak wyznacznik D, lecz dla $m-1$ funkcyj:

$$\varphi_1(x) = y_2(x)\, y_1(x+1) - y_1(x)\, y_2(x+1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{m-1}(x) = y_m(x)\, y_1(x+1) - y_1(x)\, y_m(x+1).$$

Jeżeli twierdzenie jest prawdziwem aż do skaźnika $m-1$, to pomiędzy temi funkcyami istnieje związek liniowy, jednorodny o spółczynnikach peryodycznych; tak że mamy tożsamościowo:

$$c_2\, \varphi_1(x) + c_3\, \varphi_2(x) + \ldots + c_m\, \varphi_{m-1}(x) = 0.$$

Jeżeli podstawimy tu wartości funkcyj φ, będzie:

$$\begin{vmatrix} y_1(x), & c_2 y_2(x) + \ldots + c_m y_m(x) \\ y_1(x+1), & c_2 y_2(x+1) + \ldots + c_m y_m(x+1) \end{vmatrix} = 0.$$

Wyznacznik ten jest oczywiście wyznacznikiem D, utworzonym dla dwu funkcyj:

$$y_1(x), \quad [c_2 y_2(x) + \ldots + c_m y_m(x)],$$

a więc pomiędzy temi dwiema funkcyami zachodzi związek liniowy o spółczynnikach peryodycznych, i twierdzenie tym sposobem zostało udowodnione.

---

§ 31.

Równania, dające się sprowadzić do typu równań liniowych o spółczynnikach stałych.

Niechaj będzie równanie liniowe

$$y(x+n) + A_1 \varphi(x) y(x+n-1) \\ + A_2 \varphi(x) \varphi(x-y) y(x+n-2) + \ldots = \Phi(x),$$

gdzie $A_1, A_2, \ldots$ są ilościami stałemi.

Połóżmy:

$$y(x) = \varphi(x-n) \varphi(x-n-1) \ldots \varphi(x_0) u(x),$$

gdzie przez x_0 rozumiemy liczbę stałą, mniejszą od $x-n$ i różną od x dla wartości całkowitych.

Będzie:

$$y(x+n) = \varphi(x) \varphi(x-1) \ldots \varphi(x-n) \varphi(x_0) u(x+n),$$
$$y(x+n-1) = \varphi(x-1) \ldots \varphi(x-n) \varphi(x_0) u(x+n-1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Podstawiając tę wartości i dzieląc przez czynnik wspólny $\varphi(x)\,\varphi(x-1)\ldots\varphi(x_0)$, otrzymamy równanie, którego strona pierwsza ma spółczynniki stałe, druga zaś równa się:

$$\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)\,\varphi(x-1)\ldots\varphi(x_0)}.$$

Jeżeli mamy równanie typu

$$y(x+n)+A_1 a^x\,y(x+n-1)+A_2 a^{2x}\,y(x+n-2)+\ldots=\Phi(x),$$

to kładąc $\varphi(x)=a^x$, będziemy mieli $\varphi(x)\,\varphi(x-1)=\dfrac{a^{2x}}{a},\ldots$ i sprowadzimy łatwo równanie do typu poprzedzającego.

Mamy równanie nieliniowe rzędu 1-go typu:

$$y(x+1)\,y(x)+\varphi(x)\,y(x+1)+\psi(x)\,y(x)=\chi(x).$$

Połóżmy:

$$y(x)=\frac{z(x+1)}{z(x)}-\varphi(x);$$

będzie:

$$y(x+1)\,[y(x)+\varphi(x)]=\left[\frac{z(x+2)}{z(x+1)}-\varphi(x+1)\right]\frac{z(x+1)}{z(x)}$$

$$=\frac{z(x+2)}{z(x)}-\varphi(x+1)\frac{z(x+1)}{z(x)}.$$

Podstawiając i redukując, otrzymujemy:

$$z(x+2)-[\varphi(x+1)-\psi(x)]\,z(x+1)$$
$$-[\psi(x)\,\varphi(x)+\chi(x)]\,z(x)=0$$

W ten sposób dane równanie nieliniowe rzędu 1-go sprowadziliśmy do równania liniowego rzędu 2-go. Jeżeli spółczynniki tego równania są stałemi lub sprowadzić się dają do jednej z postaci $A_1\,\Phi(x)$, $A_2\,\Phi(x)\,\Phi(x-1)$, wtedy równanie można w dalszym ciągu przekształcić na równanie o spółczynnikach stałych.

