

7.72 — plastyczność, lepko-plastyczność, reologia

Marian Grzymkowski

METODY ANALIZY PROCESÓW
OBRÓBKI PŁASTYCZNEJ METALI

Część I

32/1982

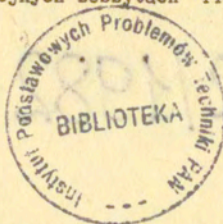
P. 269

WARSZAWA 1982

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 5 kwietnia 1982 r.

Zarejestrowana pod nr 32/1982

Całość pracy będzie opublikowana w czterech częściach
w kolejnych zeszytach "Prac IPPT"



57042



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark.wyd.10,9. Ark.druk.15,25.

Oddano do drukarni w październiku 1982 r.

Nr zamówienia 602/o/82

Z - 89 .

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Sniadeckich 8

SPIS TREŚCI

CZĘŚĆ I

Wykaz niektórych oznaczeń.....	12
Przedmowa.....	16
Rozdział I. WPROWADZENIE W ZAGADNIENIA OBRÓBKI PLASTYCZ- NEJ.....	19
1.1. Wstęp.....	19
1.2. Metody obróbki plastycznej.....	22
1.2.1. Cięcie.....	23
1.2.2. Kształtowanie plastyczne.....	29
A. Cięcie.....	29
B. Kształtowanie wyłoczek o powierzchni nierozwijalnej.....	34
C. Kształtowanie brył.....	42
Literatura do rozdziału I.....	48
Rozdział II. MODELE CIAŁ ODKSZTAŁCALNYCH.....	49
2.1. Wiadomości ogólne.....	49
2.2. Wykresy dla złożonych stanów.....	56
2.3. Proste modele mechaniczne.....	58
2.4. Złożone modele mechaniczne.....	60
Literatura do rozdziału II.....	66
Rozdział III. TEORIA STANU NAPRĘŻENIA.....	67
3.1. Wstęp.....	67
3.2. Definicja naprężenia.....	70
3.3. Pojęcie bieguna naprężenia.....	73
3.4. Warunki brzegowe dla naprężeń.....	76
3.5. Jednoosiowy stan naprężenia.....	80
3.6. Płaski ogólny stan naprężenia.....	83
3.7. Płaski stan naprężenia.....	88
3.8. Przykłady.....	92
3.9. Przestrzenny stan naprężenia.....	102
3.9.1. Wprowadzenie.....	102
3.9.2. Równania równowagi i ruchu.....	105
a) Równania równowagi i ruchu dla przes- trznego stanu naprężenia.....	106

b) Równania równowagi i ruchu dla płaskiego stanu naprężenia.....	109
c) Równania równowagi i ruchu we współrzędnych biegunowych i walcowych.....	111
d) Równania równowagi i ruchu we współrzędnych kulistych.....	115
3.9.3. Całkowanie równań równowagi.....	117
a) Całkowanie równań równowagi dla płaskiego stanu naprężenia.....	117
b) Całkowanie równań równowagi dla płaskiego stanu naprężenia we współrzędnych biegunowych.....	119
c) Całkowanie równań równowagi dla układu walcowego osiowo-symetrycznego.....	120
3.10. Stan naprężenia w punkcie.....	124
3.10.1. Naprężenia na dowolnej płaszczyźnie.....	124
3.10.2. Naprężenia główne.....	127
3.10.3. Rozkład tensora naprężenia.....	134
3.11. Maksymalne naprężenia styczne.....	137
3.12. Naprężenia oktaedryczne.....	143
3.13. Geometryczna interpretacja przestrzennego stanu naprężenia.....	146
3.14. Szczególne przypadki stanu naprężenia.....	149
3.15. Niezmienniki stanu naprężenia.....	153
3.16. Tensory naprężenia przy zmiennej konfiguracji ciała.....	155
Przykład. Obliczenie tensorów naprężenia dla jednoosiowego rozciągania.....	164
Literatura do rozdziału III.....	167
Rozdział IV. TEORIA STANU ODKSZTAŁCENIA.....	168
4.1. Wiadomości ogólne.....	168
4.1.1. Miara odkształcenia plastycznego.....	171
4.1.2. Objętość przemieszczona.....	175
4.2. Teoria małych odkształceń plastycznych.....	176

4.2.1. Rozłożenie tensora odkształcenia na dewiator i na tensor kulisty.....	186
4.2.2. Odkształcenia główne.....	188
4.2.2.1. Gwiazda odkształceń.....	192
4.2.3. Koło Mohra dla odkształceń.....	195
4.3. Odkształcenia oktaedryczne.....	199
4.4. Odkształcenie objętościowe.....	201
4.5. Odkształcenie we współrzędnych walcowych, kulistych i biegunowych.....	203
4.6. Intensywność odkształcenia.....	206
4.7. Równania ciągłości odkształceń.....	209
4.8. Prędkość płynięcia i odkształcenia.....	212
4.8.1. Rozłożenie tensora prędkości odkształcenia na dewiator i na tensor kulisty.....	215
4.8.2. Prędkość odkształcenia we współrzędnych walcowych.....	215
4.8.3. Prędkość odkształcenia dla dużych odkształceń.....	216
4.8.4. Intensywność prędkości odkształcenia.....	218
4.9. Warunek nieściśliwości materiału.....	220
4.9.1. Wyrażenie warunku stałej objętości za pomocą odkształceń.....	220
4.9.2. Wyrażenie warunku stałej objętości materiału za pomocą prędkości odkształceń.....	224
4.10. Teoria dużych odkształceń plastycznych.....	227
4.10.1. Wektory przemieszczenia.....	228
4.10.2. Tensor stanu odkształcenia.....	230
4.10.3. Wyrażenie tensorów deformacji za pomocą gradientów przemieszczeń.....	232
Przykład. Obliczenie tensorów odkształcenia dla jednoosiowego rozciągania.....	236
Literatura do rozdziału IV.....	241

CZĘŚĆ II

Rozdział V. WARUNKI PLASTYCZNOŚCI.....	243
5.1. Wiadomości ogólne.....	243
5.2. Warunek plastyczności Hubera-Misesa.....	247
5.2.1. Warunek plastyczności Hubera-Misesa dla płaskiego stanu naprężenia.....	250
5.2.2. Warunek plastyczności Hubera-Misesa dla płaskiego stanu odkształcenia.....	251

5.3. Warunek plastyczności Treski.....	253
5.3.1. Warunek plastyczności Treski dla płaskiego stanu naprężenia.....	260
5.3.2. Warunek plastyczności Treski dla płaskiego stanu odkształcenia.....	263
5.4. Porównanie warunku plastyczności Hubera-Misesa z warunkiem plastyczności Treski.....	263
5.5. Doświadczalna weryfikacja warunków plastyczności.....	267
5.6. Wpływ odkształceń plastycznych na warunek plastyczności.....	272
5.7. Inne warunki plastyczności.....	276
5.7.1. Warunek plastyczności największego naprężenia zredukowanego.....	276
5.7.2. Warunek plastyczności Coulomba-Mohra.....	277
5.7.3. Warunek plastyczności dla materiału anizotropowego.....	281
Literatura do rozdziału V.....	282
Rozdział VI. PRAWA PLASTYCZNEGO PŁYNIĘCIA.....	283
6.1. Uogólnione prawo Hooke'a.....	285
6.2. Teoria deformacyjna Hencky-Iliuszina.....	289
6.3. Prawo plastycznego płynięcia Levy-Misesa.....	298
6.4. Prawo plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa.....	301
6.5. Stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia.....	306
6.5.1. Stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia dla warunku plastyczności Hubera-Misesa.....	311
6.5.2. Stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia dla warunku plastyczności Treski.....	315
6.6. Kryteria obciążania, odciążania i procesu neutralnego.....	319
Literatura do rozdziału VI.....	323
Rozdział VII. PRACA I MOC ODKSZTAŁCENIA PLASTYCZNEGO.....	324
7.1. Praca odkształcenia plastycznego.....	324
7.2. Zasada pracy wirtualnej.....	329
7.3. Moc odkształcenia plastycznego.....	332
7.3.1. Postać funkcji dysypacji dla warunku plastyczności Treski.....	335
7.4. Zasada największej mocy dysypowanej.....	337
7.5. Materiał stateczny i niestateczny.....	341

7.6. Postulat D.C.Druckera.....	344	
Literatura do rozdziału VII.....	348	
Rozdział VIII. TWIERDZENIA TEORII NOŚNOŚCI GRANICZNEJ		
I WŁASNOŚCI POWIERZCHNI NIECIĄGŁOŚCI.....	349	
8.1. Wstęp.....	349	
8.2. Dolna ocena wartości nośności.....	352	
8.3. Górna ocena wartości nośności.....	354	
8.4. Rozwiązania ścisłe i przybliżone w teorii nośności granicznej.....	358	
8.5. Nieciągłości.....	360	
8.5.1. Nieciągłość naprężeń.....	361	
8.5.2. Nieciągłość prędkości.....	369	
8.6. Równanie prędkości wzdłuż linii nieciągłości dla zagadnień osiowo-symetrycznych.....	372	
8.7. Hodograf prędkości.....	374	
8.7.1. Konstrukcja hodografu dla zagadnień płaskich.....	375	
8.7.2. Wykres prędkości dla zagadnień osiowo-symetrycznych.....	382	
Literatura do rozdziału VIII.....	384	
Rozdział IX. ZWIĄZKI FIZYCZNE DEFORMACJI PLASTYCZNEJ METALI.....		385
9.1. Wstęp	385	
9.2. Wpływ różnych czynników na naprężenie uplastycz. .	389	
9.2.1. Wpływ odkształceń na naprężenie uplastycz. .	390	
9.2.2. Wpływ prędkości odkształcenia na naprężenie uplastyczniające	396	
9.2.3. Wpływ temperatury na naprężenie uplastycz. .	411	
9.2.4. Wpływ czasu na naprężenie uplastyczniające .	436	
9.3. Przegląd równań konstytutywnych.....	438	
9.3.1. Równania podające zależność między naprężeniem σ a odkształceniem φ	444	
9.3.2. Równania podające zależność między naprężeniem σ a prędkością odkształcenia $\dot{\varphi}$	447	
9.3.3. Równania podające zależność między naprężeniem σ a odkształceniem φ , prędkością odkształcenia $\dot{\varphi}$ i temperaturą T	451	
9.3.4. Równania podające zależność między naprężeniem stycznym a odkształceniem φ , prędkością odkształcenia $\dot{\varphi}$ i temperaturą T ...	453	

