



GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

WISDOM...
... ..

Waw *Kat*
ERNESTO PASCAL.

Profesor uniwersytetu w Pawli.

RACHUNEK NIESKOŃCZONOŚCIOWY

PRZEŁOŻYŁ

S. DICKSTEIN.

~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

CZĘŚĆ II.

~~L. inw. 1408~~

RACHUNEK CAŁKOWY.

Z 15 drzeworytami w tekście.

~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~

WARSZAWA.

WYDAWNICTWO REDAKCYI PRAC MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH.

W drukarni J. Sikorskiego, Warszawa, Warecka 14.

—
1896.

opus nr: 21532

Дозволено Цензурою, Варшава 31 Декабря 1896 г



5408/II

T R E Ś Ć.

ROZDZIAŁ I.

Całki określone i nieokreślone.

	Str.
§ 1. Definicja całki określonej	1
§ 2. Własności zasadnicze całek określonych. Wzór na wartość średnią	4
§ 3. Całka określona, uważana jako funkcja granic. Funkcja całkowita	8
§ 4. Całka określona w dwóch przypadkach osobliwych	10
§ 5. Całki nieokreślone	17
§ 6. Przekształcenie całki pojedynczej	20
§ 7. Różniczkowanie względem parametru. Przemienność znaków granicy i całkowania; przemienność znaków różniczkowania i całkowania	22
§ 8. Przemienność dwóch znaków całkowania	35

ROZDZIAŁ II.

Całkowalność funkcji

§ 1. Pierwsza postać warunków całkowalności	42
§ 2. Druga postać kryterium całkowalności	46

	Str	tr
§ 3. Funkcje całkowalne i niecałkowalne. Zastosowanie znalezionych kryteriów	47	47
§ 4. Twierdzenia o funkcjach całkowalnych. Całkowanie przez szeregi	50	50

ROZDZIAŁ III.

Obliczanie całek nieokreślonych i określonych.

§ 1. Całki nieokreślone zasadnicze	58	58
§ 2. Sztuczne sposoby całkowania. Całkowanie przez części. Całkowanie przez szeregi	61	61
§ 3. Całkowanie funkcji wymiernych	69	69
§ 4. Całkowanie funkcji niewymiernych. Całki dwumienne. Całki eliptyczne	85	85
§ 5. Całkowanie funkcji przestępnych	95	95
§ 6. Obliczanie całek określonych. Całki Eulerowe	97	97

ROZDZIAŁ IV.

Całki wielokrotne

§ 1. Określenie całki podwójnej i wielokrotnej. Warunki całkowalności	102	02
§ 2. Całka wielokrotna jako funkcja granic; określenie jej w przypadkach osobliwych	107	07
§ 3. Przekształcanie całek wielokrotnych	111	11
§ 4. Własności całek podwójnych. Twierdzenie Greena	115	15

ROZDZIAŁ V.

Całkowanie różniczek zupełnych.

1:21 21

ROZDZIAŁ VI.

Geometria całkowa.

	Str.
§ 1. Pole krzywej płaskiej	127
§ 2. Łuk krzywej płaskiej	137
§ 3. Łuk krzywej skośnej	146
§ 4. Pole powierzchni krzywej	152
§ 5. Powierzchnie obrotowe	155
§ 6. Pasma kuliste	158
§ 7. Powierzchnia elipsoidy obrotowej	159
§ 8. Objętości ograniczone powierzchniami	160
§ 9. Objętość bryły obrotowej	163
§ 10. Objętość elipsoidy. Bryła utworzona obrotem cykloidy .	165

ROZDZIAŁ VII.

Równania różniczkowe.

§ 1. Rozważania i określenia zasadnicze	170
§ 2. Przykład zagadnienia geometrycznego, którego rozwiązanie prowadzi do równania różniczkowego	174
§ 3. Równania różniczkowe 1-go rzędu. Równania, w których można rozdzielić zmienne	176
§ 4. Równania różniczkowe jednorodne	177
§ 5. Równania liniowe 1-go rzędu	179
§ 6. Równania różniczkowe rzędu 1-go, nierozwiązalne względem $\frac{dy}{dx}$	183
§ 7. O czynniku całkującym	187
§ 8. Równanie o pochodnych cząstkowych, któremu czynią zadość czynniki całkujące	191
§ 9. Całki osobliwe równań różniczkowych zwyczajnych	196
§ 10. Równania różniczkowe liniowe jednorodne	199
§ 11. Równania liniowe jednorodne o współczynnikach stałych	205

	Str.
§ 12. Równania liniowe niejednorodne	210
§ 13. Twierdzenia o równaniach różniczkowych liniowych. Wzór Liouville'a	215
§ 14. O pewnych szczególnych klasach równań różniczkowych liniowych	218
§ 15. Równania liniowe 2-go rzędu	221
§ 16. Układy równań liniowych jednoczesnych	223
§ 17. Równania różniczkowe rzędu wyższego	227
§ 18. Całkowanie przez szeregi	231
§ 19. Równania o pochodnych cząstkowych	234

ROZDZIAŁ I.

CAŁKI OKREŚLONE I NIEOKREŚLONE.

§ 1.

Definicja całki określonej.

Niechaj będzie funkcya $f(x)$ skończona w całym przedziale od a do b . Podzielmy ten przedział na n przedziałów cząstkowych, które oznaczmy przez $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Niechaj f_r będzie wartością funkcyi w jednym z punktów przedziału δ_r , albo granicą wyższą lub niższą wartości funkcyi f w tym przedziale. Utwórzmy sumę:

$$\sum_1^n f_r \delta_r,$$

rozsuniętą na wszystkie przedziały cząstkowe. Suma ta ma wartość skończoną i będzie miała zawsze taką wartość, gdy będziemy powiększali liczbę przedziałów, zmniejszając każdy z nich.

Jeżeli przy nieograniczonym zmniejszaniu przedziałów cząstkowych i równoczesnym dążeniu liczby n do nieskończoności, istnieje granica powyższej sumy i jest nie-

zależną od sposobu, w jaki zmniejszamy obszerność przedziałów i bez względu na wybór wartości f_r , wtedy granicę tę nazywamy całką określoną funkcji $f(x)$ od a do b . Liczby a i b nazywają się granicą niższą i granicą wyższą całki określonej, a przedział od a do b nazywa się drogą całkowania.

Całka określona oznacza się za pomocą symbolu:

$$\int_a^b f(x) dx,$$

gdzie piszemy najprzód znak \int , (będący zniekształtnioną literą S , początkową wyrazu suma), potem piszemy funkcję $f(x)$, której całkę obliczyć mamy, pomnożoną przez różniczkę dx zmiennej niezależnej.

Aby istniała granica sumy, o której wyżej mowa, koniecznym jest, by funkcja $f(x)$ czyniła zadość pewnym warunkom, które rozpatrzemy w następnych paragrafach. Nadto, aby powyższa definicja całki określonej zachowała znaczenie, jest koniecznym, by funkcja $f(x)$ nie stawała się nieskończenie wielką w przedziale od a do b i by obie te granice były skończonymi.

Później rozciągniemy powyższe określenie do przypadków, w których funkcja staje się nieskończoną w pewnym punkcie lub jedna z granic całkowania jest nieskończoną. Zachowujemy do odpowiedniego rozdziału badanie całkowności funkcji; obecnie w paragrafach następnych przyjmować będziemy, że funkcje, z którymi mamy do czynienia, są zawsze całkownymi.

Według podanego określenia obliczmy całkę od a do b najprostszej funkcji $x - c$, t. j. całkę:

$$\int_a^b (x-c) dx.$$

Dla prostoty podzielmy przedział od a do b na n części równych.

Położmy $b - a = h$, wtedy każdy z przedziałów cząstkowych δ_r będzie równy $\frac{h}{n}$. Punktami podziału będą odpowiednio:

$$x_0 = a, x_1 = a + \frac{h}{n}, x_2 = a + \frac{2h}{n}, \dots$$

W każdym z tych przedziałów cząstkowych powinniśmy obrać jeden punkt i obliczyć dla niego wartość funkcji. Za taki punkt oberzmy punkt krańcowy każdego przedziału. Suma zasadnicza, o którą nam idzie, będzie tedy zbudowana w ten sposób:

$$\begin{aligned} & \frac{h}{n} \left[(a-c) + \left(a-c + \frac{h}{n} \right) + \left(a-c + \frac{2h}{n} \right) \right. \\ & \left. + \dots + \left(a-c + \frac{n-1}{n} h \right) \right] \end{aligned}$$

i równa się:

$$\begin{aligned} & \frac{h}{n} \left[n(a-c) + n \frac{(n-1)}{2} \frac{h}{n} \right] \\ & = (b-a)(a-c) + \frac{1}{2} \frac{n-1}{n} (b-a)^2. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy dla $n = \infty$, otrzymujemy na wartość całki określonej:

$$(b-a)(a-c) + \frac{1}{2} (b-a)^2,$$

lub

$$\frac{b^2 - a^2}{2} - c(b-a).$$

Jak widzimy, proces rachunkowy na tej drodze jest skompliko-

wany z punktu widzenia praktycznego; dla funkcyj bardziej złożonych obliczanie granicy sumy może być nawet praktycznie niewykonalnem. Dlatego w następstwie pokażemy, w jaki sposób na podstawie pewnej własności zasadniczej całek funkcyj ciągłych, można obliczać te całki przy pomocy znanych pojęć i wzorów rachunku różniczkowego. W ten sposób wiążą się w swej istocie oba rachunki: różniczkowy i całkowy.

§ 2.

Własności zasadnicze całek określonych. Wzór na wartość średnią.

Ustalimy w tym paragrafie niektóre własności ogólne, wynikające wprost z definicji całki określonej.

1. Jeżeli odwrócimy granice całkowania, to wartość nowej całki równać się będzie wartości dawnej, wziętej ze znakiem przeciwnym.

W samej rzeczy, wykonajmy według określenia całkowanie od a do b , a potem całkowanie w kierunku odwrotnym od b do a . Jest widocznem, że w pierwszym i drugim przypadku możemy utworzyć te same przedziały cząstkowe δ_r , tylko wartość ich w obu przypadkach będzie znaku przeciwnego. Stąd wszystkie wyrazy sumy w pierwszym przypadku przejdą na wyrazy znaku przeciwnego, nie zmieniając swej wartości.

2. Widocznym jest nadto wzór:

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx,$$

gdzie c jest stałą.

3. Jeżeli $f(x) = 1$, wtedy całka od a do b sprowadza się do sumy $\sum \delta_r$, t. j. do długości drogi całkowania $b-a$.

4. Niechaj na całym przedziale od a do β funkcja będzie całkowną. Obierzmy w tym przedziale trzy punkty dowolne a, b, c . Można łatwo dowieść, że:

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b.$$

W samej rzeczy, wyobraźmy sobie, że punkt c znajduje się pomiędzy punktami a i b . Utwórzmy zgodnie z określeniem całkę od a do b . Ponieważ wybór przedziałów δ_r jest dowolny, to możemy go skutecznie w ten sposób, aby punkt c był jednym z punktów przedziału i aby pozostał nim na wszystkich stadyach przejścia do granicy; przytem sposób, w jaki same przedziały δ_r zdążają do zera, pozostaje zupełnie dowolnym. To uczyniwszy widzimy, że suma $\sum f_r \delta_r$ rozdziela się na dwie części: jedną, idącą od a do c , drugą — od c do b . Przeszedłszy do granicy znajdziemy potwierdzenie podanego wzoru.

Jeżeli punkt c znajduje się zewnątrz przedziału od a do b np. na prawo od punktu b , wtedy, według dopiero co dowiedzionej własności, mamy:

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c;$$

lecz

$$\int_b^c = - \int_c^b,$$

a więc także

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b.$$

5. Jeżeli $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, ... są funkcjami całkowalnymi, to i suma ich będzie całkowalną i całka sumy równać się będzie sumie całek pojedynczych funkcyj, lub, innymi słowy, znak całki jest przemienny ze znakiem sumy.

W samej rzeczy, utwórzmy sumę:

$$(1) \quad \Sigma \delta_r [f_r^{(1)} + f_r^{(2)} + \dots],$$

której granica stanowi całkę sumy

$$(2) \quad f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + \dots$$

Suma ta równa się widocznie:

$$(3) \quad \Sigma f_r^{(1)} \delta_r + \Sigma f_r^{(2)} \delta_r + \dots$$

Jeżeli przyjmiemy, że każda z funkcyj danych jest całkowalna, t. j., że istnieją granice sum $\Sigma f_r^{(1)} \delta_r$, $\Sigma f_r^{(2)} \delta_r$, ..., to istnieć będzie i granica sumy tych wyrażeń, a stąd wynika pierwsza część naszego twierdzenia, t. j. że suma skończonej liczby funkcyj całkowalnych jest funkcją całkowalną. Nadto, przechodząc do granicy w wyrażeniu (3), równem (1), widzimy, że każdy z wyrazów w (3) staje się całką odpowiedniej z pomiędzy funkcyj $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, ..., co uzasadnia i drugą część naszego twierdzenia.

6. Możemy teraz wyprowadzić wzór na wartość całki określonej.

Niechaj przedziały δ_r będą równe i pozostają takimi zawsze na wszystkich stadyach przejścia do granicy. Innymi słowy, dzielimy przedział całkowania $b - a$ na coraz większą liczbę części równych. Wtedy każdy przedział δ_r równa się $\frac{b-a}{n}$, a więc podług określenia :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n=\infty} \frac{b-a}{n} \sum_1^n f_r,$$

skąd :

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_1^n f_r}{n},$$

t. j. stosunek wartości całki określonej do przedziału całkowania można uważać za granicę średniej arytmetycznej wartości, które przyjmuje funkcya w pojedynczych punktach całego przedziału.

Stąd możemy wyprowadzić twierdzenie użyteczne w wielu razach. Niechaj f i F oznaczają odpowiednio granicę niższą i wyższą wartości funkcyi w przedziale od a do b . Wtedy jest widoczne,

że wyrażenie $\frac{\sum_1^n f_r}{n}$, jako średnia arytmetyczna, nie może być mniejsze od f , ani większe od F , posiada przeto wartość, zawartą między temi dwiema wartościami skrajnemi. Wartość tę możemy oznaczyć przez $f + \theta (F - f)$, gdzie θ jest liczbą zawartą między 0 i 1.

Otrzymujemy tedy wzór:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) [f + \theta (F - f)].$$

Jeżeli funkcya $f(x)$ jest ciągłą, wtedy w przedziale przybierze wszelką wartość, zawartą pomiędzy maximum i minimum; a stąd istnieje będzie w przedziale punkt, w którym funkcya ma właśnie wartość $f + \theta (F - f)$. Oznaczywszy ten punkt przez $a + \vartheta (b - a)$, gdzie ϑ , jak zwykle, oznacza liczbę zawartą pomiędzy 0 i 1, możemy napisać inny wzór, stosujący się do przypadku, w którym funkcya jest ciągłą, mianowicie :

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(a + \vartheta (b-a)).$$

Wzór ten nazywa się wzorem na wartość średnią, i jak zobaczymy później, jest w związku z podobnie nazwanym „wzorem rachunku różniczkowego“ (patrz „Rachunek różniczkowy“, str. 77).

§ 3.

Całka określona, uważana jako funkcja granic. Funkcja całkowa.

Ustalmy w całce określonej jedną z granic, np. granicę niższą a zmieniamy zaś granicę wyższą, którą oznaczymy przez x i zmieniamy ją tak, aby w przedziale od a do x funkcja dana była wciąż całkowalną. Widocznem jest wtedy, że dla każdej wartości x istnieje będzie jedyna i oznaczona wartość całki określonej, którą będzie można przeto uważać za funkcję granicy wyższej x .

Dowiedziemy przedewszystkiem, że ta funkcja jest ciągłą.

Powiększmy granicę wyższą x o ilość h , którą potem będziemy zmniejszali do zera. Utwórzmy różnicę dwóch całek określonych, jednej od a do $x + h$ i drugiej od a do x ; będzie:

$$\int_a^{x+h} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx = \int_x^{x+h} f(x) dx.$$

Na zasadzie twierdzenia o wartości średniej, udowodnionego w poprzedzającym paragrafie, możemy napisać:

$$\int_x^{x+h} f(x) dx = h [f + \theta (F - f)],$$

gdzie f i F oznaczają odpowiednią wartość najmniejszą i największą, jaką ma funkcja pomiędzy x i $x + h$.

Ponieważ funkcja f jest zawsze skończoną, przeto czynnik drugi po prawej stronie poprzedniego wzoru musi być ilością

skończoną i zostaje taką, gdy zmniejszamy h . Wynika stąd, że strona prawa przy zdążaniu ilości h do zera będzie także dążyła do zera, co właśnie stwierdza ciągłość funkcji całkowej.

Przejdźmy teraz do różniczkowości całki.

Z poprzedniego wzoru otrzymujemy:

$$\lim_{h=0} \frac{\int_a^{x+h} f - \int_a^x f}{h} = \lim_{h=0} [f + \theta (F - f)].$$

Strona pierwsza jest tu pochodną całki, a zatem pochodna ta istnieje będzie lub nie, o ile istnieje lub nie istnieje granica wypisana po stronie prawej.

Przyjmijmy najprzód, że funkcja $f(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie x . Wtedy można zawsze znaleźć taki przedział h , aby różnica dwóch wartości funkcji w tym przedziale, a zatem i różnica pomiędzy jej wartością największą i najmniejszą, była mniejsza od pewnej jakkolwiek danej ilości. Ponieważ $f + \theta (F - f)$ jest właśnie pewną wartością funkcji, zawartą pomiędzy jej wartościami najmniejszą i największą, te zaś dwie wartości przy powyższem założeniu dążą do jednej i tej samej wartości funkcji w punkcie x , przeto do tej samej wartości dążą i wartość średnia. A więc w przypadku, gdy $f(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie x , możemy powie-

dzied, że pochodna funkcji całkowej $\int_a^x f(x) dx$ w punkcie x jest wartością funkcji $f(x)$, znajdującej się pod znakiem całkowania, w tymże punkcie x , t. j.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x) dx = f(x).$$

Przy temże założeniu możemy podobnie oznaczyć pochodną

całki, względem granicy niższej. Pamiętając, że $\int_a^x = - \int_x^a$ i stosując twierdzenie o różniczkowaniu dopiero co dowiedzione dla granicy wyższej, mamy:

$$\frac{d}{da} \int_a^x f(x) dx = - f(a).$$

W przypadku, gdy funkcya nie jest ciągłą w punkcie x , pochodna całki będzie miała wartość inną, i może nawet nie istnieć.

Widzimy tedy, że dla funkcyj ciągłych zagadnienie całkowania jest odwrotnością zagadnienia różniczkowania, t. j. sprowadza się do szukania funkcyi, której pochodna jest równa funkcyi danej. Korzystamy poniżej z tego faktu zasadniczego dla odszukania głównych wzorów rachunku całkowego.

§ 4.

Całka określona w dwóch przypadkach osobliwych.

W definicji całki określonej, podanej w § 1, przyjęliśmy najprzód, że funkcya pozostaje zawsze skończoną na całej drodze całkowania i nadto, że granice całkowania są obie skończone. Zbadamy teraz dwa przypadki osobliwe, w których nie spełniają się te dwa warunki.

Załóżmy najprzód, że funkcya staje się nieskończoną w punkcie i dla utrwalenia myśli, przyjmijmy, że staje się właśnie nieskończoną dla granicy wyższej b . Rozważmy całkę:

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

gdzie ε oznacza ilość dowolnie małą dodatnią. Tę całkę możemy obliczyć zgodnie z określeniem dawniejszem, gdyż podług założenia funkcja w całym przedziale od a do $b - \varepsilon$ (dla każdego ε dowolnie małego) nie staje się nieskończoną. Całka ta będzie pewną funkcją ilości ε i może mieć granicę

oznaczoną dla $\varepsilon = 0$. Chcąc podać określenie całki \int_a^b

uczynimy to, zachowując naturalnie własności najbardziej zasadnicze funkcji całkowej, np. własność ciągłości w odniesieniu do granicy wyższej. Stąd mimowoli nasuwa się myśl, by za

wartość całki \int_a^b uważać granicę wartości całki $\int_a^{b-\varepsilon}$ dla $\varepsilon = 0$,

gdy ta granica istnieje.

Jeżeli punkt, w którym funkcja staje się nieskończoną, nie jest punktem krańcowym przedziału całkowania, t. j. gdy nie jest jedną z granic całkowania, lecz punktem pośrednim, wtedy, mając zawsze na widoku zachowanie własności ogólnych całek określonych, można postępować w ten sposób. Niechaj c będzie punktem pomiędzy granicami całkowania a i b , w którym funkcja staje się nieskończoną. Rozdzielmy całkę od a do b na dwie części w punkcie c , i rozciągając znaną własność całek zwyczajnych, t. j. kładąc:

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b,$$

określmy każdą z dwu całek po stronie drugiej za pomocą wyżej podanego wzoru. Tym sposobem będziemy mieli określenie:

$$\int_a^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon'}^b,$$

przy założeniu, że wskazane po stronie drugiej granice istnieją.

Jeżeli istnieje więcej punktów, w których funkcya staje się nieskończoną, wtedy należy zastosować wzór powyższy odpowiednią liczbę razy.

Łatwo znaleźć warunek konieczny i dostateczny istnienia granic, o których mowa w określeniu. Jeżeli ma istnieć granica całki $\int_a^{b-\varepsilon}$ dla $\varepsilon = 0$, to według teorii ogólnej granic, jest koniecznem i dostatecznem, aby dawszy sobie ε , można było znaleźć taki przedział zmienności dla ε , by dla dwu wartości $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ w tym przedziale zawartych, było co do wartości bezwzględnej:

$$\int_a^{b-\varepsilon_1} - \int_a^{b-\varepsilon_2} = \sigma,$$

t. j.

$$\int_{b-\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} = \sigma.$$

Podobny warunek można napisać i dla innych przypadków.

Możemy napisać typ funkcji, dla którego spełnia się ten warunek. Wyobraźmy sobie, że funkcya $f(x)$ w punkcie b staje się nieskończoną i jest taką, że jej wartość bezwzględna jest zawsze mniejsza lub równa bezwzględnej wartości funkcji typu $\frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}$, gdzie ν jest liczbą dodatnią, mniejszą od 1, $\varphi(x)$ zaś funkcją, która w punkcie b ma wartość skończoną i w żadnym z punktów pomiędzy a i b nie staje się nieskończoną. W przypadku szczególnym $f(x)$ może być funkcją właśnie tego typu.

Niechaj M będzie granicą wyższą wartości bezwzględnych funkcji $\varphi(y)$ w uważanym przedziale; według założenia liczba

M jest skończoną. Będzie zatem co do wartości bezwzględnej:

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \leq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{|\varphi(x)|}{(x-b)^\nu} dx \leq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{M}{(x-b)^\nu} dx.$$

Nierówność tę otrzymujemy, stosując wprost definicję zasadniczą całki określonej i zważając, że gdy mamy do obliczenia całkę określoną, odpowiadającą funkcji, która co do wartości bezwzględnej w każdym punkcie drogi całkowania jest mniejszą od innej funkcji, to wyrazy sumy, odnoszące się do funkcji pierwszej będą odpowiednio mniejszemi od wyrazów sumy, odnoszącej się do drugiej, a stąd i całka, odpowiadająca funkcji pierwszej, będzie z pewnością mniejsza od całki, odpowiadającej funkcji drugiej.

Udowodnimy poniżej (patrz Rozdz. III § 1), że:

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{M}{(x-b)^\nu} dx = \frac{M}{1-\nu} \left[\frac{1}{\varepsilon^{\nu-1}} - \frac{1}{(a-b)^{\nu-1}} \right].$$

Widać stąd, że gdy $\nu - 1$ jest mniejsze od zera, t. j. ν mniejsze od 1, wtedy $\frac{1}{\varepsilon^{\nu-1}}$ dla $\varepsilon = 0$ dąży do zera i że całka dąży do ilości skończonej. Wnosimy stąd, że: „Jeżeli funkcja całkowna staje się nieskończoną w punkcie b , a wartość jej bezwzględna pozostaje wciąż mniejsza lub równa takiej-że wartości funkcji typu $\frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}$, gdzie $\nu < 1$, wtedy całka określona od a do b jest ilością skończoną.

Wyobraźmy sobie teraz, że funkcja staje się nieskończoną w punkcie b , lecz wartość jej pozostaje wciąż większą od wartości funkcji typu $\frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}$, gdzie $\nu \leq 1$, $\varphi(x)$ zaś jest funk-

cyą zawsze dodatnią, która nie staje się nieskończoną w żadnym punkcie przedziału od a do b ani też zerem w punkcie b . W szczególności $f(x)$ może być funkcją właśnie tego typu.

Niechaj m będzie granicą niższą wartości $\varphi(x)$ w przedziale od a do b ; będzie tedy:

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \geq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{(x-b)^{\nu}} dx \geq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{m}{(x-b)^{\nu}} dx.$$

Ostatnia całka jest, jak wyżej powiedziano, równa:

$$\frac{m}{1-\nu} \left[\frac{1}{\varepsilon^{\nu-1}} - \frac{1}{(a-b)^{\nu-1}} \right].$$

i dla $\nu > 1$ i $\varepsilon = 0$ dąży do nieskończoności, a więc i nasza całka nie dąży do granicy skończonej.

Dla $\nu = 1$ będzie, jak to niżej okażemy, wartość całki równa wyrażeniu:

$$m [\log \varepsilon - \log (a - b)],$$

a więc dla $\varepsilon = 0$ dążyć będzie także do nieskończoności.

Możemy tedy powiedzieć:

„Jeżeli funkcja staje się nieskończoną w punkcie b , a jej wartość bezwzględna pozostaje wciąż większą od wartości funkcji postaci $\frac{\varphi(x)}{(x-b)^{\nu}}$, gdzie $\nu \leq 1$ i $\varphi(x)$ zawsze dodatnie, wtedy całka określona od a do b nie ma wartości skończonej.“

Przechodzimy do przypadku, w którym jedna z granic całkowania jest nieskończoną.

Utrzymując własność zasadniczą funkcji całkowej, aby była funkcją ciągłą granicy, znajdujemy środek określenia całki

$\int_a^{\infty} f(x) dx$, zakładając, że funkcja $f(x)$ jest całkowalną na jakiejkolwiek drodze od a do jakiegokolwiek punktu po stronie dodatniej lub po stronie ujemnej, stosownie do tego, czy chcemy obliczyć całkę od a do ∞ , lub od a do $-\infty$.

Obierzmy granicę wyższą dowolną x i obliczmy całkę od a do x , a potem oznaczmy granicę tego wyrażenia dla $x = \infty$. Jeżeli ta granica istnieje, nazwiemy ją wartością całki od a do ∞ .

Będzie przeto:

$$\int_a^{\infty} = \lim_{x=\infty} \int_a^x.$$

Można znaleźć warunek konieczny i dostateczny istnienia tej granicy. Opierając się na teorii ogólnej granic, znajdujemy, że aby granica istniała, koniecznym i dostatecznym jest, by dawszy sobie σ dowolnie małe, można było znaleźć punkt a taki że dla dwóch punktów x' , x'' pomiędzy a i ∞ będzie zawsze co do wartości bezwzględnej $\int_{x'}^{x''} < \sigma$.

Możemy udowodnić twierdzenie, mające wiele podobieństwa z twierdzeniem wyżej udowodnionem, dla przypadku, w którym funkcja staje się nieskończoną.

„Jeżeli funkcja, mająca być całkowaną, staje się zerem dla $x = \infty$ w ten sposób, że jej wartość bezwzględna pozostaje zawsze mniejszą lub równą wartości bezwzględnej funkcji typu $\frac{\varphi(x)}{x^r}$, gdzie $r > 1$, $\varphi(x)$ zaś jest funkcją zawsze skończoną i dla $x = \infty$ różną od zera, wtedy całka określona od a do ∞ będzie mia-

ła wartość skończoną. W szczególności $f(x)$ może być funkcją własnie tego typu.

Jeżeli M oznacza granicę wyższą wartości bezwzględnych funkcji $\varphi(x)$, to:

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f(x) dx &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(x) dx \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x \frac{|\varphi(x)|}{x^\nu} dx \\ &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x \frac{M}{x^\nu} dx. \end{aligned}$$

Lecz jest, jak wyżej:

$$\int_a^x \frac{M}{x^\nu} dx = \frac{M}{1-\nu} \left[\frac{1}{x^{\nu-1}} - \frac{1}{a^{\nu-1}} \right];$$

dla $\nu > 1$ wyrażenie po stronie drugiej dąży do granicy skończonej dla $x = \infty$, co uzasadnia nasze twierdzenie.

W podobny sposób dowieść można, że gdy funkcja $f(x)$ pozostaje zawsze większą lub równą coo do wartości bezwzględnej funkcji typu $\frac{\varphi(x)}{x^\nu}$, gdzie $\varphi(x)$ jest zawsze dodatnie, ν zaś ≤ 1 , lubb jest w szczególności funkcją tego typu, wtedy całka od a do ∞ nie ma wartości skończonej.

W następnych paragrafach, ilekroć zdarzy się sposobność, pokażemy, jakim zmianom ulegają twierdzenia zasadnicze o całkach w dwóch wyżej rozpatrzonych przypadkach osobliwych patrz np. § 7 niniejszego rozdziału).

§ 5.

Całki nieokreślone.

W podanej przez nas definicji całki określonej przyjmuje się istnienie dwóch oznaczonych i ustalonych granic całkowania. Widzieliśmy, że w przypadku, gdy funkcja $\varphi(x)$ jest ciągła, zagadnienie całkowania sprowadza się do odszukania funkcji $F(x)$, której pochodną jest właśnie funkcją daną.

Wiadomo z rachunku różniczkowego, że istnieje nieskończenie wiele funkcji, mających za pochodną $f(x)$ i że one różnią się od siebie o ilości stałe; innymi słowy, znalazłszy jedną taką funkcję i dołączając do niej jakąkolwiek stałą, znajdziemy drugą funkcję. Napisawszy zatem ogólnie:

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx + \text{const.},$$

otrzymujemy funkcję ogólną zmiennej x , którą nazywamy całką nieokreślona funkcji danej. W tym wzorze przez a rozumieć należy oznaczoną wartość liczebną. Przymiotnik nieokreślona przeciwstawiamy przymiotnikowi określona dla tego, że w całce nieokreślonej granice można z pewnego punktu widzenia uważać za ruchome, t. j. za zależne od zmienności stałej dowolnej.

Zmieniwszy w całce określonej $\int_a^x f(x) dx$ granicę niższą a na b , mamy całkę $\int_b^x f(x) dx$ równą $\int_a^x + \int_b^a$; gdzie całka \int_b^a nie zależy już od x , czyli jest stałą ze względu na x . Widzimy zatem, że jeżeli zmienimy granicę niższą, to nowa całka określona jest równa dawnej, powiększonej o pewną stałą, której wartość zależy oczywiście od nowo wybranej granicy.

Całka nieokreślona jest funkcją zmiennej x , niezależną od granicy niższej całkowania. Oznaczamy ją za pomocą symbolu całkowania, bez oznaczenia granic. Mając taką funkcję, możemy z niej wyprowadzić już wartość całki określonej.

Niechaj $F(x)$ będzie tą funkcją i mamy wyprowadzić z niej wartość całki $\int_a^\beta f(x) dx$, gdzie a i β są liczbami ustalonymi. Funkcja $F(x)$ jest postaci:

$$F(x) = \int_a^x + c;$$

kładąc tu po kolei $x = \beta$, $x = a$, mamy:

$$F(\beta) = \int_a^\beta + c; \quad F(a) = \int_a^a + c,$$

a odejmując od siebie te dwie równości znajdujemy:

$$F(\beta) - F(a) = \int_a^\beta - \int_a^a = \int_a^\beta,$$

t. j. wartość całki szukanej.

Widzimy tedy, że mając całkę nieokreśloną, gdy idzie o obliczenie całki określonej, dość w pierwszej z nich zamiast x podstawić najprzód granicę wyższą, następnie granicę niższą i otrzymane rezultaty odjąć od siebie.

Odwrotnie, gdy daną jest wartość całki określonej, to nie można z niej wogóle otrzymać całki nieokreślonej, t. j. funkcji zmiennej x . Zwracamy przeto wyraźnie uwagę na to, że gdy mówimy: daną jest całka określona, to rozumiemy przez to, że daną jest wartość liczebna pomiędzy danymi

granicami liczbowymi; że nie byłoby oczywiście to samo, gdybyśmy znali jej wartość pomiędzy granicami nieoznaczonymi, wyrażonemi np. przez litery a i b , gdyż wtedy ta funkcya ilości a lub b byłaby, po za nazwą zmiennej, całką nieokreśloną.

Przed zamknięciem tego paragrafu okażemy, że zasadniczy związek pomiędzy całkami określonymi a nieokreślonymi pozostaje bez zmiany w dwóch przypadkach osobliwych, o których była mowa w § 4, t. j. gdy funkcya pod znakiem całkowania staje się nieskończoną w punkcie na drodze całkowania, lub kiedy jedna z granic jest nieskończoną.

W samej rzeczy, niechaj funkcya $f(x)$ staje się nieskończoną w punkcie c , zawartym pomiędzy granicami a i b całki

określonej $\int_a^b f(x) dx$. Według określenia, całka ta równa się:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon'=0} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x) dx;$$

jeżeli $F(x)$ jest całką nieokreśloną, wtedy pierwszy z dwóch tych wyrazów będzie $F(c-\varepsilon) - F(a)$, drugi zaś $F(b) - F(c+\varepsilon')$. Funkcya $F(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie c , przy założeniu, że sprawdzają się nierówności:

$$\int_{c-\varepsilon_1}^{c-\varepsilon} < \sigma, \quad \int_{c+\varepsilon'}^{c+\varepsilon_1'} < \sigma,$$

gdzie σ jest ilością dowolnie małą (bez tego założenia nie istnieje całka określona od a do b). Stąd:

$$\lim_{\varepsilon=0} F(c-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon'=0} F(c+\varepsilon') = F(c),$$

a więc całka dana jest równa $F(b) - F(a)$, co jest dowodem prawdziwości naszego twierdzenia.

Niechaj teraz jedna z granic całki będzie nieskończoną. Z określenia, przy zachowaniu oznaczeń, wynika:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{x'=\infty} \int_a^{x'} f(x) dx = \lim_{x'=\infty} [F(x') - F(a)].$$

Z ciągłości funkcji $F(x)$ w punkcie nieskończoności mamy:

$$\lim_{x'=\infty} F(x') = F(\infty),$$

co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

§ 6.

Przekształcenie całki pojedynczej.

Niechaj będzie całka nieokreślona (którą nazwijmy pojedynczą dla odróżnienia od całek wielokrotnych, które później rozważać będziemy)

$$\int f(x) dx,$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą.

Wiemy, że znalezienie tej całki sprowadza się do szukania funkcji, której pochodną jest $f(x)$, albo inaczej do znalezienia funkcji, której różniczka $f(x) dx$ znajduje się pod znakiem całkowania. Zbadajmy, jak zmienia się całka przy przekształceniu zmiennej całkowania x . Okażemy, że całka przekształca się i że pod znakiem całkowania będzie wyrażenie różniczkowe, wynikające z przekształcenia wyrażenia różniczkowego

$f(x) dx$. W samej rzeczy, połóżmy $x = \varphi(y)$ i niechaj y będzie nową zmienną niezależną. Obliczenie całki sprowadza się do znalezienia funkcji, której pochodną względem x jest $f(x)$; pochodną tej funkcji względem y będzie $f(x) \frac{dx}{dy}$. Jeżeli w całości wyrazimy wszystko za pomocą zmiennej y , będziemy mieli do odnalezienia funkcję, której pochodną jest $f(x) \frac{dx}{dy}$, t. j. $f(\varphi(y)) \frac{dx}{dy}$, a więc całka nasza będzie teraz:

$$\int f(\varphi(y)) \frac{dx}{dy} dy.$$

Przy obliczaniu całek przekształcenie może być dość użytecznym. Jest bowiem widocznym, że szukanie całki nieokreślonej jest tem bardziej skomplikowane, im bardziej złożoną jest funkcja, znajdująca się pod znakiem całkowania; może zatem oczywiście zdarzyć się, że przez odpowiednie przekształcenie zmiennej niezależnej całka dana sprowadza się do innej, mniej skomplikowanej lub do całki typu już znanego.

Niechaj będzie np. dana do obliczenia całka:

$$\int \frac{dx}{\sin x},$$

w której funkcja, stojąca pod znakiem całkowania, jest przestępną. Połóżmy $x = \arccos y$, t. j. $y = \cos x$, wtedy $\sin x = \sqrt{1-y^2}$, $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, a całka staje się:

$$-\int \frac{dy}{1-y^2};$$

mamy więc do całkowania funkcję algebraiczną wymierną zamiast funkcji przestępnej.

Jeżeli mamy całkę określoną pomiędzy granicami a i b , wtedy nową całkę względem zmiennej y należy wziąć oczywiście pomiędzy granicami, odpowiadającymi dwóm powyższym granicom danym. Za pomocą związku $x = \varphi(y)$ możemy znaleźć, jaka wartość zmiennej y odpowiada wartości a zmiennej x i jaka wartości b tej zmiennej. Niechaj temi wartościami będą a', b' ; będą to nowe granice całkowania. W powyższym przykładzie, jeżeli granicami całki względem zmiennej x są 0 i $\frac{\pi}{2}$, to całka przekształcona powinna być wzięta w granicach od $y = 1$ do $y = 0$, gdyż takie wartości zmiennej y , jak łatwo sprawdzić, odpowiadają powyższym wartościom 0 i $\frac{\pi}{2}$ zmiennej x .

§ 7.

Różniczkowanie względem parametru. Przemienność znaków granicy i całkowania; przemienność znaków różniczkowania i całkowania.

Rozważmy całkę określoną funkcji, zawierającej, oprócz zmiennej całkowania x , jeszcze inną zmienną y . Dla większej ogólności przyjmijmy, że granice całkowania są także funkcjami tej zmiennej y i dlatego oznaczmy je przez $a(y)$, $b(y)$. Niechaj funkcja dana $f(x, y)$ będzie ciągła względem obu zmiennych w pewnym obszarze i niechaj będą też ciągłymi funkcje $a(y)$, $b(y)$. Wtedy widzimy przedewszystkiem, że całka określona od $x = a(y)$ do $x = b(y)$ jest także funkcją ciągłą zmiennej y . Połóżmy:

$$\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx.$$

Zwracamy raz na zawsze uwagę na to, że w twierdzeniach tego i następnego paragrafu dajemy tylko warunki dostateczne istnienia tych twierdzeń, nie zaś warunki konieczne. Warunki czysto konieczne, jeżeli można je znaleźć, są prawie zawsze skomplikowane i bezużyteczne z powodu trudności przy stosowaniu ich do przypadków specjalnych. To spostrzeżenie występuje wciąż w całym rachunku nieskończonościowym, jak to już w swoim czasie wzmiankowaliśmy (patrz Przedmowę do „Rachunku różniczkowego“).

Będzie tedy:

$$\begin{aligned} \varphi(y+k) - \varphi(y) &= \int_{a(y+k)}^{b(y+k)} f(x, y+k) dx - \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \\ &= \int_{a(y)}^{b(y)} [f(x, y+k) - f(x, y)] dx - \int_{a(y)}^{a(y+k)} f(x, y+k) dx \\ &\quad + \int_{b(y)}^{b(y+k)} f(x, y+k) dx. \end{aligned} \tag{1}$$

Rozpatrzmy całkę $\int_{a(y)}^{a(y+k)} f(x, y+k) dx$. Ponieważ a jest funkcją ciągłą zmiennej y , przeto różnica $a(y+k) - a(y)$ dąży do zera, gdy k do niego dąży. Jeżeli oznaczymy na chwilę całkę nieokreśloną przez $F(x, y+k)$, to całka określona będzie, jak wiemy,

$$F[a(y+k), y+k] - F[a(y), y+k].$$

Na mocy ciągłości funkcji F i na podstawie znanego twierdzenia, mamy:

$$\begin{aligned} & F[a(y+k), y+k] - F[a(y), y+k] \\ &= [a(y+k) - a(y)] F'[a(y+\theta k), y+k] \\ &= [a(y+k) - a(y)] f[a(y+\theta k), y+k]; \end{aligned}$$

na zasadzie zaś ciągłości funkcyj f i $a(y)$, możemy napisać:

$$f[a(y+\theta k), y+k] = f(a, y) + \varepsilon,$$

gdzie ε jest ilością, którą można uczynić dowolnie małą, zmniejszając odpowiednio ilość k . Stąd:

$$\int_{a(y)}^{a(y+k)} f(x, y+k) dx = [a(y+k) - a(y)] [f(a, y) + \varepsilon].$$

Podobnież:

$$\int_{b(y)}^{b(y+k)} f(x, y+k) dx = [b(y+k) - b(y)] [f(b, y) + \varepsilon'],$$

gdzie a i b oznaczają wprost wartości tych funkcyj w punkcie y .

Wynika stąd:

$$\begin{aligned} \varphi(y+k) - \varphi(y) &= \int_a^b [f(x, y+k) - f(x, y)] dx \\ (1) \quad &= [a(y+k) - a(y)] [f(a, y) + \varepsilon] \\ &+ [b(y+k) - b(y)] [f(b, y) + \varepsilon'] \end{aligned}$$

Jeżeli założymy, że funkcja f jest funkcją ciągłą dwu zmiennych x, y dla wszystkich wartości zmiennej x , zawartych w granicach całkowania, wtedy dawszy sobie σ dostatecznie małe, można zawsze znaleźć taką wartość k , że dla każdej wartości

x zawartej w granicach całkowania, będzie zawsze co do wartości bezwzględnej:

$$f(x, y+k) - f(x, y) < \sigma.$$

Wynika to wprost z twierdzenia w § 9 rozdziału I „Rachunku różniczkowego“, t. j. że i dla funkcyj wielu zmiennych ciągłość zwyczajna jest jednocześnie ciągłością jednostajną w całym obszarze. Będzie tedy wartość bezwzględna całki

$$\int_a^b [f(x, y+k) - f(x, y)] dx,$$

mniejszą od $\int_a^b \sigma dx$, t. j. od $\sigma \int_a^b dx = \sigma(b-a)$, a więc może być uczyniona dowolnie małą, przy zmniejszaniu ilości σ . Widzimy więc, że wszystkie wyrazy drugiej strony wzoru (1) można dowolnie zmniejszyć, że więc granicą tej strony jest zero, albo innymi słowy, że funkcya φ jest ciągłą. A zatem: Jeżeli funkcya podcałkowa jest funkcją ciągłą dwu zmiennych x, y , wtedy znak granicy jest przemienny ze znakiem całki. Wzorem wyraża się to w ten sposób:

$$\begin{aligned} \lim_{y=y'} \int_a^b f(x, y) dx &= \int_a^b \lim_{y=y'} f(x, y) dx \\ &= \int_a^b f(x, y') dx. \end{aligned}$$

Założmy teraz, że funkcye $a(y)$, $b(y)$, $f(x, y)$ nie tylko są ciągłymi, lecz i różniczkowalnymi względem y ; że nadto pochodna f'_y

jest ciągłą względem obu zmiennych. Będzie tedy:

$$f(x, y + k) - f(x, y) = k f'_y(x, y + \theta k),$$

gdzie θ jest liczbą, zawartą pomiędzy 0 i 1. Stąd:

$$(2) \quad \frac{\varphi(y+k) - \varphi(y)}{k} = \int_a^b f'_y(x, y + \theta k) dx$$

$$- [f'(a, y) + \varepsilon] \left[\frac{a(y+k) - a(y)}{k} \right]$$

$$+ [f'(b, y) + \varepsilon'] \left[\frac{b(y+k) - b(y)}{k} \right].$$

Według założeń jest:

$$f'_y(x, y + \theta k) = f'_y(x, y) + \varepsilon'',$$

gdzie ε'' jest ilością, zdążającą do zera, dla k dążącego do zera; nadto, ze względu, iż zbieżność zwyczajna jest zbieżnością jednostajną w całym obszarze, można znaleźć takie k , aby dla każdej wartości x, y w obszarze, było zawsze w powyższej nierówności $\varepsilon'' < \sigma$, gdzie σ jest ilością dowolnie małą. A zatem dla każdej wartości y , zawartej w obszarze i dla każdego θ , zawartego pomiędzy 0 i 1 będzie zawsze wartość bezwzględna całki

$\int_a^b f'_y(x, y + \theta k) dx$ różnić się od całki $\int_a^b f'_y(x, y) dx$ o ilość

$\int_a^b \varepsilon'' dx$ mniejszą od $\sigma \int_a^b dx = \sigma(b-a)$, t. j. o ilość dowolnie małą. Znaczy to, że granica dla $k = 0$ całki, znajdującej się

po stronie prawej wzoru (2), jest $\int_a^b f'_y(x, y) dx$; mamy tedy (przechodząc do granicy dla $k = 0$):

$$\varphi'(y) = \int_a^b f'_{xy}(x, y) dx - f(a, y) a'(y) + f(b, y) b'(y),$$

gdzie φ' , a' , b' oznaczają pochodne funkcji φ , a , b .