Rozważania, podane w tym paragrafie, wzięte są z cytowanego już dzieła Boole'a.

---

§ 32.

Różne przykłady równań różnicowych.

Podamy w tym paragrafie niektóre przykłady równań różnicowych wraz z ich rozwiązaniami dla pokazania, jakiemi sztucznemi sposobami całkujemy te równania nawet w przypadkach najprostszych. Tu, podobnie jak i w teoryi równań różniczkowych, mało jest zasad ogólnych, i zauważyć należy, że teorya równań różnicowych jest wogóle trudniejsza i mniej zbadana, niż teorya równań różniczkowych, z którą ma zresztą wielkie podobieństwo.

Przykłady, w tym i w następnych paragrafach podane, wzięte są z dzieła Boole'a; zwracamy wszakże uwagę na to, że autor ten, podobnie jak i większość autorów angielskich, używa najczęściej rachunków symbolicznych, bez dostatecznego atoli uzasadnienia. Jakkolwiek przeto rachunki te w niektórych przypadkach prowadzą do rezultatu, nie można ich jednak zalecać szukającym bardziej elementarnej ścisłości analitycznej, o ile oczywiście nie znajdzie się sposób ścisłego uzasadnienia przejść symbolicznych od jednego wzoru do drugiego. Postaramy się rozwiązać wszystkie przykłady, wyłączając bezwzględnie działania symboliczne.

1. Niechaj będzie równanie:

$$y(x+1)\,y(x) - X\,[y(x+1) - y(x)] + 1 = 0,$$

gdzie X jest funkcyą zmiennej x. Połóżmy $y(x) = \operatorname{tg} z(x)$; będzie:

$$\frac{1}{X} = \frac{\operatorname{tg} z(x+1) - \operatorname{tg} z(x)}{1 + \operatorname{tg} z(x+1) \operatorname{tg} z(x)} = \operatorname{tg} [z(x+1) - z(x)]$$

$$= \operatorname{tg} \Delta z(x),$$

stąd:

$$\Delta z(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{X},$$

$$z(x) = \Sigma \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{X} + \text{const.},$$

$$y = \operatorname{tg} \left[\Sigma \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{X} + \text{const.} \right].$$

2. Rozwiązać równanie:

$$y(x+1)\, y(x) + \sqrt{\{1-y^2(x+1)\}\{1-y^2(x)\}} = X.$$

Połóżmy $y(x) = \cos z(x)$; będzie:

$$X = \cos z(x+1) \cos z(x) + \sin z(x+1) \sin z(x)$$

$$= \cos [z(x+1) - z(x)] = \cos \Delta z(x),$$

a stąd:

$$y(x) = \cos [\text{const.} + \Sigma \operatorname{arc\,cos} X].$$

3. Zcałkować równanie

$$y = x\, \Delta y + (\Delta y)^2.$$

Utwórzmy różnicę pierwszą obu stron. Jeżeli oznaczymy przez $y_1, y_{x+1}, \ldots$ wartości funkcyi y przy wartościach $x_1, x+1, \ldots$ zmiennej, będzie:

$$y_{x+1} = (x+1)\, \Delta y_{x+1} + (\Delta y_{x+1})^2; \quad y_x = x\, \Delta y_x + (\Delta y_x)^2;$$

odejmując drugą równość od pierwszej, otrzymujemy:

$$\Delta y_x = \Delta y_{x+1} + x\,\Delta^2 y_x + \Delta^2 y_x\,(\Delta y_{x+1} + \Delta y_x),$$

a kładąc tu $\Delta y_{x+1} = \Delta y_x + \Delta^2 y_x$, opuszczając skaźnik x, dochodzimy do równania:

$$\Delta y = \Delta y + x\,\Delta^2 y + \Delta^2 y + 2\Delta y\,\Delta^2 y + (\Delta^2 y)^2,$$

skąd:

$$\Delta^2 y\,(\Delta^2 y + 2\,\Delta y + x + 1) = 0.$$

Jeżeli weźmiemy $\Delta^2 y = 0$, znajdziemy stąd $\Delta y =$ stałej, $y = cx + c'$, a podstawiwszy tę wartość w równaniu danem, otrzymamy $c' = c^2$, mamy tedy pierwsze rozwiązanie:

$$y = cx + c^2.$$

Drugie rozwiązanie znajdziemy, kładąc

$$\Delta^2 y + 2\,\Delta y + x + 1 = 0.$$

Temu równaniu czyni zadość

$$\Delta y = C\,(-1)^x - \frac{x}{2} - \frac{1}{4},$$

co łatwo sprawdzić, gdyż wtedy

$$\Delta^2 y = -\,2\,C\,(-1)^x - \frac{1}{2},$$

a te dwie wartości Δy i $\Delta^2 y$ sprawdzają równanie. Otrzymujemy stąd drugą całkę równania danego, które—ponieważ równanie to jest stopnia 2-go względem Δy i może się rozbić na iloczyn dwu czynników liniowych, z których każde ma swoje własne rozwiązanie—

$$y = \left\{C\,(-1)^x - \frac{1}{4}\right\}^2 - \frac{x^2}{4}.$$

§ 33.

Układy równań jednoczesnych.

Jeżeli mamy pewną liczbę równań różnicowych, zawierających tyleż funkcyj niewiadomych wraz z ich różnicami, mamy wtedy układ równań jednoczesnych.

Dla rozwiązania takiego układu staramy się wyrugować jednę z tych funkcyj wraz z jej różnicami, by tym sposobem otrzymać mniejszą liczbę równań z mniejszą liczbą niewiadomych i to postępowanie prowadzimy tak długo, póki nie dojdziemy do jednego równania z jedną funkcyą niewiadomą.

Pokażemy na niektórych najprostszych przykładach, jaką drogą dochodzimy do tego celu.

Niechaj będą dwa równania:

$$y(x+1) - a^2 x\, z(x) = 0; \quad z(x+1) - x\, y(x) = 0,$$

z których mamy wyznaczyć wartości funkcyj $y(x)$, $z(x)$. Z pierwszego równania mamy:

$$y(x+2) - a^2 (x+1)\, z(x+1) = 0,$$

a rugując z przy pomocy drugiego:

$$y(x+2) - a^2 x (x+1)\, y(x) = 0.$$

Połóżmy:

$$y(x) = (x-1)(x-2) \ldots x_0\, u(x);$$

będzie:

$$y(x+2) = (x+1) x \,.\, (x-1)(x-2) \ldots x_0\, u(x+2).$$

Podstawiając tę wartość i znosząc czynnik wspólny, otrzymujemy równanie liniowe o spółczynnikach stałych:

$$u(x+2) - a^2 u(x) = 0,$$

$$y(x) = (c_0 + c_1 x)\, 2^x + (c_2 + c_3 x)\, (-2)^x.$$

Podstawiając tę wartość w pierwszem z równań danych, znajdziemy:

$$z(x) = [(c_0 - 3\,c_1) + c_1 x]\, 2^x - [(c_2 - 3\,c_3) + c_3 x)]\, (-2)^x.$$

---

§ 34.

O równaniach z różnicami cząstkowemi.

Niechaj z będzie funkcyą dwu zmiennych x, y; utwórzmy różnice cząstkowe funkcyi z w ten sposób:

$$\Delta_x z = z(x + \Delta x, y) - z(x, y),$$

$$\Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x, y),$$

Przyjmować będziemy nadal, że ilości Δx i Δy są równe sobie i obie równe jedności.

Można pomyśleć równania o różnicach cząstkowych, które w rachunku różnic spełniają takie same usługi, jakie w rachunku nieskończonościowym równania o pochodnych cząstkowych.

Nie mogąc tu podać teoryj ogólnych, ograniczymy się na przytoczeniu kilku przykładów dla pokazania, jak traktują się takie równania.

Zauważmy najprzód, że równania te można przedstawić pod różnemi postaciami. Można wyobrazić sobie, że mamy związek pomiędzy x, y, z, $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, . . . ; że różnice Δ zastąpiliśmy ich wyrażeniami przy pomocy kolejnych wartości funkcyj; dalej, że to podstawienie uskuteczniono tylko dla różnic ze skaźnikiem x, nie zaś dla różnic ze skaźnikiem y, lub odwrotnie. A zatem równanie różnicowe cząstkowe o dwu zmiennych może być przedstawione pod czterema różnemi postaciami.