9.3.5. Wpływ temperatury na stałe sprężystości.....	454
9.3.6. Wzory podające zależność na prędkość odkształcenia.....	456
9.4. Podstawy stosowanej termoplastyczności.....	457
9.4.1. Analiza ciepła i równanie przewodnictwa cieplnego.....	459
9.4.2. Sprężenie pracy plastycznej z ciepłem.....	472
9.4.3. Konstrukcja związku fizycznego uwzględniającego temperaturę.....	475
9.4.3.1. Związek fizyczny dla materiału sprężystego.....	475
9.4.3.2. Związek fizyczny dla materiału sprężysto-plastycznego.....	479
9.5. Hipotezy wzmocnienia metali.....	482
9.5.1. Wzmocnienie izotropowe.....	483
9.5.2. Wzmocnienie kinematyczne.....	494
9.5.3. Wzmocnienie mieszane czyli izotropowo-kinematyczne.....	503
Literatura do rozdziału IX.....	505

CZĘŚĆ III

Rozdział X. METODY ANALIZY PROCESÓW OBRÓBKII PLASTYCZNEJ METALI	507
10.1. Wstęp.....	507
10.2. Metoda uproszczonych równań różniczkowych równowagi.....	510
10.2.1. Ściskanie cylindrycznych walców między płaskimi płytami.....	510
10.2.2. Ściskanie płaskowników i prostopadłościaków.....	525
10.2.3. Ściskanie pierścieni.....	533
10.2.4. Wyciskanie metali.....	554
10.2.5. Ciągnięcie metali.....	567
10.2.6. Walcowanie metali.....	573
10.2.7. Tłoczenie blach.....	583
10.3. Metody energetyczne obliczania sił i naprężeń.....	589
10.3.1. Uproszczona metoda bilansu prac.....	589
10.3.2. Metoda założenia rozkładu funkcji prędkości płynięcia i przemieszczenia.....	599
10.3.2.1. Równania podstawowe.....	599
10.3.2.2. Wybór funkcji.....	603

10.3.2.3.	Ściskanie walca.....	606
10.3.2.4.	Wciskanie dwóch przeciwległych stempli w krążek.....	612
10.3.2.5.	Ściskanie pierścieni.....	617
10.3.2.6.	Wyciskanie przeciwbieżne tulei....	624
10.3.3.	Metoda założonego schematu odkształcania....	630
10.3.3.1.	Przecinanie pasma.....	631
10.3.3.2.	Ściskanie pasma między dwiema płytami.....	633
10.3.3.3.	Wyciskanie przez matrycę klinową..	638
10.3.3.4.	Inne schematy płaskiego odkształcenia	644
10.3.3.5.	Wyciskanie prętów cylindrycznych..	646
10.3.4.	Metoda założenia statycznie dopuszczalnego pola naprężeń.....	658
10.3.4.1.	Metoda uproszczonych równań równo- wagi	659
10.3.4.2.	Metoda założonego schematu odkształ- cenia i określenia stanu naprę- żenia przy pomocy kół naprężeń Mohra.....	664
10.3.4.3.	Metoda pola charakterystyk.....	672
10.4.	Metoda równowagi sił.....	680
10.4.1.	Wstęp.....	680
10.4.2.	Zasada budowy planu sił.....	681
10.4.3.	Prasowanie płaskiego bloku materiału pomiędzy sztywnymi płytami.....	683
10.4.4.	Wyciskanie współbieżne w matrycy klinowej...	690
10.4.5.	Wyciskanie współbieżne w matrycy kątowej....	694

CZĘŚĆ IV

10.5.	Metoda charakterystyk.....	699
10.5.1.	Wstęp.....	699
10.5.2.	Płaski stan odkształcenia.....	702
10.5.2.1.	Wiadomości ogólne.....	702
10.5.2.2.	Wyznaczenie stanu naprężenia.....	706
10.5.2.3.	Wyznaczenie prędkości płynięcia... 713	713
10.5.2.4.	Zagadnienia brzegowe.....	718

10.5.3. Procesy płaskiego stanu odkształcenia.....	729
10.5.3.1. Wprowadzenie.....	729
10.5.3.2. Wciskanie płaskiego stempla w półprzestrzeń.....	730
10.5.3.3. Ściskanie pasma.....	738
10.5.3.4. Przeciąganie blachy przez klinową matrycę.....	741
10.5.3.5. Wyciskanie.....	744
10.5.4. Osowo-symetryczny stan naprężenia i odkształ- cenia.....	749
10.5.4.1. Wiadomości ogólne.....	749
10.5.4.2. Równania stanu naprężenia.....	756
10.5.4.3. Równania prędkości płynięcia.....	760
10.5.4.4. Równanie prędkości wzdłuż linii nieciągłości.....	763
10.5.4.5. Zagadnienia brzegowe.....	764
10.5.4.6. Wykreślna metoda rozwiązywania zagadnień osiowej symetrii.....	776
10.5.4.7. Nacisk jednostkowy.....	782
10.5.5. Procesy osowo-symetryczne obróbki plas- tycznej metali.....	788
10.5.5.1. Ściskanie walców.....	790
10.5.5.2. Ściskanie pierścieni.....	804
10.5.5.3. Wciskanie płaskiego cylindrycznego stempla w półprzestrzeń.....	809
10.5.5.4. Wciskanie dwóch przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek....	811
10.5.5.5. Wciskanie stożka w półprzestrzeń....	818
10.6. Metoda elementów skończonych	820
10.6.1. Wstęp.....	820
10.6.2. Konstytutywne prawo liniowej sprężystości.....	822
10.6.3. Związki fizyczne dla materiału sprężysto-plastycznego.....	826
10.6.4. Związki geometryczne.....	839
10.6.5. Równania równowagi.....	844
10.6.6. Sposoby obliczeń.....	850
10.6.7. Przykłady obliczeniowe.....	857

10.7. Metody wariacyjne.....	867
10.7.1. Wstęp.....	867
10.7.2. Podstawowe równania pracy.....	869
10.7.3. Równania wariacyjne.....	875
10.7.4. Funkcje przemieszczeń i prędkości płynięcia.....	879
10.7.5. Przykłady.....	882
Literatura do rozdziału X.....	897
Dodatek. WIADOMOŚCI PODSTAWOWE.....	901
1. Ogólne wiadomości o tensorach.....	902
1.1. Wektory.....	902
1.2. Przekształcenie ortogonalne.....	905
1.3. Tensor rzędu pierwszego.....	909
1.4. Tensor rzędu zerowego.....	912
1.5. Tensor rzędu drugiego.....	912
1.6. Tensor rzędu trzeciego.....	915
1.7. Tensor rzędu czwartego.....	917
1.8. Działania na tensorach.....	917
1.9. Tensor izotropowy.....	919
1.10. Tensor metryczny.....	920
1.11. Tensor a dewiator.....	926
1.12. Ośie główne tensora symetrycznego rzędu drugiego.....	928
1.13. Funkcje tensorowe argumentów tensorowych.....	932
2. Pojęcia podstawowe.....	933
2.1. Funkcja jednorodna.....	933
2.2. Wypukłość funkcji.....	933
2.3. Gradient pola skalarne.....	935
2.4. Potencjał.....	936
2.5. Pochodna materialna.....	936
2.6. Zasada obiektywności.....	938
2.7. Twierdzenie całkowite.....	942
3. Podstawy rachunku macierzowego.....	945
3.1. Definicja i rodzaje macierzy.....	945
3.2. Zapisywanie równań w postaci macierzowej.....	947
3.3. Działania na macierzach.....	950
Literatura do dodatku	953

Wykaz niektórych oznaczeń

- σ_{1j} - tensor naprężenia,
 S_{1j} - dewiator naprężenia,
 x, y, z - współrzędne kartezjańskie punktu,
 r, θ, z - współrzędne walcowe punktu,
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ - naprężenia w układzie współrzędnych kartezjańskich,
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ - naprężenia w układzie współrzędnych walcowych,
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - naprężenia główne,
 k - granica plastyczności na ścinanie,
 σ_p - naprężenie uplastyczniające,
 σ_s - naprężenie średnie ($\sigma_s' = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$),
 σ_1 - intensywność naprężenia,
 p - średnie naprężenie główne,
 \bar{p} - średni nacisk jednostkowy,
 q - ciśnienie wewnętrzne,
 τ_s - naprężenie styczne na linii nieciągłości lub na kontakcie materiału z narzędziem,
 P - siła zewnętrzna,
 T - siła tarcia,
 t - jednostkowa siła tarcia,
 X_x, X_y, X_z, X_r - siły masowe,
 D_w - moc sił wewnętrznych,
 D_z - moc sił zewnętrznych,
 D_o - moc sił w elementach objętości,
 D_n - moc sił na linii nieciągłości lub na kontakcie materiału z narzędziem,
 F_o - powierzchnia czołowa narzędzia lub powierzchnia początkowa próbki,