Jeżeli w szczególnym przypadku granice a i b są stałymi, wtedy wzór poprzedni sprowadza się do następującego:

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{d}{dy} f(x, y) dx.$$

Widzimy tedy, że w przypadku, w którym funkcja spełnia podane wyżej warunki, t. j. gdy ona sama i jej pochodna względem y są funkcjami ciągłymi względem obu zmiennych, istnieje twierdzenie o przemienności znaków różniczkowania i całkowania.

Twierdzenie to nosi nazwę twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całkowania.

Z powyższego wzoru możemy wprost otrzymać znane już wzory na pochodną całki określonej względem granic (patrz § 3). Dość bowiem przyjąć, że funkcja f nie zawiera zmiennej y i że z dwu funkcji $a(y)$, $b(y)$ jedna jest stałą, druga zaś jest samą zmienną y .

Dodajemy, że to twierdzenie o przemienności utrzymuje się zawsze, ile razy funkcja przedstawiona przez całkę określoną

$$F(x, y) = \int_a^x f(x, y) dx,$$

jest taką funkcją zmiennych x , y , dla której istnieje twierdzenie o przemienności dwóch różniczkowań: jednego względem x , drugiego względem y .

W samej rzeczy, mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, y), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_a^x f(x, y) dx.$$

Według założenia jest:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

t. j.

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_a^x f(x, y) dx;$$

a więc całkując względem x , znajdujemy:

$$\int_a^x \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x f(x, y) dx,$$

co jest dowodem prawdziwości naszego twierdzenia.

Przechodzimy do rozważenia twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całkowania w przypadkach osobliwych, w których albo jedna z granic całkowania jest nieskończoną, albo funkcya, mająca być całkowaną, jest nieskończoną w jakim punkcie.

W tych przypadkach poprzednio podane warunki już nie wystarczają i trzeba do nich dołączyć inne, wyrażone w formie prostej i będące warunkami dostatecznymi istnienia twierdzenia.

Założmy najprzód, że jedna z granic całkowania jest nieskończoną, t. j., że mamy wziąć pochodną całki $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$.

Widzieliśmy, że w ogólności, aby całka określona była funkcją ciągłą parametru y , zawartego w funkcji podcałkowej, trzeba, aby funkcja podcałkowa była funkcją ciągłą obu zmiennych. Otóż ten warunek nie jest wystarczającym, gdy jedna z granic jest nieskończoną. Dla przekonania się o tem, weźmy przykład. Można znaleźć, że

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin yx}{x} dx = \frac{1}{2} \pi,$$

dla każdej wartości skończonej y ; lecz dla $y = 0$ jest zerem funkcja podcałkowa dla każdego x i dla $x = \infty$ całka będzie zerem. A więc całka określona nie jest funkcją ciągłą parametru y , jakkolwiek $\frac{\sin yx}{x}$ jest funkcją ciągłą obu zmiennych.

Przykład ten wystarczy do zrozumienia, że w przypadku rozważanym zachodzą inne warunki.

Okażemy, że w przypadku, gdy funkcja dana do całkowania będąc ciągłą, jest zarazem taką, że dla $x = \infty$ staje się zerem algebraicznie rzędu wyższego od 1, wtedy ciągłość całki określonej, uważanej za funkcję parametru, utrzymuje się i wtedy, gdy jedna z granic jest nieskończoną; gdy to samo zachodzi także dla pochodnej tej funkcji względem parametru y , to utrzymuje się wtedy i twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całki.

W samej rzeczy, w przypadku, gdy funkcja $f(x, y)$ dla $x = \infty$ staje się zerem algebraicznie rzędu wyższego niż 1, to, jak wiemy, (§ 4) całka określona, rozciągnięta do ∞ , ma wartość skończoną; można tedy znaleźć zawsze liczbę a' taką, aby po obraniu dwóch jakichkolwiek liczb x', x'' pomiędzy a' i ∞ , wartość całki określonej od x' do x'' była mniejsza od σ ; w szczególności zaś biorąc $x' = a'$, aby było:

$$\int_{a'}^{x''} f(x, y) dx < \sigma$$

i

$$\int_{a'}^{x''} f(x, y + k) dx < \sigma,$$

skąd wynika:

$$\int_{a'}^{x''} [f(x, y + k) - f(x, y)] dx < 2\sigma,$$

a więc i granica tej całki dla $x'' = \infty$ będzie mniejsza od 2σ .

Lecz:

$$\int_a^{\infty} [f(x, y + k) - f(x, y)] dx = \int_a^{a'} + \int_{a'}^{\infty} = \int_a^{a'} + \lim_{x''=\infty} \int_{a'}^{x''}.$$

Skutkiem ciągłości funkcji $f(x, y)$ można zawsze znaleźć taką wartość k , aby dla każdego $k_i < k$ i dla każdej wartości x , było:

$$|f(x, y + k_i) - f(x, y)| < |f(x, y + k) - f(x, y)|.$$

Ustaliwszy k , można znaleźć taki punkt a' , dla którego sprawdza się nierówność $\lim_{x''=\infty} \int_{a'}^{x''} < 2\sigma$, a ustaliwszy znów w ten sposóbwartość a' , można potem zmniejszać k , aby było $\int_a^{a'} < \sigma$, a to na mocy ciągłości całki określonej pomiędzy granicami skończonymi.Widzimy więc, że przy uczynionych założeniach można zawsze, zmniejszając ilość k , uczynić dowolnie małą wartość całki.

$$\int_a^{\infty} [f(x, y+k) - f(x, y)] dx,$$

co właśnie stwierdza ciągłość całki danej względem zmiennej y .

Załóżmy teraz, że pochodna f'_y dla $x = \infty$ staje się zerem rzędu wyższego od 1. Wtedy na podstawie powyższego dowodzenia wnosimy, że

$$\int_a^{\infty} [f'_y(x, y+\theta k) - f'_y(x, y)] dx$$

dąży do zera przy zmniejszaniu ilości k ; lecz

$$\int_a^{\infty} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} dx = \int_a^{\infty} f'_y(x, y+\theta k) dx,$$

przeto różnica

$$\int_a^{\infty} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} dx - \int_a^{\infty} f'_y(x, y) dx$$

dąży do zera dla $k = 0$, t. j.

$$\lim_{k=0} \int_a^{\infty} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} dx$$

jest pochodną całki względem zmiennej y i równą całce pochodnej. W ten sposób twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całkowania zostało dowiedzionem i dla przypadku, w którym jedna z granic jest nieskończoną.

Przejdźmy teraz do drugiego przypadku osobliwego, w którym funkcja podcałkowa staje się nieskończoną w punkcie. Dla

ustalenia myśli, przyjmijmy, że staje się nieskończoną dla granicy wyższej. Udowodnimy twierdzenie:

Jeżeli $f(x, y)$ i $f'_y(x, y)$ w pewnym punkcie x (bez względu na wartość zmiennej y w obszarze) stają się nieskończonymi algebraicznie rzędu mniejszego od 1 i gdy nadto są ciągłymi względem obu zmiennych, wtedy utrzymuje się twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całkowym.

W samej rzeczy, jeżeli b jest punktem, w którym funkcje $f(x, y)$ i $f'_y(x, y)$ stają się nieskończonymi, wtedy, według założenia, dwie całki

$$\int_a^b f(x, y) dx, \quad \int_a^b f'_y(x, y + \theta k) dx$$

są skończonymi dla każdej wartości y , zawartej w obszarze i zgodnie z twierdzeniem w § 4. Z rezultatów, podanych w tymże paragrafie, wynika, że całkę:

$$\int_{b-\varepsilon}^b f'_y(x, y + \theta k) dx,$$

można uczynić dowolnie małą, zmniejszając odpowiednio ilość ε ; a więc i granicę tej całki dla $k = 0$ można również uczynić dowolnie małą.

Lecz

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_a^b f(x, y) dx &= \lim_{k=0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} dx, \\ &+ \lim_{k=0} \int_{b-\varepsilon}^b f'_y(x, y + \theta k) dx, \end{aligned}$$

(stosujemy tu drugą część twierdzenia o wartości średniej); nadto jest widocznem, że na zasadzie twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całkowym:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} dx = \int_a^{b-\varepsilon} f'_y(x, y) dx,$$

gdyż pomiędzy granicami a i $b-\varepsilon$ nie ma żadnego punktu, w którym funkcya staje się nieskończoną. Można więc wybrać ε tak, aby różnica pomiędzy $\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx$ a $\int_a^{b-\varepsilon} f'_y(x, y) dx$ była mniejsza od ilości dowolnie małej; stąd dla $\varepsilon=0$ dochodzimy do równości pochodnej całki i całki pochodnej.

Zauważymy jeszcze, że twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całkowania może służyć niejednokrotnie z korzyścią do obliczania pewnych całek określonych na podstawie innych, już znanych. Tak np. obliczono, że:

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{y^2+x^2} = \frac{\pi}{2y};$$

biorąc pochodne obu stron względem y , otrzymujemy nowy wzór:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(y^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4y^3},$$

a z tego wzoru, biorąc znów pochodne względem y , można otrzymać nowe wzory.

I w inny jeszcze sposób można stosować twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całkowania do obliczania całek określonych. Niechaj będzie np. całka:

$$\int_0^1 x^a \log x \, dx.$$

W niej $x^a \log x$ jest pochodną funkcji x^a względem a , możemy więc napisać:

$$\int_0^1 x^a \log x \, dx = \int_0^1 \left(\frac{d}{da} x^a \right) dx.$$

Na zasadzie twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całki możemy przemienić znak pochodnej ze znakiem całki:

$$\int_0^1 x^a \log x \, dx = \frac{d}{da} \int_0^1 x^a \, dx.$$

Tym sposobem otrzymaliśmy znaczne uproszczenie, gdyż oczywiście znacznie łatwiej obliczyć całkę funkcji x^a aniżeli funkcji $x^a \log x$. Ponieważ x^a jest funkcją ciągłą, więc obliczenie odpowiedniej całki określonej sprowadza się do odzyskania funkcji, której pochodną jest x^a . Tą funkcją jest, jak łatwo widzieć, $\frac{1}{a+1} x^{a+1}$; mamy zatem:

$$\int_0^1 x^a \, dx = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_0^1 = \frac{1}{a+1},$$

a więc:

$$\int_0^1 x^a \log x \, dx = \frac{d}{da} \frac{1}{a+1} = -\frac{1}{(a+1)^2}.$$

§ 8.

Przemienność dwóch znaków całkowania.

W poprzedzającym paragrafie zakładaliśmy, że funkcya pod znakiem całkowania zawiera parametr y i badaliśmy różniczkowanie całki względem tego parametru. Teraz rozważymy całkowanie względem tej zmiennej.

Kładąc, jak w § 7:

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

rozpatrzmy całkę:

$$\int_c^d \varphi(y) dy,$$

równą:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Takie wyrażenie nazywa się całką podwójną. Później rozpatrzmy całki wielokrotne w osobnym oddziale; tu postaramy się znaleźć odpowiedź na pytanie: czy można przemienić porządek dwóch całkowań? Zagadnienie to jest analogiczne z zadaniem rachunku różniczkowego o przemienności dwu różniczkowań.

Okażemy, że gdy granice a i b są stałe t. j. niezależne od y , gdy stałymi są również granice c i d i gdy funkcya $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą obu zmiennych x i y w całym obszarze, który rozciąga się dla zmiennej x od a do b , dla zmiennej y od c do d , wtedy można przemienić porządek całkowań.

W samej rzeczy łatwo widzieć, że pochodne dwu wyrażeń:

$$A = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y); \quad B = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y),$$

uważane za funkcyje czterech ilości a, b, c, d , są sobie równe; wynika stąd, że te dwa wyrażenia mogą tylko różnić się o ilość stałą, która, jak łatwo dowieść, jest równą zeru. Weźmy np. pochodną względem ilości a . W całce A ilość a jest parametrem, występującym w funkcyi znajdującej się pod znakiem

pierwszej całki od c do d ; ta funkcyja $\int_a^b dx f(x, y)$ jest na zasa-

dzie uczynionych założeń i znanych twierdzeń funkcyą ciągłą ilości a i y , nadto pochodna tej funkcyi względem a t. j. — $f(a, y)$ (patrz § 3) jest także funkcyą ciągłą obu ilości a i y . Na mocy twierdzeń poprzedzającego paragrafu możemy wziąć pochodne pod znakiem całkowania i otrzymujemy:

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \int_c^d dy \frac{\partial}{\partial a} \int_a^b dx f(x, y) = - \int_c^d dy f(a, y).$$

Weźmy teraz pochodną całki B względem a . Ponieważ a jest granicą niższą pierwszej całki w B , przeto:

$$\frac{\partial B}{\partial a} = - \left[\int_c^d dy f(x, y) \right]_{x=a} = - \int_c^d dy f(a, y);$$

jest to ten sam rezultat co wyżej. W ten sam sposób można stwierdzić równość pochodnych względem pozostałych ilości b, c, d . Dwa wyrażenia A, B różnią się zatem o pewną stałą C , t. j. nie zależą od żadnej z ilości a, b, c, d . Gdy więc weźmiemy $a = b$ stała C nie powinna zmienić swej wartości, lecz w tym przypadku A i B są zerami, ich różnica jest zerem, stąd $C = 0$. Wynika stąd równość wyrażeń A i B .

Twierdzenie dopiero co udowodnione, nazywa się twierdzeniem o całkowaniu pod znakiem całki.

Pozostaje zbadać dwa przypadki osobliwe, o których mówiliśmy w § 4. Zbadajmy najprzód, czy utrzymuje się twierdzenie o całkowaniu pod znakiem, jeżeli jedna z granic lub obie są nieskończonemi.

Przyjmijmy, że sprawdza się równość:

$$\int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y) = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y),$$

bez względu na to, jakkolwiek wielkimi są skończone granice b i d . Niechaj jedna z nich np. b staje się nieskończoną; założymy naturalnie, że istnieją granice obu stron dla $b = \infty$. Strona druga na mocy określeń § 4 staje się wtedy:

$$\int_a^\infty dx \int_c^d dy f(x, y);$$

pierwszą zaś stronę oznaczamy przez:

$$\lim_{b=\infty} \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y).$$

Tego ostatniego wyrażenia nie można uczynić równem

$$\int_c^d dy \lim_{b=\infty} \int_a^b dx f(x, y) = \int_c^d dy \int_a^\infty dx f(x, y),$$

o ile nie można okazać, że znak granicy odnośnie do parametru b jest przemienny ze znakiem \int_c^d . Otóż według twierdzeń po-

GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego

przedzającego paragrafu, przemienność ta istnieje bez innych zastrzeżeń, gdy wiemy, że przy granicach c i d skończonych dla takiej przemienności t. j. dla ciągłości całki uważanej za funkcję ilości b wystarcza, by funkcya znajdujaca się

pod znakiem całki t. j. $\int_a^b dx f(x, y)$ była funkcją ciągłą ilości

b i y , co w rzeczy samej się sprawdza. Otrzymujemy tedy, że gdy jedna z czterech granic jest nieskończoną, wtedy utrzymuje się twierdzenie o całkowaniu pod znakiem całki bez nowych zastrzeżeń o naturze funkcji, prócz tych, które odnoszą się do całkowania przy granicy wyższej ∞ .

Rzecz się ma inaczej, gdy obie granice są nieskończone, t. j. gdy dążą do nieskończoności tak b jak i d . Istotnie, gdy od związku:

$$\int_c^d dy \int_a^\infty dx f(x, y) = \int_a^\infty dx \int_c^d dy f(x, y),$$

przechodzimy do granicy dla $d = \infty$, wtedy strona pierwsza staje się równą: $\int_c^\infty dy \int_a^\infty dx f(x, y)$, druga zaś: $\lim_{d \rightarrow \infty} \int_a^\infty dx \int_c^d dy f(x, y)$,

i nie równa się:

$$\int_a^\infty dx \lim_{d \rightarrow \infty} \int_c^d dy f(x, y) = \int_a^\infty dx \int_c^\infty dy f(x, y),$$

o ile nie spełniają się pewne warunki. Wiemy w samej rzeczy, z poprzedzającego paragrafu, że aby całka \int_a^∞ funkcji

ilości d i x była funkcją ciągłą parametru d , nie wystarcza, by funkcja pod znakiem całkowania była funkcją ciągłą obu zmiennych d i x . Znaleźliśmy już warunek dostateczny do tego przypadku, lecz warunek ten, zastosowany do obecnego przypadku nie przedstawiłby się pod łatwą postacią. W zamian za to podamy inny warunek tylko dostateczny, mianowicie: przemienność utrzymuje się, gdy funkcja $f(x, y)$ jest zawsze mniejsza co do wartości bezwzględnej od:

$$\frac{\varphi(x)}{y^{\nu}}, \quad (\nu > 1)$$

gdzie $\varphi(x)$ jest funkcją całkowaną w jakimkolwiek przedziale aż do ∞ .

Istotnie, w tym przedziale mamy:

$$\int_a^{\infty} dx \int_c^{\infty} dy f(x, y) = \int_a^{\infty} dx \int_c^b dy f(x, y) + \int_a^{\infty} dx \int_b^{\infty} dy f(x, y),$$

a ponieważ możemy wybrać zawsze b tak, aby wyraz drugi strony drugiej był dowolnie małym — gdyż ten wyraz jest mniejszy

co do wartości bezwzględnej od $-\frac{1}{1-\nu} \frac{1}{b^{\nu-1}} \int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ (patrz

§ 4, rozdział 1) stającego się zerem dla $b = \infty$ — przeto granica wyrazu pierwszego strony drugiej dla $b = \infty$ równa się stronie pierwszej.

Przejdźmy wreszcie do przypadku, w którym funkcja staje się nieskończoną w punkcie np. dla $x = b$. Wtedy z równości:

$$\int_c^d dy \int_a^{b-\varepsilon} dx f(x, y) = \int_a^{b-\varepsilon} dx \int_c^d dy f(x, y),$$

przy przejściu do granicy dla $\varepsilon = 0$ wynika:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_c^d dy \int_a^{b-\varepsilon} dx f(x, y) = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y).$$

Po stronie pierwszej, jak już wiemy z paragrafu poprzedzającego, znak granicy nie jest przemienny ze znakiem całki, o ile funkcya $f(x, y)$, prócz ciągłości nie spełnia innych jeszcze warunków. Możemy wypowiedzieć warunek dostateczny w formie następującej:

Przemienność dwu całkowań utrzymuje się jeszcze w przypadku, w którym funkcya staje się nieskończoną w punkcie $x=b$, jeżeli funkcya oprócz zwykłego warunku ciągłości, posiada wciąż wartość bezwzględną mniejszą, niż:

$$\frac{\varphi(y)}{(x-b)^{\nu}} \quad (\nu < 1)$$

gdzie $\varphi(y)$ ma wartość zawsze skończoną.

Dowodzenie jest podobne do powyższego i opiera się na tem, że

$$\int_c^d \int_a^b = \int_c^d \int_a^{b-\varepsilon} + \int_c^d \int_{b-\varepsilon}^b$$

i że według przyjętych założeń, drugi wyraz strony drugiej dąży do zera przy zmniejszaniu do zera ilości ε .

Nadmienimy jeszcze, że możnaby przeprowadzić badanie całek podwójnych już nie w przypadku granic stałych, lecz w przypadku ogólniejszym, gdy granice pierwszego całkowania (względem x) są funkcjami zmiennej y . Takie badanie ogólniejsze byłoby analogiczne do podanego wyżej badania, odnoszącego się do różniczkowania pod znakiem całkowania; lecz zajmiemy się niem dopiero w rozdziale o całkach wielokrotnych.

Podamy wreszcie przykład, w którym nie wolno przemieniać porządku całkowania. Jest nim całka:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}.$$

Całkując najprzód względem x , następnie względem y , otrzymujemy $+\frac{\pi}{4}$; całkując w odwrotnym porządku, znajdujemy $-\frac{\pi}{4}$. Pochodzi to stąd, że funkcya dana jest nieciągłą w punkcie $x = 0, y = 0$.

ROZDZIAŁ II.

CAŁKOWALNOŚĆ FUNKCYJ.

§ 1.

Pierwsza postać warunków całkowalności.

Dotąd przyjmowaliśmy, że funkcje, którymi zajmowaliśmy się w różnych twierdzeniach poprzedzających paragrafów, były wszystkie całkowalnymi. Obecnie przedstawia się naturalnie zagadnienie takie: „Jakim warunkom powinna zadość czynić funkcja, aby była całkowalną pomiędzy danymi granicami, t. j. aby suma $\sum f_r \delta_r$, wskazana w rozdziale poprzedzającym, miała wartość oznaczoną i skończoną?”

Zauważmy najprzód, że według określenia zasadniczego całki określonej, granica ta powinna być niezależną: 1) od sposobu, w jaki przedziały δ_r dążą do zera; 2) od wyboru wartości f_r w każdym przedziale δ_r .

Załóżmy, że jako wartość f_r , wybieramy zawsze maksimum, lub granicę wyższą L_r wartości funkcji $f(x)$ w przedziale δ_r wraz z jego krańcami; wtedy granica sumy $\sum L_r \delta_r$ będzie wartością całki określonej. Gdybyśmy na wartość f_r wybrali minimum lub granicę niższą l_r wartości funkcji f w przedziale δ_r , granica sumy $\sum l_r \delta_r$ będzie także wartością całki. Tym sposobem różnica dwóch tych gra-

nie, t. j. granica ich różnicy czyli $\sum \delta_r (L_r - l_r)$ powinna być zerem. Jeżeli różnicę $L_r - l_r$ nazwiemy o scylacyą funkcyi w przedziale δ_r i oznaczymy ją przez D_r^{δ} , będzie:

$$\lim \sum \delta_r D_r = 0.$$

Z określenia całki wynika zatem następujący warunek konieczny istnienia granicy sumy: granica sumy iloczynów przedziałów cząstkowych przez oscylacje, funkcyi f w tych przedziałach, powinna być zerem.

Okażemy, że warunek ten jest zarazem warunkiem dostatecznym, stwierdzając, że gdy $\lim \sum \delta_r D_r = 0$, to istnieje wtedy granica wyrażenia $\sum f_r \delta_r$ i posiada wartość niezależną tak od wyboru wartości f_r , jak i od prawa, według którego przedziały δ_r dążą do zera. W samej rzeczy rozważmy dwa różne podziały całkowitego przedziału; przedziały cząstkowe pierwszego podziału oznaczymy przez $\delta_1, \dots, \delta_r, \dots$; drugiego przez $\delta'_1, \dots, \delta'_r \dots$ i niechaj te dwa podziały będą zupełnie od siebie niezależne. Rozpatrzmy jeszcze trzeci podział, który zawiera punkty pierwszego podziału wraz z punktami drugiego podziału. Przedziały cząstkowe trzeciego podziału oznaczymy przez ϱ ; tym sposobem każde δ i każde δ' jest sumą całkowitej liczby przedziałów cząstkowych ϱ .

Niechaj będzie:

$$\delta_r = \varrho_{h+1} + \varrho_{h+2} + \dots + \varrho_{h+t},$$

a więc:

$$f_r \delta_r = f_r \varrho_{h+1} + f_r \varrho_{h+2} + \dots + f_r \varrho_{h+t};$$

Jeżeli przez $f_{h+1}, f_{h+2}, \dots, f_{h+t}$ oznaczymy wartości funkcyi f w przedziałach $\varrho_{h+1}, \varrho_{h+2}, \dots, \varrho_{h+t}$, możemy napisać tożsamość:

$$f_r \delta_r = f_{h+1} \varrho_{h+1} + \dots + f_{h+t} \varrho_{h+t} \\ + [(f_r - f_{h+1}) \varrho_{h+1} + \dots + (f_r - f_{h+t}) \varrho_{h+t}].$$

Lecz różnice $f_r - f_{h+1}, \dots, f_r - f_{h+t}$ są różnicami pomiędzy dwiema wartościami funkcji f w przedziale δ_r , gdyż każdy z przedziałów $\varrho_{h+1}, \dots, \varrho_{h+t}$ jest częścią przedziału δ_r ; różnice te zatem będą z pewnością mniejsze lub co najwyżej równe wartości oscylacji funkcji w δ_r , t. j. ilości D_r . Kładąc zatem:

$$f_r \delta_r = f_{h+1} \varrho_{h+1} + \dots + f_{h+t} \varrho_{h+t} + \omega,$$

jestemy pewni, że co do wartości bezwzględnej:

$$\omega \leq [D_r \varrho_{h+1} + \dots + D_r \varrho_{h+t}],$$

t. j.

$$\omega \leq D_r \delta_r.$$

Stąd, zmieniając skaznik r i tworząc sumę, mamy:

$$\sum f_r \delta_r = \sum f_h \varrho_h + \sum \omega,$$

gdzie $\sum f_h \varrho_h$ jest sumą analogicznie utworzoną z przedziałów ϱ . Wyrażenie $\sum \omega$ czyni zadość nierówności:

$$\sum \omega \leq \sum D_r \delta_r,$$

a więc na mocy założenia dąży do zera.

Jeżeli teraz powtórzmy te same rozumowania, wychodząc z przedziałów δ'_s zamiast z przedziałów δ_r , znajdziemy wzór:

$$\sum f_s \delta'_s = \sum f_h \varrho_h + \sum \omega',$$

gdzie $\sum \omega'$ dąży także do zera. Odejmując, otrzymujemy:

$$\sum f_r \delta_r - \sum f_s \delta'_s = \sum \omega - \sum \omega' = \Omega,$$

gdzie Ω jest widocznie ilością, zdążającą do zera.

Przyjmijmy obecnie, że podział drugi na przedziały δ' nie jest niezależny od pierwszego podziału, lecz przedstawia stadyum następujące po pierwszym podziale; innymi słowy, że gdy przedziały dążące do zera oznaczamy w stadyum poprzedzającym przez δ ,

to w stadyum następnem oznaczamy je przez δ' . W takim razie wzór powyższy orzeka, że różnicę pomiędzy wartościami wyrażenia $\sum f_r \delta_r$ w dwóch kolejnych stadyach można uczynić dowolnie małą; jestto, jak wiemy, warunek konieczny i dostateczny i do tego, aby to wyrażenie dążyło do granicy oznaczonej i skończonej. Tym sposobem twierdzenie nasze zostało dowiedzione.

Można jeszcze okazać, że granica ta jest niezależną: 1) od prawa, według którego ustanowiliśmy podział na przedziały cząstkowe i według którego dążą one do zera; 2) od wyboru wartości f_r . W samej rzeczy, z powyższego wzoru w założeniu, że przedziały δ i δ' są bezwzględnie niezależne, wynika:

$$\lim [\sum f_r \delta_r - \sum f_s \delta'_s] = 0,$$

a więc, jeżeli istnieje granica strony pierwszej, to możemy napisać:

$$\lim \sum f_r \delta_r - \lim \sum f_s \delta'_s = 0.$$

Stąd wnosimy, że istnieje wtedy i granica wyrazu drugiego, równa granicy wyrazu pierwszego. Jeżeli teraz ustanowimy inne prawo wyboru wartości f_r i, utworzymy sumę $\sum \delta_r f_r^{(1)}$ i przyjmiemy dalej, że istnieje granica sumy $\sum \delta_r f_r$, to możemy łatwo okazać, że istnieje też granica sumy poprzedniej, że jedna jest równa drugiej. Gdyż jest widocznie:

$$\sum \delta_r f_r - \sum \delta_r f_r^{(1)} = \sum \delta_r (f_r - f_r^{(1)});$$

ponieważ zaś $f_r - f_r^{(1)}$, jako różnica dwóch wartości funkcji f w przedziale δ_r , jest mniejsza lub, co najwyżej, równa oscylacji D_r , przeto:

$$\sum \delta_r f_r - \sum \delta_r f_r^{(1)} \leq \sum \delta_r D_r.$$

Na podstawie tedy założenia widzimy, że strona pierwsza dąży do zera, t. j., jeżeli istnieje granica jednego z tych wyrażeń, to istnieć musi granica drugiego i równać się pierwszej.

§ 2.

Druga postać kryterium całkowalności.

Kryterium całkowalności, znalezione w paragrafie poprzedzającym, przedstawia się pod postacią, która może okazać się trudną w zastosowaniu praktycznym i dlatego postaramy się przekształcić to kryterium na inne, dogodniejsze w użyciu.

Warunek $\lim \sum \delta_r D_r = 0$ orzeka, że możemy sumę $\sum \delta_r D_r$ uczynić mniejszą od jakkolwiek małej ilości σ ; możemy zatem znaleźć takie stadyum małości przedziałów δ , aby dla tego stadyum i dla wszystkich następných było zawsze $\sum \delta_r D_r < \sigma$. Niechaj τ będzie sumą wszystkich przedziałów cząstkowych, w których oscylacja funkcji jest większa od pewnej liczby ustalonej σ' . Będzie tedy widocznie:

$$\tau \sigma' \leq \sum \delta_r D_r < \sigma,$$

skąd

$$\tau < \frac{\sigma}{\sigma'}.$$

Pozostawmy stałe σ' i zmniejszajmy σ , wtedy zmniejszać się będzie wartość τ i granica tego τ dla jakiegokolwiek stałego σ' będzie zerem. Znajdujemy więc warunek konieczny całkowalności taki: suma przedziałów cząstkowych, w których oscylacja funkcji może być większa od pewnej ilości oznaczonej, powinna dążyć do zera, t. j. być winno $\lim \tau = 0$.

Łatwo dowieść, że warunek ten jest zarazem dostatecznym.

Jeżeli przez D oznaczymy największą z oscylacji funkcji f w różnych przedziałach, których suma jest τ , i jeżeli zauważymy, że we wszystkich innych przedziałach oscylacja jest mniejsza lub równa σ' , otrzymamy nierówność:

$$\sum \delta_r D_r \leq \tau D + (T - \tau) \sigma',$$

w której T oznacza całkowity przedział całkowania, $T - \tau$ zatem sumę przedziałów, nie należących do τ . Z tego związku widzimy, że gdy τ można uczynić dowolnie małym, t. j. gdy $\lim \tau = 0$; to ponieważ σ' zaś jest dowolnym, a zatem też może być uczynionem dowolnie małym, to i pierwszą stronę można uczynić tak małą, jak się podoba, lub innemi słowy, strona pierwsza dąży do zera.

Wnosimy stąd, że oba warunki całkowalności $\lim \sum \delta_r D_r$ i $\lim \tau = 0$ są doskonale równoważne.

§ 3.

Funkcje całkowalne i niecałkowalne. Zastosowanie znalezionych kryteriów.

Stosując twierdzenia, znalezione w dwu poprzedzających paragrafach, możemy znaleźć klasy funkcji całkowalnych. Widzimy przedewszystkiem, że każda funkcja ciągła jest całkowalną.

W samej rzeczy, dość przypomnieć sobie twierdzenia, dowiedzione w § 8 Rozdziału I-go „Rachunku różniczkowego“ o funkcjach ciągłych. Widzieliśmy tam, że każda funkcja ciągła jest zarazem jednostajnie ciągłą, stąd zaś wyprowadziliśmy, że gdy mamy daną funkcję ciągłą w pewnym

całkowitym przedziale, to możemy przedział ten podzielić na inne przedziały cząstkowe takie, aby w każdym z nich oscylacja funkcji była mniejsza od ilości σ' dowolnie małej. Wiążąc z tą własnością kryterium podane w poprzedzającym paragrafie, możemy powiedzieć, że dla funkcji ciągłych ilość τ dąży do zera dla każdego dowolnie małego σ' ; stąd zaś wynika, że funkcje ciągłe są całkowalne.

Całkowalnemi są też funkcje skończone nieciągłe, mające skończoną liczbę punktów przerwy, w których funkcja ma skok, oczywiście skończony. Takie funkcje nazywamy zwykle funkcjami w ogóle ciągłymi. Przypomnijmy w tym względzie, że dla funkcji nieciągłej w punkcie a skokiem w tym punkcie nazywamy różnicę pomiędzy wartością funkcji w a a granicą jej wartości przy zbliżaniu się do tego punktu, w założeniu, że ta granica istnieje. Jeżeli zaś ta granica jest nieoznaczoną, wtedy skokiem funkcji w a nazywamy różnicę dwóch wartości skrajnych, pomiędzy którymi oscyluje wartość funkcji przy zbliżaniu się do punktu a . Jeżeli zaś, jak to przyjęliśmy, wartość funkcji jest zawsze skończoną, to oczywiście i skok jej skończonym być musi.

Aby dowieść powyższego twierdzenia, oznaczymy przez a_1, a_2, \dots, a_n n punktów przerwy funkcji i otoczmy każdy z nich przedziałem dowolnie małym. Jeżeli d jest największy z tych przedziałów, to suma wszystkich jest mniejsza od nd . W pozostałym przedziale całkowania funkcja jest już ciągłą, możemy zatem ten przedział podzielić na przedziały cząstkowe takie, aby w każdym z nich oscylacja funkcji była zawsze mniejsza od pewnej ustalonej ilości σ' . Przedziały, w których oscylacja funkcji może być większa od σ , znajdują się tylko w otoczeniu punktów przerwy; suma tych otoczeń jest mniejsza od nd , można ją zatem uczynić dowolnie małą, gdyż n jest skończone, d zaś dowolne. A zatem w naszym przypadku ilość τ można uczynić dowolnie małą i będzie $\lim \tau = 0$, co było do okazania.

Istnieją jeszcze inne klasy funkcji nieciągłych całkowalnych; aby je znaleźć, musimy wejść w pewne rozważania, odnoszące się do rozmaitych gatunków nieciągłości funkcji. Punkty

przerwy funkcyj mogą stanowić grupę nieskończoną punktów (p. Rozdz. I „Rachunku różniczkowego“). Grupa nieskończona punktów może być dwojakiego rodzaju. Może być taką, że wszystkie punkty grupy dają się zawrzeć w przedziałach, których sumę można uczynić mniejszą od każdej ilości danej; lub też taką, że tego uczynić nie można. W pierwszym przypadku grupę punktów nieskończonych nazywamy zwykle grupą nieciągłą punktów, w drugim zaś grupą liniową punktów. Nazwa grupy liniowej ma przypominać fakt, że dla wszystkich punktów przedziału liniowego własność ta nie ma miejsca.

Przykładem grupy nieciągłej punktów jest jakakolwiek grupa o skończonej liczbie punktów granicznych (p. § 1 I Rozdziału „Rachunku różniczkowego“). Jeżeli bowiem otoczmy te punkty graniczne dowolnie małymi przedziałami, to pozostaną na zewnątrz nich punkty grupy w liczbie skończonej i każdy z tych punktów będzie można otoczyć przedziałami, których suma może być dowolnie małą.

Powiemy jeszcze, że funkcya nieciągła nazywa się punktowo-nieciągłą, jeżeli punkty przerwy stanowią grupę nieciągłą; liniowo-nieciągłą zaś wtedy, gdy te punkty tworzą grupę liniową.

Możemy teraz udowodnić twierdzenie Riemanna:

Funkcya punktowo-nieciągła jest całkowalną.

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu, który stosowaliśmy w przypadku skończonej liczby punktów przerwy, gdyż i dla funkcji punktowo-nieciągłej istnieje także własność zasadnicza, jaka miała miejsce i w tamtym przypadku, mianowicie, że wszystkie punkty przerwy dają się zawrzeć w przedziałach, których sumę można uczynić dowolnie małą.

Przykładem funkcji punktowo-nieciągłej jest funkcya $f(x)$, określona w sposób taki: Niechaj $f(x)$ ma wartość 1 we wszystkich punktach grupy $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, zaś wartość 0 we wszystkich innych punktach prze-

działu od 0 do 1. Funkcja taka jest całkowalną w tym przedziale. Stosując określenie całki określonej, łatwo znaleźć, że wartość całki tej funkcji jest zerem. W samej rzeczy, podzielmy przedział od 0 do 1 na przedziały cząstkowe i rozróżnijmy dwa ich rodzaje: jedne, znajdujące się w otoczeniu punktów przerwy, inne, nie zawierające punktów przerwy. Część sumy $\sum f_r \delta_r$, odpowiadająca tym drugim przedziałom, jest oczywiście zerem, ponieważ funkcja $f(x)$ jest zerem w każdym z ich punktów; część zaś sumy, odpowiadająca pierwszym przedziałom, będzie miała wartość mniejszą lub równą iloczynowi sumy wszystkich przedziałów przez 1, t. j. przez wartość funkcji w punktach przerwy. Lecz ponieważ suma pierwszych przedziałów może być uczyniona dowolnie małą, przeto granica sumy może być tylko zerem.

§ 4.

Twierdzenia o funkcjach całkowalnych. Całkowanie przez szeregi.

Pytanie, jakie mimowoli się nastęrcza o funkcjach całkowalnych, jest następujące: czy łącząc ze sobą za pomocą znaków działań analitycznych skończoną liczbę funkcji całkowalnych, otrzymujemy funkcję całkowalną?

Suma dwu funkcji całkowalnych jest widocznie całkowalną, co wynika bezpośrednio z definicyi całki określonej, nawet bez stosowania twierdzeń o całkowalności, podanych w tym rozdziale. Dlatego to w rozdziale poprzedzającym mogliśmy już korzystać z tego twierdzenia. W samej rzeczy, jeżeli funkcje $\varphi(x)$, $\psi(x)$ są całkowalne, t. j. jeżeli dwie sumy $\sum \varphi_r \delta_r$, $\sum \psi_r \delta_r$ mają granice oznaczone i skończone, to i suma tych dwóch sum będzie miała również granicę oznaczoną i skończoną; a gdy jeszcze brać będziemy wartości obu funkcji φ_r i ψ_r zawsze dla tych samych punktów, to okaże się, że ta ostatnia granica jest ściśle całką sumy dwu funkcji.

Nieco trudniej dowieść twierdzenia: Iloczyn dwu funkcyj całkownych jest także funkcją całkowną.

Aby to okazać, rozpatrzmy najprzód oscylację iloczynu $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ w przedziale δ_r . Przyjmijmy na chwilę, że wartości φ, ψ są zawsze dodatnie dla całej drogi całkowania. Oznaczmy przez M_φ, m_φ granice wyższą i niższą wartości funkcji φ w δ_r i podobnie przez M_ψ, m_ψ także granice dla funkcji ψ , przez $M_{\varphi\psi}, m_{\varphi\psi}$ granice dla iloczynu $\varphi\psi$. Wtedy różnice:

$$M_\varphi - m_\varphi, M_\psi - m_\psi, M_{\varphi\psi} - m_{\varphi\psi},$$

będą oscylacjami funkcyj $\varphi, \psi, \varphi\psi$, w przedziale δ_r . Ponieważ ilości M, m według założenia są dodatnimi, możemy więc napisać nierówności:

$$M_{\varphi\psi} \leq M_\varphi M_\psi; m_{\varphi\psi} \geq m_\varphi m_\psi,$$

skąd:

$$\begin{aligned} M_{\varphi\psi} - m_{\varphi\psi} &\leq M_\varphi M_\psi - m_\varphi m_\psi \\ &\leq M_\varphi (M_\psi - m_\psi) + m_\psi (M_\varphi - m_\varphi), \end{aligned}$$

a jeżeli przez $D^{(r)}_{\varphi\psi}, D^{(r)}_\varphi, D^{(r)}_\psi$ oznaczymy oscylacje trzech funkcyj $\varphi\psi, \varphi, \psi$, będzie:

$$D^{(r)}_{\varphi\psi} \leq M_\varphi D^{(r)}_\psi + m_\psi D^{(r)}_\varphi.$$

Kładąc M_ψ zamiast m_ψ , wzmocnimy jeszcze nierówność, możemy więc napisać:

$$D^{(r)}_{\varphi\psi} \leq M_\varphi D^{(r)}_\psi + M_\psi D^{(r)}_\varphi.$$

Nierówność ta stosuje się do każdego przedziału δ_r ; jeżeli więc przez M, M' oznaczymy granice wyższe wartości funkcyj φ, ψ dla całego przedziału całkowania i podstawimy w nierówności M, M' zamiast M_φ, M_ψ , nierówność wzmocni się jeszcze, gdyż

M, M' nie mogą być oczywiście mniejszemi odpowiednio od M_φ, M_ψ . Będzie tedy:

$$I_{\varphi\psi}^{(r)} \leq M D_\psi^{(r)} + M' D_\varphi^{(r)},$$

a stąd:

$$\sum \delta_r D_{\varphi\psi}^{(r)} \leq M \sum \delta_r D_\psi^{(r)} + M' \sum \delta_r D_\varphi^{(r)}.$$

Ponieważ obie funkcje φ, ψ są z założenia całkowalnemi, przeto sumy $\sum \delta_r D_\psi^{(r)}, \sum \delta_r D_\varphi^{(r)}$ na podstawie twierdzenia, dowiedzionego w § 1, dążą do zera, a więc dążyć musi do zera i suma $\sum \delta_r D_{\varphi\psi}^{(r)}$, co znaczy, że iloczyn $\varphi\psi$ jest całkowalny.

Powyższy dowód przeprowadziliśmy w założeniu, że funkcje φ, ψ są zawsze dodatnie dla każdego punktu przedziału. Lecz jest jasnym, że twierdzenie to jest ogólnem, gdyż do funkcyj φ, ψ można zawsze dodać dwie stałe C, C' takie, aby sumy $\varphi + C, \psi + C'$ miały zawsze wartości dodatnie; w tym celu dość wziąć C i C' większe odpowiednio od wartości bezwzględnych granic niższych funkcyj φ, ψ w całym przedziale. Wtedy iloczyn:

$$(\varphi + C)(\psi + C') = \varphi\psi + C\psi + C'\varphi + CC',$$

na mocy powyższego dowodzenia, jest całkowalny, a więc będzie całkowalnym i iloczyn $\varphi\psi$, równy $(\varphi + C)(\psi + C') - C\psi - C'\varphi - CC'$, jako będący sumą funkcyj całkowalnych.

Załóżmy teraz, że liczba działań nie jest już skończoną, lecz nie skończoną, np., że mamy nieskończoną liczbę wyrazów, z których każdy przedstawia funkcję całkowalną. Będzie to t. zw. zagadnienie o całkowaniu przez szeregi, analogiczne do zagadnienia o różniczkowaniu przez szeregi, którem zajmowaliśmy się w „Rachunku różniczkowym“ (Rozdz. II § 2).

Niechaj będzie szereg zbieżny, którego wyrazy są funkcjami całkowalnemi zmiennej x w przedziale od a do b . Pytamy się, w jakich przypadkach taki szereg przedstawia funk-

czy całkowaną zmiennej x i kiedy można za całkę szeregu przyjąć sumę całek pojedynczych jego wyrazów?

Jak zwykle, nie szukamy warunków czysto-koniecznych; wystarczy tu znaleźć warunek **dość** konieczny w postaci łatwej i do użycia w zastosowaniach dogodnej. Udowodnimy twierdzenie. „Jeżeli szereg dany jest szeregiem zbieżnym jednostajnie i wszystkie jego wyrazy są funkcjami całkowalnymi, wtedy szereg przedstawia funkcję całkowalną, a całkowanie uskutecznia się, biorąc sumę całek pojedynczych wyrazów“.

Niechaj będzie szereg:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots = \sum_{h=1}^{\infty} u_h(x).$$

Oznaczmy przez $R_n(x)$ resztę szeregu, to będzie:

$$f(x) = \sum_{h=1}^{h=n} u_h(x) + R_n(x).$$

Na mocy założenia o jednostajnej zbieżności szeregu można ilość $R_n(x)$ uczynić mniejszą od σ dla każdego punktu x . Dowiedzimy najprzód, że funkcja $f(x)$ jest całkowalną, jeżeli całkowalnymi są wyrazy $u(x)$. Oznaczmy przez $D_r^{(1)}, D_r^{(2)}, \dots$ oscylacje wyrazów $u_1(x), u_2(x), \dots$ w przedziale cząstkowym δ_r , który, jak zwykle, jest jednym z przedziałów, na które podzielono cały przedział całkowalności. Niechaj dalej $D_r^{(f)}, D_r^{(R)}$ oznaczają oscylacje funkcji f i R w tymże przedziale δ_r . Wtedy jest widocznem, że wartość granicy wyższej w przedziale δ_r funkcji f , równej sumie funkcji u_1, u_2, \dots, u_n, R nie może przewyższać sumy granic wyższych tych funkcji. Np. jeżeli wszystkie te funkcje mają swoje wartości największe w jednym i tym samym punkcie x , wtedy i maximum funkcji f odpowiada sumie tych maximów; w ogólności wszakże, gdy ten przypadek specjalny nie zachodzi, maximum

funkcyi f będzie mniejsze od sumy maximów. Podobnie minimum funkcyi f będzie wogóle większe od sumy minimów. Jeżeli więc oznaczymy przez $M^{(f)}$, $m^{(f)}$, $M^{(1)}$, $m^{(1)}$, ..., $M^{(n)}$, $m^{(n)}$, $M^{(R)}$, $m^{(R)}$ maxima i minima funkcji f , u_1, \dots, u_n , R , mieć będziemy:

$$\begin{aligned} M^{(f)} &\leq M^{(1)} + M^{(2)} + \dots + M^{(n)} + M^{(R)}, \\ m^{(f)} &\geq m^{(1)} + m^{(2)} + \dots + m^{(n)} + m^{(R)}, \end{aligned}$$

a odejmując:

$$D_r^{(f)} \leq D_r^{(1)} + D_r^{(2)} + \dots + D_r^{(n)} + D_r^{(R)}.$$

Niechaj teraz dla każdego x będzie co do wartości bezwzględnej $R_n(x) < \sigma$, to widocznem jest, że oscylacje funkcyi R nie mogą być większe od 2σ , a więc:

$$D_r^{(f)} \leq D_r^{(1)} + D_r^{(2)} + \dots + D_r^{(n)} + 2\sigma,$$

$$\sum \delta_r D_r^{(f)} \leq \sum \delta_r D_r^{(1)} + \sum \delta_r D_r^{(2)} + \dots + \sum \delta_r D_r^{(n)} + 2\sigma \sum \delta_r.$$

Ponieważ $\sum \delta_r = b - a$, t. j. całemu przedziałowi całkowania, a sumy po stronie drugiej dążą do zera, gdyż funkcye $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... są całkownymi, σ zaś może być dowolnie małym, przeto i suma na stronie pierwszej ostatniego wzoru może być uczyniona dowolnie małą, co znaczy, że funkcya f jest całkowną.