Niechaj będzie równanie najprostsze

$$z(x+1, y) - z(x, y+1) = 0.$$

Wyrażone przez różnice, równanie to ma postać:

$$\Delta_x z - \Delta_y z = 0;$$

jest widocznem, że funkcya

$$z = y + x$$

czyni mu zadość. Lecz można powiedzieć więcej: każda funkcya dowolna ilości $y+x$ sprawdza równanie, gdyż taka funkcya dwumianu $y+x$ ma własność, że powiększa się o to samo, gdy powiększamy zmienną x czy też zmienną y o jedność, albowiem w obu razach argument $y+x$ powiększa się o to samo. Wnosimy stąd, że całka równania danego jest postaci:

$$z = \varphi(x+y),$$

gdzie φ jest symbolem funkcyi dowolnej.

Widzimy, że występuje tu fakt analogiczny do tego, który znamy z teoryi równań różniczkowych cząstkowych, t. j. że całka takiego równania zawiera nietylko stałe dowolne lecz i funkcye dowolne.

Weźmy drugi przykład:

$$z(x+1, y+1) - z(x, y) = 0,$$

Równanie to za pomocą różnic wyraża się tak:

$$\Delta_x \Delta_y z + \Delta_x z + \Delta_y z = 0.$$

Widać wprost, że funkcya $y-x$ czyni zadość równaniu, gdyż funkcya ta pozostaje bez zmiany, gdy powiększamy o jedność tak x jak i y; otrzymujemy tedy, że

$$z = \varphi\,(y - x),$$

gdzie φ jest funkcyą dowolną, jest całką danego równania.

Weźmy równanie:

$$\Delta_x^2\, z\,(x, y+1) - \Delta_y^2\, z\,(x+1, y) = 0.$$

Wprowadziwszy różnice funkcyi z, wzięte dla tych samych wartości zmiennych x, y, będziemy mieli:

$$(\Delta_x^2 + \Delta_y^2\,\Delta_y - \Delta_y^2 - \Delta_y^2\,\Delta_x)\, z\,(x, y) = 0,$$

co można napisać tak:

$$(\Delta_x\,\Delta_y + \Delta_x + \Delta_y)\,(\Delta_x - \Delta_y)\, z\,(x, y) = 0.$$

Widać tu, że jeżeli uczynimy zadość równaniu $(\Delta_x - \Delta_y)\, z = 0$, to równanie dane będzie sprawdzonem, gdyż dla otrzymania pierwszej strony tego równania trzeba wykonać szereg działań Δ na wielkości, która jest zerem, a więc i rezultat działania będzie zerem. Równaniu zaś

$$(\Delta_x - \Delta_y)\, z = 0$$

czyni zadość

$$z = \varphi\,(x + y),$$

gdzie φ jest funkcyą dowolną; a więc $z = \varphi\,(x + y)$ jest całką równania danego. Zauważmy wszakże, że jeżeli do takiej wartości z dodamy funkcyę, która jest całką równania $(\Delta_x\,\Delta_y + \Delta_x + \Delta_y)\, z = 0$, t. j. funkcyę typu $\psi\,(x - y)$, gdzie ψ jest także funkcyą dowolną, to otrzymamy również całkę równania danego. W samej rzeczy, równanie dane możemy napisać pod każdą z dwu postaci:

$$(\Delta_x\,\Delta_y + \Delta_x + \Delta_y)\,(\Delta_x - \Delta_y)\, z = 0,$$

$$(\Delta_x - \Delta_y)\,(\Delta_x\,\Delta_y + \Delta_x + \Delta_y)\, z = 0.$$

Utwórzmy funkcyę:

gdzie x_0 jest wartością stałą i dla wartości całkowitych różną od wartości x. Otrzymujemy więc jako rozwiązanie równania danego o pochodnych cząstkowych funkcyę:

$$z = (x-1)(x-2) \ldots x_0 \, \varphi(x-y),$$

gdzie $\varphi(x-y)$ jest symbolem funkcyi dowolnej.