- F_s - powierzchnia nieciągłości lub powierzchnia kontaktu materiału z narzędziem,
 μ - współczynnik tarcia suchego Coulomba,
 c - współczynnik zmniejszający tarcie,
 λ_t - kąt tarcia,
 V - objętość elementu,
 v_0 - prędkość ruchu narzędzia,
 v_s - prędkość styczna na linii nieciągłości lub na kontakcie materiału z narzędziem,
 v_x, v_y, v_z - prędkości płynięcia w układzie współrzędnych kartezjańskich,
 v_r, v_z, v_θ - prędkości płynięcia w układzie współrzędnych walcowych,
 v_α, v_β - prędkości płynięcia wzdłuż charakterystyk α i β ,
 α, β - oznaczenia charakterystyk,
 ν - kąt jaki tworzy charakterystyka α z osią r w płaszczyźnie r, z ,
 $u_{x,y,z}$ - przemieszczenia punktu wzdłuż osi x, y, z ,
 ϵ_{ij} - tensor odkształcenia,
 e_{ij} - dewiator odkształcenia,
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}$ - odkształcenia plastyczne w układzie współrzędnych kartezjańskich,
 $\mu_{xy}, \mu_{yz}, \mu_{zx}$ - odkształcenia plastyczne postaciowe,
 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ - odkształcenia plastyczne główne,
 φ - odkształcenie logarytmiczne,
 λ_l - współczynnik odkształcenia,
 ϵ_1 - intensywność odkształcenia,
 $\dot{\epsilon}_{ij}$ - tensor prędkości odkształcenia,
 \dot{e}_{ij} - dewiator prędkości odkształcenia,
 $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z, \dot{\epsilon}_{xy}, \dot{\epsilon}_{yz}, \dot{\epsilon}_{zx}$ - prędkości odkształceń w układzie współrzędnych kartezjańskich,

- $\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_z, \dot{\epsilon}_\theta, \dot{\epsilon}_{rz}$ - prędkości odkształceń w układzie współrzędnych walcowych,
- $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$ - główne prędkości odkształceń,
- $\dot{\epsilon}_1$ - intensywność prędkości odkształceń,
- $\dot{\epsilon}^e$ - prędkość odkształcenia postaciowego,
- $\dot{\gamma}_d$ - prędkość ruchu dyslokacji,
- ρ_d - gęstość dyslokacji,
- b - wektor Burgersa,
- r - promień bieżący,
- r_z - promień zewnętrzny,
- r_w - promień wewnętrzny,
- r_s - promień stempla,
- J_1, J_2, J_3 - niezmienniki tensora naprężenia,
- Φ_1, Φ_2, Φ_3 - niezmienniki dwiatora naprężenia,
- ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 - niezmienniki tensora odkształcenia,
- ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 - niezmienniki dwiatora odkształcenia,
- E - moduł sprężystości podłużnej Younga,
- E_p - moduł plastyczny,
- G - moduł odkształcenia postaciowego Kirchhoffa,
- G_p - plastyczny moduł odkształcenia plastycznego,
- ν - liczba Poissona,
- K - moduł odkształcenia objętościowego,
- H - moduł Helmholtza,
- dL_p - przyrost pracy plastycznej jednostkowej,
- L_p - jednostkowa praca plastyczna,
- L_p^o - praca plastyczna całej objętości,
- L_s - jednostkowa praca sprężysta,
- σ_{ij} - rzeczywisty stan naprężenia,
- σ_{ij}^s - statycznie dopuszczalne pole naprężeń,
- ϵ_{ij}^k - kinematycznie dopuszczalne pole odkształceń,

h - połowa wysokości H walca $/H = 2h/$,

r - promień bieżący walca,

R - promień zewnętrzny walca,

M, N, S - wskaźniki punktów: M -poszukiwanego, N -na charakterystyce β , S -na charakterystyce α ,

r_M, z_M, v_M, p_M - wartości w punkcie poszukiwanym M ,

r_N, z_N, v_N, p_N - wartości w punkcie znanym na charakterystyce β ,

r_S, z_S, v_S, p_S - wartości w punkcie znanym na charakterystyce α ,

r_n - średni promień pomiędzy punktami o wskaźnikach M i N na charakterystyce β ,

r_s - średni promień pomiędzy punktami o wskaźnikach M i S na charakterystyce α ,

$\Delta r_n, \Delta z_n$ - różnice współrzędnych r, z pomiędzy punktem poszukiwanym M i znanym punktem N na charakterystyce β ,

$\Delta r_s, \Delta z_s$ - różnice współrzędnych r, z pomiędzy punktem poszukiwanym M i znanym punktem S na charakterystyce α ,

v_{r_M}, v_{z_M} - prędkości płynięcia w układzie współrzędnych r, z w punkcie poszukiwanym M ,

v_{r_N}, v_{z_N} - prędkości płynięcia w układzie współrzędnych r, z w punkcie znanym N na charakterystyce α ,

v_{r_S}, v_{z_S} - prędkości płynięcia w układzie współrzędnych r, z w punkcie znanym S na charakterystyce β ,

R_n - średni promień pomiędzy punktami M i N na charakterystyce α ,

R_s - średni promień pomiędzy punktami M i S na charakterystyce β ,

dR_n, dZ_n - różnice współrzędnych r, z pomiędzy punktem poszukiwanym M i znanym punktem N na charakterystyce α ,

dR_s, dZ_s - różnice współrzędnych r, z pomiędzy punktem poszukiwanym M i znanym punktem S na charakterystyce β .

PRZEDMOWA

Do analizy procesów obróbki plastycznej metali stosowane są metody teorii plastyczności.

Teoria plastyczności została wyodrębniona z mechaniki ciała stałego jako osobna, nowa dziedzina mechaniki. Dzieli się ona na fizyczną, matematyczną i techniczną czyli stosowaną teorię plastyczności.

Fizyczna teoria plastyczności zajmuje się analizą defektów oraz mechanizmami odkształceń plastycznych monokryształów i polikryształów. Na gruncie teorii dyslokacji ustala warunki poślizgów plastycznych i rozpatruje związki fizyczne plastycznego płynięcia metali.

Matematyczna teoria plastyczności oparta jest na mechanice ośrodków ciągłych. Zajmuje się analizowaniem zachowania się ciał pod wpływem oddziaływań zewnętrznych w ramach mechaniki continuum. Postuluje prawa opisujące własności fizyczne, matematycznych modeli rzeczywistych ośrodków materialnych.

Stosowana teoria plastyczności przyjmuje istotne, upraszczające założenia pozwalające na rozwiązywanie praktycznych zagadnień. Jest ona stosowana do analizy procesów obróbki plastycznej metali i do analizy teorii konstrukcji.

Niniejsza książka ma na celu zapoznanie czytelnika z podstawami stosowanej teorii plastyczności i zastosowaniem metod teorii plastyczności do procesów obróbki plastycznej metali.

Książka podzielona została na dwie części. W części pierwszej obejmującej rozdziały od I do IX, omówiono podstawy stosowanej teorii plastyczności. Przedstawiono teorię stanu naprężenia i stanu odkształcenia. Podano warunki plastyczności i prawa plastycznego płynięcia. Przeanalizowano pracę i moc odkształcenia plastycznego oraz podano twierdzenia teorii nośności granicznej. Scharakteryzowano również modele ciał i podano schematy procesów obróbki plastycznej metali, które mogą być analizowane metodami stosowanej teorii plastyczności. Przeprowadzono również szczegółową analizę związków fizycznych deformacji plastycznej metali.

W drugiej części książki, obejmującej rozdział X, omówiono metody, którymi można analizować procesy obróbki plastycznej i podano szereg rozwiązań tych procesów. Dokładnie omówiono metody energetyczne i metodę uproszczonych równań różniczkowych równowagi oraz metodę charakterystyk. Przeanalizowano również metodę elementów skończonych i metodę wariacji.

W „Dodatku” podano podstawy rachunku tensorowego i rachunku macierzowego jako podstawowego aparatu matematycznego stosowanego w teorii plastyczności.

Istniejąca literatura dotycząca metod rozwiązywania (analizy) procesów obróbki plastycznej metali jest tylko fragmentaryczna. Niniejsza praca ma wypełnić lukę dotyczącą podstaw obróbki plastycznej metali i jest próbą usystematyzowania teorii płynięcia plastycznego oraz wyłożenia jej w formie przystępnej dla przeciętnego czytelnika. Książka nie pretenduje do pełnego podania podstaw teoretycznych wszystkich procesów. Przystudiowanie jej umożliwi dalszą teoretyczną analizę procesów obróbki plastycznej metali.

Obróbka plastyczna dzięki swym licznym zaletom technicznym i ekonomicznym rozwija się bardzo intensywnie. Prowadzone są prace badawcze o charakterze podstawowym i stosowanym dotyczącym mechaniki, fizyki i fizyko-chemii procesów obróbki plastycznej metali oraz nowych procesów i nowych maszyn. W dziedzinie mechaniki ciał odkształcalnych prowadzona jest analiza naprężeń, odkształceń i sposobu płynięcia metalu w różnych procesach plastycznego płynięcia. Jest to kierunek naukowo-poznawczy, który prowadzi do określenia sił, pracy odkształcenia i sposobu płynięcia metalu. Drugi kierunek metaloznawczo-fizyczny obejmuje całokształt zjawisk zachodzących w odkształcanym metalu i na powierzchni styku metalu z narzędziem oraz własności mechaniczne i eksploatacyjne wyrobu. Natomiast kierunek technologiczno-konstrukcyjny obejmuje badanie wpływu parametrów technologicznych na sposób płynięcia metalu i własności wyrobu oraz opracowanie nowych procesów technologicznych i nowych maszyn i urządzeń.

Autor ma nadzieję, że książka będzie użyteczna dla studentów wyższych szkół technicznych, inżynierów i młodszych pracowników naukowych zajmujących się problemami obróbki plastycznej metali.