Łatwo teraz okazać, że całką funkcyi f jest suma całek pojedynczych wyrazów szeregu. Istotnie, utwórzmy sumę:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots \\ &+ \int_a^b u_n(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx, \end{aligned}$$

gdzie po drugiej stronie mogliśmy znak całkowania napisać przy każdym wyrazie, gdyż suma wyrazów jest skończoną. Je-

żeli okażemy, że całka $\int_a^b R_n(x) dx$, w miarę wzrastania liczby n , może stać się mniejszą od każdej ilości dowolnie małej, t. j. dąży do zera, to jasnym będzie, że szereg całek, t. j.

$$\sum_{h=1}^{\infty} \int_a^b u_h(x) dx,$$

będzie szeregiem zbieżnym, którego wartość jest wartością całki funkcji $f(x)$.

Wiemy, że $R_n(x)$ dla każdego x w przedziale całkowania może być mniejszem od σ , stąd całka $\int_a^b R_n(x) dx$ jest co do wartości bezwzględnej mniejsza od $\int_a^b \sigma dx = (b-a)\sigma$, t. j. tak małą, jak się podoba, co było do okazania.

Stosując dowiedzione twierdzenie do szeregu potęgowego, który, jak wiemy, (p. „Rachunek różniczkowy“, Rozdz. I, § 7), gdy jest zbieżny w pewnym obszarze, zawartym pomiędzy punktami skrajnymi, to jest z pewnością i jednostajnie zbieżnym w tymże obszarze, z włączeniem punktów skrajnych, otrzymamy twierdzenie:

„Szereg potęgowy zmiennej x jest funkcją całkowalną, a całkę jego otrzymujemy, biorąc sumę całek pojedynczych wyrazów.

Pokażemy, w jaki sposób te twierdzenia można spożytkować w celu rozwinięcia na szeregi niektórych funkcyj. Jako przykład, weźmy funkcję $\arcsin x$. Funkcję tę możemy wy-

razić za pomocą całki określonej. Istotnie pochodną jej jest $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, a więc możemy napisać:

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

zakładając, że funkcję określamy w ten sposób, iż jest równa zeru dla $x = 0$. Według rozwinięcia dwumianowego (p. „Rachunek różniczkowy“, Rozdz. III, § 3), mamy (jeżeli $x^2 < 1$):

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots,$$

gdzie strona druga jest szeregiem potęgowym, który możemy całkować. Całka tego każdego wyrazu jest typu:

$$\int_0^x x^{2n} dx,$$

a więc równa się:

$$\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x = \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

co sprawdzić łatwo (p. Rozdz. I, § 3). Znajdujemy więc:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots$$

Zauważmy że szereg po stronie prawej jest jeszcze zbieżny i dla $x^2 = 1$, jakkolwiek szereg dwumianowy, z którego wyszliśmy, jest dla tej wartości x rozbieżnym. Funkcja pod znakiem całkowania staje się wtedy nieskończoną rzędu $\frac{1}{2}$, lecz całka pozostaje skończoną (jej wartością jest $\frac{\pi}{2}$).

Piękny przykład całkowania przez szeregi stanowi:

$$\int \log (1-2 \rho \cos x + \rho^2) dx.$$

Funkcja podcałkowa jest bardzo skomplikowana i całkowanie bezpośrednie nie byłoby łatwym; lecz jeżeli rozwinemy tę funkcję na szereg i wykonamy całkowanie przez szeregi, otrzymamy łatwo wartość całki pod postacią szeregu.

Przykład szeregu, który nie będąc jednostajnie zbieżnym, nie pozwala na całkowanie przez szeregi, podał Darboux; jest to szereg;

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n x e^{-n x^2} - (n+1) x e^{-(n+1)x^2}],$$

którego wartością jest wprost $x e^{-x^2}$.

Nie wchodzimy w szczegóły tego rozważania, które zresztą byłoby łatwym.

ROZDZIAŁ III.

OBLICZANIE CAŁEK NIEOKREŚLONYCH I OKREŚLONYCH.

§ 1.

Całki nieokreślone zasadnicze.

W dwóch poprzedzających paragrafach rozważaliśmy własności ogólne, wynikające z określenia całki; obecnie przechodzimy do części praktycznej rachunku całkowego, t. j. do odpowiedzi na pytanie: mając daną funkcję, jak z niej obliczyć całkę nieokreśloną?

W rachunku różniczkowym zagadnienie różniczkowania może być rozwiązane zupełnie, jeżeli w danej funkcji zachodzą tylko symbole zwykłe działań analitycznych. W rachunku całkowym rzecz ma się inaczej; tu bowiem, o ile nie mamy do czynienia z typami elementarnymi funkcyj, nie możemy ustanowić właściwych prawideł całkowania. Powodzenie zależy tu od zastosowania tego lub owego sposobu sztucznego i nie zawsze udaje się znaleźć środek prowadzący do celu. Dalej, podczas gdy różniczkowanie zwykłych typów funkcyj prowadzi zawsze do funkcyj, nie wychodzących z zakresu tychże typów, to w rachunku całkowym rzecz ma się odmiennie. Całkowanie zwykłych typów funkcyj prowadzi bowiem nieraz do funkcyj, nie dają-

cych się już przedstawić w ten sam sposób, jak poprzednie, za pomocą skóńczonej liczby działań analitycznych, wykonanych na zmiennej niezależnej, jeżeli przez zwykłe działania analityczne rozumiemy działania matematyki elementarnej, t. j. sześć działań zasadniczych algebry, dalej działania logarytmowania i wykładnicze, działania trygonometryczne i odwrotne względem tychże.

Dla przekonania się, że całkowanie może prowadzić do funkcyj nowych, bardziej złożonych, rozważmy co następuje:

Wiemy, że pochodną funkcji $\log x$ jest $\frac{1}{x}$; stąd wnosi-
my, że całką nieokreśloną funkcji $\frac{1}{x}$ jest $\log x$, gdyż $\frac{1}{x}$ jest funkcją ciągłą (p. Rozdział I, § 3). Wyobraźmy sobie na chwilę, że funkcja logarytmowa nie należy jeszcze do zakresu funkcyj, które uważamy za funkcje zwykłe, i że nie należy także do tegoż zakresu jej odwrotność, t. j. funkcja wykładnicza; wtedy będzie jasnym, że prosty proces całkowania najprostszej funkcji wymiernej $\frac{1}{x}$ wprowadza już nową funkcję logarytmową.

Jeżeli zaliczymy do klasy pierwszej funkcje wymierne, do drugiej niewymierne, do trzeciej przestępne (trygonometryczne i ich odwrotne, logarytmowe i wykładnicze), to różniczkowanie funkcji jednej klasy nie prowadzi do funkcji klasy wyższej, lecz do funkcji tejże klasy lub niższej; całkowanie, przeciwnie, może prowadzić do funkcji klasy wyższej.

W następujących paragrafach wskażemy niektóre zasadnicze środki sztuczne całkowania; obecnie podamy t. zw. **w z o r y z a s a d n i c z e c a ł k o w a n i a**.

Rozpatrzmy wszystkie funkcje, które podzieliłiśmy wyżej na trzy klasy; wszystkie one są funkcjami ciągłymi i ich pochodne są także funkcjami ciągłymi. Pamiętając o tem, że całka nieokreślona funkcji ciągłej jest funkcją, której pochodna jest równa funkcji danej, możemy napisać **w z o r y z a s a d n i c z e**.

Z jedenastu związków :

1. $\frac{d}{dx} \frac{x^{m+1}}{m+1} = x^m$ (dla jakiegokolwiek m , różnego od -1);
2. $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$; 3. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$; 4. $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$;
5. $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$; 6. $\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$; 7. $\frac{d}{dx} \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
8. $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 9. $\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$; 11. $\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{1+x^2}$,

otrzymujemy dziewięć wzorów zasadniczych:

1. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ (dla m różnego od -1);
2. $\int \frac{1}{x} dx = \log x$; 3. $\int e^x dx = e^x$;
4. $\int \cos x dx = \sin x$; 5. $\int \sin x dx = -\cos x$;
6. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$; 7. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x$;
8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x = -\arccos x$;
9. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$.

Rozumie się, że do stron drugich tych dziewięciu wzorów można dołączyć zawsze stałą dowolną, dla otrzymania całki nieokreślonej zupełnej.

Jeżeli mamy do obliczenia całkę funkcji, nie znajdującą się w powyższej tabeli, to musimy znaleźć odpowiedni sposób sprowadzenia jej do całek znanych. Przykłady podajemy w paragrafie następnym.

§ 2.

Sztuczne sposoby całkowania. Całkowanie przez części. Całkowanie przez szeregi.

Niechaj daną będzie do obliczenia całka $\int \frac{dx}{\sin x}$, nie należąca do żadnego z typów, podanych w powyższej tabeli. Mamy:

$$\sin x = 2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x,$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{\frac{d}{dx} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

Funkcja, której pochodna względem x równa się ostatniemu wyrażeniu, jest $\log \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; a zatem:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \text{const.}$$

Metodą często stosowaną jest metoda podstawienia, polegająca na przekształceniu zmiennej niezależnej na inną (patrz Rozdz. I, § 6) tak, aby nowa funkcja podcałkowa była prostszą do całkowania, niż dana. Nie możemy, naturalnie, podać prawi-

deł na to, jakiego używać należy podstawienia; powodzenie zależy tu będzie często od większej lub mniejszej wprawy w rachunkach tego rodzaju. Celem podstawienia będzie zawsze dojście do typu funkcyi, której całka jest już znana, chociażby nowa funkcyja była gatunku wyższego niż ta, z której wyszliśmy; tak np. nowa funkcyja może być przestępną, gdy dana jest algebraiczną. Tak np. całka $\int \frac{dx}{1-x^2}$ przez podstawienie $x = \cos y$ przekształca się (p. Rozdz. I, § 6) na $-\int \frac{dy}{\sin y}$, która na zasadzie rozważań poprzedzających równa się $-\log \operatorname{tg} \frac{y}{2} + \text{const.}$, a więc całka dana równa się:

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \operatorname{arc} \cos x + \text{const.}$$

Ten rezultat można uprościć za pomocą wzorów trygonometrii; w samej rzeczy:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} y &= \frac{\sin \frac{1}{2} y}{\cos \frac{1}{2} y} = -\frac{2 \sin \frac{1}{2} y \cos \frac{1}{2} y}{2 \cos^2 \frac{1}{2} y} = \frac{\sin y}{1 + \cos y} \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}, \end{aligned}$$

tak że ostatecznie całka nasza równa się :

$$\log \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} + \text{const.}$$

Obliczmy całkę:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + 2\beta x + \gamma}.$$

Położmy tożsamościowo:

$$ax^2 + 2\beta x + \gamma = (ax + b)^2 + c,$$

skąd należy oznaczyć stałe a, b, c . Rozwijając kwadrat i porównując współczynniki jednakowych potęg zmiennej x , znajdujemy:

$$a = a^2; \quad \beta = ab; \quad \gamma = b^2 + c;$$

stąd:

$$a = \sqrt{a}; \quad b = \frac{\beta}{\sqrt{a}}; \quad c = \gamma - \frac{\beta^2}{a},$$

przez co całka przekształca się na następującą:

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2+c}.$$

Przez podstawienie $ax + b = y$, z którego wynika $dx = \frac{dy}{a}$, ta całka zamienia się na:

$$\frac{1}{a} \int \frac{dy}{y^2+c}.$$

Wprowadźmy nową zmienną z za pomocą podstawienia $y = \sqrt{c} \cdot z$, z którego wynika $dy = \sqrt{c} \cdot dz$; otrzymujemy:

$$\frac{1}{a\sqrt{c}} \int \frac{dz}{z^2+1},$$

a gdy c jest ujemnem, podstawienie $y = \sqrt{-c} \cdot z$, z którego wynika $\sqrt{-c} \cdot dz$, doprowadza do całki:

$$-\frac{1}{a\sqrt{-c}} \int \frac{dz}{1-z^2}.$$

Pierwsza z ostatnich dwu całek sprowadza się do typu, znajdującego się w tablicy zasadniczej, druga do całki wyżej przez nas obliczonej. Otrzymujemy więc jako wynik w pierwszym przypadku:

$$\frac{1}{a\sqrt{c}} \operatorname{arctg} z = \frac{1}{a\sqrt{c}} \operatorname{arctg} \frac{ax + b}{\sqrt{c}};$$

w drugim zaś:

$$-\frac{1}{a\sqrt{-c}} \log \operatorname{tg} \operatorname{arc} \cos \frac{z}{2} = -\frac{1}{a\sqrt{-c}} \log \operatorname{tg} \operatorname{arc} \cos \frac{ax + b}{2\sqrt{-c}}.$$

Powyższe przykłady niechaj wystarczą na teraz jako przykłady całkowania za pomocą metody podstawień. Wyłożymy obecnie zasady innej metody, bardzo użytecznej w praktyce, zwanej metodą całkowania przez części.

Niechaj $u(x)$, $v(x)$ będą dwie funkcje, mające pochodne; według prawideł na pochodną iloczynu będzie:

$$\frac{d}{dx} [u(x)v(x)] = u(x) \frac{d}{dx} v(x) + v(x) \frac{d}{dx} u(x),$$

stąd:

$$u(x) \frac{d}{dx} v(x) = \frac{d}{dx} [u(x)v(x)] - v(x) \frac{d}{dx} u(x).$$

Całkując obie strony i pamiętając, że całką pochodnej funkcji jest sama funkcja, otrzymujemy wzór zasadniczy:

$$\int u(x) \frac{dv(x)}{dx} dx = u(x)v(x) - \int u(x) \frac{du(x)}{dx} dx.$$

Zatrzymajmy się na chwilę nad tym wzorom dla wyrozumienia, w jaki sposób może on służyć do naszego celu. Niechaj będzie do obliczenia całka funkcji ciągłej $f(x)$. Możemy zawsze wyobrazić sobie, że funkcja $f(x)$, jako iloczyn dwóch czynników,

z których jednym jest $u(x)$, drugim zaś $\frac{dv(x)}{dx}$, t. j. pochodna pewnej nieznaney funkcji $v(x)$. Przy takim założeniu można przy pomocy powyższego wzoru sprowadzić obliczenie całki danej do obliczenia innej całki, zupełnie różnej od pierwszej, a która może być znacznie prostszą lub znaną. Rozkład na czynniki można uskutecznić nieskończenie wielu sposobami, lecz naturalnie pomiędzy nimi oberzemy (o ile istnieje i może być znaleziony) sposób, czyniący zadość dwóm warunkom: 1) aby można znaleźć bezpośrednio funkcję $v(x)$; 2) aby funkcja $v(x) \frac{dv(x)}{dx}$ była łatwiejsza do całkowania, niż funkcja dana. Zresztą wszystko zależy od zręczności i wprawy, nabytej w tego rodzaju rachunkach. Przykłady najlepiej rzecz wyjaśnia.

Niechaj będzie do obliczenia całka $\int \log x \, dx$. Uważajmy funkcję $\log x$ za iloczyn $\log x \cdot 1$; pierwszy czynnik nazwijmy $u(x)$, drugi $\frac{dv(x)}{dx}$. Ze związku $\frac{dv}{dx} = 1$, wynika $v = x$, a ze związku $u = \log x$ mamy $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$; stosując więc wzór całkowania przez części, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \log x \, dx &= x \log x - \int dx \\ &= x \log x - x + \text{const.} \end{aligned}$$

Niekiedy nie udaje się całkowanie po jednokrotnem stosowaniu tej metody, lecz po kilkakrotnem. Oto przykład:

Niechaj będzie:

$$\int x^2 \sin x \, dx.$$

Funkcję podcałkową rozłożmy na dwa czynniki: $x^2 = u$,

$\sin x = \frac{dv}{dx}$; stąd $\frac{dv}{dx} = 2x$, $v = -\cos x$ i będzie:

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx .$$

Całka po drugiej stronie nie jest jeszcze znana, lecz widocznie jest prostszą od całki danej, gdyż wykładnik zmiennej x jest w niej o jedność mniejszy. Stosując powtórnie całkowanie przez części, otrzymujemy :

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x ,$$

a więc ostatecznie:

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 x \sin x + 2 \cos x + \text{const.}$$

W następnych paragrafach zajmiemy się zagadnieniem całkowania niektórych specjalnych typów funkcji i dla pewnych typów dość ogólnych, będziemy mogli podać wzory ogólne na całkowanie.

Gdy funkcya dana nie da się sprowadzić do żadnego z typów, które umiemy całkować, gdy więc okażą się daremnymi wszelkie próby i sztuczne sposoby, wtedy pozostaje tylko uciec się do całkowania przez szeregi, którego teorię podaliśmy w § 4 rozdziału II-go. Staramy się wtedy rozwinąć funkcję na szereg, którego każdy wyraz jest całkowny i otrzymujemy rezultat w postaci szeregu.

Jako przykład podajemy całkę:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} , \quad (k^2 < 1),$$

która nazywa się całką eliptyczną. Całki takie badają się szczegółowo w matematyce wyższej; dają one początek funk-

cyom wyższym, niż zwyczajne funkcye przestępne, za pomocą których wyrazić się nie dają. Jest oczywistem, że gdy chcemy te funkcye wyrazić za pomocą zwykłych funkcyj, to wszelkie usiłowania i sposoby sztuczne nie udają się i możemy wtedy stosować tylko całkowanie przez szeregi.

Aby przykładu tego nie uczynić zbyt skomplikowanym, ograniczymy się na obliczeniu całki określonej w granicach od 0 do $\frac{\pi}{2}$. Funkcyja podcałkowa daje się rozwinąć na szereg następujący:

$$(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \varphi \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \varphi + \dots$$

Szereg ten jest jednostajnie zbieżny; kładąc bowiem za $\sin \varphi$ jego wartość największą 1, otrzymujemy szereg wartości największych:

$$1 + \frac{1}{2} k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 + \dots$$

zbieżny dla $k^2 < 1$, skąd na mocy znanego twierdzenia („Rachunek różniczkowy“, Rozdz. 1, § 7) wynika, że szereg uważany jest jednostajnie zbieżny.

Całkując wyraz po wyrazie we wzorze powyższym, znajdujemy:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \varphi + \frac{1}{2} k^2 \int \sin^2 \varphi d\varphi \\ + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \int \sin^4 \varphi d\varphi + \dots$$

Aby dojść tedy do szukanego rezultatu, trzeba umieć obliczać

całki postaci $\int \sin^{2n} \varphi d\varphi$. Możemy to uskutecznić za pomocą metody całkowania przez części. Mamy:

$$\int \sin^{2n} \varphi d\varphi = -\sin^{2n-1} \varphi \cos \varphi \\ + (2n-1) \int \sin^{2n-2} \varphi \cos^2 \varphi d\varphi ;$$

kładąc $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$ i łącząc wyrazy podobne, otrzymujemy:

$$\int \sin^{2n} \varphi d\varphi = -\frac{\sin^{2n-1} \varphi \cos \varphi}{2n} + \frac{2n-1}{2n} \int \sin^{2n-2} \varphi d\varphi .$$

Według tego wzoru całka, odpowiadająca wykładnikowi $2n$, zależy od całki, odpowiadającej wykładnikowi $2n-2$; stosując dostateczną liczbę razy ten wzór, dojdziemy w końcu do całki z wykładnikiem zero i otrzymamy tym sposobem wartość całki

$\int \sin^{2n} \varphi d\varphi$. Rachunek upraszcza się, jak powiedzieliśmy, jeżeli

rozpatrujemy całkę określoną od 0 do $\frac{\pi}{2}$. Wtedy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi$ staje się:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} \varphi d\varphi ,$$

a stosując wzór ten kolejno n razy, znajdziemy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n \cdot (2n-2)\dots 2} \cdot \frac{\pi}{2} ,$$

stąd wartość szukana całki danej będzie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right].$$

§ 3.

Całkowanie funkcji wymiernych.

Metody, wskazane w poprzedzających rozdziałach, służyły do przekształcenia całki danej na inną, której obliczenie w wielu razach jest łatwiejszem. Obecnie przyjmujemy, że funkcya, mająca być całkowaną, jest specjalnego gatunku, mianowicie jest funkcją wymierną. Wtedy możemy istotnie wskazać metodę ogólną do obliczania całki w każdym przypadku. Rozumiemy to tak, że zagadnienie uważa się za rozwiązane, gdy daje się sprowadzić do zagadnienia natury mniej wysokiej, np. do rozwiązania równania algebraicznego, które praktycznie może być trudnem i nawet niewykonalnem. Z punktu widzenia teoretycznego wszakże zagadnienie o całkowaniu należy wtedy uważać za rozwiązane.

Niechaj będzie funkcya wymierna, równa ilorazowi dwu funkcji $\frac{F(x)}{f(x)}$, które możemy przyjąć jako względnie pierwsze. Podzielmy licznik przez mianownik, (gdy stopień funkcji F jest większy od stopnia funkcji f), przez co iloraz sprowadzimy do części całkowitej i do części ułamkowej, w której stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika. Co do części całkowi-

tej, to całkowanie jej sprowadza się do całkowania wyrażeń typu ax^n , gdzie a jest stałą; takie całki obliczamy według znanych prawideł. Zagadnienie zatem sprowadza się do całkowania funkcji typu $\frac{F(x)}{f(x)}$, gdzie funkcje F i f są względnie pierwszymi i stopień pierwszej z nich jest mniejszy od stopnia drugiej.

Niechaj a_1, a_2, \dots, a_p będą pierwiastkami funkcji f ; przyjmijmy, że są one rzeczywistymi i że n_1, n_2, \dots, n_p są stopniami ich wielokrotności. Wiemy wtedy z algebry (jak to okażemy na końcu tego paragrafu), że ułamek $\frac{F(x)}{f(x)}$ można rozłożyć na sumę ułamków cząstkowych sposobem następującym:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &= \frac{b_1^{(n_1)}}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{b_1^{(n_1-1)}}{(x-a_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{b'_1}{x-a_1} \\ &+ \frac{b_2^{(n_2)}}{(x-a_2)^{n_2}} + \frac{b_2^{(n_2-1)}}{(x-a_2)^{n_2-1}} + \dots + \frac{b'_2}{x-a_2} \\ &+ \dots \dots \\ &+ \frac{b_p^{(n_p)}}{(x-a_p)^{n_p}} + \frac{b_p^{(n_p-1)}}{(x-a_p)^{n_p-1}} + \dots + \frac{b'_p}{x-a_p}, \end{aligned} \right.$$

gdzie ilości b są stałymi, z których niektóre mogą być zerami. Lecz z pewnością różnymi od zera są: $b_1^{(n_1)}, b_2^{(n_2)}, \dots, b_p^{(n_p)}$. Widzimy, że całkowanie strony drugiej tego wzoru sprowadza się zawsze do całek typu $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$. Dla $n = 1$ taka całka równa się

$\log(x-a)$, dla n różnego od 1 równa się $-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$.

W ten sposób zadanie nasze jest zupełnie rozwiązane, a rezultat będzie sumą funkcji wymiernych i logarytmowych.

Podajmy zastosowanie tej metody. Niechaj będzie do obliczenia całka:

$$\int \frac{dx}{x(1-x^2)}.$$

Pierwiastki mianownika są wszystkie rzeczywiste; są nimi 0, 1, -1; wielokrotność wszystkich jest 1. Napiszemy tedy:

$$\frac{1}{x(1-x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

Dla oznaczenia stałych a, b, c pomnożmy tę równość kolejno przez $x, x-1, x+1$ i następnie połączmy $x=0, x=1, x=-1$; znajdziemy tym sposobem:

$$a = 1, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(1-x^2)} &= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \log x - \frac{1}{2} \log(x-1) - \frac{1}{2} \log(x+1) + C \\ &= \log \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} + C. \end{aligned}$$

Wyłożoną metodę można stosować z pożytkiem w przypadku, gdy wszystkie pierwiastki a są rzeczywistymi. Jeżeli niektóre z nich są urojonymi, wtedy nie możemy przejść do obliczeń, ponieważ wszystkie dotychczasowe rozważania nasze w rachunku różniczkowym i całkowym odnoszą się w istocie rzeczy do funkcji, w których nie zachodzą ilości urojone. Należałoby tedy rozpocząć przedewszystkiem od rozciągnięcia dotychczasowych rozważań na przypadek funkcji urojonych i okazać, że wykonywając na ilościach urojonych działania tak, jak się je wykonywa na ilościach rzeczywistych, dochodzi się do rezultatów ostatecznych, z których znikają ilości urojone. Rezultaty, które

otrzymanoby w ten sposób pod postacią rzeczywistą, byłyby właśnie rezultatami szukanymi.

Lecz można okazać, że i w przypadku, w którym niektóre pierwiastki funkcji f są urojonymi, daje się wykonać rachunek całkowania, bez wprowadzenia ilości urojonych.

Załóżmy, że funkcja f posiada pierwiastek urojony $a + i\beta$, którego stopień wielokrotności jest n ; wtedy posiada także i pierwiastek sprzężony $a - i\beta$ tegoż stopnia wielokrotności. Czynnikiem przeto funkcji f będzie:

$$[(x-a)^2 + \beta^2]^n = (x^2 + ax + b)^n.$$

Z algebry wiadomo (okażemy to na końcu paragrafu), że ułamek $\frac{F(x)}{f(x)}$ można rozłożyć na ułamki cząstkowe jeszcze sposobem odmiennym od podanego we wzorze (1); mianowicie, można ją rozłożyć na szereg wyrazów, z których niektóre, odpowiadające pierwiastkom rzeczywistym funkcji f , będą takie, jak w (1), inne zaś będą typu:

$$\frac{cx + d}{(x^2 + ax + b)^n},$$

gdzie pierwiastki równania $x^2 + ax + b = 0$ są urojonymi. Zagadnienie nasze sprowadza się do obliczania całek typu:

$$\int \frac{cx + d}{(x^2 + ax + b)^n} dx.$$

Jeżeli, jak wyżej, $a + i\beta$, $a - i\beta$ są pierwiastkami mianownika, to będzie $x^2 + ax + b = (x - a)^2 + \beta^2$; całka zaś zamienia się na:

$$\int \frac{cx + d}{[(x - a)^2 + \beta^2]^n} dx. \quad (n > 0).$$

Tę ostatnią całkę można przedstawić tożsamościowo w ten sposób:

$$\int \frac{c(x-a) + (ca+d)}{[(x-a)^2 + a^2]^n} dx$$

$$= c \int \frac{x-a}{[(x-a)^2 + a^2]^n} dx + (ca+d) \int \frac{dx}{[(x-a)^2 + \beta^2]^n}.$$

Pierwsza z całek po prawej stronie przechodzi za pomocą podstawienia $x - a = y$ na $c \int \frac{y dy}{(y^2 + \beta^2)^n}$, a więc równa się:

$$- \frac{c}{2n-2} \cdot \frac{1}{(y^2 + \beta^2)^{n-1}}, \quad \text{jeżeli } n > 1;$$

lub:

$$\frac{c}{2} \log(y^2 + \beta^2), \quad \text{jeżeli } n = 1.$$

Druga z całek po prawej za pomocą tego samego podstawienia przechodzi na $\int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^n}$, a więc równa się: $\frac{1}{\beta} \arctg \frac{y}{\beta}$ dla $n = 1$. Gdy zaś $n > 1$, to uskuteczniamy przekształcenia:

$$\int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^{n-1}} = \int \frac{(y^2 + \beta^2)}{(y^2 + \beta^2)^n} dy$$

$$= \int \frac{y^2 dy}{(y^2 + \beta^2)^n} + \beta^2 \int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^n};$$

a wykonywając całkowanie przez części, otrzymujemy:

$$\int \frac{y^2 dy}{(y^2 + \beta^2)^n} = - \frac{y}{(2n-2)(y^2 + \beta^2)^{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{2n-2} \int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^{n-1}},$$

i łącząc te wzory, znajdujemy:

$$\int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^n} = \frac{y}{(2n-2)\beta^2 \cdot (y^2 + \beta^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)\beta^2} \int \frac{dy}{(y^2 + \beta^2)^{n-1}}.$$

Widzimy, że kolejne stosowanie tego wzoru redukcyjnego doprowadzi nas (przy n dodatnim i całkowitem) do całki tego samego gatunku, w której wykładnik przy ilości $y^2 + \beta^2$ jest jednością i taka całka, jak to już widzieliśmy, wyrazi się przez arcus tangens.

Tym sposobem zagadnienie całkowania danej funkcji wymiernej jest zupełnie rozwiązaniem, naturalnie w założeniu, że pierwiastki równania $f(x) = 0$ są znane; pokazaliśmy też, że we wszystkich przypadkach można uskutecznić obliczenie, wprowadzając jedynie ilości rzeczywiste, nawet gdy pierwiastki równania $f(x) = 0$ są urojonymi.

Jako rezultat tego całego badania możemy wypowiedzieć, że całka funkcji wymiernej wyraża się zawsze i jedynie za pomocą trzech typów funkcji: 1) funkcji wymiernych, 2) funkcji logarytmowych, 3) funkcji arcus tangens. Funkcje trzeciego typu występują wtedy, jeżeli nie chcemy wprowadzać do rachunku ilości urojonych; gdy zaś wprowadzamy ilości urojone, to wystarczają funkcje dwu pierwszych gatunków.

Dla uzupełnienia tego wykładu podamy jeszcze w tym paragrafie ogólne twierdzenia algebry, odnoszące się do rozkładu funkcji wymiernych na funkcje elementarne; twierdzenia te stanowią podstawę wszystkich powyższych wywodów.

a). *Twierdzenia ogólne o rozkładzie funkcji wymiernych ułamkowych.*

Niechaj będzie funkcja $\frac{F(x)}{f(x)}$, której licznik i mianownik są wielomianami o zmiennej x , odpowiednio stopnia m -go i n -go.

Jeżeli stopień funkcji F jest większy od stopnia funkcji f , to po podzieleniu pierwszego wielomianu przez drugi, otrzymamy część całkowitą. $Q(x)$ stopnia $m-n$ i resztę $R(x)$ stopnia mniejszego od n ; możemy więc napisać:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{f(x)}.$$

Taki podział na części całkowitą i ułamkową daje się skutecznie jednym tylko sposobem. W samej rzeczy niechaj będzie:

$$F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m,$$

$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n;$$

twierzę, że można jednym tylko sposobem znaleźć wszystkie dwa wielomiany: jeden $Q(x)$ stopnia $m-n$ i $R(x)$ stopnia niższego od n , aby tożsamościowo, t. j. dla każdej wartości x zachodziła równość:

$$F(x) = Q(x) f(x) + R(x).$$

Położmy:

$$Q(x) = q_0 x^{m-n} + q_1 x^{m-n-1} + \dots + q_{m-n},$$

$$R(x) = r_0 x^{n-1} + r_1 x^{n-2} + \dots + r_{n-1};$$

to być powinno:

$$\begin{aligned} & a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m \\ = & (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n) (q_0 x^{m-n} + q_1 x^{m-n-1} + \dots + q_{m-n}) \\ & + r_0 x^{n-1} + r_1 x^{n-2} + \dots + r_{n-1}. \end{aligned}$$

Ponieważ ta równość winna zachodzić dla każdej wartości x , przeto współczynniki jednakowych potęg zmiennej x po obu jej stronach winny być równe; stąd otrzymujemy związki:

łóżyć zawsze w ten sposób:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

gdzie A jest stałą, $F_1(x)$ wielomianem całkowitym, $f_1(x)$ ilorazem funkcji $f(x)$ przez $(x-a)^\alpha$.

W samej rzeczy, ponieważ

$$f(x) = (x-a)^\alpha f_1(x),$$

przeto jest tożsamościowo:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F(x) - A f_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)}.$$

Możemy wybrać stałą A tak, aby było $F(a) - A f_1(a) = 0$, t. j.

możemy przyjąć $A = \frac{F(a)}{f_1(a)}$, wtedy funkcja $F(x) - A f_1(x)$

będzie miała czynnik $x-a$; w drugim wyrazie powyższego wzoru będzie można wykonać skrócenie przez $x-a$ i pozostanie funkcja $F_1(x)$ stopnia $m-1$, w mianowniku zaś pozostanie $(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)$ c. b. d. o.

Z tego twierdzenia wypływa następujące:

Niechaj a, b, \dots, l będą pierwiastki rzeczywiste lub urojone funkcji $f(x)$; $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ stopnie wielokrotności tych pierwiastków; wtedy funkcję $\frac{F(x)}{f(x)}$ można rozłożyć w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} = & \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a_1)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\ & + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

gdzie $A, B, \dots, A_1, B_1, \dots$ są ilocściami stałymi.

W samej rzeczy, stosując rozkład, podany w twierdzeniu poprzedzającym, do ułamka:

$$\frac{F(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

znajdziemy:

$$\frac{F(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_2(x)},$$

gdzie do drugiego wyrazu strony drugiej możemy znowu ten sam zastosować rozkład i postępując w ten sposób dalej, dojdziemy do powyższego wzoru. Zauważmy, że spółczynniki pierwsze tego rozkładu A, B, \dots nie mogą być zerami, gdyż są, jak wiemy, danymi przez wzory $A = \frac{F(a)}{f(a)}, B = \frac{F(b)}{f(b)}, \dots$; gdyby więc były zerami, musiałyby być w takim razie $F(x) = 0$, t. j. a musiałyby być pierwiastkiem równania $F(x) = 0$, co nie zgadza się z założeniem, że ułamek $\frac{F(x)}{f(x)}$ jest nieprzywiedlny.

b). Metoda wykonania rozkładu w przypadku pierwiastków rzeczywistych.

Rozróżnimy dwa przypadki główne: jeden, gdy wszystkie pierwiastki są rzeczywistymi i drugi, w którym zachodzą też pierwiastki urojone. Gdy wszystkie pierwiastki są rzeczywistymi, rozpatrzmy dwa przypadki, pierwszy, gdy wszystkie są pojedynczemi, drugi, gdy zachodzą i pierwiastki wielokrotne. W pierwszym razie mamy $f(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-l)$ i wtedy, na zasadzie poprzedzającego twierdzenia, można napisać:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots + \frac{L}{x-l}.$$

Podamy metodę oznaczenia stałych A, B, C, \dots . Wiemy, że kładąc $f(x) = (x-a) f_1(x)$, t. j. $f_1(x) = (x-b)(x-c)\dots(x-l)$ mamy:

$$A = \frac{F(a)}{f_1'(a)}.$$

Weźmy pierwszą pochodną funkcji $f(x)$, t. j.:

$$f'(x) = (x-b)(x-c)\dots(x-l) + (x-a)(x-c)\dots(x-l) + \dots$$

Stąd:

$$f''(a) = (a-b)(a-c)\dots(a-l) = f_1'(a),$$

a zatem:

$$A = \frac{F(a)}{f_1'(a)} \quad \text{i podobnie:} \quad B = \frac{F(b)}{f_1'(b)} \quad \text{i t. d.}$$

Zastosujemy te rezultaty do wyprowadzenia wzoru, który może być użyteczny w wielu razach. Niechaj funkcja $F(x)$ będzie stopnia $n-2$, gdy funkcja $f(x)$ jest stopnia n . Mnożąc obie strony wzoru, dającego rozkład funkcji $\frac{F(x)}{f(x)}$, przez $f(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-l)$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F(x) &= A(x-b)(x-c)\dots(x-l) \\ &+ B(x-a)(x-c)\dots(x-l) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Spółczynnik przy potędze x^{n-1} po stronie drugiej jest $A+B+C+\dots$, t. j.

$$\frac{F(a)}{f_1'(a)} + \frac{F(b)}{f_1'(b)} + \frac{F(c)}{f_1'(c)} + \dots = \sum \frac{F(a)}{f_1'(a)},$$

gdzie znak Σ oznacza, że suma ma być rozciągnięta na wszystkie pierwiastki równania $f(x) = 0$. Gdy w funkcji $F(x)$ współczynnik przy x^{n-1} jest zerem, wtedy $\Sigma \frac{F(a)}{f'(a)} = 0$.

Pokażemy teraz jak obliczają się współczynniki $A, A_1, \dots, B, B_1, \dots$ w przypadku ogólnym. Metoda bezpośrednia, wskazana w a) byłaby za długą i dlatego podamy wzory na wartość tych stałych, wyrażone przez pochodne funkcyj f i F . Wyjdźmy z wzorów:

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}, \quad A_1 = \frac{F_1(a)}{f_1(a)}, \quad \dots,$$

gdzie:

$$F_1(x) = \frac{F(x) - Af_1(x)}{x-a}, \quad F_2(x) = \frac{F_1(x) - A_1f_1(x)}{x-a}, \quad \dots$$

Ponieważ $f(x) = (x-a)^a f_1(x)$, więc biorąc pochodne według wzoru *Leibniza*, znajdujemy:

$$\begin{aligned} f^{(a)}(x) &= a! f_1(x) + a \frac{a!}{1} (x-a) f_1'(x) \\ &+ \frac{a(a-1)}{2} \cdot \frac{a!}{1 \cdot 2} (x-a)^2 f_1''(x) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(a+1)}(x) &= (a+1)! f_1'(x) + \frac{(a+1)a}{2} \frac{a!}{1} (x-a) f_1''(x) \\ &+ \frac{(a+1)a(a-1)}{2 \cdot 3} \frac{a!}{1 \cdot 2} (x-a)^2 f_1'''(x) + \dots; \\ &\dots \end{aligned}$$

dla $x = a$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f^{(a)}(a) &= a! f_1(a); \quad f^{(a+1)}(a) = \frac{(a+1)!}{1!} f_1'(a); \\ f^{(a+2)}(a) &= \frac{(a+2)!}{2!} f_1''(a), \dots \end{aligned}$$

Biorąc zaś kolejne pochodne we wzorach:

$$(x-a) F_1(x) = F(x) - A f_1(x),$$

$$(x-a) F_2(x) = F_1(x) - A_1 f'_1(x),$$

.....

znajdujemy:

$$F_1(x) + (x-a) F'_1(x) = F'_1(x) - A f'_1(x),$$

$$F_2(x) + (x-a) F'_2(x) = F'_1(x) - A_1 f'_1(x),$$

.....

$$2F'_1(x) + (x-a) F''_1(x) = F''(x) - A f''_1(x),$$

$$2F'_2(x) + (x-a) F''_1(x) = F''_1(x) - A f''_1(x).$$

Stąd dla $x = a$ będzie:

$$F_1(a) = F'(a) - A f'_1(a) = F'(a) - \frac{A}{(\alpha+1)!} f^{(\alpha+1)}(a),$$

$$F_2(a) = F'(a) - A_1 f'_1(a) = \frac{F''(a) - A f''_1(a)}{2} - A_1 f'(a)$$

$$= \frac{1}{2} F''(a) - \frac{A}{\alpha+2} f^{(\alpha+2)}(a) - \frac{A_1}{\alpha+1} f^{(\alpha+1)}(a),$$

.....

Wstawiając tu wyrażenia na A, A_1, A_2, \dots , otrzymujemy żądane wzory zwrotne:

$$F(a) - \frac{A}{\alpha!} f^{(\alpha)}(a) = 0,$$

$$F'(a) - \frac{A}{(\alpha+1)!} f^{(\alpha+1)}(a) - \frac{A_1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(a) = 0,$$

$$F''(a) - \frac{A}{(\alpha+2)!} f^{(\alpha+2)}(a) - \frac{A_1}{(\alpha+1)!} f^{(\alpha+1)}(a) - \frac{A_2}{\alpha!} f^{(\alpha)}(a) = 0,$$

.....

których prawo tworzenia jest widoczne.

c). *Metoda wykonywania rozkładu w przypadku, w którym zachodzą pierwiastki urojone.*

Wykonanie w tym przypadku rozkładu za pomocą metod wyżej podanych dałoby we wzorach wyrażenia urojone i doprowadziłoby do rozkładu urojonego. Wskażemy przeto inny sposób rozkładu, wynikający z twierdzenia:

Jeżeli $x^2 + px + q$ jest czynnikiem mianownika $f(x)$, t. j. gdy:

$$f(x) = (x^2 + px + q)^n f_1(x),$$

wtedy tożsamościowo jest:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{F_1(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1} f_1(x)},$$

gdzie P i Q są dwie stałe, $F_1(x)$ zaś nowa funkcja całkowita.

W samej rzeczy mamy:

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &= \frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^n f_1(x)} \\ &= \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{F(x) - (Px + Q) f_1(x)}{(x^2 + px + q)^n f_1(x)}. \end{aligned}$$

Możemy oznaczyć stałe P i Q tak, aby czynnikiem wyrażenia $F(x) - (Px + Q) f_1(x)$ był trójmian $x^2 + px + q$; jeżeli więc $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ są pierwiastkami równania $x^2 + px + q = 0$, to być powinno:

$$F(\alpha + i\beta) - [P(\alpha + i\beta) + Q] f_1(\alpha + i\beta) = 0;$$

$$F(\alpha - i\beta) - [P(\alpha - i\beta) + Q] f_1(\alpha - i\beta) = 0.$$

Otrzymujemy stąd:

$$P(a \pm i\beta) + Q = \frac{F(a \pm i\beta)}{f_1(a \pm i\beta)},$$

a obliczywszy stronę drugą, która będzie wogóle postaci $M \pm iN$, będziemy mieli:

$$Pa + Q = M; \quad P\beta = N,$$

skąd:

$$P = \frac{N}{\beta}, \quad Q = M - \frac{Na}{\beta}.$$

Dla tak określonych wartości P i Q znajdujemy:

$$F(x) - (Px + Q) f_1(x) = (x^2 + px + q) F_1(x),$$

co było do okazania.

Kolejne zastosowanie tego twierdzenia, podobnie jak w a), prowadzi do rozkładu:

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &= \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{P_1x + Q_1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots \\ &+ \frac{P_{n-1}x + Q_{n-1}}{x^2 + px + q} + \frac{F_n(x)}{f_1(x)}. \end{aligned}$$

Spółczynniki P, Q, P_1, Q_1, \dots wyznaczają się ze związków:

$$Pk + Q = \frac{F(k)}{f_1(k)}, \quad (Pk + Q) f_1(k) = F(k),$$

$$P_1k + Q_1 = \frac{F_1(k)}{f_1(k)}, \quad (P_1k + Q_1) f_1(k) = F_1(k),$$

.....

gdzie k jest jednym z dwu pierwiastków równania $x^2 + px + q = 0$, funkcje zaś $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... są określone za pomocą związków:

$$(x^2 + px + q) F_1(x) = F(x) - (Px + Q) f_1(x),$$

$$(x^2 + px + q) F_2(x) = F_1(x) - (P_1x + Q) f_1(x),$$

.....

Zauważymy nadto, że gdy pierwiastki urojone funkcji f nie są wielokrotnymi lecz pojedynczemi, wtedy rozkład ten można otrzymać łatwo z pierwszego rozkładu. W samej rzeczy, jeżeli k i k' są dwa pierwiastki urojone sprzężone funkcji $x^2 + px + q$, wtedy rozkład za pomocą pierwszej metody daje:

$$\frac{R}{x-k} + \frac{R'}{x-k'},$$

gdzie:

$$R = \frac{F(k)}{f_1(k)(k-k')}, \quad R' = \frac{F(k')}{f_1(k')(k'-k)}.$$

Łącząc oba ułamki w jeden, mamy:

$$\frac{(R + R')x - (Rk' + R'k)}{(x-k)(x-k')} = \frac{(R + R')x - (Rk' + R'k)}{x^2 + px + q}.$$

Ponieważ k i k' są liczby urojone sprzężone, przeto R i R' a także Rk' i $R'k$ będą ilościami urojonymi sprzężonymi, skąd wynika, że $R + R'$, oraz $Rk' + R'k$ będą liczbami rzeczywistemi.