Podobną metodą rozwiązujemy równanie:

$$z(x+1, y+1) - p\, z(x+2, y) - (1-p)\, z(x, y+2) = 0.$$

Zauważmy przedewszystkiem, że funkcya $x+y$ pozostaje bez zmiany, jeżeli powiększamy każdy z argumentów o 1 lub jeden z nich tylko powiększamy o 2. Połóżmy:

$$z = \varphi(x+y) \,.\, \psi(x)$$

i podstawmy w równaniu danem; wtedy we wszystkich wyrazach będziemy mieli czynnik wspólny $\varphi(x+y+2)$, a po zniesieniu go, otrzymamy:

$$\psi(x+1) - p\, \psi(x+2) - (1-p)\, \psi(x) = 0,$$

t. j. równanie liniowe o jednej zmiennej i o spółczynnikach stałych. Pierwiastkami odpowiedniego równania charakterystycznego $pt^2 - t + (1-p) = 0$ są $t = 1$, $t = \frac{1-p}{p}$, a więc całkami szczególnemi danego równania będą:

$$\psi(x) = 1, \quad \psi(x) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^x.$$

Pomnożywszy każdą z tych całek szczególnych przez funkcyę dowolną argumentu $x+y$, otrzymamy znowu dwie całki szczególne; a ponieważ równanie dane jest jednorodne, możemy przeto powiedzieć, że suma tych dwu całek jest także całką równania. Będzie tedy:

$$z = \varphi(x+y) + \left(\frac{1-p}{p}\right)^x \varphi_1(x+y),$$

gdzie φ, φ_1 są symbolami dwóch funkcyj dowolnych, niezależnych od siebie. Ponieważ ta całka zawiera dwie funkcye dowolne, więc możemy ją uważać za całkę ogólną danego równania rzędu 2-go.

Zakończymy te rozważania nad równaniami różnicowemi listą prac, odnoszących się do tego przedmiotu.

Brassine, Nota 3-cia w „Cours d'analyse" Sturma, 3° wyd. (1868); Thomae „Integration der Differenzengleichungen etc.", Zeitschr. Schlömilcha, t. XVI, str. 146, 428 (1871), Combescure „Sur quelques points du calcul inverse des différences". Comptes rendus, t. LXXIV, str. 454 (1872); Le Paige „Sur une équation aux différences finies", Nouv. Corresp. math., t. II, str. 301 (1876); III, str. 47 (1877); Sylvester, „Note on an equation in finite differences", Phil. Mag., 1879 Tu autor zajmuje się równaniem

$$u(x) = \frac{u(x-1)}{x} + u(x-2).$$

Casorati, Mem. Lincei (3), t. V, (1880); Sylvester „On the solutions of a certain class of difference or differential equations", Amer. Journ., t. IV, str. 260 (1881); Sylvester, tamże, t. IV, str. IV, 32 (1882); Muir, Phil. Mag. (5), t. XVII, str. 115 (1884); Cesàro, „Sur une équation aux différences mélées", Nouv. Ann. (3), t. V, str. 36 (1885); Pincherle, Rend. Ist. Lomb., t. XIX, str. 559 (1886); Mellin, Acta mathematica, t. IX, str. 137 (1886); Guichard, Ann. de l'École normale (3), t. IV, str. 361 (1887); Sylvester, Messenger (2), t. XVIII, str. 113; Lerch „O rozwiązaniu pewnych równań różnicowych" (po czesku), Časopis, t. XXI, str. 69 (1892). Pincherle, Rend. Accad. Lincei, t. III, str. 12 i 94 (1894), t. IV, str. 228, Accad. di Bologna (5), t IV (1894), t. V (1895); Vivanti, dziennik Texeiry, t. XI, str. 167; Tagiuri, Giorn. di Matem., t. XXXI, str. 95; Floquet, Ann. de l'École Norm. (2), t. III; Torelli, Acc. di Napoli, 1895 i 1896. Zobacz też rozdziały II i III pracy Pincherlego „Delle funzioni ipergeometriche etc.", Giornale di Mat., t. XXXII.

PASCAL

RACHUNEK NIESKOŃCZONOŚCIOWY

CZ. III

T. N. W.