Autor wyraża głęboką wdzięczność prof. dr hab.inż. Zenonowi Mrozowi za wkład pracy przy czytaniu rękopisu i za cenne uwagi i sugestie.

Autor książki zwraca się z gorącą prośbą do Czytelników o nadsyłanie wszelkich uwag i spostrzeżeń o zauważonych błędach i niedociągnięciach przyjętego ujęcia oraz sposobu podania poszczególnych zagadnień.

Warszawa, styczeń 1982r.

Dr inż. Marian Grzymkowski

ul. M. Keniga 17 m 85

02-495 Warszawa-Ursus

WPROWADZENIE W ZAGADNIENIA OBRÓBKI PLASTYCZNEJ

1.1. Wstęp

W procesach obróbki plastycznej metali podstawowym zagadnieniem jest określenie nacisków jednostkowych pomiędzy narzędziem formującym a materiałem, energii zużytej w czasie procesu oraz mechanizmu płynięcia. Procesy płynięcia plastycznego możemy rozwiązywać metodami teorii plastyczności, poszukując:

- rozwiązań ścisłych,
- rozwiązań przybliżonych,
- ocen nośności: a - oceny dolnej,
 b - oceny górnej.

Przy rozwiązywaniu zagadnień obróbki plastycznej zawsze korzystamy z:

- równań równowagi /mogą być przybliżone/,
- warunku plastyczności,
- prawa fizycznego,
- związków geometrycznych odkształceń,
- warunku brzegowego dla naprężeń lub dla prędkości,
- geometrii zadania.

Teoria plastyczności zajmuje się ustalaniem ogólnych praw powstawania odkształceń plastycznych. Z punktu widzenia zastosowań technicznych teorię plastyczności można podzielić na konstrukcyjną i na technologiczną. Konstrukcyjna teoria plastyczności zajmuje się obliczaniem nośności granicznej konstrukcji inżynierskich. Technologiczna teoria plastyczności zajmuje się określaniem naprężeń, odkształceń oraz mechanizmu płynięcia kształtowanych plastycznie elementów maszyn. Nacis-

ki potrzebne do odkształcenia plastycznego są zależne nie tylko od rodzaju materiału, ale i od warunków tarcia na kontakcie materiału z narzędziem. Wyznaczenie tych nacisków następcza wiele trudności, a potrzebne są one do określenia wielkości nacisku prasy, wyboru rodzaju smaru i często obróbki cieplnej rekrytalizacyjnej lub też prowadzenia procesu kształtowania plastycznego na gorąco.

W mechanice ciał odkształcalnych przyjmowane są następujące założenia:

1. Założenie o ciągłej budowie materiału. Metale technicznie użyteczne zbudowane są z ogromnej ilości ziaren, które w porównaniu z wymiarami badanego elementu są małe i blisko siebie położone. Z tego powodu przyjmujemy, że metale mają budowę ciągłą czyli są ^ucontinuum materialnym.
2. Założenie o jednorodności ^ucontinuum. Własności mechaniczne materiału nie zmieniają się przy przejściu z punktu do punktu czyli ich stałe materiałowe nie są funkcją miejsca.
3. Założenie o izotropowej budowie ciała. Często przyjmujemy, że własności mechaniczne materiału nie zależą od badanego kierunku. Dla ciał anizotropowych /kryształ, drewno/ własności mechaniczne zależą od kierunku obciążenia.
4. W teorii plastyczności zakłada się, że uplastycznienie materiału przypisane jest wyłącznie zmianie postaci.
5. Założenie o nieściśliwości materiału. Przyjmujemy, że w procesie plastycznego kształtowania objętość materiału nie ulega zmianie czyli materiał jest nieściśliwy. Założenie to chociaż jest niezgodne z rzeczywistością, to jednak wydatnie ułatwia rozwiązywanie zagadnień teorii plastyczności z dostateczną dla praktyki dokładnością.
6. Założenie o sprężystej zmianie objętości. Często przyjmujemy,

że w zakresie odkształceń sprężystych i plastycznych objętość zmienia się tylko sprężyście, a zatem materiał jest ściśliwy tylko sprężyście ($\sigma_s = 3K \epsilon_s = 2H \epsilon_s$).

7. Założenie o sprężystej zmianie postaci. W teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych Hencky-Iliuszyna i w teorii płynięcia sprężysto-plastycznego Prandtla-Reussa uwzględnia się również sprężystą zmianę postaci ($\dot{\sigma}_{ij} = 2G \dot{\epsilon}_{ij}$).

W pracy zostaną podane i przedyskutowane metody rozwiązywania zagadnień płynięcia plastycznego, przebiegającego w warunkach płaskiego stanu odkształcenia, naprężenia i osiowej symetrii. Analiza teoretyczna procesów osiowej symetrii jest znacznie trudniejsza niż procesów przebiegających w płaskim stanie odkształcenia czy naprężenia. Wiele procesów obróbki plastycznej metali przebiega właśnie w warunkach osiowej symetrii i z tego powodu ich teoretyczna analiza ma duże znaczenie dla praktyki.

Procesy obróbki plastycznej metali /a szerzej mówiąc zagadnienia płynięcia plastycznego/ możemy rozwiązywać następującymi metodami:

- uproszczoną,
- założenia funkcji rozkładu prędkości,
- równowagi sił jednostkowych,
- założenia statycznie dopuszczalnego pola naprężeń,
- charakterystyk,
- elementów skończonych,
- wariacyjną.

1.2. Metody obróbki plastycznej

Wykonywanie części metodami obróbki plastycznej metali może odbywać się:

- 1/ na zimno — kształtowanie metalu prowadzi się w temperaturze niższej od temperatury rekrytalizacji, materiał odkształcony wykazuje umocnienie i posiada strukturę materiału zgniecionego;
- 2/ na gorąco — kształtowanie metalu prowadzi się w temperaturze wyższej od temperatury rekrytalizacji, materiał wyrobu nie wykazuje umocnienia i posiada strukturę materiału zrekrystalizowanego.

Procesy obróbki plastycznej metali najogólniej można podzielić na:

- 1/ cięcie — w procesie cięcia występuje naruszenie spójności materiału,
- 2/ kształtowanie plastyczne — w procesie kształtowania nie występuje naruszenie spójności materiału.

W skład metody kształtowania plastycznego wchodzi:

- A — gięcie,
- B — kształtowanie wytłoczek o powierzchni nierozwijalnej,
- C — kształtowanie brył.

Podziału obróbki plastycznej metali na metody i na poszczególne operacje można dokonywać w różny sposób, jak to zresztą czynione jest w literaturze technicznej i w normach przedmiotowych. Szczególnie istotne znaczenie dla normalizacji i unifikacji ma nazewnictwo poszczególnych operacji i przyrządów, służących do wykonania tych operacji. Dokonany w tym punkcie podział metod i operacji obróbki plastycznej, a szczególnie rysunki ze względu na swoją poglądowość ^{wzięte} są z

pracy [2]. Wiele szczególnych przypadków operacji obróbki plastycznej metali jest pominiętych w przyjętym podziale dla uzyskania większej przejrzystości i założonego celu, polegającego tylko na wprowadzeniu w praktyczne zagadnienia obróbki plastycznej metali.

1.2.1. Cięcie

Cięcie jest metodą obróbki plastycznej wykonywania wyrobów, polegającą na oddzieleniu jednej części materiału od drugiej wzdłuż linii zamkniętej lub niezamkniętej.

Procesy cięcia można podzielić na dwie podstawowe grupy według ilości krawędzi tnących:

- cięcie jedną krawędzią tnącą (okrawanie odkuwek — rys. 1.2a, cięcie gumą, cięcie nożowe),
- cięcie dwiema krawędziami tnącymi (cięcie na nożycach, cięcie na wykrojnikach — rys. 1.1 oraz rys. 1.2b,c).

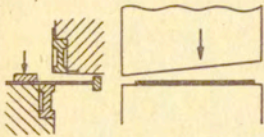

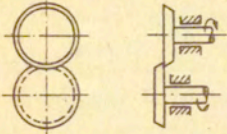

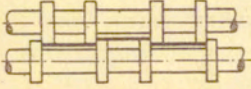

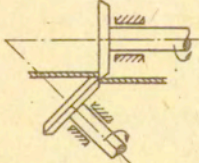

Cięcie na nożycach (tablica 1.1) stosowane jest do rozcinania arkuszy blach lub taśm w celu uzyskania przeważnie półwyrobów przeznaczonych do dalszych operacji kształtowania.

Cięcie na wykrojnikach (tablica 1.2) stosowane jest do uzyskania półwyrobów używanych do dalszych operacji kształtowania lub do otrzymania wyrobów gotowych. Cięcie na wykrojnikach może być zwykłe (rys. 1.1a,b) lub dokładne (rys. 1.1c)

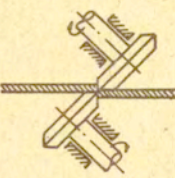

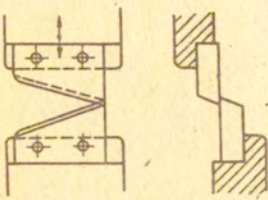

i może odbywać się w jednym zabiegu lub w kilku zabiegach jako cięcie wielotaktowe i cięcie jednoczesne. Najczęściej stosowaną jest operacja wycinania na wykrojnikach w celu otrzymania półwyrobów lub wyrobów gotowych. Ze względów użytkowych wyrobu na większą uwagę zasługuje wykrawanie (wycinanie) dokładne .