Nadto kładąc $\frac{F(k)}{f_1(k)} = M + Ni$, oraz $k = a + i\beta$, $k' = a - i\beta$, otrzymujemy:

$$R = \frac{M + Ni}{2i\beta}, \quad R' = \frac{M - Ni}{-2i\beta},$$

skąd:

$$R + R' = \frac{N}{\beta} = P$$

$$-(Rk' + R'k) = \frac{(M + Ni)(a - i\beta) - (M - Ni)(a + i\beta)}{-2i\beta}$$

$$= M - N \frac{a}{\beta} = Q.$$

§ 4.

**Całkowanie funkcyj niewymiernych. Całki dwumienne.
Całki eliptyczne.**

Jeżeli w przypadku funkcyj wymiernych mogliśmy zupełnie rozwiązać zadanie całkowania, to nie możemy tego uczynić w przypadku funkcyj niewymiernych. Musimy tu ograniczyć się na pewnych typach specjalnych i zobaczyć, czy i w jaki sposób można dla tych typów otrzymać metodę ogólną.

Jednym z łatwiejszych typów funkcyj niewymiernych jest ten, w którym występują różne potęgi ułamkowe zmiennej x ; t. j. funkcja postaci $f(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, \dots)$, gdzie f jest symbolem funkcji wymiernej, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ zaś są jakiejkolwiek liczby wymierne ułamkowe. Taka funkcja f jest w istocie funkcją niewymierną zmiennej x , lecz za pomocą prostego przekształcenia możemy ją łatwo sprowadzić do typu funkcji wymiernej. W samej rzeczy, niechaj μ będzie najmniejszą wspólną wielokrotną mianowników $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; wtedy $\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma, \dots$ będą liczbami całkowitemi. Połóżmy $x = y^\mu$, skąd:

$$x^\alpha = y^{\mu\alpha}, \quad x^\beta = y^{\mu\beta}, \quad \dots$$

$$dx = \mu y^{\mu-1} dy.$$

Za pomocą tego podstawienia dochodzimy do funkcji zmiennej y , w której wszystkie wykładniki są liczbami całkowitemi; otrzymujemy zatem funkcję wymierną zmiennej y i sprowadzamy zagadnienie do przypadku, rozważonego w paragrafie poprzedzającym. •

Rozważmy całkę typu $\int f(x, \sqrt{R}) dx$, gdzie R jest wielomianem stopnia 2-go względem x , t. j. $R = a + 2bx + cx^2$, f zaś przedstawia funkcję wymierną ilości x i \sqrt{R} . Funkcja f jest oczywiście funkcją niewymierną zmiennej x , a niewymierność ta pochodzi od pierwiastnika drugiego stopnia, t. j. od \sqrt{R} . Wykonamy pewne przekształcenia przygotowawcze dla okazania, że przez przekształcenie algebraiczne całka dana daje się wyrazić za pomocą pewnych całek typu oznaczonego.

Ponieważ potęgą drugą funkcji \sqrt{R} jest już wyrażeniem wymiernym, więc \sqrt{R} w funkcji f może występować tylko w stopniu pierwszym, a więc ogólna postać funkcji f jest

$$\frac{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi_1(x) + \psi_1(x)\sqrt{R(x)}}.$$

Mnożąc licznik i mianownik przez $\varphi_1(x) - \psi_1(x)\sqrt{R(x)}$, otrzymujemy:

$$\frac{\varphi(x)\varphi_1(x) - \psi(x)\psi_1(x)R(x) + \sqrt{R(x)}(\varphi_1(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi_1(x))}{\varphi_1^2(x) - \psi_1^2(x)R(x)},$$

gdzie mianownik jest już wymiernym. Funkcja f tedy może być sprowadzona do typu:

$$G(x) + H(x)\sqrt{R(x)},$$

w którym G i H są dwie funkcje wymierne zmiennej x . Winniśmy zatem zająć się całkami typu:

$$\int H(x) \sqrt{R(x)} dx,$$

które przez pomnożenie i podzielenie przez \sqrt{R} sprowadzają się do:

$$\int \frac{H(x) R(x)}{\sqrt{R(x)}} dx = \int \frac{K(x)}{\sqrt{R(x)}} dx,$$

gdzie $K(x)$ jest funkcją wymierną.

Jeżeli rozłożymy funkcję $K(x)$ na część całkowitą i na ułamki elementarne według teorii podanej w poprzedzającym paragrafie, spostrzeżemy, że gdy pozostajemy w obszarze ilości rzeczywistych, to całka powyższa sprowadza się do całek trzech typów, mianowicie do całki:

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{R(x)}} dx,$$

pochodzącej od części całkowitej, zawartej w $K(x)$; do całki:

$$\int \frac{1}{(x-a)^n \sqrt{R(x)}} dx,$$

pochodzącej od pierwiastków rzeczywistych w mianowniku funkcji $K(x)$; wreszcie do całki:

$$\int \frac{cx + d}{(x^2 + px + q)^n \sqrt{R(x)}} dx,$$

pochodzącej od pierwiastków urojonych mianownika tej funkcji. Można pokazać, że każda z tych całek sprowadzić się daje do całki wymiernej. Dowód podamy dla całki typu ogólnego

$\int f(x, \sqrt{R(x)}) dx$, a nie dla całek jednego z trzech typów specjalnych, lubo przekształcenia wyżej wskazane mogą być w praktyce bardzo użytecznymi.

Rozróżnijmy dwa przypadki: c dodatniego i c ujemnego. W pierwszym z nich kładziemy $\sqrt{R} = y + \sqrt{c} \cdot x$, skąd:

$$a + 2bx + cx^2 = y^2 + 2\sqrt{c} xy + cx^2,$$

a więc:

$$x = \frac{y^2 - a}{2(b - \sqrt{c} \cdot y)},$$

$$\sqrt{R} = y + \frac{\sqrt{c} \cdot (y^2 - a)}{2(b - \sqrt{c} \cdot y)} = - \frac{\sqrt{c} y^2 - 2by + a\sqrt{c}}{2(b - \sqrt{c} \cdot y)},$$

$$\begin{aligned} dx &= \frac{2y(2b - 2\sqrt{c}y) + 2(y^2 - a)\sqrt{c}}{4(b - \sqrt{c} \cdot y)^2} dy, \\ &= - \frac{\sqrt{c} \cdot y^2 - 2by + a\sqrt{c}}{2(b - \sqrt{c} \cdot y)^2} dy. \end{aligned}$$

Te podstawienia sprawiają, że f staje się funkcją wymierną zmiennej y . Jako przykład weźmy całkę $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, która zamienia się wprost na $\int \frac{dy}{b - \sqrt{c} y} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \log(b - \sqrt{c} y) + \text{const.}$, skąd:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \log(b - \sqrt{c} \sqrt{R} + cx) + \text{const.}$$

W drugim przypadku, $c < 0$, jeżeli funkcja podcałkowa jest funkcją rzeczywistą zmiennej x dla każdej wartości rzeczywistej tej zmiennej, \sqrt{R} nie może być ilością urojoną, t.j. R nie może być ujemnym dla żadnej wartości x . Lecz:

$$R = c \left(x^2 + \frac{2b}{c} x + \frac{a}{c} \right) = c(x - \alpha)(x - \beta),$$

gdzie α i β są pierwiastkami równania $R = 0$. Te pierwiastki

nie mogą być zatem urojonymi. Gdyby bowiem były urojonymi, to iloczyn $(x-a)(x-\beta)$ dla każdej wartości rzeczywistej x byłby iloczynem dwu liczb urojonych sprzężonych, a jako taki równałby się sumie dwu kwadratów liczb rzeczywistych i byłby stale dodatni; z powodu zaś czynnika c ujemnego, R byłoby ujemnem dla każdego x rzeczywistego, \sqrt{R} — liczbą urojoną, a więc funkcyja dana zawierałaby ilości zespolone, wbrew założeniu. Gdy zatem a i β są rzeczywistymi, to możemy zastosować podstawienie $\sqrt{R} = y(x-a)$, które będzie podstawieniem rzeczywistym. Wynika z niego:

$$R = a + 2bx + cx^2 = y^2(x-a)^2,$$

lub

$$c(x-a)(x-\beta) = y^2(x-a)^2,$$

$$c(x-\beta) = y^2(x-a),$$

skąd:

$$x = \frac{c\beta - ay^2}{c - y^2},$$

$$dx = \frac{-2ay(c-y^2) + 2y(c\beta - ay^2)}{(c-y^2)^2} dy = \frac{2cy(\beta-a)}{(c-y^2)^2} dy;$$

$$\sqrt{R} = y \left(\frac{c\beta - ay^2}{c - y^2} - a \right) = \frac{cy(\beta-a)}{c-y^2}.$$

A więc i to podstawienie prowadzi do funkcyi wymiernej zmiennej y . Zresztą można to podstawienie stosować także w przypadku, gdy c jest dodatnie, byleby tylko pierwiastki równania $R = 0$ były rzeczywistymi.

Stosując to podstawienie do całki $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, znajdziemy:

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{dy}{c-y^2} &= -\frac{2}{c} \int \frac{dy}{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{-c}}\right)^2} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{\sqrt{-c}} + C. \end{aligned}$$

Po zbadaniu całek funkcji, zawierających pod znakiem pierwiastka kwadratowego wielomian stopnia drugiego, nasuwa się mimowoli myśl rozpatrzenia całek funkcji, zawierających pierwiastek kwadratowy wielomianu stopnia 3-go, 4-go i wyższych. Gdy jednak w przypadku wielomianu stopnia 2-go można, jak widzieliśmy, całkowanie wykonać zawsze przy pomocy funkcji zwykłych, to natomiast rzecz ma się inaczej w przypadkach innych. W tych to przypadkach okazuje się potrzeba wprowadzenia wyższych funkcji przestępnych. Takie całki nazywają się *eliptycznymi* i były badane po raz pierwszy przez matematyka włoskiego *Fagnano* (1682—1766) i przez *Eulera* (1707—1783), a później szczegółowiej przez *Legendre'a* (1762—1833). Nazwa tych całek pochodzi stąd, że za pomocą nich rozwiązuje się zagadnienie wyprostowania (rektyfikacji) elipsy. Nie możemy tu zająć się bliżej badaniem całek eliptycznych i podamy tylko niektóre pojęcia zasadnicze, do nich się odnoszące.

Za pomocą przekształcenia, w którego szczegóły nie wchodzimy, dochodzi się do twierdzenia, że gdy do rachunku włączymy ilości zespolone, to każda całka postaci $\int f(x, \sqrt{R}) dx$, gdzie R jest wielomianem stopnia 4-go, f zaś symbolem funkcji wymiernej, daje się wyrazić przez kombinację liniową całek tylko trzech typów:

$$1) \int \frac{dy}{\sqrt{R}}, \quad 2) \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{R}}, \quad 3) \int \frac{dy}{(y^2 - a)\sqrt{R}},$$

gdzie R jest wielomianem 4-go stopnia postaci: $R = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2)$ ($k^2 < 1$): Te trzy całki nazywają się całkami normalnymi Legendre'a gatunku 1-go, 2-go i 3-go.

Okażemy jeszcze, że powyższe trzy całki można sprowadzić do innej postaci, bardzo często używanej, a którą już raz napotkaliśmy przy teorii rozwijania całek na szeregi (p. Rozdz.

III, § 2). Połóżmy $y = \sin \varphi$, skąd $dy = \cos \varphi d\varphi$, i trzy całki powyższe przyjmą postaci:

$$1) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}; \quad 2) \int \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}};$$

$$3) \int \frac{d\varphi}{(1+n \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

(w trzeciej z pominięciem czynnika stałego i przy założeniu $a = -\frac{1}{n}$). Te trzy całki oznaczamy zwykle za pomocą symbolów:

$$F(\varphi), \quad Z(\varphi), \quad \Pi(\varphi);$$

pierwsza z nich właśnie była badaną w miejscu wyżej cytowanym. Całki te możemy obliczyć za pomocą całkowania przez szeregi.

Przechodzimy teraz do innego typu całek, mniej złożonych, mianowicie do całek dwumianowych, które rozważał pierwszy Euler. Taka całka jest postaci:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

gdzie m, n, p są liczbami wymiernymi ułamkowymi, dodatnimi lub ujemnymi. Gdyby p było liczbą całkowitą dodatnią lub ujemną, wtedy należałoby rozwinąć potęgę dwumianu w liczniku lub mianowniku, stosownie do tego, czy p byłoby dodatnie lub ujemne i otrzymalibyśmy tym sposobem funkcję wymierną różnych potęg ułamkowych zmiennej x . Taki typ funkcji rozważaliśmy już na początku tego paragrafu. Przyjmijmy tedy, że p jest ułamkiem. Liczby m, n mogą być jakiegokolwiek, lecz łatwo widzieć, iż bez zmniejszania ogólności, można założyć, że są całkowitemi. Gdyby bowiem nie były takimi, to kładąc $x = y^\mu$, gdzie μ jest najmniejszą wspólną wielokrotną mianowników liczb m, n , otrzymalibyśmy całkę:

$$\mu \int y^{(m+1)\mu-1} (a + by^{n\mu})^\nu dy,$$

która jest także całką dwumienną, lecz gdzie wykładniki ilości y są już całkowitemi. Można nadto przyjąć, że n jest zawsze dodatnie, gdyż w razie przeciwnym, napisawszy całkę naszą w postaci:

$$\int x^{m+np} (ax^{-n} + b)^\nu dx,$$

otrzymalibyśmy wykładnik $-n$ dodatni. Zastosujmy podstawienie $a + bx^n = y$, z którego wynika:

$$x = \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{nb} \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dy;$$

skutkiem tego całka nasza staje się:

$$(I) \quad \frac{1}{nb} \int \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} y^\nu \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dy = \frac{1}{nb} \int y^\nu \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dy.$$

Jeżeli zaś wyjdziemy z postaci:

$$\int x^{m+np} (ax^{-n} + b)^\nu dx,$$

to kładąc $ax^{-n} + b = y$, znajdziemy podobnie:

$$(II) \quad -\frac{1}{na} \int y^\nu \left(\frac{y-b}{a}\right)^{-\frac{m+1}{n}-p-1} dy.$$

Otóż gdy $\frac{m+1}{n}$ jest liczbą całkowitą, to postać (I) można od razu sprowadzić do wymierności, kładąc $y = z^\mu$, gdzie μ jest

mianownikiem ułamka p . Gdy zaś $\frac{m+1}{n} + p$ jest liczbą całkowitą, to postać (II) tymże sposobem sprowadza się do wymierności. Istnieją zatem dwa przypadki, w których całkę dwumienną można sprowadzić bezpośrednio do całki wymiernej, mianowicie: 1) gdy $\frac{m+1}{n}$ jest liczbą całkowitą; 2) gdy $\frac{m+1}{n} + p$ jest liczbą całkowitą.

Gdy te przypadki nie zachodzą, wtedy można stosować wzory redukcyjne, za pomocą których dana całka dwumienna sprowadza się do innych takich całek z innymi liczbami m, n, p . Te wzory redukcyjne otrzymujemy, stosując metodę całkowania przez części. Kładąc mianowicie $u = (a + bx^n)^p$, $\frac{dv}{dx} = x^m$, skąd:

$$v = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad \frac{du}{dx} = bpn (a + bx^n)^{p-1} x^{n-1},$$

znajdujemy wzór:

$$(A) \quad \int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^p}{m+1} - \frac{bpn}{m+1} \int x^{m+n} (a + bx^n)^{p-1} dx,$$

za pomocą którego całka dwumienna z wykładnikami m, n, p wyraża się przez całkę dwumienną z wykładnikami $m+1, n, p-1$. Jeżeli więc napiszemy:

$$\begin{aligned} \int x^m (a + bx^n)^p dx &= \int x^m (a + bx^n) (a + bx^n)^{p-1} dx \\ &= a \int x^m (a + bx^n)^{p-1} dx + b \int x^{m+n} (a + bx^n)^{p-1} dx \end{aligned}$$

i za pomocą poprzedniego wzoru wyrugujemy ostatnią całkę, znajdziemy:

$$(B) \quad \int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^p}{m + 1 + pn} \\ + \frac{apn}{m + 1 + pn} \int x^m (a + bx^n)^{p-1} dx.$$

Za pomocą tego wzoru zmniejsza się o 1 wykładnik ilości $a + bx^n$.

Kombinując ze sobą rozmaicie te sztuczne sposoby całkowania, można znaleźć rozmaite wzory redukcyjne. Nie ma potrzeby wyprowadzać ich, gdyż z jednej strony rzecz ta nie przedstawia żadnej trudności teoretycznej, z drugiej zaś dogodniej jest używać tych sposobów w każdym szczególnym przypadku, przystosowując je do natury badanej całki. W wielu znów razach dogodniej używać wzorów redukcyjnych, otrzymywanych wskazanymi sposobami, niż posługiwać się powyżej podanym kryterium, nawet w przypadku, gdy się ono sprawdza.

Jeżeli żaden z wzorów redukcyjnych nie doprowadza do całek znanych, wtedy pozostaje tylko stosowanie całkowania przez szeregi, po rozwinięciu na szereg potęgi p -ej dwumianu $a + bx^n$.

Jako przykład weźmy całkę:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (m \text{ całkowite})$$

którą możemy napisać:

$$\int x^m (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Jest to całka dwumienna, wynikająca z postaci ogólnej przy $a = 1$, $b = -1$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$; należy ona do przypadków elementarnych, wyżej wymienionych. W samej rzeczy,

gdy m jest parzyste, wtedy $\frac{m+1}{n} + p = \frac{m+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$ jest liczbą całkowitą; gdy zaś m jest nieparzystym, wtedy $\frac{m+1}{n} = \frac{m+1}{2}$ jest liczbą całkowitą.

§ 5.

Całkowanie funkcji przestępnych.

W tym paragrafie zbadamy niektóre typy specjalne funkcji przestępnych i pokażemy, jak się one całkują.

1) Niechaj będzie funkcya typu $f(e^x)$, gdzie f jest symbolem funkcji wymiernej. Kładąc $e^x = y$, skąd $dx = \frac{dy}{y}$, sprowadzamy funkcję daną do funkcji wymiernej zmiennej y .

2) Rozpatrzmy całki typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$. Położmy $\sin x = t$, to otrzymamy:

$$\int t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt,$$

t. j. całkę dwumienną.

Możemy użyć innego sposobu, a mianowicie całkowania przez części. Kładąc $u = \cos^{n-1} x$, $\frac{dv}{dx} = \sin^m x \cos x$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x dx &= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} \\ &+ \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx. \end{aligned}$$

Uskuteczniając tu przekształcenie podobne do użytego przy całkach dwumiennych, t. j. kładąc:

$$\begin{aligned} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx &= \int \sin^m x (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \, dx \\ &= \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx - \int \sin^m x \cos^n x \, dx, \end{aligned}$$

podstawiając i rozwiązując względem $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, znajdujemy:

$$\begin{aligned} &\int \sin^m x \cos^n x \, dx \\ &= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx. \end{aligned}$$

3) Niechaj będą do obliczenia całki:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx, \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

Za pomocą całkowania przez części znajdujemy:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, dx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx;$$

skąd:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

4) Niechaj będzie wreszcie całka z funkcją podcałkową typu $f(\sin x, \cos x)$, gdzie f jest symbolem funkcji wymiernej.

Kładąc $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, otrzymujemy:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2},$$

i to podstawienie zmienia już funkcję daną na funkcję wymierną zmiennej t , dającą się całkować metodami znanymi.

Jako przykład weźmy:

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

Wykonywając powyższe przekształcenie, znajdujemy:

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{dt}{2at + b(1-t^2)} &= 2b \int \frac{dt}{(a^2 + t^2) - (bt - a)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[\int \frac{bdt}{\sqrt{a^2 + b^2} + (bt - a)} + \int \frac{bdt}{\sqrt{a^2 + b^2} - (bt - a)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \log \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + (bt - a)}{\sqrt{a^2 + b^2} - (bt - a)} + C, \end{aligned}$$

a podstawiając za t jego wyrażenie w zmiennej x , dochodzimy do wzoru szukanego.

§ 6.

Obliczanie całek określonych. Całki Eulero we.

W poprzedzających paragrafach badaliśmy różne typy specjalne funkcji w celu obliczania odpowiadających im całek nieokreślonych. Lecz może się zdarzyć, że nie umiejac

obliczyć całki nieokreślonej, potrafimy natomiast obliczyć całkę określoną pomiędzy pewnymi granicami. Paragraf ten poświęcimy wyłożeniu sposobów sztucznych i metod obliczania całek określonych.

W paragrafach 7 i 8-ym Rozdziału I-go wskazaliśmy już, że metodą dość płodną szukania całek określonych stanowi różniczkowanie i całkowanie pod znakiem całki. Podamy kilka przykładów stosowania tej metody.

Z wzoru:

$$\int_0^1 x^{a-1} dx = \left[\frac{x^a}{a} \right]_0^1 = \frac{1}{a}, \quad (a > 0)$$

przez różniczkowanie względem parametru a otrzymujemy:

$$\int_0^1 x^{a-1} \log x dx = -\frac{1}{a^2},$$

$$\int_0^1 x^{a-1} (\log x)^2 dx = \frac{1 \cdot 2}{a^3},$$

.....

$$\int_0^1 x^{a-1} (\log x)^n dx = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \dots n}{a^{n+1}}.$$

Całkowanie zaś względem a pomiędzy dwiema dowolnymi granicami α i β , daje:

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1} - x^{\alpha-1}}{\log x} dx = \log \left(\frac{\alpha}{\beta} \right).$$

Z wzoru, znalezionej w paragrafie poprzedzającym:

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx,$$

otrzymujemy :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx.$$

Przez kolejne stosowanie tego wzoru znajdujemy :

$$\text{dla } n \text{ parzystego: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{(n-1)(n-3)\dots 3 \cdot 1}{n(n-2)\dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\text{dla } n \text{ nieparzystego: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{(n-1)(n-3)\dots 4 \cdot 2}{n(n-2)\dots 5 \cdot 3}.$$

Zauważmy, że pomiędzy granicami 0 i $\frac{\pi}{2}$ funkcja $\sin x$ jest liczbą dodatnią, mniejszą od 1, przeto:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx,$$

a więc:

$$\frac{2 \cdot 4 \dots 2n-2}{3 \cdot 5 \dots 2n-1} > \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \dots 2n} > \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}.$$

Stąd wynika:

$$\begin{aligned} & \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots 2n-2 \cdot 2n-2}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-3 \cdot 2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} > \frac{\pi}{2} \\ & > \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots 2n-2 \cdot 2n-2}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-3 \cdot 2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}. \end{aligned}$$

Dwie liczby, pomiędzy którymi zawiera się liczba $\frac{\pi}{2}$, różnią się od siebie czynnikiem $\frac{2n}{2n+1}$, który dąży do 1, gdy n dąży do nieskończoności. Możemy więc napisać:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

Jest to wyrażenie liczby $\frac{\pi}{2}$ pod postacią iloczynu nieskończonego; nazywa się ono wzorem Wallisa (1616—1703).

Z wzoru w paragrafie niniejszym:

$$\int_0^1 x^{a-1} (\log x)^n dx = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{a^{n+1}},$$

przez podstawienie $x = e^{-y}$, z którego wynika: $\log x = -y$; $dx = -e^{-y} dy$; $y = \infty$ dla $x = 0$, $y = 0$ dla $x = 1$, znajdujemy:

$$\int_0^1 x^{a-1} (\log x)^n dx = \int_0^{\infty} e^{-ay} (-y)^n dx.$$

Stąd wynika:

$$\int_0^{\infty} e^{-ay} y^n dy = \frac{n!}{a^{n+1}},$$

a dla $a = 1$:

$$\int_0^{\infty} e^{-y} y^n dy = n!$$

Ten wzór stosuje się do n całkowitego, gdyż w metodzie,

którą go otrzymaliśmy, liczba n oznacza liczbę różniczkowań, wykonanych na pewnej zmiennej.

Badanie wartości tej całki, określonej w przypadku, w którym n nie jest liczbą całkowitą, stanowi badanie t. z. całki Eulera w jej 2-go gatunku. Przyjmuje się dla tej całki znakowanie:

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \Gamma(a).$$

Funkcja taka nazywa się funkcją gamma Eulera; posiada ona wiele osobliwych własności; tak np. można ją rozwinąć na iloczyn nieskończony:

$$\Gamma(a) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{m}{a+m-1} \left(\frac{m+1}{m}\right)^{a-1}.$$

Nie możemy tu zająć się szczegółowem badaniem tych funkcyj.

ROZDZIAŁ IV.

CAŁKI WIELOKROTNE.

§ 1.

Określenie całki podwójnej i wielokrotnej. Warunki całkowości.

W § 8-ym Rozdziału I-go przy sposobności podaliśmy już określenie całki podwójnej. Obecnie podamy wykład zupełny, rozpoczynając go od określenia, które jest tylko wprost rozszerzeniem określenia całek pojedynczych.

Niechaj będzie funkcya $f(x, y)$ dwu zmiennych, określona, dajmy na to, dla pewnego pola płaskiego, zamkniętego krzywą o równaniu $\varphi(x, y) = 0$. Niechaj dla każdego punktu tego pola funkcya f będzie skończona. Obszary zmienności zmiennych x i y nie są niezależnymi od siebie. Jeżeli ustalimy wartość zmiennnej y , to obszar zmienności zmiennnej x określi się sposobem następującym: Poprowadźmy prostą równoległą do osi odciętych x o rzędnej y ustalonej; prosta ta przetnie obwód pola zamkniętego przynajmniej w dwu punktach i obszar zmienności zmiennnej x dla ustalonej wartości zmiennnej y będzie rozciągał się od wartości odciętej w punkcie, znajdującym się na lewo, do wartości odciętej w punkcie na prawo.

Granice zmienności zmiennej x będą tedy funkcyami zmiennej y i odwrotnie. Gdybyśmy chcieli znaleźć te funkcy, należałoby rozwiązać względem x równanie $\varphi(x, y) = 0$, które da nam wogóle dwie wartości y , t. j. da dwie funkcy zmiennej y , której wartościom dla każdego x odpowiadać będą granice obszaru zmienności tej zmiennej. W szczególnym przypadku granice całkowania mogą być stałemi, gdy mianowicie pole dane jest prostokątem o bokach równoległych do spólrzędnych x, y . Wtedy dla każdej wartości y granice zmienności zmiennej x będą zawsze jednakowemi. W tym przypadku można powiedzieć, że funkcy f jest określoną, gdy ją uważamy pomiędzy stałemi i granicami zmienności zmiennych x, y np. od $x = a$ do $x = b$ i od $y = a'$ do $y = b'$.

Podzielmy pole dane na dowolną liczbę części; podział ten możemy skutecznie według prawa dowolnego. Tak np. można postępować w ten sposób: Pomiedzy nieskończenie wielu wartościami zmiennej y w różnych punktach pola można wybrać wartość najmniejszą i największą; niechaj niemi będą a', b' . Podobnie a, b niechaj będą wartościami najmniejszą i największą zmiennej x . Jeżeli nakreślimy proste $y = a', y = b', x = a, x = b$, otrzymamy prostokąt, wewnątrz którego zawiera się pole dane. Podzielmy tak przedział $a' b'$ jak i przedział $a b$ na dowolną liczbę części. Jeżeli przez punkty tych przedziałów poprowadzimy proste równoległe do osi spólrzędnych, podzielimy prostokąt na prostokąty cząstkowe. I całe pole podzieli się na tyleż części, z których niektóre będą prostokątami, inne (najbliższe obwodu) będą częściami prostokątów. Z tych prostokątów będziemy rozważali tylko te, które leżą całkiem wewnątrz danego pola.

Niechaj $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta'_1, \delta'_2, \dots$, będą przedziały cząstkowe, na które podzielono przedział $a b$ na osi x i przedział $a' b'$ na osi y ; pole prostokąta cząstkowego wyrazi się iloczynem $\delta_r \delta'_s$. Weźmy punkt wewnątrz takiego prostokąta, oznaczmy przez f_{rs} wartości funkcy f w tym punkcie i utwórzmy sumę podwójną:

$$\sum_{rs} f_{rs} \delta_r \delta'_s.$$

Suma ta będzie miała wartość skończoną bez względu na sposób, w jaki obrano wartości funkcji f i uskuteczniło się podział pola. Niechaj teraz, podobnie jak przy określeniu całek pojedynczych, dążą do zera przedziały δ_r, δ'_s gdy liczba ich dąży do nieskończoności. Wtedy suma powyższa może dążyć do granicy oznaczonej, która będzie niezależną od wyboru wartości f_{rs} i od sposobu, w jaki przedziały dążą do zera. Jeżeli ten przypadek zachodzi, wtedy granicę tę nazywamy całką podwójną funkcji f w polu danym i oznaczamy ją za pomocą symbolu:

$$\iint f(x, y) dx dy.$$

Widzimy zatem, że, jak już powiedziano, określenie to jest wprost rozszerzeniem określenia całek pojedynczych i można tu powtórzyć też same rozważania, jakie tam uczyniono. Rozważania te streścimy tylko.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia granicy sumy powyższej jest, aby była zerem granica sumy $\sum D_{rs} \delta_r \delta'_s$, w której D_{rs} oznacza oscylację funkcji w polu $(\delta_r \delta'_s)$. Dowód tego twierdzenia jest zupełnie podobny do dowodu, podanego w § 1 Rozdziału II-go. Wynika z niego, że całkownymi są: 1) funkcje ciągłe dwu zmiennych x, y ; 2) funkcje nieciągłe w skończonej liczbie punktów lub linii na płaszczyźnie; 3) funkcje nieciągłe w nieskończonej liczbie punktów lub linii, lecz takie, że te punkty można zawrzeć w polach, których suma daje się uczynić dowolnie małą.

Dla lepszego zrozumienia natury całki podwójnej i znalezienia sposobu jej obliczania, wskażemy związek, zachodzący między nią a całkami pojedynczemi. Dla otrzymania całki podwójnej winniśmy utworzyć sumę podwójną i przejść od niej do granicy przy zmniejszaniu do zera sposobem dowolnym ilości δ_r, δ'_s . Wyobraźmy sobie, że wykonaliśmy najprzód sumowanie względem skaźnika r , potem względem skaźnika s . To znaczy, że sumujemy najprzód wyraży $f_{rs} \delta_r \delta'_s$ pochodzące od prostokątów, położonych w pasmie poziomem, t. j. równoległym do

osi odciętych (na pasmie s -em), następnie nadajemy skaźnikowi s wszystkie jego wartości i tworzymy sumę wszystkich wyrazów, odpowiadających różnym pasmom poziomym. Wybór wartości f_{rs} zależy od naszej woli; możemy więc wybrać wartości w punktach, położonych na prostych równoległych do osi x i znajdujących się w różnych pasmach poziomych. Zbadajmy, jaką wartość posiada suma, odnosząca się do jednego pasma poziomego, np. do pasma s -go. Niechaj $y^{(s)}$ będzie rzędna prostej wewnątrz takiego pasma, na której wybieramy wartości f_{rs} . Wtedy wartości funkcji f przez nas uważane będą wartościami funkcji $f(x, y^{(s)})$ samej zmiennej x ; funkcję tę otrzymujemy, kładąc $y = y^{(s)}$ w funkcji $f(x, y)$. Suma względem r , odnosząca się do pasma s -go, będzie:

$$\delta'_s \sum_r \delta_r f(x^{(r)}, y^{(s)}),$$

gdzie $x^{(r)}$ oznacza odcięta punktu, znajdującego się w przedziale δ_r . Tę sumę należy rozciągnąć pomiędzy dwiema granicami, zależnymi od skaźnika s , t. j. od wartości rzędnej $y^{(s)}$ s -go pasma. Zależnie od tego, jaką wartość y rozważamy, obszar zmienności zmiennej x zmienia się, jak to już powiedzieliśmy na początku paragrafu. Jeżeli przechodzimy do granicy powyższej sumy pojedynczej, zmniejszając do zera tylko przedział δ_r , wtedy — na podstawie określenia całki pojedynczej — otrzymamy:

$$\delta'_s \int f(x, y^{(s)}) dx,$$

gdzie całkowanie rozciąga się pomiędzy dwiema wartościami x , odpowiadającymi krańcom s -go pasma. Te dwie granice otrzymujemy z równania $\varphi(x, y) = 0$, rozwiązując je względem x i kładąc w niem $y = y^{(s)}$.

Tworząc sumę wszystkich wartości, w ten sposób otrzymanych, rozciągając ją na wszystkie pasma poziome, t. j. zmieniając skaźnik s , otrzymujemy:

$$\sum \delta'_s \int f(x, y^{(s)}) dx,$$

a przechodząc do granicy dla $\delta'_s = 0$:

$$\int dy \int f(x, y) dx,$$

gdzie drugie całkowanie względem y należy wziąć pomiędzy dwiema granicami stałymi, odpowiadającymi najniższemu i najwyższemu pasmu, t. j. (ponieważ pasma stają się nieskończenie wązkimi) rzędnym dwu stycznych poziomych obwodu pola.

Widzimy stąd, że całe podwójnej odpowiada następstwo dwu całek pojedynczych: pierwsza jest wzięta pomiędzy granicami, które są funkcjami zmiennej y , druga zaś — pomiędzy granicami stałymi.

Jeżeli pole całkowania jest prostokątem o bokach równoległych do osi współrzędnych, wtedy i pierwsze całkowanie odbywa się pomiędzy granicami stałymi.

W ten sposób te rozważania wiążą się z rozważaniami w § 8-ym Rozdziału I-go.

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest całkowalną, wtedy jest widocznym, że jej całka podwójna pomiędzy granicami stałymi, tak względem x , jak i względem y , jest równa:

$$\int_{a'}^{b'} dy \int_a^b dx f(x, y),$$

lub też:

$$\int_a^b dx \int_{a'}^{b'} dy f(x, y),$$

w założeniu, że odcięte i rzędne prostokąta, wewnątrz którego skuteczniamy całkowanie, są $a, b; a', b'$. Stąd wynika, że powyższe dwa wyrażenia są równe. A więc jako uogólnienie

twierdzenia o całkowaniu pod znakiem całki (Rozdział I, § 8) otrzymujemy, że to całkowanie to jest możliwem, gdy funkcyja dana jest funkcyą całkowalną d w u z m i e n n y c h

Rozważania powyższe, odnoszące się do całek podwójnych, można bez istotnych zmian rozciągnąć na całki potrójne, poczwórne i wogóle wielokrotne.

Każdą całkę wielokrotną (której określenie jest podobne do określenia całek podwójnych) można przedstawić jako kolejne następstwo całek pojedynczych. Nie mamy potrzeby zatrzymywać się nad tem.

§ 2.

Całka wielokrotna jako funkcyja granic; określenie jej w przypadkach osobliwych.

Podamy o całkach podwójnych rozważania, podobne do podanych w § 3-cim Rozdziału I-go; zbadajmy ciągłość i różniczkowalność tych całek, uważanych za funkcyje swych granic.

Niechaj będzie całka podwójna:

$$\int_{a'}^y \int_a^x f(x, y) dx dy,$$

gdzie x, y oznaczają zarazem i granice wyższe całkowania. Wartość tej całki będzie funkcyą zmiennych x, y , którą oznaczmy przez $\varphi(x, y)$. Dla zbadania ciągłości tej funkcyi utwórzmy:

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y) = \int_{a'}^{y+k} \int_a^{x+h} - \int_{a'}^y \int_a^x,$$

co można przekształcić na:

$$\begin{aligned} & \left[\int_{a'}^y + \int_y^{y+k} \right] \int_a^{x+h} - \int_{a'}^y \left[\int_a^{x+h} - \int_x^{x+h} \right] \\ &= \int_y^{y+k} \int_a^{x+h} + \int_{a'}^y \int_x^{x+h} . \end{aligned}$$

Ponieważ porządek całkowań jest przemienny w wyrazie drugim strony drugiej, przeto powyższe wyrażenie równa się:

$$\int_y^{y+k} \int_a^{x+h} + \int_x^{x+h} \int_{a'}^y .$$

Całki od y do $y + k$ oraz od x do $x + h$ dążą, jak wiemy, do zera (p. § 3 Rozdz. I), przeto ostatnie wyrażenie, które można uważać jako sumę dwu całek pojedynczych dwu funkcji różnych, całek rozciągających się pomiędzy wyżej podanymi granicami, dążyć będzie do zera wraz z ilościami h i k , co stwierdza ciągłość funkcji $\varphi(x, y)$.

Przejdźmy do pochodnych cząstkowych funkcji φ . Wiedząc, że całka podwójna jest następstwem dwu całek pojedynczych i że można przemienić porządek całkowań, możemy uważać funkcję φ za całkę, już to względem zmiennej x , już to względem zmiennej y . Jeżeli chcemy mieć pochodną cząstkową względem x , uważamy φ jako całkę względem tej zmiennej i na podstawie znanego twierdzenia o różniczkowaniu całek, otrzymujemy, że g d y :

$$\int_{a'}^y f(x, y) dx,$$

jest funkcją ciągłą zmiennej x , to pochodną cząstkową funkcji φ w punkcie x' jest:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \left[\int_{a'}^y f(x, y) dy \right]_{x=x'}.$$

Jeżeli teraz przyjmiemy, że $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą obu zmiennych x, y , to ponieważ całka $\int_{a'}^y f(x, y) dy$ jest funkcją ciągłą tej zmiennej i wartość jej dla $x = x'$ równa się granicy jej wartości dla wartości x , dążących do x' i nadto (§ 7, Rozdz. I) granica ta równa się całce granicy funkcji, otrzymujemy wprost:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \int_{a'}^y f(x', y) dy.$$

Podobnież:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = \int_a^x f(x, y') dx.$$

Jak zwykle, warunek dla funkcji f , aby była funkcją ciągłą obu zmiennych jest warunkiem dostatecznym lecz nie jest koniecznym.

Przy tych warunkach zachodzi dla funkcji φ twierdzenie o przemienności różniczkowania, gdyż z wzorów powyższych wypływa widocznie:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y' \partial x'} = f(x', y'), \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial y'} = f(x', y'),$$

t. j., że dwie pochodne są równe.

Ustalimy teraz pojęcie całki podwójnej w dwu przypadkach osobliwych, które rozważaliśmy i przy całkach pojedynczych, mianowicie: przypadek, w którym funkcya staje się nie-

skończoną w jakimkolwiek punkcie lub na linii pola całkowania, oraz przypadek, w którym jedna z granic całkowania jest nieskończoną.

Kryterium, służące do określenia w tych przypadkach, pozostaje zawsze bez zmiany; jest niem zachowanie własności zasadniczej — ciągłości całki. Stąd, gdy funkcya staje się nieskończoną w punkcie, nazwiemy jej całką podwójną w obszarze, ten punkt obejmującym, granicę (w założeniu, że istnieje i jest jedyną) wartości całki w obszarach, ten punkt wykluczających. Możemy np. punkt ten otoczyć kółkiem i rozważać obszar pierwotny, zmniejszony o powierzchnię kółka; jeżeli następnie zmniejszać będziemy promień koła, granica wartości całki podwójnej będzie właśnie wartością całki określonej w całym obszarze. Lecz tu występują pewne rozróżnienia; zająć bowiem może, że granica, o której mówimy, istnieje, gdy zmienne x, y zbliżają się do punktu osobliwego tylko w pewnych kierunkach, a nie we wszystkich, lub też otrzymujemy jedną granicę dla pewnych kierunków przybliżania się, inną zaś dla innych. W tych przypadkach nie istnieje właściwie całka rozciągnięta na cały obszar. Może się wtedy zdarzyć, że istnieje wartość skończona całki, gdy ją obliczamy za pomocą dwu całkowań pojedynczych, nie istnieje zaś całka zgodna z określeniem, a którą należy uważać za wartość całki podwójnej. Nie możemy zatrzymywać się tu nad szczegółami.

Gdy obszar całkowania rozciąga się do nieskończoności, wtedy przez całkę podwójną rozumiemy znowu granicę wartości całek określonych w obszarach, które rozszerzamy kolejno do nieskończoności, w założeniu oczywiście, że ta granica istnieje i że jest jedyną, bez względu na sposób, w jaki obszar rośnie do nieskończoności.

§ 3.

Przekształcanie całek wielokrotnych.

Widzieliśmy już (Rozdz. I, § 6), jakim sposobem przekształca się całka pojedyncza. Jeżeli mamy $\int R dx$, gdzie R jest funkcją zmiennej x i chcemy tę całkę przekształcić na inną ze zmienną y , związaną z x za pomocą pewnego związku, wtedy dość funkcję podcałkową pomnożyć przez pochodną dawnej zmiennej względem nowej. Zobaczymy, jak się ma rzecz w przypadku całek wielokrotnych.

Niechaj będzie całka:

$$\int \int \dots \int R(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

ze zmiennymi niezależnymi x_1, x_2, \dots, x_n , którą chcemy przekształcić na całkę ze zmiennymi y_1, y_2, \dots, y_n , połączonymi ze zmiennymi x za pomocą n związków. Niechaj temi związkami będą:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_1(y_1, y_2, \dots, y_n), & x_2 &= x_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ & & \dots & \\ & & x_n &= x_n(y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned}$$

W drugim równaniu podstawmy zamiast y_1 wartość tej zmiennej, otrzymaną z pierwszego równania, wtedy x_2 wyrazi się przez x_1, y_2, \dots, y_n ; w trzecim równaniu położmy zamiast y_1, y_2 ich wartości z dwóch pierwszych równań, wtedy x_3 wyrazi się przez $x_1, x_2, y_3, \dots, y_n$. Postępując w ten sposób dalej wyrazimy x_n przez $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_n$. Tym sposobem otrzymamy wzory takie:

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 &= f_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad x_2 = f_2(x_1, y_2, y_3, \dots, y_n), \quad x_3 = f_3(x_1, x_2, y_3, \dots, y_n), \\ &\dots \quad x_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_n). \end{aligned}$$

W danej całce wielokrotnej wykonajmy najprzód całkowanie względem x_n i za pomocą ostatniego z równań (2) wprowadźmy zmienną y_n zamiast zmiennej x_n , uważając wszystkie inne zmienne chwilowo za stałe. Nasza całka stanie się przez to równą:

$$\int \int \dots \int R \frac{\partial f_n}{\partial y_n} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} dy_n.$$

Podobnie, za pomocą przedostatniego z równań (2), wprowadźmy zmienną y_{n-1} zamiast x_{n-1} ; otrzymamy:

$$\int \int \dots \int R \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial f_n}{\partial y_n} dx_1 dx_2 \dots dy_{n-1} dy_n$$

i postępując tak dalej, dojdziemy wreszcie do całki przekształconej:

$$\int \int \dots \int R \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \dots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial f_n}{\partial y_n} dy_1 dy_2 \dots dy_n.$$

Dla wykonania tego przekształcenia należy znać funkcje f_1, f_2, \dots, f_n ; nie są to właściwie funkcje, wyrażające dawne zmienne przez nowe—te są dane wprost—lecz otrzymują się z tych ostatnich wyrażen za pomocą wskazanych wyżej eliminacyj. Stąd naturalnie powstaje pytanie, jak przekształcić całkę, nie tworząc funkcji f , lecz opierając się wprost na funkcjach, wyrażających zmienne x przez zmienne y .

W tym celu rozpatrzmy wyznacznik funkcyjny lub jakobian zmiennych y (patrz „Rachunek różniczkowy“, Rozdz. V, § 2), t. j. wyznacznik:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Można dowieść, że iloczyn:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial y_n},$$

przez który, jak widzieliśmy, należy pomnożyć funkcję podcałkową, aby otrzymać całkę przekształconą, jest właśnie wyznacznikiem funkcyjnym. Stąd zaś wynika, że dla otrzymania całki przekształconej dość pomnożyć funkcję podcałkową przez jacobian dawnych zmiennych, uważanych za funkcje nowych.

Aby dowieść powyższego twierdzenia, napiszmy równanie:

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j} + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}} \frac{\partial x_{i-1}}{\partial y_j},$$

w którym pierwsza strona oznacza pochodną zmiennej x_i względem zmiennej y_j , otrzymaną z wzorów (1), po drugiej zaś stronie pochodne funkcji f_i wzięte są według równań (2). Jeżeli $j < i$, wtedy pierwszy wyraz strony drugiej jest zerem, gdyż pierwsze z równań (2) jest tem samem, co pierwsze z równań (1), a więc pochodne zmiennej x_1 równają się pochodnym zmiennej f_1 .

Według teorii iloczynu wyznaczników, przy uwzględnieniu powyższego wzoru, napisanego w postaci:

$$-\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_j} - \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_j} - \cdots - \frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}} \frac{\partial x_{i-1}}{\partial y_j} + \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j},$$

otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \dots 0, & 0 \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \dots 1 \dots 0 \\ \dots \\ -\frac{\partial f_n}{\partial x_1} - \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \dots 1 \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, 0, 0, \dots, 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_2}, \frac{\partial f_2}{\partial y_2}, 0, \dots, 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_n}, \frac{\partial f_2}{\partial y_n}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial y_n}.$$

Lecz drugi z wyznaczników strony pierwszej jest równy 1, przeto istotnie iloczyn $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial y_n}$ jest równy wyznacznikowi funkcyjnemu. Tym sposobem uzasadniliśmy teorię przekształcenia całki wielokrotnej. Należy jeszcze zanotować, że w przypadku $n = 1$, t. j. w przypadku całki pojedynczej, wzór na przekształcenie całki wielokrotnej przechodzi na znany wzór przekształcenia całki pojedynczej.