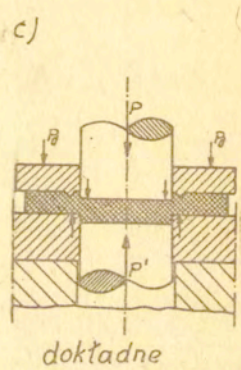
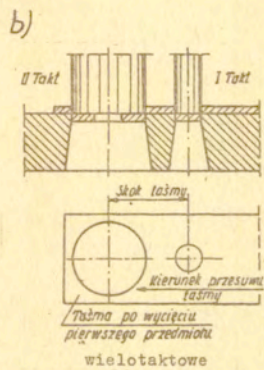
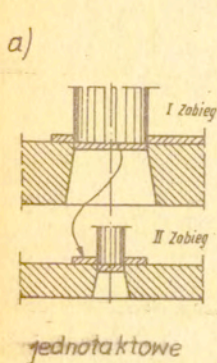
Tablica 1.1

Zestawienie sposobów cięcia blachy na nożycach

Nazwa i schemat nożyc	Kształt linii cięcia	Grubość ciętej blachy	Uwagi
 <p>gilotynowe</p>		do 60 mm (zależnie od wielkości nożyc)	<p>cięcie arkuszy na pasy lub kawałki</p> <p>wady: skrzywienie odcinanej części, trudności w zachowaniu równoległości, zadziór położony po obu stronach elementu odcinanego</p>
 <p>krążkowe (o osiach równoległych)</p>		do 30 mm	<p>cięcie arkuszy na pasy lub kawałki, wycinanie krążków o dużych średnicach</p> <p>zalety: linia cięcia dowolnie długa</p> <p>wady: krzywienie obu części ciętego materiału</p>
 <p>wielokrążkowe</p>		do 10 mm	<p>Jednoczesne cięcie arkuszy lub taśm na pasy</p> <p>zalety: bardzo duża wydajność, duża równoległość linii cięcia, jednostronne położenie zadziorów</p>
 <p>krążkowe (z pochylonym dolnym krążkiem)</p>		do 30 mm	<p>cięcie arkuszy na pasy i kawałki, wycinanie przedmiotów o zarysie będącym linią wypukłą</p> <p>zalety: dowolnie długa linia cięcia</p> <p>wady: krzywienie obu części ciętego materiału</p>

C.d. tablicy 1.1

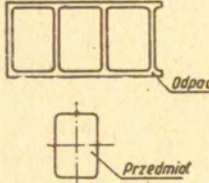
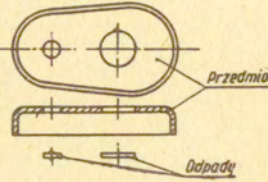
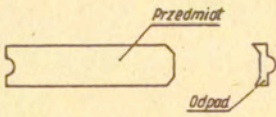
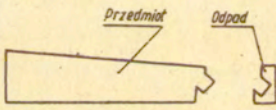
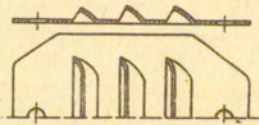
Nazwa i schemat nożyce	Kształt linii cięcia	Grubość ciętej blachy	Uwagi
 <p>krążkowe (z pochylonymi krążkami)</p>		do 20 mm	cięcie arkuszy na pasy i kawałki, wycinanie krążków i pierścieni zalety: duża uniwersalność wady: wciąganie materiału przez krążki co utrudnia dokładne cięcie wg wytrasowanych linii
 <p>skokowe</p>		do 10 mm	wycinanie przedmiotów płaskich o dowolnym zarysie krzywoliniowym zalety: nożyce nie wciągają materiału, możliwe do uzyskania małego promienia krzywizn (do 15 mm)

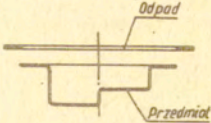

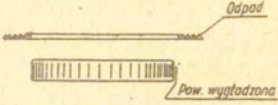


Rys. 11. Schematy cięcia: a - zwykłe jednozabiegowe, b - zwykłe wielozabiegowe, c - dokładne jednozabiegowe

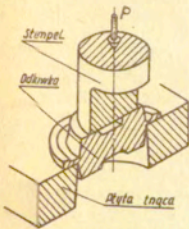
Tablica 1.2

Operacje cięcia na wykrojnikach

Nazwa operacji	Określenie operacji	Schemat operacji
Wycinanie	cięcie następuje wzdłuż linii zamkniętej. Część wycięta (wewnętrzna) stanowi przedmiot, a materiał leżący na zewnątrz linii cięcia jest odpadem	
Dziurkowanie	cięcie następuje wzdłuż linii zamkniętej. Część wycięta (wewnętrzna) stanowi odpad, a materiał leżący na zewnątrz linii cięcia - przedmiot, w którym wykonano otwór	
Odcinanie	cięcie następuje wzdłuż linii niezamkniętej. Przy oddzielaniużądanego przedmiotu od materiału wyjściowego powstaje odpad lub nie	
Przycinanie	cięcie następuje wzdłuż linii niezamkniętej. Usuwa się zbędny materiał, który przylega do krawędzi przedmiotu	
Nadcinanie	cięcie następuje wzdłuż linii niezamkniętej, która nie dochodzi do krawędzi przedmiotu. Nie ma rozdzielenia materiału na dwie oddzielne części	

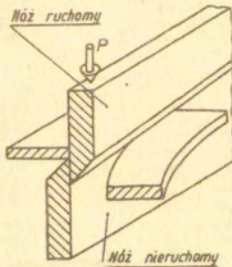
Nazwa operacji	Określenie operacji	Schemat operacji
Okrawanie	celem operacji jest wyrównanie obrzeża przedmiotu przez usunięcie nadmiaru materiału najczęściej odkształconego w poprzednich operacjach tłoczenia	
Rozcinanie	celem operacji jest oddzielenie od siebie dwu przedmiotów najczęściej jednakowych lub symetrycznych wykonanych początkowo wspólnie z jednego kawałka materiału	
Wygładzanie	celem operacji jest nadanie powierzchni przecięcia żądanej dokładności kształtu, wymiarów i gładkości. W procesie następuje skrawanie materiału	

a)



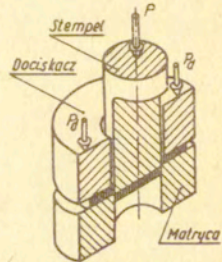
okrawanie odcuwką

b)



cięcie na nożach

c)



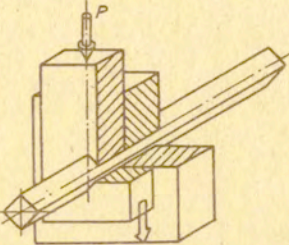
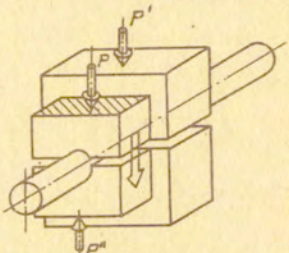
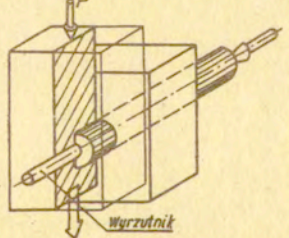
cięcie na wykrojnikach

Rys. 1.2. Schematy cięcia: a - jedną krawędzią tnącą, b i c - dwiema krawędziami tnącymi

W praktyce bardzo często stosowane są operacje cięcia prętów hutniczych (tablica 1.3) na odcinki przeznaczone do kształtowania objętościowego na zimno lub gorąco. Cięcie prętów może być swobodne, z dociskiem poprzecznym lub z dociskiem wzdłużnym.

Tablica 1.3

Cięcie prętów na nożycach

Sposób cięcia	Schemat	Uwagi, zalety i wady
Swobodne		<p>stosuje się do cięcia prętów i kształtowników hutniczych</p> <p><u>zalety:</u> prosta i tania konstrukcja narzędzi</p> <p><u>wady:</u> powierzchnia cięcia nie jest prostopadła do osi prętów, występują zniekształcenia przekroju w płaszczyźnie cięcia</p>
Z zaciskiem poprzecznym		<p>stosuje się do cięcia prętów i kształtowników hutniczych</p> <p><u>zalety:</u> stosunkowo niewielkie zniekształcenia prętów w pobliżu powierzchni cięcia</p> <p><u>wady:</u> skomplikowana konstrukcja narzędzia, duża siła cięcia</p>
Z siłą osiową		<p>cięcie odbywa się w zamkniętej przestrzeni. Stosuje się głównie do cięcia prętów okrągłych</p> <p><u>zalety:</u> powierzchnia cięcia gładka i prostopadła do osi pręta. Można ciąć pręt na odcinku o niewielkiej długości</p> <p><u>wady:</u> skomplikowana konstrukcja narzędzia</p>

1.2.2. Kształtowanie plastyczne

A. Gięcie

Gięcie jest metodą kształtowania przedmiotów z blach, prętów, kształtowników, drutów i rur. Gięcie może odbywać się na prasach, na walcach, za pomocą przeciągania i za pomocą obciążania.

Gięcie na prasach odbywa się na przyrządach i jest najczęściej stosowanym sposobem kształtowania przedmiotów giętych (tablica 1.4a). Sposoby gięcia przy pomocy walców pokazano w tablicy 1.4b,c.

Gięcie za pomocą przeciągania stosowane jest wyłącznie do wykonywania rur i kształtowników z taśm i pasów blachy. Przebieg procesu gięcia przez przeciąganie pokazano na rysunku 1.3.

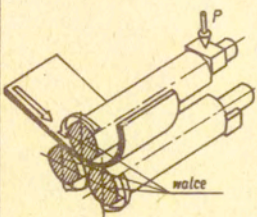
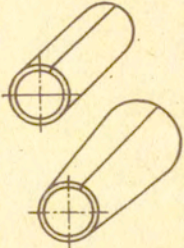
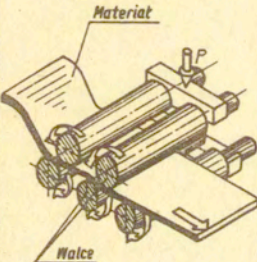

Często stosowane jest gięcie kształtowników przez owijanie na wzornik połączone z rozciąganiem (rys. 1.4a) oraz obciążanie na wzornik (rys. 1.4b). Rozciąganie stosowane jest w celu usunięcia fałdowania pólki przedmiotu giętego. Gięcie z rozciąganiem prawie całkowicie eliminuje sprężynowanie przedmiotu giętego po zdjęciu go z maszyny.

Tablica 1.4a

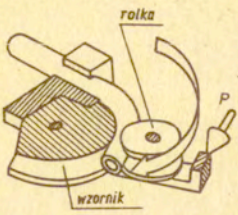
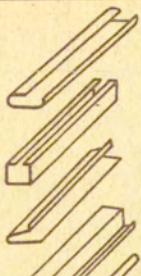
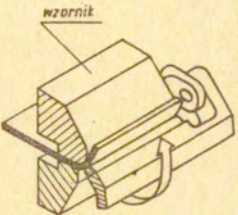

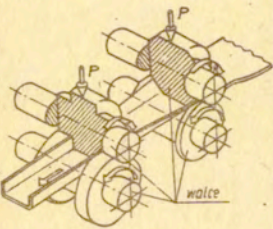
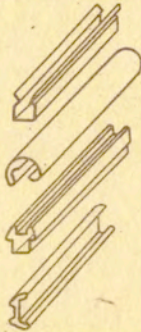
Operacje gięcia na prasach

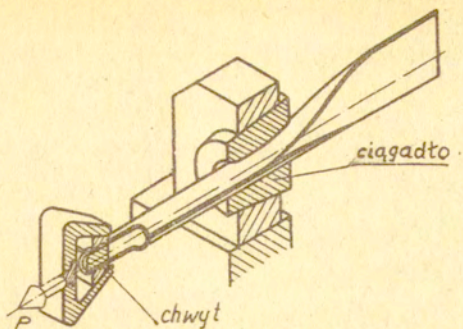
	Schemat	Przykłady wyrobów	Uwagi
Wyginanie			<p>produkcja przedmiotów blaszanych o szerokim zakresie wymiarów, w tym również kształtowników (na prasie krawędziowej). Gięcie prętów, rur, kształtowników blaszanych i hutniczych</p>
Zaginanie			<p>produkcja przedmiotów blaszanych o szerokim zakresie wymiarów, w tym również kształtowników (na prasie krawędziowej)</p>
Zawijanie			

Sposoby gięcia przy pomocy walców

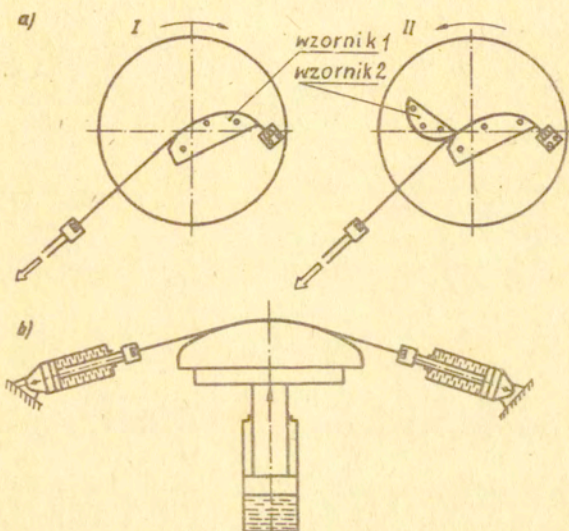
	Schemat	Przykłady wyrobów	Uwagi
Walcowanie poprzeczne	 <p data-bbox="238 677 435 723">za pomocą trzech walców</p>	 <p data-bbox="533 623 678 662">zwijanych</p>	<p data-bbox="730 323 875 523">produkcja rur i płaszczy zbiorników o b. szerokim zakresie wymiarów z blach o różnych grubościach.</p> <p data-bbox="730 531 875 654">Gięcie prętów rur i kształtowników blaszanych i hutniczych</p>
	 <p data-bbox="274 1185 398 1208">prostowana</p>		<p data-bbox="730 908 875 1031">stosuje się do prostowania blach, taśm, prętów i drutów</p>

Tablica 1.4c

	Schemat	Przykłady wyrobów	Uwagi
Walcowanie poprzeczne owijanie			<p>stosuje się do gięcia rur, prętów, kształtowników i taśm.</p> <p>Wzornik może wykonywać ruch obrotowy lub nie</p>
	 <p>lub zaginanie</p>		<p>wzornik ma postać nieruchomej belki, której powierzchnia robocza jest odpowiednio zaokrąglona</p> <p>Stosuje się wyłącznie do gięcia blach</p>
Walcowanie wzdłużne	 <p>profilowanie</p>		<p>stosuje się w wielosekcyjnej produkcji kształtowników z taśm o bardzo różnorodnych przekrojach poprzecznych.</p> <p>Ilość par walców kształtujących zależy od kształtu przekroju poprzecznego</p>



Rys. 1.3. Schemat kształtowania rury za pomocą przeciągania



Rys. 1.4. Schematy gięcia kształtowników: a) owijanie z rozciąganiem (stap I i II), b) obciąganie

B. Kształtowanie wytłoczek o powierzchni nierozwijalnej

Wytłoczka o powierzchni nierozwijalnej jest cienkościennym przedmiotem wykonanym z blachy, którego nie można wyprostować.

Kształtowanie wytłoczek może odbywać się na prasach na tłocznikach, za pomocą przyrządów wykonujących ruch obrotowy (wyoblanie, zgniatanie obrotowe) oraz metodami dynamicznymi.

Kształtowanie wytłoczek o powierzchni nierozwijalnej odbywać się może na prasach mechanicznych lub hydraulicznych pojedynczego względnie podwójnego działania. Do podstawowych i najczęściej stosowanych operacji kształtowania wytłoczek na prasach należą:

- a - wytłaczanie,
- b - przetłaczanie,
- c - wyciąganie.

Mogą być również wykonywane i inne operacje kształtowania, jak:

- d - dotłaczanie,
- e - rozpychanie,
- f - obciskanie,
- g - wywijanie.

a. Wytłaczanie

Wytłaczanie jest to głębokie kształtowanie wytłoczki z płytki wyjściowej. Wytłaczanie jest pierwszą operacją procesu kształtowania głębokiej wytłoczki. Wytłaczanie może odbywać się za pomocą narzędzi sztywnych, poduszki gumowej i ciśnienia cieczy.

Sposoby wytłaczania narzędziami sztywnymi zestawiono w tablicy 1.5, a wytłaczanie gumą i cieczą - w tablicy 1.6.

b. Przetłaczanie

Przetłaczanie jest operacją ciągnięcia wytłoczki, w wyniku której następuje zwiększenie jej wysokości kosztem zmniejszenia przekroju poprzecznego. Grubość ścianki przetłoczki może ulegać zmianie. Sposoby przetłaczania pokazano w tablicy 1.7.

c. Wyciąganie

Wyciąganie jest to operacja polegająca na zwiększeniu wysokości wytłoczki przez zmniejszenie grubości jej ścianki, przy czym średnica wewnętrzna wytłoczki prawie nie ulega zmianie. Operację wyciągania stosuje się do produkcji wytłoczek o grubym dnie i o cienkiej ściance. Schemat wyciągania i przykłady wyrobów wyciąganych pokazano na rysunku 1.5.

d. Dotłaczanie

Dotłaczanie polega na ostatecznym uformowaniu kształtu i uzyskaniu dokładnych wymiarów wytłoczki np. dotłaczanie promieni lub kształtu ścianki. Operację dotłaczania realizuje się najczęściej za pomocą narzędzi sztywnych (rys. 1.6), ale można ją również przeprowadzać za pomocą ciśnienia wywieranego przez poduszkę gumową lub ciecz.

e. Rozpychanie

Operacja rozpychania polega na zmianie kształtu wytłoczki, powiększeniu jej wymiarów poprzecznych w określonym miejscu. Schemat operacji rozpychania oraz przykład przedmiotu pokazano na rysunku 1.7.

f. Obciskanie

Obciskanie polega na zmniejszeniu wymiarów poprzecz-

nych wytłoczki na pewnym odcinku jej wysokości. Operacja obciskania stosowana jest przy produkcji butli, żusek amunicyjnych (rys. 1.8).

g. Wywijanie

Wywijanie jest to kształtowanie obrzeża wokół uprzednio wyciętego otworu wytłoczki lub kołnierza wytłoczki cylindrycznej, lub innej (rys. 1.9).

Kształtowanie za pomocą narzędzi wykonujących ruch obrotowy stosuje się do wykonywania cienkościennych elementów osiowo-symetrycznych. Do tej metody kształtowania należy wyoblanie (rys. 1.10) i zgniatanie obrotowe (rys. 1.11).

Wyoblanie polega na przekształceniu wirującego krążka blachy lub półwyrobu przez miejscowy nacisk w kształt zewnętrzny wzornika. Grubość ścianki przedmiotu nie ulega większym zmianom.

Zgniatanie obrotowe polega na wyoblaniu krążka blachy lub półwyrobu połączone z dużym pocienieniem ścianki na skutek jej rozwałcowania. Zgniatanie obrotowe stosowane jest do produkcji wyrobów w postaci naczyń walcowych i stożkowych. Naczynia te posiadają cienką ściankę i grube dno. Zasadę zgniatania obrotowego pokazano na rysunku 1.11.

Do metod kształtowania dynamicznego należy tłoczenie wybuchowe, elektroiskrowe i elektromagnetyczne. Schematy tych operacji są bardzo proste.