Podamy zastosowanie wzorów powyższych. Niechaj będzie całka podwójna:

$$\iint f(x, y) dx dy;$$

zmiennie x, y przekształcimy na inne ϱ, φ za pomocą wzorów, dających przekształcenie spólrzędnych Descartes'a na biegunowe, t. j. za pomocą wzorów $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$. Wyznacznik funkcyjny jest:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\varrho \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{vmatrix} = \varrho (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \varrho,$$

a więc całką przekształconą będzie:

$$\iint f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) \varrho d\varrho d\varphi.$$

§ 4.

Własności całek podwójnych. Twierdzenie Greena.

Wiemy, że dla funkcji ciągłej $f(x)$ szukanie całki nieokreślonej sprowadza się do szukania innej funkcji $F(x)$, której pochodną jest $f(x)$ i że, gdy taką funkcję znajdziemy, to wartość całki określonej w jakimkolwiek przedziale otrzymamy, tworząc różnicę wartości funkcji $F(x)$ w dwóch krańcach przedziału w ten sposób, że wartość całki określonej zależy tylko od wartości funkcji $F(x)$ w tych dwóch krańcowych punktach, nie zależy zaś wcale od wartości funkcji w innych punktach przedziału.

Zobaczymy teraz, że coś analogicznego zachodzi w przypadku całek podwójnych.

Niechaj będzie całka podwójna:

$$\iint f(x, y) dx dy,$$

rozciągnięta na pole płaskie, ograniczone obwodem, którego

równaniem jest $\varphi(x, y) = 0$. Dla ustalenia myśli przyjmijmy, że obwód ten tworzy krzywa, mająca postać owala taką, iż każda prosta spotyka go najwyżej w dwu punktach. Wykonawszy pierwsze całkowanie nieokreślone względem x , otrzymamy funkcję zmiennych x, y , w której należy podstawić, jako granice, dwie funkcje zmiennej y , otrzymane przez rozwiązanie względem x równania $\varphi(x, y) = 0$. Niechaj temi funkcjami będą $x = \varphi_1(y)$ i $x = \varphi_2(y)$. Z tych dwu funkcyj niechaj pierwsza przedstawia wartość odciętej w punkcie, położonym bardziej na lewo, druga zaś wartość odciętej w punkcie, położonym bardziej na prawo. Niechaj $F(x, y)$ będzie całką nieokreśloną, do jakiej doprowadziło całkowanie względem x , t. j. funkcją, czyniącą zadość równaniu $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = f(x, y)$, to trzeba będzie jeszcze wykonać całkowanie względem y wyrażenia:

$$F(\varphi_2(y), y) - F(\varphi_1(y), y)$$

i to pomiędzy dwiema granicami, które będą rzędnymi punktu najniższego i najwyższego krzywej, to jest pomiędzy dwoma punktami, w których styczne są równoległe od osi x . Niechaj temi rzędnymi będą y_1, y_2 ; potrzeba tedy obliczyć:

$$\int_{y_1}^{y_2} F(\varphi_2(y), y) dy - \int_{y_1}^{y_2} F(\varphi_1(y), y) dy,$$

lub po przestawieniu granic w drugiej całce:

$$\int_{y_1}^{y_2} F(\varphi_2(y), y) dy + \int_{y_2}^{y_1} F(\varphi_1(y), y) dy.$$

Sumę tych dwóch całek można interpretować w sposób następujący:

Niechaj będzie całka $\int F(x, y) dy$, gdzie zamiast x należy wyobrazić sobie podstawioną wartość tej zmiennej z równania $\varphi(x, y) = 0$. Rozciągnijmy tę całkę na wszystkie pary wartości zmiennych x, y , czyniące zadość temu równaniu, t. j. na całkowity obwód danego pola. Rozdzielmy tę całkę na dwie części. Wyjdźmy z punktu najniższego krzywej, t. j. z punktu o rzędnej y_1 i przebiegajmy część prawą krzywej (t. j. bok, którego punkty mają odcięte oznaczone przez funkcję $\varphi_2(y)$), aż do punktu najwyższego, którego rzędna jest y_2 . Tym sposobem obliczymy całkę:

$$\int_{y_1}^{y_2} F(\varphi_2(y), y) dy.$$

Przebiegnijmy następnie drogę od y_2 do y_1 po lewej części krzywej (t. j. tej, której punkty mają odcięte oznaczone przez funkcję $\varphi_1(y)$). Tym sposobem obliczymy całkę:

$$\int_{y_2}^{y_1} F(\varphi_1(y), y) dy.$$

Suma tych dwóch całek będzie całką, rozciągniętą na cały obwód pola. Wynika stąd także kierunek, w jakim należy przebiegać obwód krzywej. Wyszliśmy z punktu najniższego, przebiegliśmy część prawą obwodu, a potem szliśmy dalej w tymże kierunku. Obwód zatem należy przebiegać w ten sposób, że powierzchnia pola pozostaje zawsze po stronie lewej.

Możemy więc napisać:

$$\iint f(x, y) dx dy = \int F(x, y) dy,$$

gdzie na stronie pierwszej znajduje się całka podwójna, odnie-

siona do danego pola, na drugiej zaś całka pojedyncza, odniesiona do obwodu pola. Mamy tym sposobem przekształcenie całki podwójnej na całkę pojedynczą oraz wartość całki podwójnej, zależną jedynie od wartości funkcji $F(x, y)$ na obwodzie pola, nie zaś od punktów wewnętrznych tegoż. Jest to uogólnienie dokładne własności, wspomnianej na początku tego paragrafu. Stanowi ono właśnie wzór Greena, któremu można nadać i inne postaci.

Podobnie jak otrzymaliśmy wzór poprzedni, całkując najprzód względem x , możemy teraz, zmieniając porządek całkowania, otrzymać:

$$\iint f(x, y) dx dy = - \int F_1(x, y) dx,$$

gdzie całki mają to samo znaczenie, co przedtem, i jest nadto:

$$\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} = f(x, y).$$

Znak ujemny po stronie drugiej pochodzi stąd, że wyobrażamy sobie, iż obwód przebiegamy w tym samym kierunku, co w pierwszym razie.

Dwa wzory otrzymane możemy jeszcze tak napisać:

$$\iint \frac{\partial F}{\partial x} dx dy = \int F dy,$$

$$\iint \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = - \int F_1 dx,$$

gdzie dwie funkcje F, F_1 są połączone związkiem:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = f.$$

Zresztą te dwa wzory są od siebie niezależne, i dwie funkcje F i F_1 mogą nie być połączone powyższym związkiem. W tym przypadku przez odejmowanie otrzymujemy:

$$\iint \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int (F dy + F_1 dx),$$

rozumiejąc przez F i F_1 dwie jakiegokolwiek niezależne od siebie funkcje zmiennych x, y . Taką postać nadać można wzorowi Greena.

Jeżeli w szczególności F i F_1 są takimi funkcjami, że dla wszystkich punktów pola danego spełnia się warunek $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$, wtedy pierwsza strona ostatniego wzoru jest zerem, a stąd:

$$\int (F dy + F_1 dx) = 0,$$

t. j. całka wyrażenia $F dy + F_1 dx$, rozciągnięta na cały obwód, jest tożsamościowo zerem.

Z tego twierdzenia możemy otrzymać inne.

Niechaj x_0, y_0 ; x, y będą spólrzędniemi dwóch jakiegokolwiek punktów obwodu, Nakreślmy linię od pierwszego do drugiego punktu, znajdującą się całkowicie wewnątrz pola. Nakreślmy następnie drugą podobną linię, idącą od drugiego do pierwszego punktu. Te dwie linie utworzą nowy obwód, zamykający pewne pole i spełniający warunki wyżej podane; będzie zatem całka:

$$\int (F dy + F_1 dx),$$

rozciągnięta na ten nowy obwód, zerem. Stąd wynika, że całka od punktu (x_0, y_0) do punktu (x, y) , wzdłuż pierwszej linii, równa się całce od pierwszego do drugiego punktu, wzdłuż dru-

giej linii. A zatem: Na każdej linii wewnątrz pola, prowadzącej od punktu (x_0, y_0) do punktu (x, y) , wartość całki jest jednakowa. Jeżeli więc ustalimy wartość granicy niższej, to możemy uważać całkę za funkcję punktu, należącego do pola. Można dowieść, że ta funkcya ma za pochodne cząstkowe względem x i y , odpowiednio funkcye F i F_1 , a jej różniczką zupełną jest wyrażenie $F_1 dx + F dy$. Tym sposobem rozwiązaliśmy zagadnienie: „dane są dwie funkcye F i F_1 takie, że:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

znaleść funkcję, której pochodne cząstkowe są równe funkcjom danym.“ Zagadnienie to, nazwane całkowaniem różniczki zupełnej, rozpatrzemy szczegółowiej.

ROZDZIAŁ V.

CAŁKOWANIE RÓŻNICZEK ZUPEŁNYCH.

Widzieliśmy, że gdy $f(x)$ jest funkcją ciągłą, wtedy obliczenie całki $\int f(x) dx$ sprowadza się do znalezienia funkcji $\varphi(x)$, której pochodną jest $f(x)$ lub, co na jedno wychodzi, funkcji, której różniczką jest $f(x) dx$. Stąd zaś odwrotnie wynika, że gdy funkcja $f(x)$ jest ciągłą, to znalezienie funkcji, której różniczką jest $f(x) dx$, sprowadza się do znalezienia całki nieokreślonej, która odpowiada funkcji $f(x)$.

Postaramy się rozszerzyć to zagadnienie na przypadek większej liczby zmiennych.

Niechaj będzie funkcja $\varphi(x_1, x_2, \dots)$ pewnej liczby zmiennych; wiemy, że jej różniczką zupełną jest:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \dots$$

Stawiamy zagadnienie odwrotne. Niechaj będzie wyrażenie typu:

$$(1) \quad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n,$$

w którym ilości X są funkcjami ciągłymi i skończonymi wszystkich zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n ; znaleźć funkcję tychże zmiennych taką, aby jej różniczka zupełna równa była danemu wyrażeniu. Czy taka funkcja zawsze istnieje?

Zagadnieniem tego rodzaju było zadanie, podane na końcu poprzedniego paragrafu.

Okażemy, że nie zawsze można znaleźć taką funkcję φ_1 : aby ona istniała, muszą funkcje X czynić zadość pewnym związkom.

Założmy przedewszystkiem, że funkcje X są skończone i ciągle i że takimiż są ich pochodne względem wszystkich zmiennych. Dalej, gdy istnieje funkcja $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, której różniczka zupełna:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n,$$

jest identyczną z wyrażeniem (1), wtedy koniecznie być musi:

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = X_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = X_n.$$

Wziąwszy tylko dwa pierwsze równania i zróżniczkowawszy pierwsze względem x_2 , drugie względem x_1 , otrzymamy:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial X_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}.$$

Ponieważ założyliśmy, że funkcje X są skończone wraz z swymi pierwszymi pochodnymi, to na podstawie związków (2) i (3) otrzymujemy, że pochodne pierwsze i drugie funkcji φ są skończone; tym sposobem spełniają się warunki, aby różniczkowania względem zmiennych x_1, x_2 były przemienne (patrz „Rachunek różniczkowy“, rozdz. II, § 7), t. j. aby było:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Wynika stąd, że:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}.$$

Podobne równanie stosuje się oczywiście do każdych dwu innych funkcji X . Do tego warunku przybywają tedy inne tego samego typu przez kombinowanie funkcji X po dwie. Wszystkich takich warunków będzie $\frac{n(n-1)}{2}$ i można je wyrazić w postaci ogólnej:

$$(4) \quad \frac{\partial X_r}{\partial x_s} = \frac{\partial X_s}{\partial x_r},$$

$$s=1, 2, \dots, n; r=1, 2, \dots, n, s \geq r.$$

Okazemy, że te warunki są dostatecznymi, t. j. gdy one się spełniają, funkcja φ zawsze istnieje. W samej-rzeczy, uważamy chwilowo zmienne x_2, x_3, \dots, x_n za stałe i obliczmy całkę:

$$\int X_1 dx_1;$$

całka ta istnieje, gdyż funkcja X_1 jest ciągłą. Niechaj L_1 będzie całką nieokreśloną. Możemy do niej dodać stałą dowolną względem zmiennej x_1 . Całka zatem powyższa przedstawia się tak:

$$\varphi = L_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \psi_1(x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Zobaczymy, czy można oznaczyć funkcję ψ_1 , aby funkcja φ była całką danego wyrażenia różniczkowego. Różniczką zupełną funkcji φ jest:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1} dx_1 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right) dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \right) dx_n.$$

Jeżeli ta różniczka ma być identyczna z wyrażeniem (1), to różnica tych dwu wyrażeń musi być zerem; skąd — jeżeli zwrócimy uwagę na to, że $\frac{\partial L_1}{\partial x_1} = X_1$ — wynika:

$$\begin{aligned} & \left(X_2 - \frac{\partial L_1}{\partial x_2} \right) dx_2 + \dots + \left(X_n - \frac{\partial L_1}{\partial x_n} \right) dx_n \\ &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} dx_3 + \dots + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} dx_n, \end{aligned}$$

t. j. że funkcyja ϕ_1 zmiennych x_2, \dots, x_n powinna być oznaczoną w ten sposób, aby jej różniczką zupełną było wyrażenie:

$$(5) \quad \left(X_2 - \frac{\partial L_1}{\partial x_2} \right) dx_2 + \dots + \left(X_n - \frac{\partial L_1}{\partial x_n} \right) dx_n.$$

Ponieważ funkcyja ϕ_1 nie zawiera zmiennej x_1 , przeto jest jasnym, że w tem wyrażeniu nie powinna zachodzić zmienna x_1 . Nadto dla wyrażenia tego powinny się spełniać znane już nam warunki konieczne całkowalności. Otóż łatwo okazać, że w wyrażeniu (5) występuje zmienna x_1 tylko pozornie. W samej rzeczy, weźmy pochodną względem x_1 jednego ze współczynników, mianowicie współczynnika $X_r - \frac{\partial L_1}{\partial x_r}$, to znajdziemy, że ta pochodna jest zerem, gdyż pochodną tą jest:

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial L_1}{\partial x_r} = \frac{\partial X_r}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{\partial L_1}{\partial x_1} = \frac{\partial X_r}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_r},$$

co równa się zeru na podstawie warunków (4). Zobaczymy teraz, że wyrażenie (5) spełnia też warunki całkowalności. Istotnie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(X_s - \frac{\partial L_1}{\partial x_s} \right) &= \frac{\partial X_s}{\partial x_r} - \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{\partial L_1}{\partial x_s} \\ &= \frac{\partial X_r}{\partial x_s} - \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial L_1}{\partial x_r} = \frac{\partial}{\partial x_s} \left(X_r - \frac{\partial L_1}{\partial x_r} \right), \end{aligned}$$

co było do okazania.

Możemy zatem do różniczki (5) zastosować na nowo metodę, stosowaną do wyrażenia (1), i znajdziemy wtedy, że ϕ_1 równa się pewnej funkcji $L_2(x_2 \dots x_n)$ wraz ze stałą względem zmiennej x_2 ; tę stałą możemy przedstawić jako funkcję $\phi_2(x_3 \dots x_n)$ zmiennych x_3, \dots, x_n . Postępując w ten sposób dalej, dojdziemy wreszcie do różniczki, zawierającej jedną tylko zmienną x_n , a więc do różniczki zawsze całkowalnej. Otrzymamy w ten sposób:

$$\varphi = L_1 + L_2 + \dots + L_n + C,$$

gdzie stała C jest stałą bezwzględną, t. j. niezależną od żadnej ze zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n .

Widzimy stąd, że bez posługiwania się innymi warunkami, prócz wyrażonych równaniami (4), możemy znaleźć funkcję φ , co stwierdza, że warunki (4) są dostatecznymi.

Podamy przykład:

Niechaj będzie wyrażenie:

$$\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \left(2y - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy.$$

Warunki całkowalności są tu spełnione, gdyż:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(2y - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Dla wykonania całkowania obliczmy:

$$\int \frac{y}{x^2 + y^2} dx = \text{arc tg } \frac{x}{y} + \psi_1(y).$$

Utwórzmy wyrażenie:

$$\begin{aligned} \left(2y - \frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{d}{dy} \text{arc tg } \frac{x}{y} &= 2y - \frac{x}{x^2 + y^2} \\ &+ \frac{x}{y^2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = 2y \end{aligned}$$

i całkujemy:

$$\int 2y dy = y^2.$$

Tym sposobem otrzymujemy szukaną całkę w postaci:

$$\text{arc tg } \frac{x}{y} + y^2 + C.$$

ROZDZIAŁ VI.

GEOMETRYA CAŁKOWA.

§ 1.

Pole krzywej płaskiej.

Niechaj będzie krzywa, dana przez równanie $y = f(x)$. Weźmy na krzywej dwa punkty A, B o odciętych α i β ; część

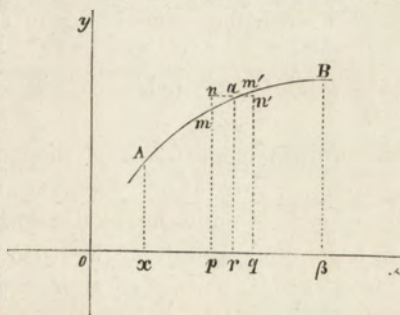


Fig. 1.

płaszczyzny, zawartą pomiędzy krzywą, osią odciętych i dwiema rzędnymi punktów krańcowych A i B , nazywamy polem krzywej.

Jest rzeczą konieczną ustalić dokładniej pojęcie pola. W tym celu podzielmy przedział $a\beta$ na przedziały cząstkowe δ_r i przez każdy z punktów podziału poprowadźmy odpowiednią rzędną. Niechaj jednym z tych przedziałów δ_r będzie pq , a odpowiadające mu rzędne niechaj przecinają krzywą w punktach m i m' . Wybierzmy jakikolwiek punkt a na krzywej pomiędzy punktami m i m' , poprowadźmy przez ten prostą nn' , równoległą do osi odciętych i utwórzmy prostokąt $nn'pq$. Pole tego prostokąta równa się $np \cdot pq = f(x) \delta_r$, t. j. iloczynowi długości δ_r przez wartość funkcji f w punkcie a . Utwórzmy sumę wszystkich takich iloczynów i zmniejszajmy następnie do zera przedziały δ_r . Wtedy na podstawie definicji całki określonej wiemy, że granica tej sumy (o ile istnieje) jest właśnie całką określoną od a do β funkcji $f(x)$.

Lecz $f(x)$ wyraża rzędną krzywej danej; załóżmy, że ta funkcja jest ciągłą lub, co najwyżej, posiada skończoną liczbę punktów przerwy. Pamiętaj, że dla funkcji ciągłej lub mającej skończoną liczbę punktów przerwy istnieje zawsze całka określona, widzimy, że granica sumy $\sum f(x) \delta_r$ istnieje i jest oznaczoną. Tę granicę nazywamy polem krzywej.

Widzimy tedy, w jaki sposób rachunek całkowy daje możność obliczania pól; dość bowiem obliczyć całkę określoną

$$\int_a^{\beta} f(x) dx \text{ lub } \int_a^{\beta} y dx \text{ gdzie } y = f(x).$$

Jeżeli granicę górną pozostawimy nieoznaczoną $\beta = x$ i ustalimy granicę dolną, t. j. ustalimy pierwszą rzędną skrajną, a drugą będziemy uważali za zmienną, to dla każdego położenia tej drugiej zmiennej, otrzymamy pewną wartość pola; tym sposobem pole u można uważać za funkcję zmiennej x i napisać:

$$u = \varphi(x) = \int_a^x f(x) dx = \int_a^x y dx.$$

Gdy f jest funkcją ciągłą, to, jak wiemy, pochodna całki jest

równa funkcji podcałkowej, stąd wnosimy, że pochodna pola względem zmiennej x wyraża wartość rzędnej linii krzywej.

Z powodu tej analogii pomiędzy rachunkiem krzywych płaskich a rachunkiem całek pojedynczych funkcji ciągłych całkowanie nazywa się także kwadraturą, i mówi się często kwadratura krzywej zam. obliczanie jej pola. Przechodzimy do przykładów:

1) Niechaj będzie hyperbola równoboczna, odniesiona do swych asymptot; jej równaniem jest $xy = m^2$, gdzie m jest stałą.

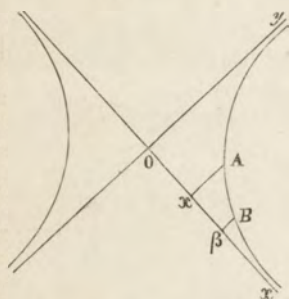


Fig. 2.

Pole $u = ABa\beta$ wyrazi się tak:

$$u = \int_a^\beta y \, dx = m^2 \int_a^\beta \frac{dx}{x},$$

a ponieważ $\int \frac{dx}{x} = \log x$,

przeto:

$$u = m^2 (\log \beta - \log a) = m^2 \log \frac{\beta}{a}.$$

Niechaj w szczególności $m^2 = 1$ i punkt A będzie wierzchołkiem hyperboli, wtedy a będzie 1 (gdyż w wierzchołku x i y są równe, a że iloczyn ich ma być 1, więc obie są równe 1); będzie tedy:

$$u = \log \beta,$$

t. j. pole hyperboli równobocznej mierzy się logarytmem neperowym odciętej $O\beta$. Z tego powodu logarytmy neperowe nazywają się także hyperbolicznymi.

2) Niechaj będzie koło: $x^2 + y^2 = r^2$; mamy obliczyć pole $SO PQ$.

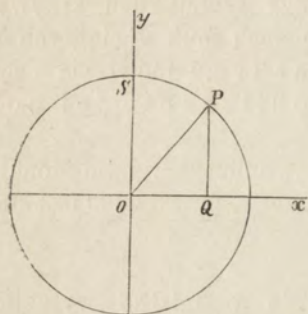


Fig. 3.

Obliczmy całkę:

$$\int y \, dx = \int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx,$$

w granicach od $x = 0$ do $x = OQ$; drugą z granic pozostawiamy nieoznaczoną, t. j. piszemy

$$\int_0^x \sqrt{r^2 - x^2} \, dx.$$

Obliczmy najprzód całkę nieokreśloną. Mamy:

$$(1) \quad \int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = x \sqrt{r^2 - x^2} + \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

a także:

$$(2) \quad \int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \int \frac{r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx = r^2 \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Dodając (1) i (2), otrzymujemy:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r}.$$

Ponieważ dla $x = 0$ strona druga jest zerem, więc to wyrażenie jest właśnie szukaną całką określoną od 0 do x . Zauważmy, że ponieważ powierzchnia trójkąta OPQ równa się $\frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2}$, przeto powierzchnia wycinka kołowego OPS równa się $\frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r}$.

3) Obliczyć pole krzywej, której równaniem jest $y^n = px^m$, gdzie n i m są dwie liczby wymierne.

Takie krzywe nazywają się wogóle parabolami.

Obliczmy OPQ . Mamy:

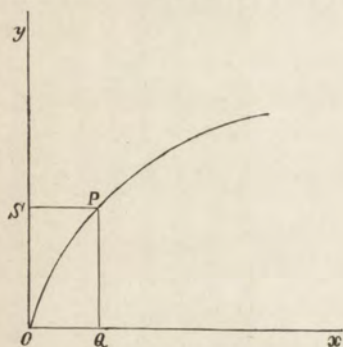


Fig. 4.

$$\int_0^x y \, dx = p^{\frac{1}{n}} \int_0^x x^{\frac{m}{n}} \, dx$$

$$= \frac{n}{m+n} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}+1} = \frac{n}{m+n} xy,$$

a więc pole paraboliczne OPQ tak się ma do powierzchni prostokąta $OSPQ = xy$, jak liczba n do liczby $m+n$.

Odejmując od powierzchni prostokąta pole paraboliczne, znajdujemy:

$$\left(1 - \frac{n}{m+n}\right) xy = \frac{m}{m+n} xy; \text{ a więc:}$$

$$OSP = \frac{m}{m+n} xy, \text{ stąd:}$$

$$\frac{OPQ}{OSP} = \frac{n}{m},$$

t. j., że parabola dzieli prostokąt $OSPQ$ w stosunku $n : m$. W przypadku $n=2$, $m=1$ otrzymujemy stąd twierdzenie, znane z Geometrii analitycznej.

4) Rozważmy krzywe dane przez równanie $x^m y^n = p$. Krzywe takie nazywają się hyperbolami; w szczególnym przypadku $n=m=1$ mamy hyperbolę zwykłą równoboczną.

Niechaj $n > m$; wtedy:

$$\int_0^x y \, dx = p^{\frac{1}{n}} \int_0^x x^{-\frac{m}{n}} \, dx = \frac{n}{n-m} p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}+1} = \frac{n}{n-m} xy.$$

Stąd pole zawarte pomiędzy osią y i rzędną PQ , jakkolwiek roz-

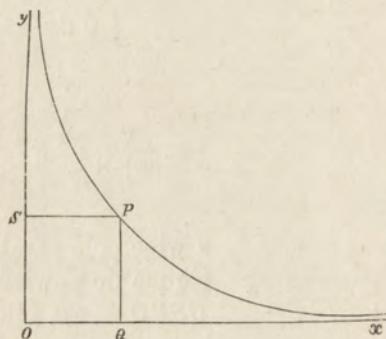


Fig. 5.

ciąga się do nieskończoności—gdyż krzywa y spotyka oś rzędną w nieskończoności (oś ta jest asymptotą krzywej)—ma wszakże wartość skończoną.

Odejmując od tego pola powierzchnię prostokąta $x y$, znajdujemy:

$$\text{Pole } (SP_{\infty}) = \left(\frac{n}{n-m} - 1 \right) xy = \frac{m}{n-m} xy,$$

a stąd:

$$\frac{OQP_{\infty}}{SP_{\infty}} = \frac{n}{m}.$$

Jest to twierdzenie analogiczne do twierdzenia, odnoszącego się do paraboli.

5) Obliczmy pole elipsy:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

W tym celu obliczmy:

$$\int_a^x y \, dx = \frac{b}{a} \int_a^x \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$$

Odpowiednie pole, należące do koła o promieniu $OA = a$, t. j.

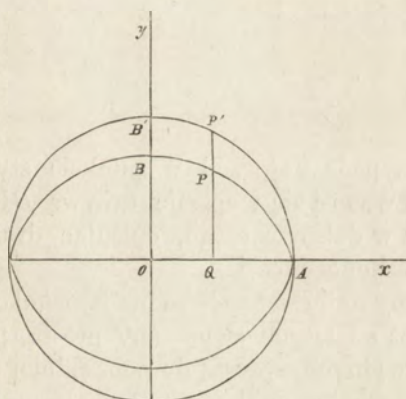


Fig. 6.

pole $OB'P'Q$, równa się $\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$, stąd:

$$\frac{OBPQ}{OB'P'Q} = \frac{b}{a}.$$

Aby więc mieć powierzchnię ćwiartki elipsy, dość powierzchnię ćwiartki koła, t. j. $\frac{1}{4} \pi a^2$ pomnożyć przez $\frac{b}{a}$; otrzymamy $\frac{1}{4} \pi ab$. Powierzchnia całej elipsy będzie πab .

6) Zbadamy obecnie krzywą interesującą, mającą wiele dość ważnych własności, mianowicie c y k l o i d ę.

Jej tworzenie mechaniczne jest takie: Wyobraźmy sobie koło, toczące się bez ślizgania po prostej stałej. Jeden z punktów

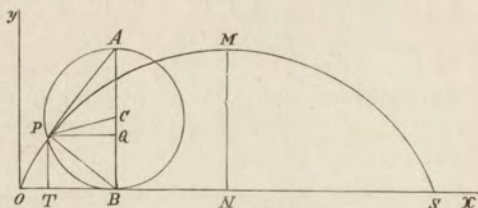


Fig. 7.

P tego koła przypada najprzód w punkcie styczności okręgu i prostej, potem wznosi się i opisuje krzywą $OPMS$; następnie koło obraca się w dalszym ciągu, opisując drugą podobną gałąź i t. d. do nieskończoności.

Wyznamy najprzód współrzędne jakiegokolwiek punktu P cykloidy. Za oś odciętych wybierzmy prostą, po której toczy się koło, za oś rzędnych—prostą do poprzedniej prostopadłą, za początek O wierzchołek cykloidy. Rozpatrzmy położenie koła, odpowiadające punktowi P . Połączmy punkt P z punktem C i oznaczmy przez θ kąt PCQ ; wtedy:

$$x = OT = OB - TB = OB - PQ.$$

Lecz długość prostoliniowa OB równa się oczywiście łukowi kołowemu PB , t. j. równa się $r\theta$; $PQ = r \sin \theta$, gdzie r jest promieniem koła. Stąd:

$$x = r(\theta - \sin \theta).$$

Dalej:

$$y = PT = CB - CQ = r - r \cos \theta;$$

stąd:

$$y = r(1 - \cos \theta).$$

Rugując θ z ostatnich dwu równań, dojdziemy do równania cykloidy. Okażemy najprzód własność zasadniczą stycznej do cykloidy.

Jeżeli poprowadzimy średnicę AB i połączymy punkt P z najwyższym punktem A i z najniższym B , to otrzymamy styczną i normalną do cykloidy w punkcie B . Aby to okazać, zauważmy, że kąt PAC równa się $\frac{1}{2}\theta$, a stąd kąt, który prosta PA tworzy z osią odciętych, jest dopełnieniem kąta $\frac{1}{2}\theta$. Z drugiej strony wiadomo, że kąt, jaki styczna geometryczna w punkcie P tworzy z osią odciętych, równa się $\frac{dy}{dx}$. W naszym przypadku możemy oznaczyć pochodną $\frac{dy}{dx}$, obliczając z równań cykloidy pochodne $\frac{dy}{d\theta}$, $\frac{dx}{d\theta}$. Ponieważ z tych równań wypływa:

$$\frac{dy}{d\theta} = r \sin \theta = 2r \sin \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta,$$

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos \theta) = 2r \sin^2 \frac{1}{2}\theta,$$

przeto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos \frac{1}{2}\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta,$$

co właśnie wskazuje, że kąt, jaki styczna tworzy z osią odciętych, równa się $\frac{1}{2}\theta$, a więc, że styczną geometryczną jest właśnie prosta PA . Stąd zaś wynika już bezpośrednio, że normalną jest prosta PB .

Obliczmy pole cykloidy.

W tym celu skuteczniejmy zamianę osi, przenosząc je równolegle do siebie samych, do Bx, By . Nowa odcięta x będzie równa dawnej zmniejszonej o $OA = \pi r$, nowa zaś rzędna y równać się będzie średnicy $2r$, zmniejszonej o dawną rzędną; tym sposobem będzie:

$$x = r(\theta - \sin \theta) - \pi r; \quad y = 2r - 2r \sin^2 \frac{1}{2} \theta = 2r \cos^2 \frac{1}{2} \theta$$

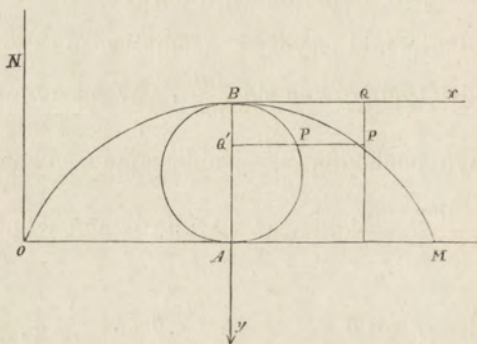


Fig. 8.

Stąd:

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos \theta) = 2r \sin^2 \frac{1}{2} \theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -2r \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \theta,$$

a więc:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{d\theta}}{\frac{dy}{d\theta}} = -\frac{\sin \frac{1}{2} \theta}{\cos \frac{1}{2} \theta} = -\frac{\sqrt{2r-y}}{\sqrt{y}}.$$

Pole BPQ równa się $\int_0^x y \, dx$. Gdybyśmy wyrazili y i dx za pomocą zmiennej θ , mielibyśmy do całkowania funkcję przestępną; lecz biorąc za zmienną niezależną y , będziemy mieli do całkowania funkcję $y \frac{dx}{dy}$, która jest algebraiczną.

Ponieważ dla $x = 0$ jest $y = 0$, przeto:

$$BPQ = - \int_0^y \sqrt{2ry - y^2} \, dy.$$

Jeżeli chcemy obliczyć pole $BQ'P'$ koła tworzącego, otrzymamy tenże wzór. Stąd wnosimy, że:

$$BP'Q' = BQP,$$

a więc cała powierzchnia BAM równa się prostokątowi na liniach BA i AM , zmniejszonemu o powierzchnię półkola $BP'A$, t. j.

$$BAM = 2r^2\pi - \frac{1}{2} r^2 \pi = \frac{3}{2} r^2 \pi,$$

a więc pole cykloidy równa się $3\pi r^2$, t. j. potrójnej powierzchni koła tworzącego.

§ 2.

Łuk krzywej płaskiej.

Wyobraźmy sobie krzywą ciągłą i jej styczną pomiędzy punktami A i B , poruszającą się sposobem ciągłym lub mającą

skończoną liczbę punktów przerwy. Wtedy łukiem krzywej pomiędzy punktami A i B nazwiemy długość nici giętkiej,

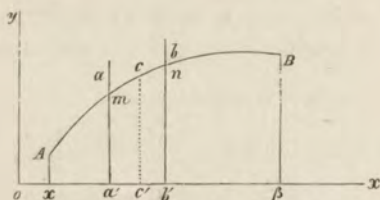


Fig. 9.

która przystaje dokładnie do krzywej i kończy się w punktach A i B .

Ścisłejsze określenie łuku krzywej dajemy w sposób następujący. Wyobraźmy sobie przedział pomiędzy a i β , podzielony na przedziały cząstkowe δ_r i niechaj $a'b'$ będzie jednym z takich przedziałów. Przez punkty przedziału poprowadźmy rzędne, t. j. proste równoległe do osi y . Rzędne te przetną krzywą w punktach takich, jak punkty m i n . Weźmy na krzywej punkt c pośredni pomiędzy punktami m i n , poprowadźmy styczną do krzywej w tym punkcie i ograniczmy ją za pomocą dwu rzędnych. Powtarzając to działanie dla wszystkich przedziałów δ_r i sumując wszystkie odcinki prostoliniowe takie jak ab , biorąc wreszcie granicę tej sumy w założeniu, że przedziały δ_r dążą do zera a ich liczba rośnie do nieskończoności, otrzymamy to, co nazywa się **łukiem krzywej** pomiędzy punktami A i B .

Należy dowieść, że przy założeniach, uczynionych co do natury stycznej do krzywej, wzmiankowana w określeniu granica rzeczywiście istnieje. W tym celu szukajmy przedewszystkiem analitycznego wyrażenia łuku.

Odcinek ab równa się swemu rzutowi $a'b'$, podzielonemu przez dostawę kąta pomiędzy ab i osią odciętych, t. j. $ab = \frac{a'b'}{\cos \theta}$.

Lecz $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}$, a więc:

$$ab = a'b' \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}.$$

Ponieważ prosta ab jest styczną do krzywej, przeto $\operatorname{tg} \theta = \left(\frac{dy}{dx}\right)_c$, gdzie znaczek c u dołu oznacza, że pochodną należy wziąć dla punktu c o odciętej pośredniej pomiędzy a i b . Kładąc $a'b' = \delta_r$, mamy na mocy określenia dla łuku s :

$$s = \lim \Sigma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \delta_r,$$

gdzie suma rozciąga się na wszystkie przedziały δ_r pomiędzy a i β , wartość zaś funkcji $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ należy brać za każdym razem odpowiadającą pewnemu punktowi, którego odcięta zawiera się w przedziale δ_r . Widzimy stąd, że łuk s jest ściśle równy całce funkcji $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ pomiędzy granicami a i β , t. j.

$$s = \int_a^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Ponieważ według założenia styczna do krzywej porusza się sposobem ciągłym lub, co najwyżej, posiada skończoną liczbę przerw, przeto funkcja $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ będzie funkcją ciągłą lub będzie posiadała, co najwyżej, skończoną liczbę punktów przerwy; stąd wynika, że s jako całka funkcji ciągłej jest wogóle ciągłą, a zatem **z a w s z e i s t n i e j e**.

Jeżeli odcięta a będziemy uważali za stałą, odcięta zaś β za zmienną i napiszemy x zamiast β , znajdziemy łuk s jako funkcję zmiennej x , a jej pochodna względem x będzie:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

skąd:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Tym sposobem zagadnienie obliczania łuku krzywej zostało rozwiązane.

Zagadnienie to nazywamy często zagadnieniem wprostowania (rektyfikacji) krzywych, podobnie jak zagadnienie obliczania pól nazywa się zagadnieniem kwadratur.

Niechaj będzie łuk krzywej i jego cięciwa prostoliniowa. Ustalmy jeden z krańców, np. A i zbliżajmy drugi kraniec do A , wtedy łuk i jego cięciwa zmniejszać się będą nieograniczenie. Można dowieść, że granica ich stosunku jest jednością; jest to własność, z której korzystaliśmy już w „Rachunku różniczkowym“.

W samej rzeczy można dowieść, że cięciwa, liczona od punktu stałego A , uważana za funkcję odciętej, ma tę samą pochodną w punkcie A , jaką ma funkcja s w tym punkcie. Jeżeli bowiem oznaczymy przez Δx , Δy różnice pomiędzy odpowiednimi spólrzędnymi dwóch punktów krańcowych cięciwy, będzie:

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x,$$

a więc:

$$\frac{c}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Jeżeli Δx dąży do zera, to i Δy dąży do zera, a stosunki $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{c}{\Delta x}$ dążyć będą do wartości pochodnych funkcji y i c względem x ; więc pochodna funkcji c względem x , t. j.

$$\frac{dc}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

a stąd:

$$\frac{ds}{dc} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{dc}{dx}} = 1.$$

Powyższy wzór na różniczkę łuku krzywej płaskiej stosuje się do przypadku spólrzędnych prostokątnych. Można znaleźć wzór analogiczny w przypadku, gdy osie spólrzędnych tworzą ze sobą kąt φ . Istotnie, za pomocą podobnego, jak wyżej, postępowania znajdziemy, że pochodna funkcji s względem x jest:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 \frac{dy}{dx} \cos \varphi},$$

a stąd:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + 2 dx dy \cos \varphi}.$$

Przejdźmy do przypadku spólrzędnych biegunowych. Niechaj ρ i θ będą spólrzędnymi biegunowymi punktu M . Możemy znaleźć wzór na różniczkę łuku, przekształcając wzór otrzymany w spólrzędnych prostokątnych. Spólrzędne x, y wyrażają się przez spólrzędne ρ, θ za pomocą wzorów $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, z których wynika $dx = -\rho \sin \theta d\theta + \cos \theta d\rho$; $dy = \rho \cos \theta d\theta + \sin \theta d\rho$. Podnosząc do kwadratu i dodając, znajdujemy:

$$dx^2 + dy^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2,$$

skąd:

$$ds = \sqrt{\rho^2 d\theta^2 + d\rho^2}.$$

Za pomocą różniczki ds możemy wyrazić prostym sposobem dostawę i wstawę kierunku stycznej do krzywej. W rzeczy sa-

mej, jeżeli θ jest kątem, który styczna tworzy z osią odciętych, to $\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}$, skąd:

$$\sin \theta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dy}{ds}; \quad \cos \theta = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds}.$$

Powiedzieliśmy wyżej, że łuk krzywej można uważać za funkcję odciętej x . Odwrotnie, jeżeli łuk (liczony od pewnego początku stałego) jest dany, to wtedy jest zarazem oznaczony drugi punkt końcowy łuku, a więc jego spólrzędne x, y . Stąd obie spólrzędne x, y można uważać za funkcje łuku s , przyjętego za zmienną niezależną. W takim razie równanie krzywej można zawsze wyrazić w postaci:

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s);$$

kształt funkcji φ, ψ wyznacza się w przypadkach szczególnych.

Z powyższych wzorów wynika też, że pochodne zmiennych x, y względem s są właśnie dostawami i wstawami kierunkowymi stycznej do linii krzywej.

Z wzoru $ds^2 = dx^2 + dy^2$, przy przyjęciu zmiennej s za niezależną, otrzymujemy przez różniczkowanie:

$$0 = \frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2}.$$

Ten wzór służy dla przypadku, gdy x, y są funkcjami zmiennej niezależnej s .

Podamy kilka przykładów:

1) Znaleść wyrażenie łuku koła o promieniu r .

Równaniem koła jest $x^2 + y^2 = r^2$, skąd:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y},$$

a więc:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{1}{y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{r}{y} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Całkując, znajdujemy:

$$s = r \arccos \frac{x}{r} + C.$$

Jeżeli zaczynamy liczyć łuk od punktu $x = r, y = 0$, t. j. od krańcowego punktu po prawej stronie okręgu, wtedy dla $x = r$ jest $s = 0$, stąd $C = 0$, a więc:

$$s = r \arccos \frac{x}{r},$$

co jest znanym wyrażeniem łuku kołowego.

2) Obliczyć łuk spiralej logarytmowej, danej przez równanie $\rho = e^\theta$.

Jest $d\rho = e^\theta d\theta$, a stąd:

$$ds = \sqrt{e^{2\theta} d\theta^2 + e^{2\theta} d\theta^2} = \sqrt{2} e^\theta d\theta,$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{2} \cdot e^\theta.$$

Całkując, znajdujemy:

$$s = \sqrt{2} e^\theta + C = \sqrt{2} \cdot \rho + C.$$

Dla oznaczenia stałej C zauważmy, że jeżeli zaczynamy liczyć łuk s od punktu, odpowiadającego wartościom współrzędnych $\rho = 1, \theta = 0$ (t. j. gdy dla tych wartości jest $s = 0$), to wtedy C równa się $-\sqrt{2}$, stąd:

$$s = \sqrt{2} (\rho - 1) = \sqrt{2} (e^\theta - 1).$$

3) Wyprostowanie paraboli $y^2 = 2px$.

Z równania paraboli wynika:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{2}} x^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{p},$$

stąd:

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx,$$

a po przekształceniu tej całki tak, aby zmienną niezależną była zmienna y :

$$s = \frac{1}{p} \int \sqrt{y^2 + p^2} dy.$$

Liczyć będziemy długość łuku od wierzchołka paraboli ($y = 0$), aż do pewnej wartości ogólnej y . Wykonywając całkowanie przez części, mamy:

$$s = \frac{1}{p} y \sqrt{y^2 + p^2} - \frac{1}{p} \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^2 + p^2}}.$$

Z drugiej strony:

$$s = \frac{1}{p} \int \sqrt{y^2 + p^2} dy = p \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + p^2}} + \frac{1}{p} \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^2 + p^2}},$$

tak, że:

$$s = \frac{1}{2p} y \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + p^2}}.$$

Ostatnią całkę obliczymy za pomocą wzoru ogólnego, podanego w § 4 Rozdziału III-go i otrzymamy:

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y^2 + p^2}} = \log(y + \sqrt{y^2 + p^2}) - \log p.$$

Tym sposobem będzie:

$$s = \frac{y\sqrt{y^2 + p^2}}{2p} + \frac{p}{2} \log \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}.$$

4) Obliczyć długość łuku elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Spółrzędne punktu elipsy można wyrazić w funkcji jednego parametru w ten sposób:

$$x = a \sin \varphi, \quad y = b \cos \varphi,$$

skąd:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b \sin \varphi}{a \cos \varphi}, \quad \frac{dx}{d\varphi} = a \cos \varphi;$$

$$s = \int \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = a \int \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} \, d\varphi.$$

Za granice całkowania można wziąć $\varphi = 0$ do φ jakiegokolwiek (odpowiednio do granic: $x = 0$ i x jakiegokolwiek). Można okazać, że żadnymi środkami sztucznymi ta całka nie dałaby się wyrazić pod postacią skończoną za pomocą funkcji zwykłych, znanych, jak funkcje wymierne i niewymierne algebraiczne, logarytmowe, trygonometryczne i wykładnicze.

Takie całki napotkaliśmy już w § 4 Rozdziału III-go i nazwaliśmy je całkami eliptycznymi, właśnie dlatego, że służą, jak widzimy, do wyprostowywania elipsy. Można te całki obliczyć za pomocą całkowania przez szeregi. Patrz § 2 Rozdziału III-go.

5) Obliczyć długość łuku cykloidy.

Przyjmijmy te same współrzędne, co w paragrafie poprzedzającym. Znaleźliśmy tam, że $\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{2r-y}}{\sqrt{y}}$, a więc gdy y weźmiemy za zmienną niezależną, będzie:

$$s = \int_0^y \sqrt{1 + \frac{2r-y}{y}} dy = \int_0^y \sqrt{\frac{2r}{y}} dy, \text{ skąd:}$$

$$s = 2\sqrt{2r} \sqrt{y}.$$

A więc długość łuku BP (patrz fig. 8) równa się podwójnej długości prostej BP' , której długością jest właśnie $\sqrt{2ry}$. Dla $y=2r$ jest $s = 4r$, jako długość połowy cycloidy.

§ 3.

Łuk krzywej skośnej.

Wyobraźmy sobie odcinek krzywej skośnej AB o stycznej ciąglej. Niechaj odciętymi punktów skrajnych będą a i β . Po-

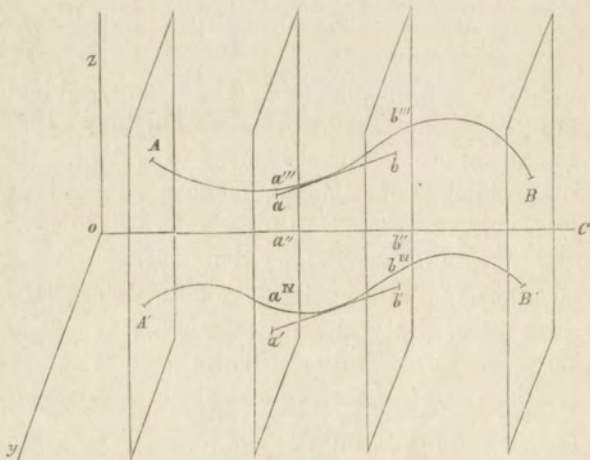


Fig 10.

dzielmy odcinek prostoliniowy $a\beta$ na pewną liczbę odcinków cząstkowych takich, jak $a''b'' = \delta_r$. Przez punkty podziału po-

prowadźmy płaszczyzny prostopadłe do osi odciętych, mianowicie aa'' , bb'' i t. d.; te płaszczyzny przetną krzywą w punktach a''' , b''' , ..., pośrednich pomiędzy punktami A i B . Poprowadźmy styczną do krzywej w punkcie c pośrednim pomiędzy a''' i b''' i ograniczmy tę styczną dwiema płaszczyznami równoległymi; otrzymamy tym sposobem odcinek prostoliniowy ab . Postępując w ten sposób dla wszystkich pasm, otrzymamy zbiór odcinków takich, jak ab i te wszystkie odcinki będą oczywiście dążyły do zera, gdy odcinki $a''b'' = \delta_r$ do zera dążą. Otóż granicę sumy wszystkich odcinków ab dla przedziałów δ_r , równych zero przy nieskończonem wzrastaniu liczby tych odcinków, nazywamy łukiem krzywej pomiędzy punktami A i B . Okażemy, że ta granica istnieje i że jest nią mianowicie całka pewnej funkcji ciągłej lub w ogólności ciągłej.

W tym celu znajdziemy wyrażenie odcinka ab . Niechaj ξ , η , ζ oznaczają kąty, które styczna tworzy z osiami współrzędnych; będzie oczywiście $ab = \frac{\delta_r}{\cos \xi}$. Lecz ponieważ z równania

$$\cos^2 \xi + \cos^2 \eta + \cos^2 \zeta = 1 \text{ wynika } \frac{1}{\cos \xi} = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \eta}{\cos^2 \xi} + \frac{\cos^2 \zeta}{\cos^2 \xi}},$$

przeto:

$$ab = \delta_r \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \eta}{\cos^2 \xi} + \frac{\cos^2 \zeta}{\cos^2 \xi}}.$$

Stosunki $\frac{\cos \eta}{\cos \xi}$, $\frac{\cos \zeta}{\cos \xi}$ wyrazić można za pomocą pochodnych zmiennych y i z względem zmiennej x . Istotnie rzutem danej krzywej skośnej na płaszczyznę xy jest krzywa płaska $A'B'$, rzutem zaś stycznej ab jest styczna $a'b'$ do krzywej $A'B'$. Jeżeli δ_r i ε_r są rzutami odcinka ab na osie x i y , to będą one także rzutami odcinka $a'b'$ na też osie. Mamy: $\cos \xi = \frac{\delta_r}{ab}$, $\cos \eta = \frac{\varepsilon_r}{ab}$, i jeżeli ξ' , η' są kątami, które odcinek $a'b'$ tworzy z osiami x , y , będzie też: $\cos \xi' = \frac{\delta_r}{a'b'}$, $\cos \eta' = \frac{\varepsilon_r}{a'b'}$, a więc:

$$\frac{\cos \eta'}{\cos \xi'} = \frac{\varepsilon_r}{\delta_r} = \frac{\cos \eta}{\cos \xi}.$$

Gdy układ osi x, y jest prostokątny, to $\frac{\cos \eta'}{\cos \xi'}$ jest styczną kąta ξ' , który odcinek $a' b'$ tworzy z osią x i ta styczna wyraża się także przez $\frac{dy}{dx}$ (gdyż $a' b'$ jest styczną do krzywej płaskiej), a więc:

$$\frac{\cos \eta}{\cos \xi} = \frac{dy}{dx},$$

gdzie pochodna oblicza się oczywiście dla punktu styczności odcinka ab . Podobnie będzie:

$$\frac{\cos \zeta}{\cos \xi} = \frac{dz}{dx}.$$

Wynika stąd:

$$ab = \delta_r \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Jeżeli więc s oznacza łuk AB , będzie na mocy określenia:

$$s = \lim \sum_a^\beta \delta_r \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

co właśnie orzeka, że łuk s wyraża się za pomocą następującej całki określonej:

$$s = \int_a^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

Ponieważ założyliśmy, że odcinek krzywej AB ma styczną ciągłą

lub w ogólności ciągłą, przeto $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{dz}{dx}$, jako zależne właśnie od kierunku stycznej, są funkcjami ciągłymi lub w ogólności ciągłymi, a stąd wynika, że powyższa całka z a w s z e i s t n i e j e. Pochodna łuku s względem zmiennej x (zakładając, że granica górna β jest zmienną i pisząc x zamiast β), będzie wogóle równa funkcji podcałkowej, t. j. będzie:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

a stąd na różniczkę łuku s otrzymujemy wzór:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Możnaby dowieść, że podobnie jak w przypadku krzywych płaskich, granica stosunku łuku do jego cięciwy jest równa jedności.

Zrobimy jeszcze jedno spostrzeżenie. Znaleźliśmy, że:

$$\frac{1}{\cos \xi} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

gdzie ξ jest kątem pomiędzy styczną a osią x . Stąd znajdujemy: $\cos \xi = \frac{dx}{ds}$ i podobnie: $\cos \eta = \frac{dy}{ds}$, $\cos \zeta = \frac{dz}{ds}$, a więc za pomocą różniczki ds możemy wyrazić dostawy kierunkowe stycznej, co stanowi zupełną analogię do przypadku krzywych płaskich.

Podajmy przykład:

Wyobraźmy sobie trójkąt prostokątny ABC i walec prosty kołowy; nawiniemy trójkąt na walec w ten sposób, aby jego podstawa złała się z okręgiem podstawy walca, wtedy przeciwprostokątnia AC wyznaczy na powierzchni walca krzywą, zwaną helisą (patrz „Rachunek różniczkowy“, str. 245). Weźmy za osie x i y dwie proste prostopadłe do siebie i przechodzące

przez środek O koła, za oś z — oś walca. Spółrzędnymi punktu

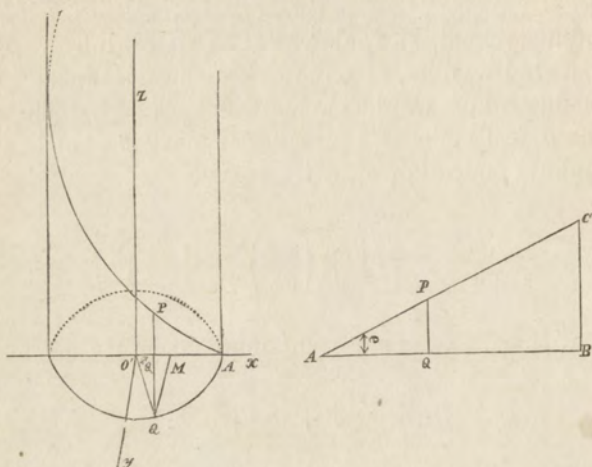


Fig. 11.

P helisy będą:

$$x = OM, \quad y = MQ, \quad z = QP.$$

Gdy rozwiemy walec, to trójkąt AQP stanie się trójkątem prostokątnym OQP o kącie stałym φ , a więc:

$$PQ = \text{łuk } AQ \cdot \operatorname{tg} \varphi = r\theta \operatorname{tg} \varphi,$$

$$MQ = r \sin \theta, \quad OM = r \cos \theta,$$

gdzie r jest promieniem koła podstawy. Mamy zatem:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = r \cdot \theta \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Stąd:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = -\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \theta},$$

a zatem:

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} &= \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \operatorname{tg}^2 \varphi} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.\end{aligned}$$

Będzie tedy:

$$\begin{aligned}s &= \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= - \int r \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} d\theta = - r\theta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} + \text{const.}\end{aligned}$$

Gdy zaczynamy liczyć s od punktu A , to dla $\theta = 0$ jest $s = 0$, a więc $\text{const} = 0$ i będzie:

$$s = - r\theta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

a ponieważ $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi}$, $r\theta = AQ$, więc bez względu na znak, jest:

$$s = \frac{AQ}{\cos \varphi},$$

co zresztą wynikłoby wprost z rozważania trójkąta prostokątnego APQ , w którym przeciwprostokątnia AP jest właśnie długością łuku s .

§ 4.

Pole powierzchni krzywej.

Wyobraźmy sobie powierzchnię, której równaniem jest $z = \varphi(x, y)$, ograniczoną linią zamkniętą o jednym obwodzie l , którego rzutem na płaszczyznę xy jest linia zamknięta o jednej gałęzi. Podamy określenie tego, co nazywa się polem powierzchni ograniczonej linią zamkniętą. Załóżmy, że część uważanej powierzchni jest taką, że prosta równoległa do osi z przecina ją tylko w jednym punkcie. Nakreślmy na płaszczyźnie xy prostokąt o bokach równoległych do osi x i y , opisany na linii krzywej zamkniętej, która jest rzutem linii ograniczającej powierzchnię. Podzielmy jeden z boków tego prostokąta na przedziały cząstkowe δ , drugi na przedziały δ' , i poprowadźmy przez punkty podziału proste równoległe do osi x, y . Prostokąt

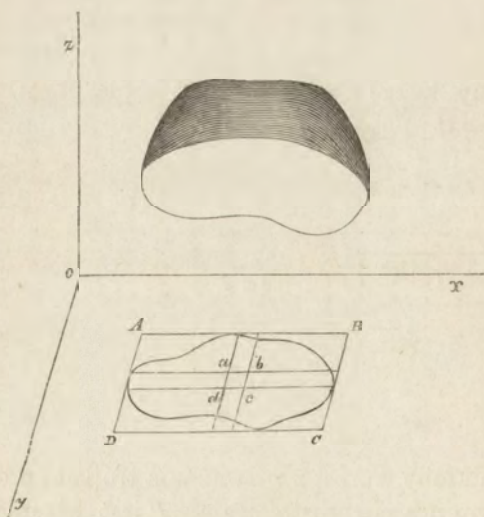


Fig. 12.

$ABCD$ podzieli się na prostokąty $abcd$, z których jedne pozostaną wewnątrz krzywej, inne będą w części wewnątrz, w części

zaś zewnątrz, inne wreszcie będą całkiem zewnątrz. Rozważmy tylko te, które są zawarte całkiem wewnątrz krzywej i biorąc je za podstawy, wzniesmy na nich prostopadłościany; te prostopadłościany podziela powierzchnię daną na części. Weźmy w każdej z tych części pewien punkt wewnętrzny, poprowadźmy przez ten płaszczyznę styczną do powierzchni i na tej płaszczyźnie weźmy pod uwagę czworobok, wyznaczony na niej przez odpowiedni prostopadłościan. Granica sumy tych wszystkich czworoboków, gdy przedziały cząstkowe δ_r, δ'_s maleją nieograniczenie, liczba zaś ich rośnie do nieskończoności, nazywa się polem powierzchni.

Każdy z tych czworoboków równa się swemu rzutowi, t. j. prostokątowi δ_r, δ'_s , podzielonemu przez dostawę kąta, który płaszczyzna styczna tworzy z płaszczyzną xy , albo, co na jedno wychodzi, przez dostawę kąta, który prostopadła do płaszczyzny stycznej tworzy z osią z .

Oznaczmy przez ξ, η, ζ kąty kierunkowe prostopadłej do płaszczyzny stycznej, wtedy pole jednego takiego czworoboku będzie $q = \frac{\delta_r \delta'_s}{\cos \zeta}$, a ponieważ ze związku $\cos^2 \xi + \cos^2 \eta + \cos^2 \zeta = 1$ wynika:

$$\frac{1}{\cos \zeta} = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \xi}{\cos^2 \zeta} + \frac{\cos^2 \eta}{\cos^2 \zeta}},$$

przeto:

$$q = \delta_r \delta'_s \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \xi}{\cos^2 \zeta} + \frac{\cos^2 \eta}{\cos^2 \zeta}}.$$

To wyrażenie przekształcimy. Przez punkt styczności płaszczyzny stycznej poprowadźmy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny xz ; przetnie ona powierzchnię według pewnej krzywej c , a płaszczyznę styczną według stycznej t do tej krzywej. Równanie tej krzywej c znajdziemy wprost z równania powierzchni, uważając w tem ostatniem ilość y za stałą (t. j.

równą odległości linii płaskiej c od płaszczyzny xz). Niechaj α' , β' , γ' będą kąty kierunkowe stycznej t do krzywej c ; ponieważ prosta ta znajduje się w płaszczyźnie prostopadłej do osi y , przeto $\cos \beta' = 0$, kąty zaś α' i γ' są dopełniającymi się wzajemnie. Prosta prostopadła do płaszczyzny stycznej będzie prostopadłą do prostej t , t. j. będzie zachodził związek:

$$\cos \xi \cos \alpha' + \cos \eta \cos \beta' + \cos \zeta \cos \gamma' = 0,$$

który zamienia się na:

$$\cos \xi \cos \alpha' + \cos \zeta \cos \gamma' = 0.$$

Stąd:

$$\frac{\cos \xi}{\cos \zeta} = - \frac{\cos \gamma'}{\cos \alpha'},$$

lecz:

$$\frac{\cos \gamma'}{\cos \alpha'} = \frac{\sin \alpha'}{\cos \alpha'} = \operatorname{tg} \alpha' \quad \text{i także} \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{\partial z}{\partial x},$$

a więc:

$$\frac{\cos \xi}{\cos \zeta} = - \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Podobnie znaleźlibyśmy:

$$\frac{\cos \eta}{\cos \zeta} = - \frac{\partial z}{\partial y};$$

tym sposobem będzie:

$$q = \delta_r \delta'_s \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

a więc pole powierzchni S określi się za pomocą wzoru:

$$S = \lim \sum_r \sum_s \delta_r \delta'_s \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Na mocy określenia całki podwójnej będzie:

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Co się tyczy granic całkowania, to dość powtórzyć także same rozważania, jakie uczyniliśmy w swoim czasie o granicach całek podwójnych.

Ponieważ przyjmujemy, że powierzchnia jest ciągła i że płaszczyzna styczna porusza się sposobem ciągłym po całej uważanej części powierzchni, przeto funkcya $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ będzie funkcją ciągłą zmiennych x, y , a stąd wynika, że całka podwójna zawsze istnieje. Okazaliśmy więc nie tylko istnienie granicy sumy, t. j. pola powierzchni zgodnie z danym określeniem, lecz znaleźliśmy zarazem wzór, za pomocą którego można to pole obliczać.

§ 5.

Powierzchnie obrotowe.

W przypadku powierzchni obrotowych łatwo wzór powyższy sprowadzić do całki pojedynczej, gdyż jedno z dwu całkowań daje się wtedy wykonać.

Wyobraźmy sobie na płaszczyźnie zx krzywą, której równaniem jest $z = \varphi(x')$; krzywa ta, obracając się około osi z , tworzy powierzchnię obrotową. Podczas obrotu punkt P po-

zostawać będzie w odległości stałej od osi z (tą odległością będzie zawsze x') i w jednakowej wysokości nad płaszczyzną xy ,

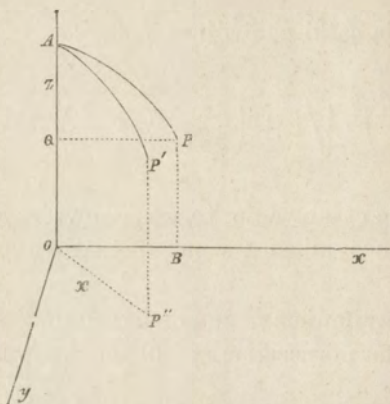


Fig. 13.

w ten sposób, że spórzędna z punktu P w każdym położeniu będzie ta sama, co spórzędna z punktu P płaszczyzny xz . Wielkość zaś x' będzie w każdym położeniu punktu P równą $\sqrt{x^2 + y^2}$, gdzie x, y są spórzędnymi punktu P w przestrzeni. Aby więc mieć równanie powierzchni, dość w równaniu krzywej położyć $x' = \sqrt{x^2 + y^2}$ i będzie:

$$z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Pochodne cząstkowe zmiennej z względem zmiennych x, y są:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

skąd:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \varphi'^2(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

a więc powierzchnia S ma wartość:

$$S = \int \int \sqrt{1 + \varphi'^2 (Vx^2 + y^2)} \, dx \, dy.$$

Wyobraźmy sobie, że gałęzią krzywej płaskiej, obracającej się około osi z , jest AP i że odcięta punktu P równa się r ; wtedy konturem powierzchni będzie koło, opisane przez punkt P , którego rzutem na płaszczyznę xy jest koło o promieniu r . Ponieważ całkowanie ma się rozciągać tak, aby x, y przebiegły całą ćwierć koła, zawartego pomiędzy osiami x, y , powinniśmy więc całkować względem y od $y = 0$ do $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, a względem x od $x = 0$ do $x = r$. W całce względem y przyjmijmy za zmienną niezależną x' zamiast y , kładąc $x^2 + y^2 = x'^2$, wtedy funkcją do całkowania będzie $\sqrt{1 + \varphi'^2 (x')}$ i aby przekształcić całkę dość pomnożyć tę funkcję przez pochodną dawnej zmiennej y , względem nowej x' , t. j. przez $\frac{dy}{dx'} = \frac{x'}{y} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 - x^2}}$.

Otrzymujemy tedy całkę:

$$\int x' \sqrt{1 + \varphi'^2 (x')} \, dx' \int \frac{dx}{\sqrt{x'^2 - x^2}},$$

i te dwa całkowania należy rozciągnąć tak, aby objąć wszystkie punkty ćwiartki koła o promieniu r . Całkowanie względem x rozciągniemy od $x = 0$ do $x = x'$, całkowanie względem x' od $x' = 0$ do $x' = r$. Lecz:

$$\int_0^{x'} \frac{dx}{\sqrt{x'^2 - x^2}} = \left[\arcsin \frac{x}{x'} \right]_0^{x'} = \frac{\pi}{2},$$

przeto całka podwójna sprowadza się do pojedynczej:

$$\frac{\pi}{2} \int_0^r x' \sqrt{1 + \varphi'^2 (x')} \, dx'.$$

Jeżeli chcemy mieć wielkość całej powierzchni obrotowej około A , dość poprzedni rezultat pomnożyć przez 4 i będzie:

$$S = 2\pi \int_0^r x' \sqrt{1 + \varphi'^2(x')} dx'.$$

A więc w przypadku powierzchni obrotowych całkę podwójną można sprowadzić do pojedynczej.

Można pokazać, że $\sqrt{1 + \varphi'^2(x')}$ jest odwrotnością dostawy kąta, który styczna do krzywej tworzącej tworzy z osią x . Istotnie styczną tego kąta jest $\frac{dz}{dx'} = \varphi'(x')$, zaś $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}$, skąd $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2(x')}}.$

§ 6.

Pasma kuliste.

Znajdźmy powierzchnię pasma kulistego, zawartego pomiędzy płaszczyzną styczną do kuli w punkcie A a płaszczyzną do niej równoległą.

Krzywą tworzącą na płaszczyźnie xz jest tu ćwierć okręgu o promieniu R , gdzie R jest promieniem kuli. Niechaj B będzie punktem, w którym płaszczyzna równoległa do płaszczyzny stycznej przecina ten okrąg, A' zaś punktem, w którym taż płaszczyzna przecina oś z .

Położmy $BA' = r$ i zastosujmy wzory poprzednie. Będzie:

$$z = \varphi(x') = \sqrt{R^2 - x'^2},$$

a stąd:

$$\varphi'(x') = -\frac{x'}{\sqrt{R^2 - x'^2}}; \quad \sqrt{1 + \varphi'^2(x')} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x'^2}};$$

$$\int_0^r \frac{R x'}{\sqrt{R^2 - x'^2}} dx' = \left[-R \sqrt{R^2 - x'^2} \right]_0^r = -R \sqrt{R^2 - r^2} + R^2.$$

Pole pasma wyniesie:

$$2\pi R (R - \sqrt{R^2 - x^2}).$$

Jeżeli chcemy mieć całą półkulę, kładziemy $x = R$ i znajdujemy $2\pi R^2$; jest to wynik znany z geometrii elementarnej.

§ 7.

Powierzchnia elipsoidy obrotowej.

Na płaszczyźnie xz weźmy elipsę AB , obracającą się około osi wielkiej a ; niechaj jej równaniem będzie $\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$.

Z tego równania mamy:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \varphi'^2(x')} &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = \frac{1}{bz} \sqrt{b^4 z^2 + a^4 x^2} \\ &= \frac{1}{bz} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) z^2}, \end{aligned}$$

lub po wprowadzeniu mimośrodu $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$:

$$\sqrt{1 + \varphi'^2(x')} = \frac{a}{bz} \sqrt{a^2 - e^2 z^2}.$$

Stąd:

$$S = 2\pi \int \frac{b}{a} \frac{x'}{z} \sqrt{a^2 - e^2 z^2} dx'.$$

Uskutecznijmy zamianę zmiennych, biorąc za zmienną niezależną z zamiast x' ; powinniśmy tedy funkcję podcałkową pomnożyć przez $\frac{dx'}{dz} = -\frac{b^2 z}{a^2 x'}$. Bez względu na znak, znajdziemy:

$$S = 2\pi \int \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e^2 z^2} dz.$$

Lecz wiemy, że:

$$\int \sqrt{1-t^2} dt = \frac{t}{2} \sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2} \arcsin t,$$

skąd:

$$\int \sqrt{a^2 - e^2 z^2} dz = \frac{z}{2} \sqrt{a^2 - e^2 z^2} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{e} \arcsin \frac{e}{a} z,$$

a całkując pomiędzy granicami 0 i z :

$$S = \pi \frac{b}{a} \left[z \sqrt{a^2 - e^2 z^2} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{e} \arcsin \frac{e}{a} z \right].$$

Dla $z = a$ otrzymujemy powierzchnię połowy elipsoidy, t. j.:

$$\pi b^2 + \frac{\pi a b}{e} \arcsin e.$$

Dla $e = 0$ jest $a = b = R$, a stąd $2\pi R^2$, t. j. wyrażenie powierzchni półkuli.

§ 8.

Objętości ograniczone powierzchniami.

Do objętości, zamkniętych powierzchniami, można zastosować rozważania, podobne do tych, jakie stosowaliśmy do półkrywych płaskich.

Wyobraźmy sobie część powierzchni z zamkniętym konturem, którego rzutem na płaszczyznę xy jest krzywa zamknięta;

niechaj powierzchnia będzie taką, że prosta równoległa do osi z przecina ją w jednym tylko punkcie. Podobnie, jak w poprzednich paragrafach, wyobraźmy sobie pole krzywej zamkniętej, podzielone na prostokąty cząstkowe δ_r , δ'_s , i na tych prostokątach zbudujmy prostopadłościany. Te prostopadłościany podziela powierzchnię na cząstki; w każdej z tych cząstek weźmy punkt i poprowadźmy przezeń płaszczyznę równoległą do płaszczyzny xy . Ta płaszczyzna zamknie prostopadłościan, tworząc jego podstawę górną. Granica sumy tych prostopadłościanów nazywa się objętością, za wartą pomiędzy powierzchnią daną a płaszczyzną xy .

Jeżeli $z = f(x, y)$ jest równaniem powierzchni, to objętość prostopadłościanu cząstkowego będzie $\delta_r \delta'_s f(x, y)$, gdzie wartość $f(x, y)$ oblicza się dla punktu, znajdującego się wewnątrz prostokąta $\delta_r \delta'_s$. Szukana objętość wyraża się przez:

$$V = \lim \sum \delta_r \delta'_s f(x, y),$$

lub:

$$V = \iint f(x, y) dx dy .$$

Wyobraźmy sobie powierzchnię zamkniętą i zobaczmy, w jaki sposób obliczyć można objętość w niej zawartą. W tym celu zastosujemy dwa razy metodę poprzednią sposobem następującym: Na powierzchni danej opiszmy walec prosty o tworzących równoległych do osi z . Walec ten dotknie powierzchni według pewnej krzywej, która podzieli powierzchnię na dwie części: wyższą i niższą. Obliczamy po kolei objętość, zawartą pomiędzy każdą z tych części a płaszczyzną xy ; odjawszy jedną objętość od drugiej, znajdziemy objętość szukaną. Ponieważ obie części powierzchni mają kontur wspólny, którym jest krzywa styczności walca i powierzchni, przeto całkowania względem zmiennych x, y skuteczniają się w obu razach pomiędzy temi samemi granicami, gdyż w obu razach odnoszą się do tego samego pola płaskiego. Tylko że w pierwszym razie funkcya

$f(x, y)$ ma inne wartości niż w drugim, w założeniu, że powierzchnia jest zamknięta. Te wartości znajdujemy, rozwiązując równanie powierzchni względem z ; mamy wtedy funkcję $z = f(x, y)$, która powinna być funkcją o dwu wartościach $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, ponieważ założyliśmy, że prosta przecina powierzchnię w dwu punktach. Obie wartości występować winny w całkowaniu i szukana objętość będzie:

$$V = \iint [f_1(x, y) - f_2(x, y)] dx dy,$$

a ponieważ:

$$\int_{f_2(x, y)}^{f_1(x, y)} dz = f_1(x, y) - f_2(x, y),$$

przeto możemy także napisać:

$$V = \iiint dx dy dz,$$

gdzie całkowanie względem z wykonać należy pomiędzy wartościami f_1, f_2 jakie ma z , a które otrzymujemy, rozwiązując równanie powierzchni względem z . Całkowanie względem y wykonuje się pomiędzy dwiema granicami, które otrzymujemy, rozwiązując względem y równanie krzywej płaskiej, będącej przecięciem płaszczyzny xy z walcem opisanym na powierzchni. Te granice są funkcjami zmiennej x . Całkowanie względem x uskutecznia się pomiędzy granicami stałymi, które są odciętami punktów styczności stycznych do poprzedniej krzywej płaskiej, równoległych do osi y .

Aby mógł stosować tę metodę w rozmaitych przypadkach specjalnych, trzeba tylko umieć znaleźć krzywą płaską, będącą rzutem konturu powierzchni.

Widzieliśmy w poprzedzającym paragrafie, że gdy ξ, η, ζ są kątami kierunkowymi prostopadłej do płaszczyzny stycznej w punkcie x, y, z , to:

$$\frac{\cos \xi}{\cos \zeta} = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\cos \eta}{\cos \zeta} = -\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Jeżeli równaniem powierzchni jest $F(x, y, z) = 0$, to:

$$\frac{\cos \xi}{\cos \zeta} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\cos \eta}{\cos \zeta} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

skąd:

$$\cos \xi : \cos \eta : \cos \zeta = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Jeżeli płaszczyzna styczna jest równoległa do osi z , wtedy $\cos \zeta = 0$, a stąd dla punktu styczności być powinno $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$.

To równanie przedstawia nową powierzchnię, która przecina daną według krzywej styczności walca opisanego; rugując więc z z równań $F(x, y, z) = 0$ i $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, otrzymamy związek pomiędzy zmiennymi x, y , który można uważać za równanie walca opisanego, albo — gdy uważamy go tylko w płaszczyźnie xy — za równanie podstawy walca; będzie to równanie szukane krzywej.

§ 9.

Objętość bryły obrotowej.

Obliczanie objętości sprowadza się, jak widzieliśmy, do obliczania całki podwójnej. Wszakże gdy idzie o objętość, zamkniętą w powierzchni obrotowej, to można, jak to zaraz okażemy, wykonać jedno całkowanie, nie znając nawet równania

powierzchni; możemy tedy sprowadzić rachunek do obliczenia całki pojedynczej, która zależy już od znajomości krzywej tworzącej powierzchnię. Jest to fakt podobny do rozważanego przy obliczaniu pola powierzchni.

Zachowajmy oznaczenia, stosowane w paragrafach poprzedzających. Niechaj $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$ będzie równaniem powierzchni obrotowej; objętość dana będzie przez całkę:

$$\iint \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy.$$

Położmy $x^2 + y^2 = x'^2$ i przekształćmy całkę, wprowadzając zmienną x' zamiast y . Będzie:

$$\iint \varphi(x') \frac{x'}{\sqrt{x'^2 - x^2}} dx dx';$$

jeżeli całkowanie jak w przypadku powierzchni ma się rozciągnąć na ćwierć koła o promieniu r , musimy przyjąć granice całkowania $x = 0$ do $x = x'$ dla x , oraz $x = 0$ i $x' = r$ dla x' .

Wykonawszy całkowanie względem x , otrzymujemy $\frac{\pi}{2}$, pozostaje przeto:

$$\frac{\pi}{2} \int_0^r x' \varphi(x') dx'.$$

Ten wzór przedstawia objętość bryły, utworzonej obrotem krzywej $APBO$ (fig. 13) na ćwierć okręgu koła około osi z ; mnożąc przez 4, otrzymujemy całkowitą objętość bryły obrotowej:

$$V = 2\pi \int_0^r x' \varphi(x') dx'.$$

Jeżeli chcemy mieć objętość, utworzoną obrotem figury APQ ,

odejmujemy objętość walca, utworzonego obrotem figury $QPBO$, t. j. $\pi r^2 \cdot PB$ lub $\pi r^2 \varphi(r)$. Całkując przez części, mamy:

$$2\pi \int x' \varphi(x') dx' = \pi x'^2 \varphi(x') - \pi \int x'^2 \varphi'(x') dx',$$

a stąd:

$$2\pi \int_0^r x' \varphi(x') dx' = \pi r^2 \varphi(r) - \pi \int_0^r x'^2 \varphi'(x') dx',$$

a więc różnica dwu objętości jest, bez względu na znak, równa:

$$V_1 = \pi \int_0^r x'^2 \varphi'(x') dx'.$$

Zmieniając tu zmienne, t. j. wprowadzając jako zmienną niezależną $z = \varphi(x')$, a więc mnożąc funkcję podcałkową przez $\frac{dx'}{dz} = \frac{1}{\varphi'(x')}$, znajdujemy:

$$V_1 = \pi \int_{z_2}^{z_1} x'^2 dz,$$

gdzie z_2 i z_1 są rzędne punktów skrajnych A, P krzywej tworzącej, t. j. są długościami OA, BP .

§ 10.

Objętość elipsojdy. Bryła utworzona obrotem cyclojdy.

Niechaj będzie elipsojda:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Winniśmy obliczyć całkę potrójną:

$$\iiint dx dy dz .$$

Całkowanie względem z należy uskutecznić pomiędzy granicami $-c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, $+c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, tak, że pozostanie całka podwójna:

$$2c \int dx \int dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} .$$

Zbadajmy, jakie będą granice całkowania względem y . Zauważmy, że rzutem powierzchni na płaszczyznę xy jest w tym przypadku przecięcie powierzchni z tą płaszczyzną, t. j. krzywa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; stąd wynika, że granicami całkowania względem

y będą $-b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $+b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Stosując wzór:

$$\int dt \sqrt{1-t^2} = \frac{1}{2} t \sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2} \arcsin t ,$$

znajdziemy:

$$\begin{aligned} \int dy \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - \frac{y^2}{b^2}} &= \frac{1}{2} y \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \\ &+ \frac{b}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \arcsin \frac{y}{b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} . \end{aligned}$$

a całkując w powyższych granicach:

$$\frac{1}{2} \pi b \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right),$$

tak, że pozostaje całka:

$$\pi bc \int_{-a}^{+a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx,$$

z której otrzymujemy wreszcie na szukaną objętość: $\frac{4}{3} \pi abc$.

Jeżeli $a = b = c = r$, znajdujemy znane wyrażenie $\frac{4}{3} \pi r^3$ na objętość kuli.

Niechaj będzie cyklojda OA , obracająca się około stycznej OF w wierzchołku. Niech OEB będzie kołem tworzącym cyklojdy. Dla znalezienia objętości, ograniczonej powierzchnią,

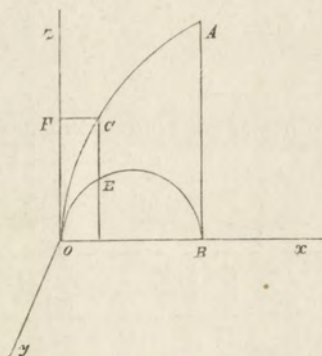


Fig. 14.

utworzoną obrotem cyklojdy, należy obliczyć całkę $\pi \int x'^2 dz$, zawartą w granicach od $z = 0$ do $z = z$.

Weźmy x' za zmienną niezależną; ponieważ $\frac{dz}{dx'}$ jest równe, jak wiadomo $\sqrt{\frac{2r-x'}{x'}}$, przeto otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \pi \int_0^{x'} x' \sqrt{2rx' - x'^2} dx' \\ &= \pi r \int_0^{x'} \sqrt{2rx' - x'^2} dx' - \pi \int_0^{x'} (r-x') \sqrt{2rx' - x'^2} dx'. \end{aligned}$$

Gdybyśmy chcieli obliczyć pole płaskie OED , zawarte w kole, musielibyśmy obliczyć całkę $\int_0^{x'} \sqrt{2rx' - x'^2} dx'$, a więc możemy napisać, że szukana objętość:

$$= \pi r \cdot \text{odcin. } OED - \pi \int_0^{x'} (r-x') \sqrt{2rx' - x'^2} dx'.$$

Ostatnią całkę łatwo obliczyć, kładąc $2rx' - x'^2 = t$; albowiem wtedy $\frac{dt}{dx'} = 2r - 2x'$, a więc $\frac{dx'}{dt} = \frac{1}{2(r-x')}$; będzie zatem:

$$- \frac{\pi}{2} \int_0^t t^{\frac{1}{2}} dt = - \frac{\pi}{3} t^{\frac{3}{2}},$$

tak, że otrzymujemy ostatecznie:

$$\pi r \cdot \text{odcin. } OED - \frac{\pi}{3} (2rx' - x'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Jeżeli chcemy obliczyć objętość, zamkniętą przez powierzchnię, utworzoną obrotem połowy cyklojdy OCA , należy uczynić $x' = OB = 2r$, wtedy odcinek OED staje się półkolem $= \frac{\pi r^2}{2}$ i otrzymujemy ostatecznie $\frac{1}{2} \pi^2 r^3$.

ROZDZIAŁ VII.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE.

§ 1.

Rozważania i określenia zasadnicze.

Dotąd zajmowaliśmy się pytaniem, jak, mając pochodną funkcji, znaleźć samą funkcję? Obecnie stawiamy zagadnienie ogólniejsze. Wyobraźmy sobie funkcję y zmiennej x i utwórzmy jej pochodne rzędu pierwszego, drugiego i t. d., aż do pochodnej rzędu n -go, które oznaczmy przez $y', y'', \dots, y^{(n)}$; niechaj ta funkcja i jej pochodne będą nieznanymi, lecz za to znamy związek pomiędzy $x, y, y', \dots, y^{(n)}$. Pytamy, czy mając ten związek, możemy znaleźć funkcję y ?

Związek taki nazywa się **równaniem różniczkowym**, a zagadnienie przez nas postawione nazywa się **całkowaniem równania różniczkowego**.

Ustalimy najprzód zasadnicze określenia rozmaitych gatunków równań różniczkowych, jakie można pomyśleć. Przedewszystkiem można wyobrazić sobie, że funkcja szukana jest funkcją jednej zmiennej albo wielu zmiennych niezależnych, a stąd związek dany może być związkiem pomiędzy funkcją,

zmienną i pochodnymi funkcyi względem tej jednej zmiennej albo też może być związkiem pomiędzy funkcyą, zmiennymi i pochodnymi cząstkowemi funkcyi względem różnych zmiennych. Mamy więc dwie kategorye równań różniczkowych: kategoryę pierwszą stanowią równania różniczkowe zwyczajne, kategoryę drugą — równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych. W jednym i drugim przypadku rzędem równania nazywamy rząd pochodnej najwyższego rzędu w równaniu zachodzącej.

Można wyobrazić sobie, że zamiast jednego związku pomiędzy zmienną, funkcyą i jej pochodnymi, takich związków jest więcej; te związki nazywają się jednoczesnymi i otrzymujemy wtedy układ równań różniczkowych.

Zanim przejdziemy do zagadnienia całkowania równań różniczkowych, zajmijmy się badaniem wstępnem, t. j. zagadnieniem, odnoszącym się do sposobu, w jaki można zbudować równanie różniczkowe, mając daną samą funkcyę. Po rozstrzygnięciu tego pytania łatwiej nam będzie próbować rozwiązania zagadnienia odwrotnego.

Niechaj y będzie daną funkcyą zmiennej x ; utwórzmy jej pierwszą pochodną y' . Jeżeli funkcyą dana zawiera pewien parametr c , to i pochodna będzie go wogóle zawierała; wyrugowawszy ten parametr pomiędzy funkcyą i jej pochodną, otrzymamy oczywiście związek pomiędzy y i y' , który będzie równaniem różniczkowem. Całką tego równania będzie funkcyą dana y ; lecz ponieważ c może mieć wartość dowolną, więc przy każdej wartości na c (która jest owym wyrugowanym parametrem) funkcyą y czyni zadość równaniu różniczkowemu. Otrzymujemy więc w istocie nie jedną funkcyę, lecz nieskończenie wiele funkcyj, lub, właściwiej mówiąc, otrzymujemy funkcyę, zawierającą parametr dowolny. Równanie różniczkowe, tak utworzone, jest równaniem różniczkowem rzędu 1-go.

Jest rzeczą jasną, że za pomocą podobnych rozważań można dojść do równania różniczkowego rzędu n -go. Dość przyjąć w tym celu, że funkcyą dana zawiera n stałych c_1, c_2, \dots, c_n ;

że tworzymy n pierwszych pochodnych funkcji; że pomiędzy niemi i funkcją daną rugujemy n stałych. Otrzymujemy wtedy równanie, zawierające w ogólności $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ i będące równaniem różniczkowym rzędu n -go. Z takiej konstrukcyi równania różniczkowego widać, że funkcya dana, która będzie jego całką, ma tę własność, że gdy utworzymy jej pochodne aż do rzędu n -go włącznie i wartości $y, y', \dots, y^{(n)}$, w ten sposób otrzymane, podstawimy w równaniu różniczkowym, otrzymamy związek tożsamościowy, bez względu na wartości zmiennej x , oraz wartości stałych c_1, c_2, \dots, c_n .

Rzeczony rozwiązanie równania różniczkowego z n stałemi dowolnemi nazywamy całką ogólną. Nasuwa się tedy odrazu pytanie, czy każde dane równanie posiada zawsze całkę ogólną. Można dowieść, że w rzeczy samej każde równanie różniczkowe posiada całkę ogólną; lecz nie możemy tu zająć się tym dowodem.

Jeżeli wszystkim lub niektórym stałym nadamy wartości szczególne, otrzymamy wtedy rozwiązania równania różniczkowego, nazwane całkami szczególnemi. Takie całki nie zawierają n stałych dowolnych, lecz albo mniej niż n , albo żadnej. Każdą z tych całek można otrzymać zawsze z całki ogólnej; wszakże odwrotnie z całki szczególnej można otrzymać ogólną tylko w pewnych przypadkach specjalnych.

Zbadajmy dokładnie, jakie są cechy charakterystyczne całki ogólnej. Każde rozwiązanie równania różniczkowego powinno być zawsze taką funkcją y zmiennej x , że otrzymawszy z niej $y', y'', \dots, y^{(n)}$ i podstawiwszy, wraz z y w danem równaniu różniczkowym, otrzymamy wyrażenie tożsamościowo się spełniające dla każdej wartości x . Jest to własność wspólna wszystkim gatunkom całek; lecz pytamy, co prócz tego spełnić się jeszcze musi, abyśmy całkę mogli nazwać ogólną?

Powiedzieliśmy już, że całka ogólna powinna zawierać n stałych dowolnych; pozostaje nam określić bliżej charakter istotny tych stałych. Otóż powiadamy, że powinny być one zawarte w funkcyi w pewien sposób specjalny, mianowicie taki:

aby po utworzeniu n kolejnych pochodnych funkcji y , można było wyrugować te stałe pomiędzy $n + 1$ otrzymanymi równaniami. Wtedy i tylko wtedy możemy twierdzić, że stałe są niezależne od siebie i że ich jest właśnie n . Gdy zdarzy się, że rugując pewną liczbę stałych, rugujemy już przez to samo inne, to wtedy pozornie tylko jest n stałych dowolnych, a w rzeczy samej jest ich mniej: całka nie jest już ogólną lecz szczególną.

Podaną własność można wyrazić jeszcze tak: z n pierwszych równań, t. j. z równania, wyrażającego funkcję daną, oraz z równań, wyrażających $n - 1$ pierwszych pochodnych, można otrzymać wartości n stałych dowolnych c_1, c_2, \dots, c_n . Istotnie, jest jasnym, że gdy to da się uskutecznić, wtedy podstawiając znalezione wartości stałych w równaniu, wyrażającym pochodną n -tą funkcji y , otrzymamy związek z pewnością nie tożsamościowy, który będzie danem równaniem różniczkowym. Ten związek nie będzie tożsamościowym dlatego, że wyraz, zawierający $y^{(n)}$ nie może znieść się z żadnym innym wyrazem, bo c_1, c_2, \dots, c_n są wyrażone tylko przez $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, a nie przez $y^{(n)}$.

Jeżeli wartości stałych dowolnych są wyrażone w funkcji ilości $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, wtedy, gdy zmiennej x nadamy jakąkolwiek wartość, zawartą w pewnym obszarze, a ilościom $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ wartości dowolnie ustalone, powinniśmy stąd móc otrzymać wartości oznaczone na stałe c_1, c_2, \dots, c_n . Można przeto powiedzieć, że stałe c_1, c_2, \dots, c_n powinny zachodzić w całkach ogólnych w ten sposób, aby przynajmniej dla wartości zmiennej x , zawartych w pewnym obszarze, można było nadać im takie wartości, by ilości $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ przybrały wartości z góry i dowolnie dane.

Prócz tych dwu gatunków całek, to jest prócz całek ogól-

nych i szczególnych, istnieje jeszcze inny gatunek t. zw. całek osobliwych, o których później będzie mowa.

To, co wyżej powiedziano, odnosi się do równań zwyczajnych. O całkach równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych mówić będziemy w innym paragrafie.

Przechodzimy teraz do zagadnienia: mając równanie różniczkowe, znaleźć jego całkę. Nie możemy tu, jak zwykle, podać prawideł ogólnych, lecz musimy ograniczyć się na ustaleniu pewnych typów równań różniczkowych i do badania ich osobno, podobnie, jak to uczyniliśmy wyżej w zagadnieniu o całkowaniu funkcji (kwadratury).

Zagadnienie o całkowaniu równań różniczkowych będziemy uważali zawsze za rozwiązane, o ile potrafimy je sprowadzić do prostego całkowania, to jest do kwadratury. Może się zdarzyć, że taka kwadratura nie jest praktycznie wykonalną, lecz wtedy trudność zadania tkwi już w innej dziedzinie badań. Wogóle uważamy zagadnienie w rachunku nieskończonościowym za rozwiązane, ilekroć potrafimy je przekształcić w ten sposób, aby rozwiązanie jego zależało od rozwiązania zagadnienia algebraicznego, np. od rozwiązania równania algebraicznego.

Zanim przejdziemy do badania różnych typów równań różniczkowych, pokażemy, jak one występują w rozwiązaniu pewnego zagadnienia geometrycznego.

§ 2.

Przykład zagadnienia geometrycznego, którego rozwiązanie prowadzi do równania różniczkowego,

Przy stosowaniu analizy do wielu zagadnień geometrii, w których idzie np. o znalezienie równania krzywej płaskiej, mającej pewne własności specjalne, może się zdarzyć, że docho-

dzimy bezpośrednio nie do prostego związku analitycznego między współrzędnymi x, y lecz do związku pomiędzy x, y i pochodnymi funkcji y względem x , t. j. do równania różniczkowego. Jest jasnym, że rozwiązanie zadania sprowadza się wtedy do całkowania tego równania różniczkowego.

Wybermy przykład następujący. Mamy oznaczyć krzywą, której promień wodzący OP równa się odcinkowi OR na osi x , zawartemu między początkiem współrzędnych a spodkiem stycznej PR .