Wytłaczanie narzędziami astywnymi

	Schemat	Przykłady wyrobów	Uwagi
Wytłaczanie swobodne			<p>stosuje się w tych przypadkach wytłaczania gdy nie grozi fałdowanie kołnierza wytłoczki (blacha dostatecznie gruba).</p> <p>Zjawisko fałdowania kołnierza jest przyczyną powstawania pomarszczonej powierzchni ścianki bocznej wytłoczki, a nawet może uniemożliwić jej wytłoczenie).</p> <p>Wytłaczanie grubszych blach można prowadzić z jednoczesnym zmniejszeniem grubości ścianki</p>
Wytłaczanie z dociekanem			<p>stosuje się w tych przypadkach, gdy ze względu na małą grubość blachy grozi pofałdowanie kołnierza wytłoczki.</p> <p>Dociskacz zapobiega fałdowaniu.</p> <p>Zastosowanie prasy podwójnego działania upraszcza konstrukcję wytłaczaka</p>
Wytł. z progiem ciągłym			<p>stosuje się w tych przypadkach, gdy ze względu na złożony kształt wytłoczki i duże jej wymiary, skłonność blachy do fałdowania jest szczególnie duża.</p> <p>Progi ciągłe zapobiegają fałdowaniu i zapewniają osiągnięcieżądanego kształtu.</p> <p><u>Maszyny:</u> Prasy podwójnego działania</p>

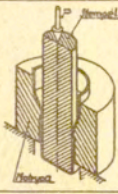
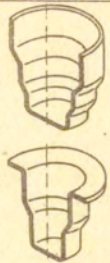


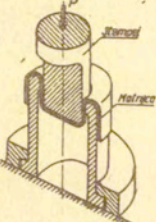
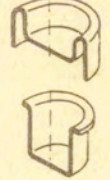
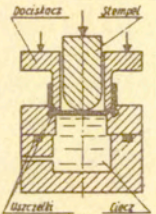
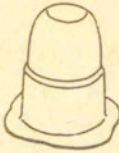
Tablica 1.6

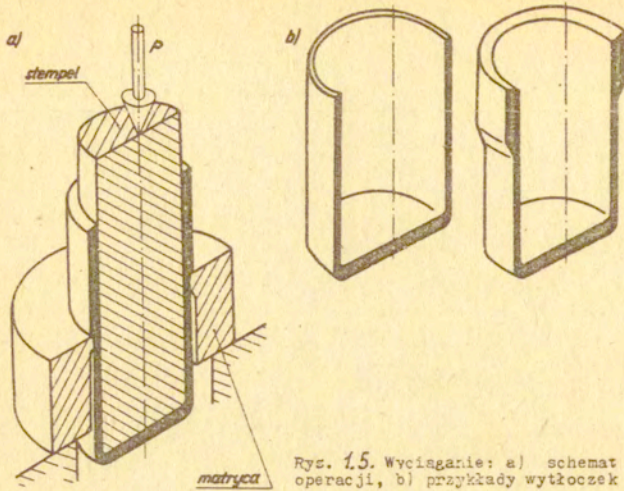
Wytłaczanie gumy i wytłaczanie hydrauliczne

	Schemat	Przykłady wyrobów	Uwagi
Wytłaczanie wewnętrzne (gumą)			<p>w porównaniu z wytłaczaniem narzędziami sztywnymi można uzyskać bardziej skomplikowane kształty wytłoczki i bardziej równomierny rozkład grubości ścianki.</p> <p>Narzędzia: prostsze i tańsze, wadą jest konieczność stosowania pras o wyższym nacisku.</p> <p>Nacisk poduszki gumowej można zastąpić ciśnieniem cieczy.</p> <p>Maszyny: Prasa podwójnego działania. Dla wytłoczek płytkich, kształtowanych bez dociskacza, prasy pojedynczego działania</p>
Wytłaczanie zewnętrzne (gumą)			<p>w tym przypadku są słabsze uwagi podane powyżej z tym, że wytłaczanie zewnętrzne gumą pozwala uzyskać wytłoczki o nieco bardziej złożonych kształtach i większej głębokości</p>
Wytłaczanie zewnętrzne hydrauliczne (Hydro-Mac)			<p>można uzyskać głębokie wytłoczki o skomplikowanych kształtach i niemal równomiernym rozkładzie grubości ścianki.</p> <p>Dla pewnych typów wytłoczek (np. parabolicznych i stożkowych) zastosowanie tej metody pozwala wyeliminować kilka operacji, niezbędnych przy ich produkcji metodami tradycyjnymi.</p> <p>Wadą jest stosunkowo niska trwałość uszczelki "poduszki wodnej".</p> <p>Maszyny: Prasa podwójnego działania.</p>

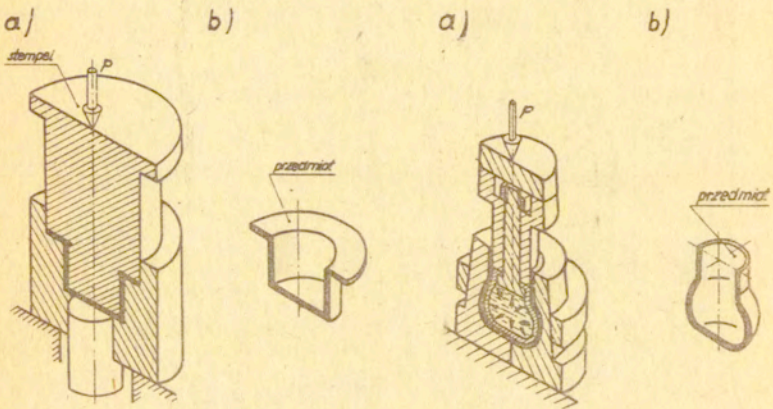
Tablica 1.7

Sposoby przetwarzania

	Schemat	Przykłady wyrobów	Uwagi
Przetwarzanie naręczniami sztywnymi	<p>z roboczą</p> 		<p>stosuje się w tych przypadkach, gdy nie grozi faldowanie ścianki bocznej; wytłoczki (ścianki) dostatecznie grube.</p> <p>Jeżeli miążsa obwodu wytłoczki jest nieduża, można jednocześnie zmniejszyć grubość ścianki.</p>
	<p>s dociekaczą</p> 		<p>stosuje się w tych przypadkach, gdy ze względu na małą grubość ścianki bocznej; wytłoczki przeznaczonych do przetwarzania grozi jej pofaldowanie.</p> <p>Zastosowanie prasy podwójnego działania upraszcza konstrukcję przetwórcy.</p>
	<p>s przesłanianiem</p> 		<p>stosuje się w tych przypadkach, gdy ze względu na kształt wyrobu zastosowanie prasowania upraszcza proces tłoczenia - oraz wtedy - gdy skłonność do faldowania ścianki wytłoczki jest duża.</p> <p>Można także stosować dociekacze.</p>
Przetwarzanie hydrauliczne (metodą Hydro-Mex)			<p>w jednej operacji można uzyskać większy przyrost wysokości wytłoczki niż podczas przetwarzania naręczniami sztywnymi.</p> <p>Potrzebna prasa podwójnego działania.</p> <p>Uszczelnka "poduszki wodnej" musi być okresowo wymieniana.</p>

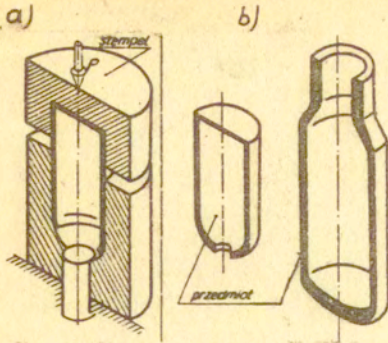


Rys. 1.5. Wyciąganie: a) schemat operacji, b) przykłady wytłoczek

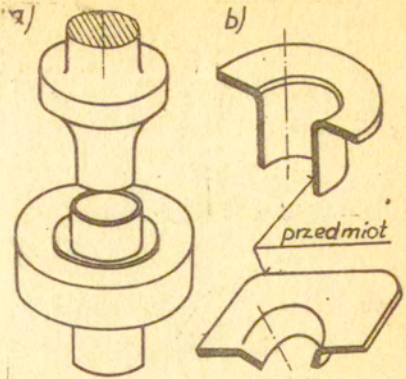


Rys. 1.6. Dotłaczanie promieni:
a) schemat dotłaczania promieni,
b) przykład wytłoczki

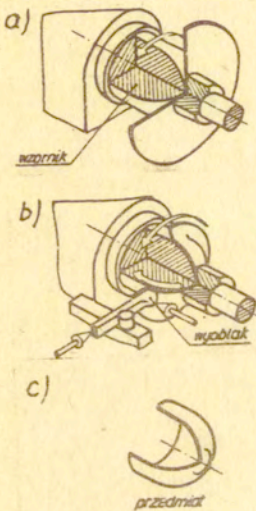
Rys. 1.7. Rozpychanie: a) schemat rozpychania cieczą,
b) przykład wytłoczki



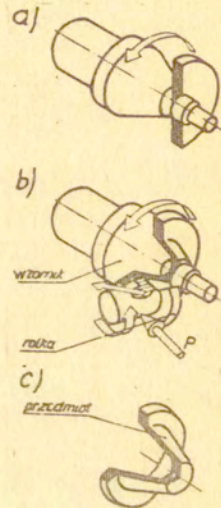
Rys. 1.8. Obciskanie:
a) schemat obtiskania,
b) przykłady wytłoczek



Rys. 1.9. Wywijanie obrzeża:
a) schemat wywijania kołnierza,
b) przykłady wytłoczek



Rys. 1.10. Wyoblanie:
a, b) schemat wyoblania,
c) przedmiot



Rys. 1.11. Zgniatanie obrotowe
a, b) schemat zgniatania,
c) przedmiot

C. Kształtowanie brył

Kształtowanie brył może odbywać się metodą:

1/ wydłużania realizowanego przez:

- a/ wyprężanie, które polega na rozciągnięciu do ok. 2% walcowanego lub wyciskanego pręta, lub kształtownika w celu jego wyprostowania (rys. 1.12.);
- b/ ciągnięcie (drutu, prętów, rur), stosowane jest do uzyskania odpowiednich kształtów, wymiarów i gładkości powierzchni (rys. 1.13.);
- c/ przepychanie (wałków, śrub), które stosowane jest w celu nadania odpowiednich wymiarów poprzecznych i kształtu wyrobom na pewnej części długości (rys. 1.14.);
- d/ wyciskanie, które może być współbieżne, przeciwbieżne, dwukierunkowe i boczne (rys. 1.15.);
- e/ walcowanie wzdłużne, stosowane jest do walcowania folii, walcowania przedkuwek i odkuwek (rys. 1.16.);
- f/ młotkowanie (rys. 1.17.);
- g/ kucie swobodne i półswobodne na młotach i prasach (rys. 1.18).