Zauważmy; że $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$; z drugiej strony $\frac{PQ}{QR} = \frac{dy}{dx}$, skąd $\frac{y}{x + OR} = \frac{dy}{dx}$.

Ponieważ ma być $OP = OR$, przeto otrzymujemy związek:

$$\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{dy}{dx},$$

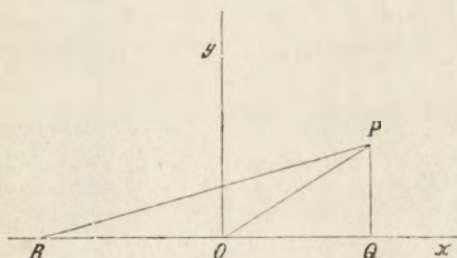


Fig. 15.

który jest równaniem różniczkowym rzędu 1-go.

W § 4 zobaczymy, jak się to równanie całkuje; jako rozwiązanie znajdziemy pęk parabol. Otrzymujemy tym sposobem twierdzenie, że parabola jest właśnie krzywą, posiadającą wyżej rzeczoną własność.

§ 3.

Równania różniczkowe 1-go rzędu. Równania, w których można rozdzielić zmienne.

Podamy niektóre metody, za pomocą których można całkować pewne typy specjalne równań różniczkowych. Zaczynamy od równań rzędu 1-go.

Niechaj będzie równanie:

$$(1) \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

niechaj $\frac{dy}{dx}$ występuje w tem równaniu algebraicznie sposobem wymiernym i całkowitym. Równanie to można wtedy rozwiązać względem $\frac{dy}{dx}$ i otrzymać pierwszą stronę jego pod postacią n czynników liniowych względem $\frac{dy}{dx}$. Rozpatrzmy najprzód jeden z tych czynników i sprowadźmy go do równania typu :

$$(2) \quad M + N \frac{dy}{dx} = 0,$$

gdzie M i N są funkcjami zmiennych x, y .

Jeden z pierwszych przypadków, w których można bezpośrednio zcałkować równanie (2), jest ten, gdy funkcje M i N są odpowiednio funkcjami, pierwsza tylko zmiennej x , druga tylko zmiennej y . Wtedy mamy:

$$Mdx + Ndy = 0,$$

a całkując:

$$\int Mdx + \int Ndy = C.$$

Mówimy w tym przypadku, że zmienne są rozdzielone. Niechaj będzie naprzykład równanie:

$$xy \, dx - (a-x)(y-b) \, dy = 0.$$

Dzieląc obie strony przez $y(a-x)$, otrzymujemy:

$$\frac{x}{a-x} \, dx - \frac{y-b}{y} \, dy = 0,$$

a całkując:

$$-x - a \log(x-a) - y + b \log y = C.$$

Jest tu dogodnym stałą dowolną C przedstawić pod postacią logarytmu, t. j. napisać $\log C$ zamiast C ; przechodząc następnie od logarytmów do liczb, otrzymujemy:

$$y^b (x-a)^{-a} = C e^{x+y}.$$

Łatwo sprawdzić, że różniczkując to równanie względem x , a następnie rugując C pomiędzy otrzymanem równaniem i poprzednim, dochodzimy do danego równania różniczkowego.

§ 4.

Równania różniczkowe jednorodne.

Niechaj w równaniu :

$$(1) \quad Mdx + Ndy = 0,$$

M i N będą funkcjami jednorodnymi jednego stopnia, albo inaczej mówiąc, niechaj będą takimi funkcjami, że gdy w nich zamiast x, y położymy $\lambda x, \lambda y$, to funkcye M i N

przejdą na $\lambda^m M, \lambda^m N$. W tym przypadku istnieje ogólna metoda całkowania.

Wprowadźmy nową zmienną zależną z , określoną za pomocą równania $z = \frac{y}{x}$. Podzielmy obie strony równania (1) przez x^m , wtedy współczynniki przy dx i dy zależą tylko od stosunku $\frac{y}{x}$, tak że można będzie napisać:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0,$$

Z równania $\frac{y}{x} = z$ wynika $dy = x dz + z dx$, co podstawiając, znajdziemy:

$$\varphi(z) dx + \psi(z) (x dz + z dx) = 0,$$

lub:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(z)}{\varphi(z) + z\psi(z)} dz = 0,$$

gdzie zmienne są już rozdzielone; można więc całkować jak w przypadku poprzedzającym.

Równanie różniczkowe, podane w § 2, jest właśnie równaniem jednorodnym i może być całkowane tą metodą. Równanie to napisane w postaci:

$$y dx - (x + \sqrt{x^2 + y^2}) dy = 0,$$

jest jednorodnym stopnia 1-go. Dzieląc przez y i kładąc $\frac{x}{y} = z$ mamy:

$$z dy + y dz - (z + \sqrt{1 + z^2}) dy = 0.$$

Stąd:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dy}{y},$$

a całkując:

$$\log y = \log (z + \sqrt{1+z^2}) + \log C,$$

a więc:

$$y = (z + \sqrt{1+z^2}) C.$$

Przywracając zmienną x , znajdujemy kolejno:

$$y^2 = C (x + \sqrt{x^2 + y^2}); \quad (y^2 - Cx)^2 = C^2 (x^2 + y^2);$$

$$y^2 (y^2 - 2 Cx - C^2) = 0,$$

a wyłączając rozwiązanie $y = 0$, otrzymujemy jako rozwiązanie parabolę:

$$y^2 - 2 Cx - C^2 = 0,$$

której ognisko przypada w początku współrzędnych.

§ 5.

Równania liniowe 1-go rzędu.

Równanie postaci:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

gdzie P i Q są funkcjami samej zmiennej x , nazywa się równaniem liniowym; zawiera ono liniowo zmienną y i jej pochodną $\frac{dy}{dx}$.

Położmy $y = uv$, skąd $\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$, a dane równanie zamieni się na następujące:

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + Puv = Q,$$

$$u \frac{dv}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + Pu \right) v = Q.$$

Jedną z funkcji u , v możemy wybrać dowolnie; wybierzmy więc u tak, aby było:

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0,$$

lub:

$$\frac{du}{u} = - P dx.$$

Całkując, otrzymujemy:

$$\log u = - \int P dx; \quad u = e^{-\int P dx}.$$

Pozostaje: $u \frac{dv}{dx} = Q$, skąd:

$$v = \int Q e^{\int P dx} dx + C,$$

a więc ostatecznie:

$$y = e^{-\int P dx} \left[\int Q e^{\int P dx} dx + C \right].$$

Niechaj będzie np. równanie:

$$\frac{dy}{dx} + y = x^3.$$

Jest tu:

$$\int P dx = x,$$

$$\int Q e^{\int P dx} dx = \int x^3 e^x dx.$$

Do ostatniej całki stosujemy metodę całkowania przez części:

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x dx \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6 \int e^x dx \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x. \end{aligned}$$

Jest tedy:

$$y = e^{-x} [x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C].$$

Istnieją typy równań różniczkowych, dające się bezpośrednio sprowadzić do przypadku równań liniowych.

Weźmy np. równanie:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n,$$

gdzie P i Q są funkcjami samej zmiennej x . Połóżmy

$\frac{y^{1-n}}{1-n} = z$, skąd $y^{-n} dy = dz$; znajdziemy równanie:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n) Pz = Q,$$

które jest już liniowym.

Powiedzieliśmy wyżej, że gdy znamy całkę szczególną, to wogóle nie możemy z niej otrzymać całki ogólnej. Podamy tu typ równań, dla których to jest możliwem.

Niechaj będzie równanie:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^2 + R.$$

Niechaj u będzie całką szczególną, t. j. niechaj będzie tożsamościowo :

$$(1) \quad \frac{du}{dx} + Pu = Qu^2 + R.$$

Położmy $y = u + v$, wtedy na mocy równania (1) będzie :

$$\frac{dv}{dx} + (P - 2Qu)v = Qv^2,$$

Jest to równanie typu poprzedzającego; możemy je całkować i otrzymamy z niego v ze stałą dowolną.

Naprzykład równanie:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^2 + (1 + Px - Qx^2),$$

ma całkę szczególną $y = x$. Stosując wskazaną metodę, będziemy mieli do zcałkowania równanie:

$$\frac{dv}{dx} + (P - 2Qx)v = Qv^2.$$

§ 6.

Równania różniczkowe rzędu 1-go, nierozwiązalne względem $\frac{dy}{dx}$.

Jeżeli rozwiązanie równania różniczkowego względem $\frac{dy}{dx}$ nie da się praktycznie wykonać, wtedy szukamy innych metod, prowadzących do celu i nie wymagających tego rozwiązania.

Jak zwykle, podajemy tu nie metody ogólne, lecz tylko metody specjalne dla rozmaitych przypadków:

1) Załóżmy, że równanie różniczkowe nie zawiera ani x , ani y , a tylko pochodną $\frac{dy}{dx}$. Wtedy redukcja równania dałaby $\frac{dy}{dx} = a = \text{const.}$, gdzie a jest nieznanne. Lecz wiedząc, że jest to stała, możemy zcałkować poprzedni związek i otrzymujemy z niego $y = ax + c$, skąd $a = \frac{y - c}{x}$. Jeżeli w równaniu danym zamiast $\frac{dy}{dx}$ napiszemy tę wartość a , znajdziemy całkę ogólną.

2) Wyobraźmy sobie, że równanie różniczkowe nie zawiera zmiennej y ; niechaj niem będzie:

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Jeżeli możemy rozwiązać to równanie względem x , to kładąc $\frac{dy}{dx} = p$, znajdziemy $x = \varphi(p)$, $\frac{dx}{dp} = \varphi'(p)$, a biorąc p za nową zmienną, będziemy mieli:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{1}{\varphi'(p)},$$

stąd:

$$\frac{dy}{dp} = p \varphi'(p),$$

a po zcałkowaniu:

$$y = \int p \varphi'(p) dp + C.$$

Dla znalezienia całki ogólnej dość wyrugować p pomiędzy tem równaniem a równaniem $x = \varphi(p)$.

Gdy mamy np. równanie:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} - x = 0;$$

to będzie:

$$x = p + p^2,$$

$$y = \int p(2p + 1) dp = \frac{2}{3} p^3 + \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{6} C.$$

Rugując p z ostatnich dwu równań, znajdziemy całkę ogólną. Z pierwszego z nich jest $p^2 = x - p$, a więc:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3} p(x-p) + \frac{1}{2}(x-p) + \frac{1}{6} C = \frac{2}{3} px - \frac{1}{2} p + \frac{1}{2} x \\ &- \frac{2}{3}(x-p) + \frac{1}{6} C = \frac{2}{3} px + \frac{1}{6} p - \frac{1}{6} x + \frac{1}{6} C. \end{aligned}$$

Rozwiązując względem p , mamy $p = \frac{6y + x - C}{1 + 4x}$, a podstawiając tę wartość w równaniu pierwszym, znajdujemy:

$$x = \left(\frac{6y + x - C}{1 + 4x}\right)^2 + \left(\frac{6y + x - C}{1 + 4x}\right).$$

3) Wyobraźmy sobie, że równanie dane nie zawiera zmiennej x , tylko zmienną y i że daje się rozwiązać względem y . Wtedy kładąc $\frac{dy}{dx} = p$, otrzymujemy równanie $y = f(p)$. Różniczkując je względem x , mamy:

$$\frac{dy}{dx} = f'(p) \frac{dp}{dx},$$

a więc:

$$p = f'(p) \frac{dp}{dx}.$$

Z tego ostatecznego równania wynika:

$$x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C.$$

Pozostaje tylko wyrugować p pomiędzy ostatnim równaniem a równaniem $y = f(p)$, aby otrzymać całkę ogólną.

Niechaj będzie np. równanie:

$$y \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) = a \frac{dy}{dx}.$$

Wprowadzając $\frac{dy}{dx} = p$ i rozwiązując względem y , znajdziemy

$y = \frac{ap}{1+p^2}$ i następnie:

$$\begin{aligned} x &= \int \left[\frac{adp}{p(1+p^2)} - \frac{2ap dp}{(1+p^2)^2} \right] + C. \\ &= \frac{a}{1+p} + a \int \frac{dp}{p(1+p^2)} + C. \end{aligned}$$

Lecz:

$$\int \frac{dp}{p(1+p^2)} = \int \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{1+p^2} \right) dp = \log p - \frac{1}{2} \log(1+p^2),$$

a więc :

$$x = \frac{a}{1+p^2} + a \log p - \frac{1}{2} a \log(1+p^2) + C.$$

Pozostaje tylko wyrugować p pomiędzy tem równaniem a związkiem $y = \frac{ap}{1+p^2}$.

4) Rozpatrzmy równanie różniczkowe typu:

$$y = x f\left(\frac{dy}{dx}\right) + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Kładąc $\frac{dy}{dx} = p$ i różniczkując względem x , znajdziemy:

$$p = f(p) + x f'(p) \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) \frac{dp}{dx},$$

lub:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{x f'(p)}{f(p) - p} = - \frac{\varphi'(p)}{f(p) - p}.$$

Jest to równanie liniowe takie, jakie rozpatrywaliśmy w paragrafie poprzedzającym; całką jego jest:

$$x = e^{-\int \frac{f'(p) dp}{f(p) - p}} \left[- \int \frac{\varphi'(p)}{f(p) - p} e^{\int \frac{f'(p) dp}{f(p) - p}} dp + C \right].$$

Trzeba jeszcze wyrugować p z tego związku i z danego równania różniczkowego.

Należy jeszcze oddzielnie rozpatrzyć przypadek, w którym $f(p) = p$, bo wtedy funkcya pod znakiem całkowym staje się nieskończoną. W tym przypadku równanie dane ma postać:

$$y = xp + \varphi(p);$$

różniczkując względem x i redukując, mamy:

$$[x + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0.$$

Tu przedstawiają się dwa przypadki; albo kładziemy $x + \varphi'(p) = 0$, albo $\frac{dp}{dx} = 0$. W drugim przypadku p jest ilością stałą, t. j. $p = C$, a redukując p pomiędzy tem równaniem i równaniem danem, otrzymujemy:

$$y = xC + \varphi(C).$$

W pierwszym przypadku jest $x = -\varphi'(p)$ i trzeba wyrugować p pomiędzy tem równaniem a danem. Wtedy otrzymana całka nie będzie zawierała stałej dowolnej i można przekonać się, że nie można tej całki otrzymać z całki ogólnej przez nadanie stałej wartości szczególnej. W samej rzeczy, ze związku $x = -\varphi'(p)$, otrzymujemy $p = \psi(x)$, a całka, o której mowa, będzie:

$$y = x\psi(x) + \varphi[\psi(x)].$$

Z całki ogólnej można ją otrzymać, kładąc za stałą C nie wartość szczególną, lecz pewną funkcję zmiennej x . Taka całka nie należy przeto do rzędu całek szczególnych, jest to nowy gatunek całek, tak zwanych *o s o b l i w y c h*, o których mówimy w § 9-ym.

§ 7.

O czynniku całkującym.

Niechaj będzie równanie różniczkowe 1-go rzędu i 1-go stopnia, dane w postaci:

$$(1) \quad M dx + N dy = 0.$$

Jeżeli M jest funkcją samej zmiennej x , N zaś funkcją samej zmiennej y , wtedy oczywiście strona pierwsza tego równania jest różniczką zupełną. Prócz tego, strona pierwsza będzie różniczką zupełną, jeżeli spełnia się warunek:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Ponieważ strona druga równania danego jest zerem, możemy więc zawsze zmienić postać równania, mnożąc stronę pierwszą przez czynnik jakiegokolwiek.

Pytamy teraz: czy można wogóle znaleźć funkcję zmiennych x, y taką, że po pomnożeniu przez nią, pierwsza strona równania staje się różniczką zupełną?

Jest jasnym, że gdy w jakiegokolwiek sposób dojdziemy do takiego czynnika, to wtedy całkowanie równania różniczkowego da się uskutecznić. Czynniki takie nazywa się *czynnikami całkującymi*. Okażemy: 1) że czynnik taki istnieje zawsze; 2) że czynników całkujących jest nieskończenie wiele; 3) że mając jeden z nich, możemy znaleźć wszystkie inne.

Co do 1), to wiemy już, że zawsze istnieje całka ogólna równania różniczkowego. Wyobraźmy sobie taką całkę, rozwiązana względem stałej C , to będziemy mieli wyrażenie typu:

$$(2) \quad \varphi(x, y) = C,$$

Jeżeli to jest całka ogólna danego równania (1), to różniczkując równanie (2) i rugując C pomiędzy (2) i pochodną jego, powinniśmy dojść do równania (1). Możemy też powiedzieć, że po wyrugowaniu C , wartość $\frac{dy}{dx}$ stąd otrzymana powinna zgaźać się z wartością $\frac{dy}{dx}$, otrzymaną z równania różniczkowego. Lecz jeżeli przy różniczkowaniu całki ogólnej stała C zniknie sama przez się, co właśnie zachodzi wtedy, gdy ta całka jest

postaci (2), wtedy nie ma oczywiście potrzeby rugowania stałej C_1 i równanie, które otrzymujemy różniczkując równanie (2), powinno dawać wprost wartość pochodnej $\frac{dy}{dx}$.

Z równania (2) mamy:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}},$$

a z równania różniczkowego danego:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{M}{N},$$

powinno zatem być tożsamościowo:

$$\frac{M}{N} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}},$$

lub:

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{N}.$$

Jeżeli oznaczymy przez μ wartość wspólną obu stosunków, będzie:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu N,$$

a stąd na podstawie równania (1):

$$0 = \mu M dx + \mu N dy = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy,$$

skąd widać, że pierwsza strona równania (1), po pomnożeniu przez μ , staje się różniczką zupełną funkcji $\varphi(x, y)$. Znalazszy funkcję φ , dość napisać $\varphi = C$, aby mieć całkę ogólną.

Stąd okazuje się, że zawsze istnieje pewna funkcja μ , mająca własność czynnika całkującego.

Łatwo okazać, że przyjąwszy istnienie jednego takiego czynnika, można ich znaleźć nieskończenie wiele. Istotnie, niechaj czynnik μ sprawia, iż $\mu(Mdx + Ndy)$ jest różniczką zupełną pewnej funkcji φ ; rozważmy wyrażenie $\mu f(\varphi)$, gdzie f jest symbolem funkcji dowolnej. Mnożąc pierwszą stronę równania (1) przez $\mu f(\varphi)$, mamy:

$$f(\varphi) [\mu Mdx + \mu Ndy] = f(\varphi) d\varphi,$$

a więc otrzymujemy różniczkę zupełną wyrażenia $\int f(\varphi) d\varphi$; widzimy więc, że i $\mu f(\varphi)$ jest także czynnikiem całkującym.

Możemy wreszcie dowieść, że wszystkie czynniki całkujące zawierają się w formie $\mu f(\varphi)$. Niechaj μ i μ' będą dwa czynniki całkujące równania (1); wtedy wyrażenia:

$$\mu Mdx + \mu Ndy, \quad \mu' Mdx + \mu' Ndy$$

będą różniczkami zupełnymi dwu funkcji φ, φ' , t. j. równać się będą: $d\varphi, d\varphi'$. Otrzymujemy więc:

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{\mu}{\mu'}, \quad d\varphi' = \frac{\mu'}{\mu} d\varphi.$$

Funkcje φ, φ' zależą od x i y ; rugując pomiędzy nimi zmienną x , możemy uważać φ' za funkcję ilości φ i y . W takim razie różniczką zupełną funkcji φ' będzie:

$$d\varphi' = \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \varphi'}{\partial y} dy,$$

a porównując to wyrażenie z poprzedzającym, znajdujemy $\frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0$, co oznacza, że funkcja φ' nie będzie zawierała zmien-

nej y , gdy wyrugujemy x przy pomocy związku $\varphi(x, y) = \varphi$. Innemi słowy φ' będzie funkcją samego tylko φ , a zatem i $\frac{\mu'}{\mu}$, jako pochodna funkcji φ' względem φ będzie też funkcją samego φ , co można wyrazić w ten sposób:

$$\frac{\mu'}{\mu} = f(\varphi),$$

stąd wynika:

$$\mu' = \mu f(\varphi),$$

co było do okazania.

Wypływa z powyższego, że gdy są znane dwa czynniki całkujące, to iloraz ich, przyrównany do stałej dowolnej (w założeniu, że nie jest już sam przez się stałym), będzie całką ogólną. Istotnie, stosunek ten przyrównany do stałej, daje $f(\varphi) = C$ i gdy $\varphi = \text{const.}$ jest całką ogólną, to i $f(\varphi) = C$ będzie też całką ogólną.

§ 8.

Równanie o pochodnych cząstkowych, któremu czynią zadość czynniki całkujące.

Łatwo znaleźć równanie o pochodnych cząstkowych, któremu czynią zadość czynniki całkujące. W samej rzeczy, gdy $\mu Mdx + \mu Ndy$ ma być różniczką zupełną, wtedy być powinno (p. Rozdział V):

$$\frac{\partial (\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial (\mu N)}{\partial x},$$

lub po rozwinięciu:

$$(1) \quad M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Jest to równanie różniczkowe z nieznaną funkcją μ , w którym występują pochodne cząstkowe tej funkcji względem x i y . Całkowanie tego równania jest zagadnieniem wogóle bardziej złożonym niż całkowanie danego równania różniczkowego. Lecz w wielu przypadkach zadanie się upraszcza, jak to zaraz zobaczymy.

Przypadek I. Załóżmy, że $-\frac{1}{N} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ jest funkcją $\psi(x)$ tylko zmiennej x , wtedy łatwo znaleźć czynnik całkujący μ będący tylko funkcją tej zmiennej.

W samej rzeczy, gdy położymy:

$$\mu = e^{\int \psi(x) dx},$$

lub:

$$\log \mu = \int \psi(x) dx,$$

wtedy będzie:

$$\frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu} = \psi(x); \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0,$$

i równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych (1) będzie spełnionem.

Podobnie istnieje czynnik całkujący, będący funkcją tylko zmiennej y , jeżeli wyrażenie $\frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ jest funkcją tylko tej zmiennej.

Weźmy jako przykład równanie różniczkowe:

$$(x + y) dx + dy = 0.$$

to:

$$M = x + y; \quad N = 1; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0;$$

a stąd $-\frac{1}{N} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = 1$ można uważać za funkcję tylko zmiennej x . Czynnikiem całkującym odpowiednim będzie $\mu = e^{\int dx} = e^x$. W samej rzeczy, mnożąc dane równanie różniczkowe przez e^x , mamy:

$$e^x (x + y) dx + e^x dy = d [e^x y + e^x x - e^x],$$

a więc całką ogólną danego równania będzie:

$$e^x (y + x - 1) = C.$$

Przypadek 2). Załóżmy, że różnica $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$ daje się przedstawić pod postacią $N\varphi(x) - M\psi(y)$; wtedy można okazać, że istnieje czynnik całkujący, będący iloczynem pewnej funkcji samej zmiennej x przez funkcję samej zmiennej y .

Istotnie, weźmy dwie funkcje:

$$X = e^{\int \varphi(x) dx}, \quad Y = e^{\int \psi(y) dy},$$

wtedy iloczyn XY będzie czynnikiem całkującym; kładąc bowiem w równaniu (1) $\mu = XY$, będziemy mieli:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = Y \frac{dX}{dx} = XY \varphi(x); \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = X \frac{dY}{dy} = XY \psi(y),$$

a więc równanie (1) będzie spełnionem tożsamościowo.

Niechaj będzie np. równanie różniczkowe:

$$\left(\frac{x^2 + 2x - 1}{y} + y \right) dx + 2 dy = 0.$$

Mamy:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = - \frac{x^2 + 2x - 1 - y^2}{y^2} = - \frac{1}{y} M + 2 = 1 \cdot N - \frac{1}{y} \cdot M,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0,$$

możemy więc przyjąć: $\varphi(x) = 1$, $\psi(y) = \frac{1}{y}$. Będzie

$X = e^{\int dx} = e^x$, $Y = e^{\int \frac{dy}{y}} = y$, a więc czynnikiem całkującym jest $\mu = ye^x$, całką zaś ogólną równanie:

$$e^x (x^2 + y^2 - 1) = C.$$

Przypadek 3) Niechaj funkcje M i N będą jednorodnymi tego samego stopnia; wtedy czynnikiem całkującym jest:

$$\mu = \frac{1}{Mx + Ny}.$$

W samej rzeczy, biorąc pochodne, mamy:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = - \frac{M + x \frac{\partial M}{\partial x} + y \frac{\partial N}{\partial x}}{(Mx + Ny)^2};$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = - \frac{N + x \frac{\partial M}{\partial y} + y \frac{\partial N}{\partial y}}{(Mx + Ny)^2};$$

podstawiając te wartości w równaniu (1) i redukując, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 x N \frac{\partial M}{\partial x} + y N \frac{\partial N}{\partial x} - x M \frac{\partial M}{\partial y} - y M \frac{\partial N}{\partial y} \\
 = (Mx + Ny) \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).
 \end{aligned}$$

Pamiętając o tem, że funkcyje jednorodne M i N tego samego stopnia n , na mocy twierdzenia E u l e r a, czynią zadość związkom:

$$x \frac{\partial M}{\partial x} + y \frac{\partial M}{\partial y} = nM; \quad x \frac{\partial N}{\partial x} + y \frac{\partial N}{\partial y} = nN,$$

widzimy, że równanie powyższe spełnia się tożsamościowo.

Niechaj będzie np. równanie:

$$\frac{x + y}{y} dx + dy = 0.$$

Czynnikiem całkującym będzie tu $\frac{1}{x+2y}$; mnożąc równanie przez ten czynnik, mamy:

$$\frac{x + y}{x(x + 2y)} dx + \frac{1}{x + 2y} dy = 0,$$

gdzie strona pierwsza jest różniczką zupełną wyrażenia $\frac{1}{2} \log x(x + 2y)$.

Jeżeli umiemy znaleźć innym jakim sposobem czynnik całkujący μ równania różniczkowego jednorodnego, to wiedząc, że czynnikiem całkującym tego równania jest napewno

$\frac{1}{Mx + Ny}$, możemy, przyrównywając iloraz ilości μ przez $\frac{1}{Mx + Ny}$ do stałej, o ile nie jest już sam przez się stałym, otrzymać całkę ogólną. Tą całką będzie zatem:

$$\mu (Mx + Ny) = C.$$

Gdy więc pierwsza strona równania różniczkowego jest już różniczką zupełną, możemy przyjąć, że $\mu = 1$, a wtedy całką ogólną będzie:

$$Mx + Ny = C,$$

o ile pierwsza strona tego związku nie jest już sama przez się ilością stałą.

Tak np. wiemy, że pierwsza strona równania różniczkowego:

$$\frac{x+y}{x(x+2y)} dx + \frac{1}{x+2y} dy = 0,$$

jest różniczką zupełną, wszakże $Mx + Ny$ jest już stałą 1. Przeciwnie dla równań:

$$y dx + x dy = 0, (x+y) dx + x dy = 0,$$

wyrażenie $Mx + Ny$ ma odpowiednio wartości: $2xy$, $x(x+2y)$. Stąd całką pierwszego równania będzie $2xy = C$, drugiego: $x(x+2y) = C$.

§ 9.

Całki osobliwe równań różniczkowych zwyczajnych.

Wspominaliśmy już w paragrafach poprzedzających o istnieniu innego gatunku całek równań różniczkowych, prócz całek ogólnych i szczególnych. O tym gatunku powiemy nieco szczegółowiej.

Niechaj będzie równanie różniczkowe $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ i jego całka ogólna $\varphi(x, y, C) = 0$, gdzie C jest stałą dowolną. Niechaj $\psi(x, y) = 0$ będzie inną całką tegoż równania. Może

się zdarzyć, że φ dla szczególnej wartości C staje się pewną funkcją ψ ; wtedy ψ jest całką szczególną. Lecz może się też zdarzyć, jak to teraz zobaczymy, że ψ nie daje się otrzymać z funkcji φ przy żadnej szczególnej wartości stałej C ; wtedy φ będzie całką innej natury, a mianowicie będzie całką osobliwą.

Jest jasnym, że gdy istnieje taka całka ψ , to ona powinna dać się otrzymać z funkcji φ , gdy położymy za C już nie wartość stałą oznaczoną, lecz pewną funkcję zmiennych x, y . Istotnie w tym celu wystarczy wziąć za C funkcję, wynikającą ze związku:

$$\varphi(x, y, C) = \psi(x, y).$$

Okażemy, że można za stałą C w całce ogólnej wziąć taką funkcję zmiennych x, y , aby otrzymane stąd wyrażenie czyniło zadość danemu równaniu różniczkowemu. Istotnie, jeżeli φ jest całką to, gdy z niej oznaczymy $\frac{dy}{dx}$, a następnie wyrugujemy C z równania na $\frac{dy}{dx}$ i ze związku $\varphi = 0$, powinniśmy otrzymać tę samą wartość $\frac{dy}{dx}$, jaką otrzymuje się z danego równania różniczkowego. Otóż pochodna $\frac{dy}{dx}$ z równania $\varphi = 0$ otrzymuje się za pomocą związku:

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Jeżeli zaś C ma być funkcją zmiennych x, y , wtedy ilość $\frac{dy}{dx}$, pochodząca ze związku $\varphi = 0$, otrzymuje się z równania:

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial C} \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0.$$

Związki (1) i (2) będą identycznymi, jeżeli:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0.$$

Ponieważ ze związku $\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$ wynikałoby, że ilość C jest stałą, i powrócilibyśmy tym sposobem do całki ogólnej, należy więc przyjąć, że:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0.$$

Jeżeli oznaczymy ilość C tak, aby czyniła zadość temu związkowi, wtedy może się zdarzyć, że natrafimy na całkę danego równania; będzie to właśnie całka osobliwa.

Niechaj będzie np. równanie:

$$dx = \frac{y \, dy}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

którego całką ogólną jest:

$$(x - C)^2 + y^2 = a^2.$$

Jest to równanie gromady kół o środku na osi x i o promieniu równym a . Aby otrzymać rozwiązanie osobliwe, należy położyć:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial C} = -2(x - C),$$

skąd wynika $C = x$; kładąc tę wartość w całce ogólnej, znajdujemy:

$$y^2 = a^2.$$

To równanie przedstawia dwie proste $y - a = 0$, $y + a = 0$; te dwie proste są st stycznymi do wszystkich okręgów, przedstawionych przez całkę ogólną, albo, mówiąc dokładniej, te proste są powłócząciami tych okręgów.

Łatwo dowieść, że ta własność jest ogólną dla wszystkich całek osobliwych, które otrzymujemy, kładąc $\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$.

Wyobraźmy sobie całkę ogólną, przedstawioną geometrycznie na płaszczyźnie. Przedstawia ona gromadę krzywych, które otrzymujemy zmieniając stałą C . Wtedy całka osobliwa przedstawia właśnie powłóczącą wszystkich tych krzywych, jeżeli taka powłócząca istnieje.

Wiemy w samej rzeczy, że dla otrzymania powłóczącej należy różniczkować równanie gromady krzywych względem parametru C , następnie wyrugować parametr pomiędzy równaniem danym i jego pochodnym; jest to oczywiście ten sam proces, za pomocą którego dochodzimy do rozwiązania osobliwego.

§ 10.

Równania różniczkowe liniowe jednorodne.

W poprzedzających paragrafach zajmowaliśmy się badaniem równań różniczkowych rzędu 1-go; obecnie przechodzimy do równań rzędu wyższego.

Rozważymy tu klasę specjalną równań różniczkowych rzędu wyższego, t. z. równań różniczkowych liniowych. Tem mianem oznaczamy równania różniczkowe typu:

$$X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = X_{n+1},$$

gdzie wszystkie ilości X są funkcjami tej samej zmiennej x i gdzie zmienna y i jej kolejne pochodne występują tylko liniowo.

Takie równanie nazywa się jednorodem, gdy nie zawiera wyrazu niezależnego x , t. j. gdy $X_{n+1} = 0$.

W tym rozdziale badać będziemy tylko równania jednorodne, a później okażemy, że całkowanie każdego równania niejednorodnego można sprowadzić zawsze do całkowania równania jednorodnego.

Udowodnimy najprzód kilka własności równań jednorodnych liniowych, t. j. równań postaci:

$$(1) \quad X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_n y = 0.$$

Przedewszystkiem za pomocą odpowiedniego przekształcenia można sprowadzić to równanie do innego równania rzędu $n-1$, lecz już nieliniowego.

Położmy $y = e^{\int z dx}$, gdzie z przedstawia nową funkcję zależną zamiast y . Wtedy:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\int z dx} z; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = e^{\int z dx} \left(z^2 + z \frac{dz}{dx} \right); \quad \dots$$

Widzimy więc, że wogóle pochodna ilości y rzędu k -go wyraża się za pomocą pochodnych ilości z aż do pochodnej rzędu $(k-1)$ -go. Wstawiając te wartości w równaniu (1), możemy znieść czynnik wspólny $e^{\int z dx}$ we wszystkich wyrazach i pozostanie równanie ze zmienną z , zawierające pochodne tej ilości aż do pochodnej rzędu $n-1$ włącznie, co było do okazania.

Dalej jest rzeczą jasną, że gdy y_1 jest jednym z rozwiązań szczególnych równania (1), to i $c_1 y_1$, gdzie c_1 jest stałą dowolną, będzie także rozwiązaniem tego równania.

Podobnie, gdy y_1, y_2 są dwa rozwiązania szczególne, to wyrażenie $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, gdzie c_1 i c_2 są stałe dowolne, będzie także całką. Wstawiając bowiem to wyrażenie do równania (1), otrzymujemy dwie kategorie wyrazów; w jednej z nich czynnikiem wspólnym jest c_1 i występują pochodne tylko funkcji y_1 ; w drugiej zaś czynnikiem wspólnym jest c_2 i występują

Należy bliżej określić, w jaki sposób wyznacznik D ma być różnym od zera. Wszystkie wyrazy tego wyznacznika są funkcjami oznaczonymi zmiennej x . Otóż jest jasnym, że wogóle istnieją zawsze wartości x , dla których $D = 0$; należy więc wyobrazić sobie, że x porusza się wewnątrz obszaru, w których nie ma takich punktów x . Innemi słowy funkcya y , określona wzorem (2), jest całką ogólną równania (1) tylko w obszarze, w którym nie ma żadnego punktu, gdzie wyznacznik D staje się zerem.

Mogłoby wszakże zdarzyć się, że dla każdej wartości x wyznacznik D jest zawsze zerem; wtedy wyrażenie (2) w żadnym przypadku nie mogłoby być całką ogólną. Innemi słowy, całki szczególne y_1, y_2, \dots, y_n nie są wtedy wszystkie dobrane tak, aby mogły dać całkę ogólną, czyli, jak się mówi, nie stanowią wtedy układu zasadniczego. W rachunku różniczkowym (Rozdz. V, § 3) badaliśmy już wyznacznik postaci D ; nazwaliśmy go wronskianem i dowiedliśmy, że gdy ten wyznacznik jest zerem dla każdej wartości x , wtedy pomiędzy funkcjami y istnieje związek liniowy. Możemy więc powiedzieć: aby całki szczególne y_1, y_2, \dots, y_n tworzyły układ zasadniczy, koniecznym jest, by pomiędzy nimi nie istniał żaden związek liniowy jednorodny.

Z kolei powstaje znowu pytanie: Czy istnieje układ zasadniczy? Pytanie to zlewa się z innym: czy można całkę ogólną równania różniczkowego liniowego i jednorodnego przedstawić w postaci (2), t. j. tak, aby stałe c_1, c_2, \dots, c_n zachodziły w niej tylko liniowo.

Jeżeli odpowiedź na to pytanie będzie twierdzącą, to oczywiście i odpowiedź na pierwsze pytanie także będzie twierdzącą. Otóż można dowieść, że w rzeczy samej całka ogólna równania (1) daje się zawsze przedstawić w postaci (2).

Aby to okazać, udowodnimy najprzód twierdzenie następujące: Jeżeli znamy jedną całkę szczególną $y = y_1$ równania (1), wtedy całkowanie równa-

nia tego sprowadzić można do całkowania innego równania tego samego typu, lecz rzędu o jedność mniejszego.

Położmy w samej rzeczy $y = y_1 z$, gdzie z jest nową zmienną zależną. Wtedy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} z + y_1 \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx^2} z + 2 \frac{dy_1}{dx} \frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dy^2} y_1$$

. , . . .

Podstawiając te wartości w równaniu (1) i uwzględniając to, że część zawierająca czynnik z znosi się, ponieważ y_1 jest rozwiązaniem równania (1) na mocy założenia, otrzymujemy równanie liniowe, zawierające tylko pochodne zmiennej z od pochodnej rzędu 1-go do n -go włącznie i nie zawierające wyraźnie samej zmiennej z . Mamy tedy:

$$X'_0 \frac{d^n z}{dx^n} + X'_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \dots + X'_{n-1} \frac{dz}{dx} = 0,$$

gdzie $X'_0, X'_1, \dots, X'_{n-1}$ są funkcjami zmiennej x . Położmy $\frac{dz}{dx} = u$, to otrzymamy:

$$X'_0 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + X'_1 \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \dots + X'_{n-1} u = 0,$$

t. j. równanie różniczkowe liniowe jednorodne rzędu $n - 1$. Znalazłszy u , otrzymamy:

$$z = \int u dx + c_1,$$

a stąd:

$$y = y_1 \quad z = y_1 \left(\int u \, dx + c_1 \right).$$

Przyjmijmy teraz, że całka ogólna równania różniczkowego liniowego rzędu $(n-1)$ go ma postać:

$$u = c_2 u_2 + c_3 u_3 + \dots + c_n u_n$$

i dowiedzmy, że taż własność sprawdza się dla równania różniczkowego liniowego rzędu n -go.

Istotnie, z poprzedzającego przekształcenia wynika, że gdy y_1 jest całką szczególną równania danego, wtedy:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int u_2 \, dx + c_3 y_1 \int u_3 \, dx + \dots + c_n y_1 \int u_n \, dx.$$

Lecz:

$$y_1 \int u_2 \, dx, \quad y_1 \int u_3 \, dx, \quad \dots, \quad y_1 \int u_n \, dx,$$

są całkami szczególnymi równania danego, które możemy oznaczyć przez y_2, y_3, \dots, y_n , a stąd wynika, że gdy twierdzenie jest prawdziwem dla rzędu $n-1$, to jest także prawdziwem dla rzędu n -go.

Pozostaje więc tylko pokazać, że twierdzenie jest prawdziwem dla $n = 1$, t. j. że całce równania liniowego jednorodnego rzędu 1-go można zawsze nadać postać $y = c y_1$, gdzie y jest całką szczególną. Otóż dla równania:

$$\frac{dy}{dx} + X_1 y = 0,$$

mamy:

$$\frac{dy}{y} = - X_1 \, dx,$$

a całkując :

$$\log y = - \int X_1 dx + \log c,$$

$$y = ce^{-\int X_1 dx},$$

jak właśnie być powinno.

§ 11.

Równania liniowe jednorodne o współczynnikach stałych.

Przechodzimy do przypadku, w którym równanie różniczkowe liniowe (1) paragrafu poprzedzającego ma wszystkie współczynniki X stałe, t. j. gdy równanie jest postaci:

$$(1) \quad a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0.$$

Spróbujmy, czy funkcja typu $y = e^{ax}$, gdzie a jest stałą, może sprawdzić to równanie. Kolejne pochodne funkcji y są:

$$\frac{dy}{dx} = ae^{ax}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 e^{ax}, \quad \dots,$$

co podstawiając w równaniu (1), znajdziemy:

$$e^{ax} (a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_n) = 0,$$

a ponieważ e^{ax} nie może być zerem, więc zerem być musi czynnik drugi. Aby więc $y = e^{ax}$ mogło być całką szczególną równania (1), jest koniecznym, by a było jednym z pierwiastków równania algebraicznego:

$$(2) \quad a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

które tworzy się z równania (1), gdy zamiast kolejnych pochodnych funkcji y napiszemy odpowiednie kolejne potęgi ilości a . Niechaj a_1, a_2, \dots, a_n będą n różnymi pierwiastkami równania (2) — zakładamy na początek różność pierwiastków (1) — wtedy $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}$ będą n całkami szczególnymi równania (1). Jeżeli okaże się, że wrońskian, utworzony z tych całek szczególnych i z ich pochodnych aż do pochodnych rzędu $(n-1)$ -go włącznie, jest różnym od zera, wtedy według poprzednio wyłożonej teorii będziemy mogli twierdzić, że całką ogólną naszego równania (1) jest:

$$y = c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x} + \dots + c_n e^{a_n x}.$$

Wrońskian, o którym mowa, jest istotnie różnym od zera, gdyż:

$$\begin{vmatrix} e^{a_1 x} & e^{a_2 x} & \dots & e^{a_n x} \\ a_1 e^{a_1 x} & a_2 e^{a_2 x} & \dots & a_n e^{a_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} e^{a_1 x} & a_2^{n-1} e^{a_2 x} & \dots & a_n^{n-1} e^{a_n x} \end{vmatrix} \\ = e^{a_1 x} \cdot e^{a_2 x} \cdot \dots \cdot e^{a_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Tu czynnik pierwszy po stronie drugiej jest funkcją wykładniczą, zawsze różną od zera. Czynnik drugi jest wyznacznikiem, równym, jak wiadomo z algebry, iloczynowi różnic pierwiastków równania danego, branych we wszelkich kombinacjach po dwa; jest więc także różnym od zera, gdyż żaden z czynników jego nie może być zerem, albowiem wyłączyliśmy przypadek równości dwu pierwiastków.

Tak np równaniu:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - n^2y = 0,$$

odpowiada równanie algebraiczne:

$$\alpha^2 - n^2 = 0,$$

skąd $\alpha = \pm n$, a więc całką ogólną, będzie:

$$y = c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx},$$

Przyjmijmy teraz, że równanie charakterystyczne (2) ma dwa pierwiastki równe; wtedy nie będziemy mieli n całek szczególnych różnych i nie będziemy mogli znaleźć drogą wskazaną całki ogólnej danego równania. Dla znalezienia postaci, jaką przybiera wtedy całka ogólna, użyjemy metody przejścia do granicy. Niechaj a_1, a_2 będą dwa pierwiastki równe. Przyjmijmy na chwilę, że są różnymi; że się różnią mianowicie o ilość h . Wtedy, za pomocą metody poprzedzającej, możemy znaleźć całkę ogólną; przekształcając ją odpowiednio i przechodząc do granicy, znajdziemy całkę ogólną. Połóżmy tedy $a_2 = a_1 + h$, to całką ogólną będzie:

$$\begin{aligned} & c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x} + \dots + c_n e^{a_n x} \\ &= (c_1 + c_2 e^{hx}) e^{a_1 x} + c_3 e^{a_3 x} + \dots + c_n e^{a_n x} \\ &= \left[(c_1 + c_2) + c_2 hx + c_2 \frac{h^2 x^2}{2!} + \dots \right] e^{a_1 x} + c_3 e^{a_3 x} + \dots + c_n e^{a_n x}. \end{aligned}$$

Połóżmy $c_1 + c_2 = C_1$, $c_2 h = C_2$, to będzie :

$$\left[C_1 + C_2 x + C_2 \frac{hx^2}{2!} + \dots \right] e^{a_1 x} + c_3 e^{a_3 x} + \dots + c_n e^{a_n x}. *$$

a w granicy dla $h = 0$:

$$(C_1 + C_2 x) e^{a_1 x} + c_3 e^{a_2 x} + \dots + c_n e^{a_n x}.$$

Jest to całka ogólna w przypadku, gdy dwa pierwiastki równania charakterystycznego są równymi.

Podobnie w przypadku k pierwiastków równych dość pomnożyć funkcję wykładniczą, odpowiadającą temu pierwiastkowi, przez funkcję całkowitą zmiennej x stopnia $k - 1$ o współczynnikiem dowolnych.

Zresztą łatwo sprawdzić, że gdy a_1 jest pierwiastkiem podwójnym równania (2), wtedy $y = x e^{a_1 x}$ jest całką szczególną. Istotnie jest wtedy:

$$\frac{dy}{dx} = e^{a_1 x} + x a_1 e^{a_1 x}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 2 a_1 e^{a_1 x} + x a_1^2 e^{a_1 x}; \quad \dots$$

Postawiając te wartości w danem równaniu różniczkowym i znośząc wspólny czynnik wykładniczy, znajdujemy:

$$(a_0 a_1^n + a_1 a_1^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n) \\ + (n a_1 a_1^{n-1} + (n-1) a_1 a_1^{n-2} + \dots + a_{n-1}) = 0.$$

Ten związek sprawdza się w samej rzeczy, gdy a_1 jest pierwiastkiem podwójnym, gdyż dla $x = a_1$ znika pierwsza strona równania (2) i jej pierwsza pochodna, skutkiem tego każdy z dwóch wyrazów w nawiasie w związku poprzednim jest równy zero.

Podobnie dowieść można ogólnie, że gdy a_1 jest k -krotnym pierwiastkiem równania (2), wtedy $x^{k-1} e^{a_1 x}$ jest całką szczególną.

Niechaj będzie np. równanie różniczkowe:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 0;$$

* odpowiadającym mu równaniem algebraicznym jest równanie $a^n = 0$, mające n pierwiastków równych zero. Całką ogólną równania różniczkowego będzie:

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_n x^{n-1}.$$

Przyjmijmy na koniec, że pomiędzy pierwiastkami równania (2) niektóre są urojonymi; możnaby wtedy zastosować tę samą metodę i otrzymać całkę ogólną pod postacią urojoną. Lecz ponieważ we wszystkich stosowanych przez nas dotąd zasadach mieliśmy do czynienia tylko z funkcjami rzeczywistymi zmiennych rzeczywistych, postaramy się więc wyłączyć wszystkie rozważania ilości urojonych i nadać całce ogólnej postać rzeczywistą. Niechaj:

$$a_1 = \beta + i\gamma, \quad a_2 = \beta - i\gamma,$$

będą dwa pierwiastki urojone sprzężone. Wtedy:

$$\begin{aligned} c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x} &= e^{\beta x} (c_1 e^{i\gamma x} + c_2 e^{-i\gamma x}) \\ &= e^{\beta x} [c_1 (\cos \gamma x + i \sin \gamma x) + c_2 (\cos \gamma x - i \sin \gamma x)] \\ &= e^{\beta x} [(c_1 + c_2) \cos \gamma x + (c_1 - c_2) i \sin \gamma x]. \end{aligned}$$

Kładąc:

$$c_1 + c_2 = C_1, \quad i(c_1 - c_2) = C_2,$$

gdzie C_1, C_2 są dwie nowe stałe dowolne, znajdujemy:

$$e^{\beta x} [C_1 \cos \gamma x + C_2 \sin \gamma x].$$

W całce ogólnej znajdzie się taki wyraz zamiast dwu wyrazów, odpowiadających pierwiastkom urojonym. Możliwość w samej rzeczy okazać, że $e^{\beta x} \cos \gamma x, e^{\beta x} \sin \gamma x$ są całkami szczególnymi równania danego.

Niechaj będzie np. równanie:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0;$$

odpowiedniemi równaniami algebraicznymi jest:

$$a^3 - a - 6 = 0,$$

którego pierwiastkami są :

$$a = 2, \quad a = -1 + i\sqrt{2}, \quad a = -1 - i\sqrt{2}.$$

a więc całką ogólną będzie:

$$y = c_1 e^{2x} + (c_2 \cos x \sqrt{2} + c_3 \sin x \sqrt{2}) e^{-x}.$$

Całką ogólną równania:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0,$$

jest :

$$y = C \cos x + C_1 \sin x.$$

Do tego rezultatu dojść można, zważywszy, że $\cos x$, $\sin x$ są takimi dwiema funkcjami zmiennej x , że ich pochodne drugie równają się samym funkcjom ze zmienionym znakiem, a stąd przedstawiają one dwa rozwiązania szczególne danego równania.

§ 12.

Równania liniowe niejednorodne.

Niechaj będzie równanie niejednorodne:

$$(1) \quad X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_n y = X,$$

gdzie X_0, X_1, \dots, X_n, X są funkcjami tylko zmiennej x .

Zcałkujemy równanie jednorodne:

$$(2) \quad X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_n y = 0,$$

które otrzymujemy z równania (1), znosząc wyraz po stronie drugiej. Niechaj:

$$(3) \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n.$$

będzie całką ogólną równania (2). Zobaczymy, czy można tą postacią (3) zadość uczynić równaniu (1), przyjmując, że ilości c nie są stałymi lecz funkcjami zmiennej x . Utwórzmy pochodne kolejne funkcji (3).

Napiszmy najprzód pochodną pierwszą:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= c_1 \frac{dy_1}{dx} + \dots + c_n \frac{dy_n}{dx} \\ &+ y_1 \frac{dc_1}{dx} + \dots + y_n \frac{dc_n}{dx}, \end{aligned}$$

i połączmy:

$$y_1 \frac{dc_1}{dx} + \dots + y_n \frac{dc_n}{dx} = 0,$$

to będzie:

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dx} + \dots + c_n \frac{dy_n}{dx}.$$

Jest to wyrażenie takie samo, jak to, do którego byśmy doszli, uważając ilości c za stałe.

Weźmy pochodną pochodnej pierwszej i uczynimy znów równą zero część, zawierającą pochodne ilości c ; prowadźmy to działanie w ten sam sposób aż do pochodnej rzędu $n-1$ -go włącznie. Otrzymamy tedy układ równań:

ragrafu poprzedzającego, jest różnym od zera, gdyż inaczej wyrażenie (3) nie byłoby całką ogólną równania (2). Po wyznaczeniu pochodnych $\frac{dc_1}{dx}, \dots, \frac{dc_n}{dx}$ w funkcji zmiennej x , pozostanie wykonać tylko proste kwadratury dla wyznaczenia samych ilości c . Wyznaczenie każdej z tych ilości wprowadza jedną stałą dowolną tak, że razem będziemy mieli n stałych dowolnych.

Niechaj będzie do zcałkowania równanie :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - n^2y = e^x.$$

Znajdźmy najprzód całkę ogólną równania:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - n^2y = 0;$$

jest nią (patrz str. 207):

$$y = c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx}.$$

Trzeba teraz wyznaczyć ilości c_1, c_2 z warunków:

$$y_1 \frac{dc_1}{dx} + y_2 \frac{dc_2}{dx} = 0; \quad y'_1 \frac{dc_1}{dx} + y'_2 \frac{dc_2}{dx} = e^x,$$

t. j. z warunków:

$$e^{nx} \frac{dc_1}{dx} + e^{-nx} \frac{dc_2}{dx} = 0; \quad ne^{nx} \frac{dc_1}{dx} - ne^{-nx} \frac{dc_2}{dx} = e^x,$$

z których wynika:

$$\frac{dc_1}{dx} = \frac{1}{2n} e^{(1-n)x}; \quad \frac{dc_2}{dx} = -\frac{1}{2n} e^{(1+n)x}.$$

Stąd:

$$c_1 = \frac{1}{2n} \int e^{(1-n)x} dx = \frac{1}{2n(1-n)} e^{(1-n)x} + C_1,$$

$$c_2 = -\frac{1}{2n} \int e^{(1+n)x} dx = -\frac{1}{2n(1+n)} e^{(1+n)x} + C_2,$$

tak że całką ogólną danego równania różniczkowego będzie:

$$y = \frac{1}{2n(1-n)} e^x + C_1 e^{nx} - \frac{1}{2n(1+n)} e^x + C_2 e^{-nx},$$

$$= \frac{1}{1-n^2} e^x + C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}.$$

§ 13.

*Twierdzenia o równaniach różniczkowych liniowych.
Wzór Liouville'a.*

Widzieliśmy w paragrafie poprzedzającym, w jaki sposób otrzymać można całkę równania różniczkowego liniowego zupełnego (ze stroną drugą różną od zera) z całki równania jednorodnego, które powstaje z poprzedniej przez zniesienie strony drugiej. Obecnie udowodnimy kilka twierdzeń następujących.

Niechaj będzie równanie:

$$(1) \quad X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_n y = X;$$

utwórzmy odpowiednie równanie jednorodne:

$$(2) \quad X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_n y = 0.$$

Znając całkę szczególną Y równania (1) i całkę ogólną Y_1 równania (2), można odrazu znaleźć całkę ogólną równania (1), biorąc sumę całek Y i Y_1 .

Istotnie, podstawiając Y zamiast y po pierwszej stronie

równania (1), sprowadzamy ją do X ; podstawiając Y_1 zamiast y po pierwszej stronie tegoż równania (1) sprowadzamy ją do zera, a więc podstawiając $Y + Y_1$ zamiast y po stronie pierwszej tego równania, sprowadzamy ją do X . Skąd wynika, że $Y + Y_1$ jest całką tego równania; a ponieważ ta całka zawiera n stałych dowolnych (gdyż Y_1 jest całką ogólną równania (2)), a więc $Y + Y_1$ jest całką ogólną równania (1).

Widzimy przeto, że gdy według teorii, wyłożonej w paragrafie poprzedzającym, znalezienie całki ogólnej równania (1) z całki ogólnej równania (2) wymagało wykonania n kwadratur, to w metodzie niniejszej te kwadratury są zbytecznymi, gdy znamy jedną całkę szczególną równania (1).

Weźmy np. równanie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 2 \cos mx + 3 \sin mx.$$

Ponieważ znamy całkę ogólną równania zredukowanego $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$, mianowicie $Y_1 = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx$, przeto dla rozwiązania zadania potrzeba znać tylko jeszcze jedną całkę szczególną danego równania. Spróbujmy, czy taką całką nie będzie wyrażenie postaci: $Y = a \cos mx + \beta \sin mx$, gdzie a i β są dwie stałe nieznanne. Biorąc pochodne i podstawiając w równaniu danem, znajdziemy, że będzie ono spełnionem, gdy:

$$a = \frac{2}{n^2 - m^2}, \quad \beta = \frac{3}{n^2 - m^2},$$

a więc:

$$y = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx + \frac{2 \cos mx + 3 \sin mx}{n^2 - m^2},$$

jest szukaną całką ogólną.

Udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

1) Gdy znamy jedną całkę szczególną równania (1), to całkowanie tego równania spro-

wadzić można do całkowania równania liniowego jednorodnego tego samego rzędu.

2) Gdy znamy jedną całkę szczególną równania (2), to całkowanie równania (1) sprowadzić można do całkowania równania liniowego niejednorodnego rzędu niższego.

Niechaj Y będzie całką szczególną równania (1), wtedy kładąc $y = Y + z$ dochodzimy z łatwością do równania jednorodnego względem z i tego samego rzędu; tym sposobem twierdzenie 1) jest dowiedzionem.

Niechaj Y_1 będzie całką szczególną równania (2), wtedy przekształcenie $y = CY_1$ i założenie $\frac{dC}{dx} = z$, prowadzi do redukcji, o jakiej mowa w twierdzeniu pod 2).

Wyprowadzimy jeszcze godne uwagi wyrażenie, podane przez Liouville'a na wrocławskian n całek szczególnych równania różniczkowego liniowego jednorodnego.

Ze związków:

$$X_0 \frac{d^n y_1}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} + \dots + X_n y_1 = 0,$$

.....

$$X_0 \frac{d^n y_n}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}} + \dots + X_n y_n = 0,$$

ragując X_2, X_3, \dots, X_n , otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} X_0 \frac{d^n y_1}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}, & \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}}, & \dots, & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_0 \frac{d^n y_n}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}}, & \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}}, & \dots, & y_n \end{vmatrix} = 0,$$

lub, co na jedno wychodzi:

$$X_0 \begin{vmatrix} y_1^{(n)}, y_1^{(n-2)}, \dots, y_1 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ y_n^{(n)}, y_n^{(n-2)}, \dots, y_n \end{vmatrix} + X_1 \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)}, y_1^{(n-2)}, \dots, y_1 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ y_n^{(n-1)}, y_n^{(n-2)}, \dots, y_n \end{vmatrix} = 0.$$

Na zasadzie twierdzenia, dowiedzionego w „Rachunku różniczkowym“ (Rozdz. V, § 3), wyznacznik pierwszy jest pochodną drugiego, który oznaczymy przez D , a więc:

$$X_0 \frac{dD}{dx} + X_1 D = 0,$$

stąd:

$$\frac{dD}{D} = - \frac{X_1}{X_0} dx,$$

$$\log D = - \int \frac{X_1}{X_0} dx + \log C,$$

a zatem:

$$D = C e^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}.$$

To wyrażenie wrońskianu D za pomocą funkcji wykładniczej nazywa się wzorem Liouville'a.

§ 14.

O pewnych szczególnych klasach równań różniczkowych liniowych.

Widzieliśmy, że w przypadku, gdy współczynniki równań liniowych są stałymi, można znaleźć całkę ogólną i że szukanie jej sprowadza się do rozwiązania równania algebraicznego. Gdy współczynniki są funkcjami zmiennej x , to w ogólności nie mo-

żemy podać metody ogólnej rozwiązania, którego powodzenie zależy od użycia różnych mniej lub więcej odpowiednich sposobów sztucznych. Zbadamy tu niektóre typy prostsze takich równań.

Niechaj będzie równanie:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{a_1}{ax+b} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{a_i}{(ax+b)^i} \frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}} + \dots + \frac{a_n}{(ax+b)^n} y = X,$$

gdzie a_1, \dots, a_n, a, b są stałymi, X zaś pewną funkcją zmiennej x .

Położmy $ax + b = e^t$ i weźmy t za zmienną niezależną zamiast x . Będzie:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{a}{ax+b} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{a}{ax+b} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} \frac{a}{ax+b} - \frac{dy}{dt} \frac{a^2}{(ax+b)^2} \frac{ax+b}{a} \right] \\ &= \frac{a^2}{(ax+b)^2} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Podstawiając te wartości w równaniu danem i mnożąc przez $(ax + b)^n$, otrzymamy równanie o współczynnikach stałych.

Niechaj będzie np. równanie:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - (2n-1) x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0.$$

Dzieląc przez x^2 , otrzymamy równanie powyższego typu. Kładziemy $x = e^t$ i znajdujemy:

$$\left[\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right] - (2n-1) \frac{dy}{dt} + n^2 y = 0,$$

t. j.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} + n^2y = 0.$$

Odpowiadające temu równaniu różniczkowemu równanie algebraiczne charakterystyczne jest:

$$z^2 - 2nz + n^2 = 0 \text{ lub } (z - n)^2 = 0,$$

o pierwiastku podwójnym $z = n$. Całkami szczególnymi będą więc e^{nt} i te^{nt} , a całką ogólną po wprowadzeniu x :

$$y = c_1 x^n + c_2 x^n \log x.$$

Rozważmy inny typ równania różniczkowego liniowego o współczynnikach niestałych:

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0.$$

Położmy $y = x^a$, gdzie a jest stałą wyznaczyć się mającą. Biorąc pochodne, znajdujemy:

$$\frac{dy}{dx} = ax^{a-1}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a(a-1)x^{a-2}; \quad \dots;$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a(a-1)\dots(a-n+1)x^{a-n},$$

a podstawiając te wyrażenia w równaniu danem, będziemy mieli czynnik wspólny x^a , oraz:

$$a_0 a(a-1)\dots(a-n+1) + a_1 a(a-1)\dots(a-n+2) \\ + \dots + a_{n-1} a + a_n.$$

Aby rozwiązać równanie różniczkowe, trzeba znaleźć wartość a , sprowadzającą do zera poprzednie wyrażenie; rozwiązując przeto względem a wyrażenie to, przyrównywane do zera, znajdziemy n wartości a i odpowiednich n całek szczególnych, z których złożymy całkę ogólną sposobem znanym.

§ 15.

Równania liniowe 2-go rzędu.

Zbadamy teraz specjalnie równania liniowe 2-go rzędu:

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = X.$$

Jeżeli znamy jedną całkę szczególną równania:

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0,$$

to można zniżyć rząd równania (2) i otrzymamy równanie 1-go rzędu, które daje się zawsze całkować; możemy zatem powiedzieć, że w tym przypadku będzie można znaleźć całkę ogólną równania (2), skąd, jak wiadomo, za pomocą kwadratur znajdziemy całkę równania (1).

Dla zcałkowania równania 2-go rzędu (1), wystarczy przeto znajomość całki szczególnej równania (2).

Pokażemy, jak ten rachunek można uprościć. Niechaj y_1 będzie całką szczególną równania (2), tak że:

$$(3) \quad \frac{d^2y_1}{dx^2} + P \frac{dy_1}{dx} + Qy_1 = 0.$$

Od równania (1), pomnożonego przez y_1 , odejmijmy równanie (3), pomnożone przez y , to będzie:

$$\left(y_1 \frac{d^2y}{dx^2} - y \frac{d^2y_1}{dx^2} \right) + P \left(y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx} \right) = Xy_1.$$

Położmy $y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx} = z$, skąd $y_1 \frac{d^2y}{dx^2} - y \frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$, to otrzymamy:

$$\frac{dz}{dx} + Pz = Xy_1.$$

Całką ogólną tego równania liniowego 1-go rzędu jest:

$$z = e^{-\int P dx} \left[\int Xy_1 e^{\int P dx} + C \right].$$

Z poprzedniego wynika:

$$\frac{d \frac{y}{y_1}}{dx} = \frac{z}{y_1^2}, \text{ skąd } \frac{y}{y_1} = \int \frac{z}{y_1^2} dx + C_2,$$

a więc:

$$y = y_1 \int \frac{z}{y_1^2} dx + C_2 y_1.$$

Jest to wartość zmiennej y , stanowiąca rozwiązanie równania (1).

Okażemy teraz interesującą własność całek szczególnych równania liniowego jednorodnego rzędu 2-go, odkrytą przez **Sturma**.

Jeżeli y_1, y_2 są dwie całki szczególne różne równania (2), to wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix},$$

powinien być różnym od zera dla wszelkiej wartości x , zawartej w rozważanym obszarze, t. j. funkcya $y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx}$ dla każdej wartości x , zawartej w tym obszarze, powinna być jednego znaku. Niechaj będzie np. dodatnią. Jeżeli y_1 jest zerem dla $x = a$ i dla $x = b$, to dla tych wartości x musi być $y_2 \frac{dy_1}{dx}$

ujemnem, t. j. y_2 i $\frac{dy_1}{dx}$ muszą być znaku przeciwnego. Lecz pomiędzy temi dwoma punktami a i b , dla których znika funkcyja y_1 , istnieje z pewnością, na mocy twierdzenia Rollego, taki punkt pośredni, dla którego znika pochodna $\frac{dy_1}{dx}$; jeżeli więc x przechodzi od wartości a do wartości b , pochodna $\frac{dy_1}{dx}$ zmienia znak; zmienia tedy znak i funkcyja y_2 , gdyż iloczyn musi być znaku stałego, tak w a jak i w b . Wynika stąd, że funkcyja y_2 musi stawać się zerem w punkcie, zawartym pomiędzy a i b . A zatem pomiędzy dwoma kolejnymi punktami zerowymi funkcyi y_1 istnieje zawsze punkt zerowy funkcyi y_2 i podobnie pomiędzy dwoma punktami zerowymi funkcyi y_2 istnieje punkt zerowy funkcyi y_1 ; t. j. miejsca zerowe dwu całek szczególnych y_1, y_2 równania różniczkowego rzędu 2-go są wzajemnie przeciwnymi. Zakładamy naturalnie zawsze ciągłość funkcyj, gdyż inaczej nie moglibyśmy do nich stosować twierdzenia Rollego i wyprowadzać pozostałych dedukcyj.

§ 16.

Układy równań liniowych jednoczesnych.

Wyobraźmy sobie n równań, zawierających n funkcyj y, z, \dots zmiennej x i pochodne tych funkcyj. Stawiamy zagadnienie wyznaczenia tych funkcyj.

Dla prostoty przyjmijmy, że mamy dwa równania, zawierające y, z i ich pochodne aż do drugiego rzędu włącznie:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0, \\ \varphi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Położmy:

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = u, \quad \frac{dz}{dx} = v, \quad \dots,$$

to równania:

$$(3) \quad f\left(x, y, z, u, v, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\right) = 0; \quad \varphi\left(x, y, z, u, v, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\right) = 0,$$

razem z równaniami (2) stanowią cztery równania, zawierające cztery funkcyje y, z, u, v i ich pochodne.

W ogólności, mając układ n równań różniczkowych, zawierających n funkcyj i ich pochodne rzędu wyższego, możemy zawsze układ ten sprowadzić do układu m równań ($m > n$) pomiędzy m funkcyjami i ich pochodnymi rzędu 1-go.

Innymi słowy, powiększając liczbę równań i funkcyj, możemy zawsze obniżyć rząd równań danych. Tak np. gdy mamy jedno równanie z jedną funkcyą y i jej pochodnymi aż do pochodnej rzędu r -go, to kładąc $\frac{dy}{dx} = z, \frac{dz}{dx} = u, \dots$, otrzymamy $r-1$ równań, które razem z danem stanowią r równań pomiędzy r funkcyjami y, z, u, \dots i w tych r równaniach występują tylko pochodne pierwsze tych funkcyj. Lecz oczywiście rozwiązanie tego układu nie przedstawia mniej trudności niż rozwiązanie równania pierwotnego.

Pokażemy teraz, jak wykonywa się postępowanie odwrotne, t. j. w jaki sposób z układu n równań 1-go rzędu pomiędzy n funkcyjami, otrzymuje się inny układ o mniejszej liczbie rów-

nań różniczkowych rzędu wyższego z mniejszą liczbą funkcyj, a w szczególności jedno tylko równanie różniczkowe z jedną funkcją. Dla prostoty przyjmijmy, że mamy trzy równania z trzema zmiennymi y, z, u . Pomyślmy sobie, że te równanie rozwiązaliśmy względem trzech pierwszych pochodnych funkcyj y, z, u , lub jeszcze ogólniej, pomyślmy, że te trzy równania zostały za pomocą procesów eliminacyjnych sprowadzone do postaci:

$$f_1 \left(x, y, z, u, \frac{dy}{dx} \right) = 0; \quad f_2 \left(x, y, z, u, \frac{dz}{dx} \right) = 0;$$

$$f_3 \left(x, y, z, u, \frac{du}{dx} \right) = 0.$$

Przy pomocy ostatniego równania wyrazimy y przez $x, z, u, \frac{du}{dx}$, a różniczkując, znajdziemy znów pochodną $\frac{dy}{dx}$, wyrażoną przez $x, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}$. Podstawiając te wartości do dwu pierwszych równań, otrzymamy dwa równania typu:

$$\varphi_1 \left(x, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{dz}{dx} \right) = 0; \quad \varphi_2 \left(x, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx} \right) = 0;$$

Rozwiązując je względem $z, \frac{dz}{dx}$, następnie różniczkując tak otrzymane z względem x i porównywając z otrzymanem $\frac{dz}{dx}$, znajdziemy równanie trzeciego rzędu z jedną funkcją u :

$$\psi \left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3} \right) = 0.$$

Podobne postępowanie można stosować w ogólności; zresztą postępowanie to, najściślejsze pod względem teoretycznym, przed-

stawia częstokroć trudności praktyczne i może być nieprzystępne.

Jest ono przystępnem, gdy równania dane są liniowemi, a więc gdy łatwo rozwiązać się dają względem zmiennych, które w nich zachodzą.

Możemy pokazać na przykładzie, w jaki sposób ta metoda stosuje się w przypadku równań liniowych.

Niechaj będą dwa równania:

$$\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0; \quad \frac{dz}{dx} - y + z = 0.$$

Z drugiego otrzymujemy $y = \frac{dz}{dx} + z$, skąd:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx},$$

a po podstawieniu tej wartości w równaniu pierwszym:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 4 \frac{dz}{dx} + 4z = 0.$$

To równanie jest liniowem jednorodnem o współczynnikach stałych; odpowiadające mu równanie charakterystyczne jest:

$$t^2 + 4t + 4 = 0, \text{ lub } (t + 2)^2 = 0;$$

mamy zatem dwie całki szczególne: e^{-2x} i xe^{-2x} , tak że całką ogólną jest:

$$z = (c_1 + c_2 x) e^{-2x},$$

a stąd:

$$y = (c_2 - c_1) e^{-2x} - c_2 x e^{-2x}.$$

§ 17.

Równania różniczkowo rzędu wyższego.

Z pomiędzy równań różniczkowych rzędu wyższego nad pierwszy rozpatrzyliśmy dotąd tylko równania liniowe. Obecnie zbadamy inne typy równań.

1. Niechaj będzie równanie, zawierające tylko pochodną rzędu n -go funkcji y , t. j. równanie typu:

$$f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, x\right) = 0.$$

Rozwiązując to równanie względem pochodnej $\frac{d^n y}{dx^n}$, otrzymamy związek:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X,$$

gdzie X jest pewną funkcją zmiennej x . Związek ten jest równaniem liniowym; do zcałkowania go możnaby zastosować metodę, podaną w paragrafach poprzedzających, pamiętając, że całka równania odpowiedniego bez strony drugiej, t. j. całka równania $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$ jest:

$$y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n.$$

Lecz w przypadku obecnym rzecz się upraszcza, albowiem z równania $\frac{d^n y}{dx^n} = X$ możemy otrzymać wprost przez całkowanie:

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int X dx + C_1,$$

a całkując po raz drugi:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int dx \int X dx + C_1x + C_2.$$

Powtarzając to działanie, dojdziemy nakoniec do szukanego wyrażenia na y .

2) Rozpatrzmy równanie postaci:

$$f \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n} \right) = 0,$$

w którym występują tylko dwie pochodne kolejne.

Kładąc $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = p$, mamy $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{dp}{dx}$, i równanie dane sprowadza się do równania:

$$f \left(p, \frac{dp}{dx} \right) = 0,$$

które rozwiązując względem $\frac{dp}{dx}$, otrzymamy:

$$\frac{dp}{dx} = \varphi(p),$$

skąd:

$$x = \int \frac{dp}{\varphi(p)} + C.$$

Jeżeli z tego związku określimy p w funkcji zmiennej x :

$$p = \psi(x),$$

znajdziemy:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \psi(x),$$

t. j. równanie typu, poprzednio rozważanego.

Jako przykład podajemy równanie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

którego całką jest:

$$y = c_1 + \frac{e^{x-c_2} + e^{-(x-c_2)}}{2}.$$

3) Weźmy równanie, w którym zachodzą tylko dwie pochodne rzędów różniących się o dwie jednostki, t. j. równanie postaci:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right).$$

Położmy $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p$, skąd $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^2 p}{dx^2}$; równanie dane zamieni się przeto na następujące:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = f(p).$$

Położmy tu: $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{dq}{dx} = \frac{dq}{dp} q$, to będzie:

$$q \frac{dq}{dp} = f(p),$$

skąd:

$$q \, dq = f(p) \, dp.$$

Całkowanie daje:

$$\frac{1}{2} q^2 = \int f(p) \, dp + C.$$

t. j.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 = \int f(p) dp + C.$$

Stąd wynika:

$$dx = \frac{dp}{\sqrt{2 \int f(p) dp + 2C}},$$

a po zcałkowaniu:

$$x = \int \frac{dp}{\sqrt{2 \int f(p) dp + 2C}} + C_1.$$

Z tego związku otrzymamy p jako funkcję zmiennej x , a po podstawieniu w równaniu $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p$, pozostanie jeszcze raz zcałkować równanie typu, rozważanego na początku tego paragrafu.

4) Rozpatrzmy przypadek, w którym równanie dane jest jednorodnym stopnia m -go względem zmiennej y i jej pochodnych.

W tym przypadku można obniżyć rząd równania o jedność, a to następującym sposobem. Położmy $y = e^z$; pochodne funkcji y wyrażą się wtedy za pośrednictwem pochodnych takich samych rzędów zmiennej z i będą miały zawsze jako czynnik funkcję wykładniczą e^z . Ta funkcja wystąpi w stopniu m -tym we wszystkich wyrazach; po zniesieniu jej, otrzymamy równanie, zawierające pochodne zmiennej z , a nie zawierające wyrażenie samej tej zmiennej. Kładąc następnie $\frac{dz}{dx} = u$, obniżymy rząd równania o jedność.

Tę samą metodę można przedstawić w innej postaci, łączącej w sobie dwa kolejno stosowane wyżej podstawienia. Kładąc $y' = uy$, otrzymujemy:

$$y'' = u'y + uy' = u'y + u^2y = y(u' + u^2)$$

.....

Wszystkie pochodne funkcji y będą zawierały tedy czynnik y ; a ponieważ równanie jest jednorodnem, więc we wszystkich wyrazach będzie czynnik y^m . Zniósłszy ten czynnik, otrzymamy równanie względem u rzędu $(n-1)$ -go, jeżeli równanie dane było rzędu n -go.

§ 18

Całkowanie przez szeregi.

Całkowanie przez szeregi stanowi środek, do którego uciekamy się w razie, gdy metody całkowania poprzednio wyłożone nie mogą znaleźć zastosowania.

Niechaj będzie równanie różniczkowe:

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Jego całka ogólna powinna być, jak wiemy, funkcją zmiennej x z n stałymi c_1, c_2, \dots, c_n taką, aby dla każdej wartości $x = x_0$, zawartej w pewnym obszarze zmienności zmiennej x , nadawszy funkcjom $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ wartości dowolne $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ można było znaleźć dla stałych c wartości takie, aby dla $x = x_0$ funkcje $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ przybierały istotnie powyższe wartości z góry dobrane.

Niechaj będzie tedy punkt $x = x_0$; wyobraźmy sobie, że w otoczeniu tego punktu funkcja y rozwija się na szereg według wzoru T a y l o r a. Będzie:

$$(1) \quad y = y_0 + (x-x_0) y'_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2!} y''_0 + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} y_0^{(n)} + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} y_0^{(n+1)} + \dots$$

Z danego równania różniczkowego otrzymujemy:

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

a biorąc kolejne pochodne:

$$(2) \quad \begin{aligned} y^{(n+1)} &= \psi(x, y, y', \dots, y^{(n)}), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Z tych związków możemy mieć wartości pochodnych $y^{(n)}, y^{(n+1)}, \dots$ dla $x = x_0$, jeżeli ustalimy dowolnie wartości funkcji $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ w tym punkcie; oznaczymy tak otrzymane wartości pochodnych przez $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, \dots$

Podstawiając te wartości w powyższem rozwinięciu (1) znajdziemy funkcję y , wyrażoną przez szereg, w którym występują jako stałe dowolne: $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$. Otóż, gdy szereg ten jest zbieżny w pewnym obszarze, otaczającym punkt x_0 , można uważać go za całkę ogólną w otoczeniu tego punktu; w przypadku, gdy można wykonać sumowanie szeregu, możemy nawet otrzymać całkę w postaci skończonej.

Może się atoli zdarzyć, że równania (2) dla $x = x_0$ oraz dla $y = y_0, y' = y_0', \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ nie doprowadzają do rozwiązań (np. gdy niektóre z pochodnych $y^{(r)}$ stają się nieskończonemi). Należałoby wtedy zmienić wartości dowolnie obrane, równanie zaś (1), nawet gdy spełniają się warunki zbieżności, nie może być uważane za całkę ogólną, lecz za całkę szczególną, gdyż, aby całka była ogólną, trzeba aby wartości $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ można było dobrać najzupełniej dowolnie. Oznaczać to będzie, że całka ogólna nie daje się rozwinać na szereg T a y l o r a w otoczeniu punktu x_0 .

Następujący przykład dobrze nam wyjaśni metodę niniejszą; przykładem tym jest równanie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{m}{x} \frac{dy}{dx} + ny = 0,$$

nazwane r ó w n a n i e m B e s s e l a; jest to równanie liniowe jednorodne rzędu drugiego. Możemy je napisać tak:

$$xy'' + my' + nxy = 0,$$

a biorąc pochodne, znajdujemy:

$$\begin{aligned} xy''' + (m+1)y'' + nxy' + ny &= 0, \\ xy^{(4)} + (m+2)y''' + nxy'' + 2ny' &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Prawo dalszego tworzenia tych związków jest widoczne.

Widać tu, że dla $x_0 = 0$ nie można wziąć dowolnych wartości na y_0 i y'_0 , gdy bowiem weźmiemy $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ otrzymamy $y'_0 = 0$. A więc całka ogólna naszego równania nie może być rozwiniętą na szereg Taylora w otoczeniu punktu $x = 0$. Za pomocą tej metody możemy otrzymać tylko całkę szczególną w otoczeniu tego punktu. Połóżmy $x = x_0 = 0$, $y = y_0$, $y' = y'_0 = 0$, wtedy z poprzedzających równań otrzymujemy:

$$y'' = \frac{-ny_0}{m+1}, \quad y''' = 0, \quad y^{(4)} = \frac{3n^2y_0}{(m+3)(m+1)}, \quad \dots$$

Podstawiając te wartości, znajdujemy całkę:

$$y = y_0 \left[1 - \frac{1 \cdot nx^2}{2!(m+1)} + \frac{1 \cdot 3 \cdot n^2x^4}{4!(m+1)(m+3)} - \dots \right].$$

Wyrazem ogólnym tego szeregu jest:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r+1) n^{r+1} x^{2r+2}}{(2r+2)! (m+1)(m+3) \dots (m+2r+1)}$$

i łatwo widzieć, że stosunek wyrazu rozwinięcia do poprzedzającego dąży do zera; szereg jest przeto zbieżnym dla każdej skończonej wartości zmiennej x . Przedstawia on całkę szczególną równania B e s s e l a.

Dla $m = 1, n = 1$ będzie:

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right).$$

Ilość zawarta w nawiasie jest funkcją znaną w analizie pod nazwą funkcji Bessela.

Dla $m = 2, n = 1$ mamy funkcję:

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \dots \right),$$

gdzie strona druga równa się $y_0 \frac{\sin x}{x}$, jak to łatwo spostrzedz, przypominając sobie szereg na rozwinięcie funkcji $\sin x$.

§ 19.

Równania o pochodnych cząstkowych.

Dotąd uważaliśmy tylko funkcje jednej zmiennej, dające początek równaniom różniczkowym zwyczajnym. Wyobraźmy sobie teraz funkcję pewnej liczby zmiennych niezależnych, t. j. związek pomiędzy taką funkcją, zmiennymi niezależnymi oraz pochodnymi cząstkowymi funkcji względem tych zmiennych. Stawiamy sobie zadanie znalezienia przy pomocy równania o pochodnych cząstkowych najogólniejszej postaci funkcji, która mu odpowiada; funkcję tę nazwiemy całką równania danego.

Rozpocznijmy od przypadku dość prostego. Niechaj będzie równanie:

$$f \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0,$$

w którym z jest funkcją zmiennych x i y , przytem w równaniu tem występuje tylko pochodna cząstkowa zmiennej z względem jednej zmiennej x . Uważając chwilowo zmienną y za stałą, możemy zcałkować to równanie, które wtedy staje się równaniem różniczkowem zwyczajnem; niechaj całką równania będzie:

$$z = \varphi(x, y, c),$$

gdzie c jest stałą dowolną. Ta całka czyni zadość równaniu danemu, w tem rozumieniu, że otrzymawszy z niego pochodną zmiennej z względem x i rugując z obu stałą c , dochodzimy do równania danego. Lecz jest widocznem, że gdy zamiast uważać ilość c za stałą, uważać ją będziemy za funkcję dowolną zmiennej y , pod warunkiem, by pochodna zmiennej z względem x miała to samo wyrażenie, co poprzednio, to i w tym przypadku zmienna z będzie czyniła zadość równaniu danemu. Widzimy więc, że w rozwiązywaniu równań o pochodnych cząstkowych występuje fakt, że w wyrażeniu całki zamiast stałej dowolnej może zachodzić funkcja dowolna.

Nie możemy zająć się tu badaniem teorii ogólnej równań o pochodnych cząstkowych i ograniczymy się jedynie na przypadku równań rzędu 1-go i liniowych względem pochodnych.

Rozpatrzmy przypadek dwu zmiennych niezależnych x, y . Postać ogólna równania liniowego o pochodnych cząstkowych jest:

$$(1) \quad Pp + Qq = R,$$

gdzie p i q są pochodnymi zmiennej z względem zmiennych x i y , ilości zaś P, Q, R są funkcjami zmiennych x, y, z .

Całkowanie tego równania daje się, jak to okażemy, sprowadzić do całkowania układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Niechaj $u = \text{const.}$, gdzie u jest funkcją zmiennych x, y, z będzie rozwiązaniem danego równania, (o ile rozwiązanie takie istnieje). Stąd otrzymamy.

$$p = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}, \quad q = - \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}},$$

a wstawiając te wartości w równaniu danem, powinniśmy otrzymać tożsamościowo:

$$P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Jeżeli założymy, że istnieje inne rozwiązanie $v = \text{const.}$, różne od poprzedzającego, powinno być analogicznie:

$$P \frac{\partial v}{\partial x} + Q \frac{\partial v}{\partial y} + R \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Ponieważ jest także:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz = 0,$$

przeto ilości dx , dy , dz otrzymane z równań $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ powinny być takimi, że:

$$(2) \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

t. j. powinny być proporcjonalne do ilości P , Q , R . Otóż te dwa ostatnie równania tworzą układ dwu równań różniczkowych zwyczajnych, w którym dwie z trzech zmiennych x , y , z można uważać za funkcje trzeciej. Układ taki, jak wiemy, ma zawsze rozwiązanie; można zatem zawsze znaleźć dwa związki pomiędzy zmiennymi x , y , z takie, że otrzymawszy z nich dwie z tych zmiennych, wyrażone przez trzecią, będziemy mieli

dwie funkcyje, czyniące zadość układowi (2). Temi dwiema całkami będą właśnie $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, z nich każda jest całką równania o pochodnych cząstkowych.

W ten sposób możemy znaleźć dwie różne całki równania danego; obie są rozwiązane względem dwu stałych dowolnych. Jednak łatwo spostrzedz, że można otrzymać rozwiązanie daleko ogólniejsze. Można mianowicie okazać, że wyrażenie:

$$u = \varphi(v),$$

w którym φ jest symbolem funkcyi dowolnej czyni również zadość równaniu danemu.

W samej rzeczy, z tego nowego związku pomiędzy zmiennymi x, y, z wynika:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p = \varphi'(v) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q = \varphi'(v) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q \right),$$

skąd:

$$p = - \frac{\varphi'(v) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}}{\varphi'(v) \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}}, \quad q = - \frac{\varphi'(v) \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}}{\varphi'(v) \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}},$$

co podstawiając w równaniu danem, otrzymujemy:

$$- \varphi'(v) \left(P \frac{\partial v}{\partial x} + Q \frac{\partial v}{\partial y} + R \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0,$$

t. j. oczywiście tożsamość, bez względu na to, jaką jest funkcyą $\varphi(v)$. Doszliśmy zatem do interesującego rezultatu, że znając dwie całki u, v , możemy utworzyć całkę ogólniejszą, wprowadzając symbol funkcyi dowolnej. Taka całka nazywa się całką ogólną równania o pochodnych cząstkowych.

Podamy kilka zastosowań tej teorii.

1) Szukajmy równania powierzchni, której płaszczyzna styczna w każdym punkcie jest równoległa do prostej danej.

Niechaj prosta ta przechodzi przez początek współrzędnych i wyraża się równaniami:

$$aZ = X, \quad bZ = Y,$$

lub:

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{1},$$

gdzie a i b są stałe. Płaszczyzna styczna do powierzchni $z = f(x, y)$ w punkcie x, y, z wyraża się równaniem:

$$(X-x)p + (Y-y)q - (Z-z) = 0,$$

a warunkiem, aby ta płaszczyzna była równoległa do prostej danej jest:

$$ap + bq - 1 = 0.$$

Dla oznaczenia powierzchni winniśmy zcałkować to równanie liniowe o pochodnych cząstkowych. Stosując metodę powyższą, mamy do rozwiązania układ równań różniczkowych.

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

i winniśmy znaleźć dwie całki tego układu: $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, rozwiązane względem stałych. Równania te możemy napisać tak:

$$\frac{dx}{dz} = a, \quad \frac{dy}{dz} = b,$$

skąd:

$$x = az + \text{const}, \quad y = bz + \text{const}.$$

Znajdujemy przeto:

$$u = x - az, \quad v = y - bz,$$

tak, że całkę ogólną otrzymamy w postaci:

$$\varphi(x - az, y - bz) = 0,$$

gdzie φ jest funkcją dowolną. Jest to równanie szukanej powierzchni, która będzie walcem o tworzących równoległych do prostej stałej. W samej rzeczy, jeżeli x, y, z jest punktem powierzchni i jeżeli $x - az = a, y - bz = \beta$, to jest jasnym, że każdy punkt prostej, przedstawionej przez te dwa równania, jest zarazem punktem powierzchni.

2) Znaleźć równanie powierzchni takiej, że płaszczyzna styczna w każdym punkcie przechodzi przez punkt stały.

Jeżeli x_0, y_0, z_0 jest punktem stałym, to warunek dla płaszczyzny stycznej w punkcie x, y, z wyraża się w ten sposób:

$$(x - x_0)p + (y - y_0)q = z - z_0,$$

t. j. równaniem o pochodnych cząstkowych. By to równanie zcałkować, bierzemy układ równań różniczkowych:

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0},$$

który po zcałkowaniu daje:

$$\log(x - x_0) = \log(z - z_0) + \log C_1,$$

$$\log(y - y_0) = \log(z - z_0) + \log C_2,$$

skąd:

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = C_1, \quad \frac{y - y_0}{z - z_0} = C_2,$$

a więc równaniem szukanej powierzchni będzie:

$$\varphi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0,$$

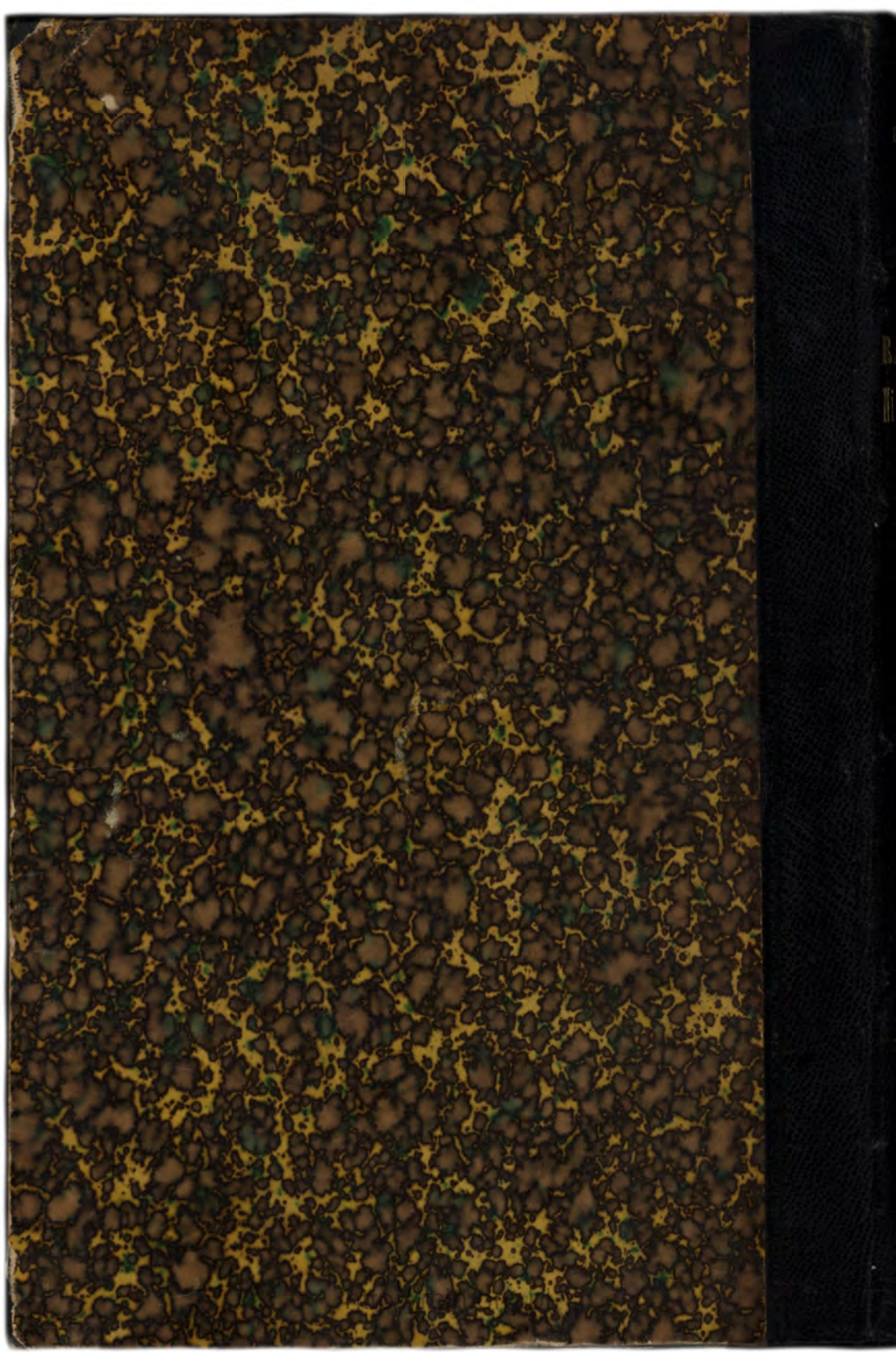
gdzie φ jest funkcją dowolną.

Powierzchnią szukaną jest stożek z wierzchołkiem w punkcie x_0, y_0, z_0 . W samej rzeczy, jeżeli x, y, z są spórzędnymi punktu powierzchni $\varphi = 0$, wtedy widocznie $\frac{x + \lambda x_0}{1 + \lambda}$, $\frac{y + \lambda y_0}{1 + \lambda}$, $\frac{z + \lambda z_0}{1 + \lambda}$ będą także spórzędnymi punktu powierzchni, jak to wprost sprawdzić łatwo.

~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~



~~GABINET MATEMATYCZNY
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego~~



PASCAL

ACHUNEK

Nieskończoność

2