2. Spęczania realizowanego przez:

- a/ spęczanie prętów swobodne, w stemplu i w matrycy (rys. 1.19.);
- b/ matrycowanie z wypływką i bez wypływki (rys. 1.20).
Rozróżniamy kucie jednowykrojowe i wielowykrojowe. Kucie może odbywać się na młotach, na prasach, na kuźniarkach;
- c/ dogniatanie, stosowane jest w celu uzyskania dokładnych wymiarów i gładkich powierzchni elementu. Dogniatać moż-

na powierzchnie gładkie i kształtowe (rys. 1.22).

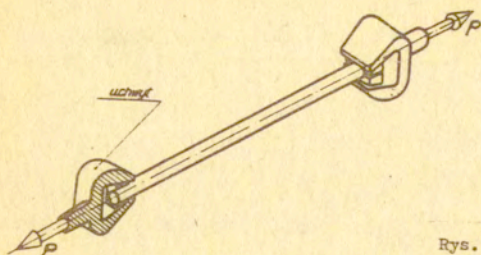
3. Wgłębianie, które może być swobodne i z obejmą. Wgłębianie stosowane jest do wykonywania wewnętrznych kształtów matryc (rys. 1.21).

4. Specjalną, do której należy:

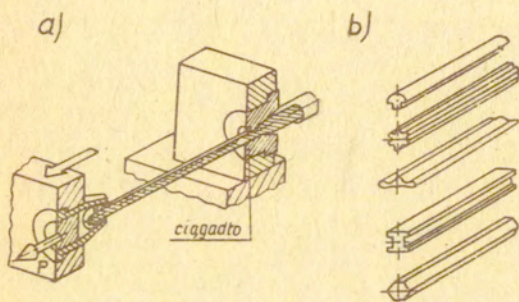
a/ walcowanie poprzeczne gwintów, wielokarbów, wielowypustów, kół zębatych rolkami, zębatką, szczękami o wewnętrznej powierzchni kształtującej (rys. 1.23c);

b/ walcowanie wzdłużne metodą Maag'a, Grob'a (rys. 1.23a);

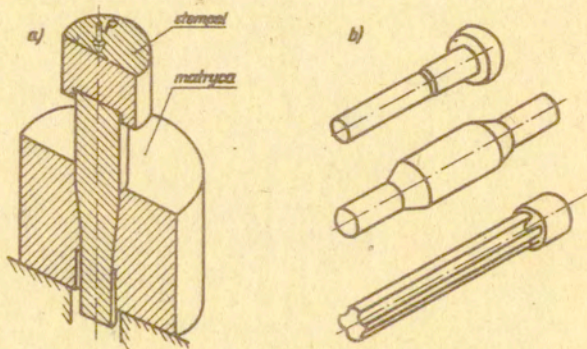
c/ prasownie wahającą matrycą (rys. 1.23b).



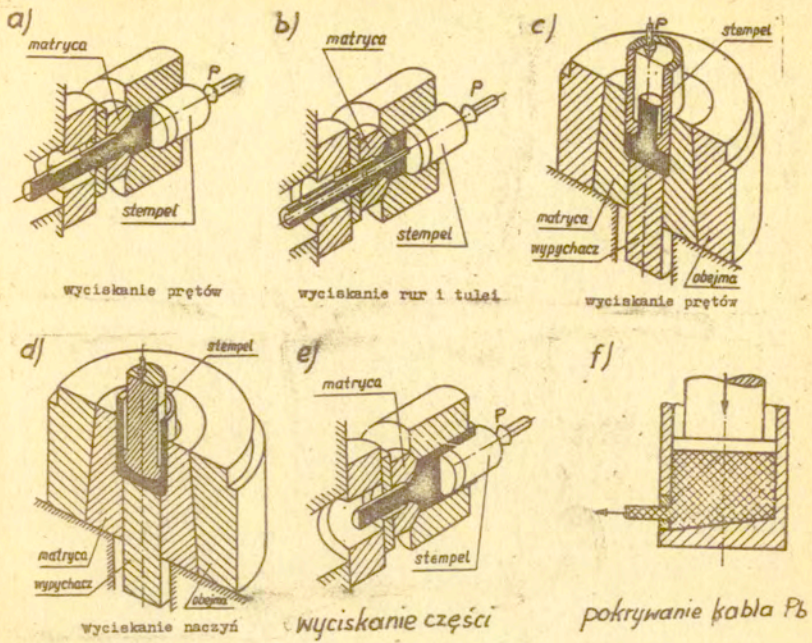
Rys. 1.12. Schemat wyprężania pręta



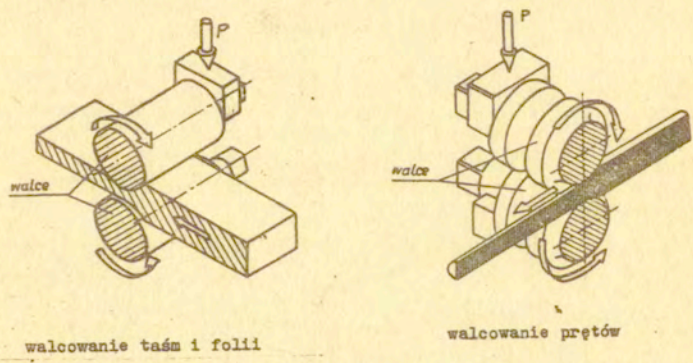
Rys. 1.13. Ciągnięcie prętów: a) schemat ciągnięcia, b) przykłady wyrobów



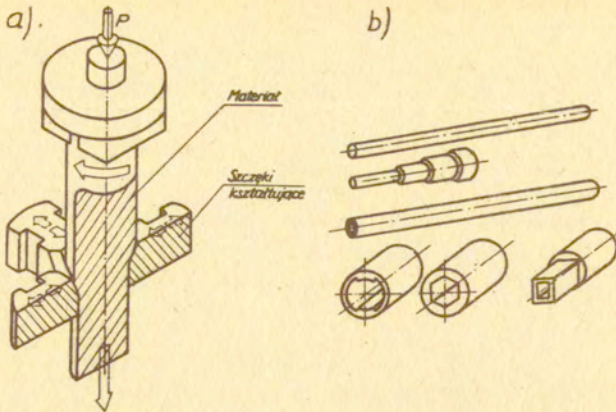
Rys. 1.14. Przepychanie: a) schemat operacji, b) przykłady przedmiotów kształtowanych



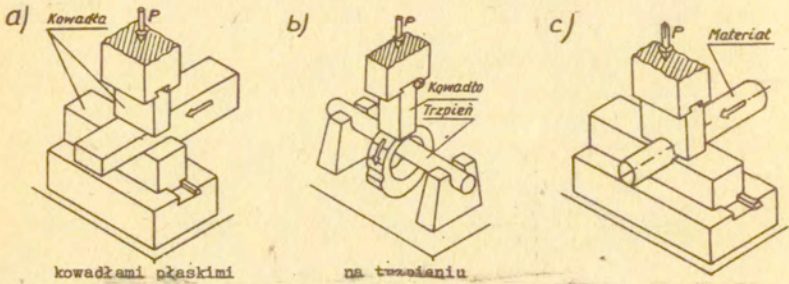
Rys. 1.15. Schematy wyciskania: a, b) współbieżne, c, d) przeciwbieżne, e) mieszane, f) boczne



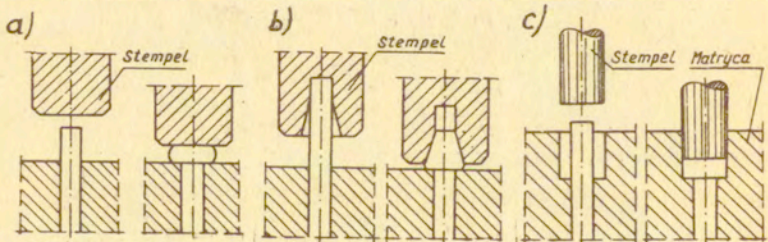
Rys. 1.16. Schematy walcowania wzdłużnego



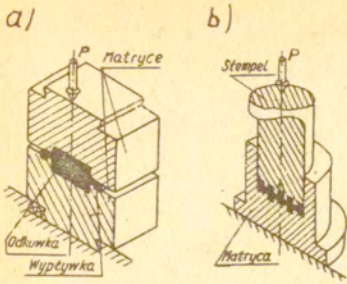
Rys. 117. Młotkowanie: a) schemat procesu, b) przykłady przedmiotów kształtowanych



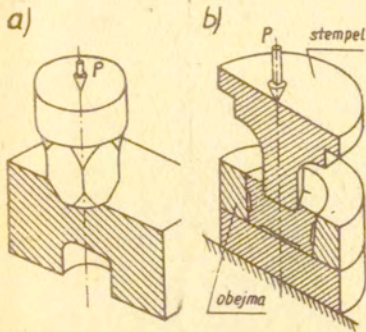
Rys. 118. Schematy kucia: a, b) swobodnego, c) półswobodnego



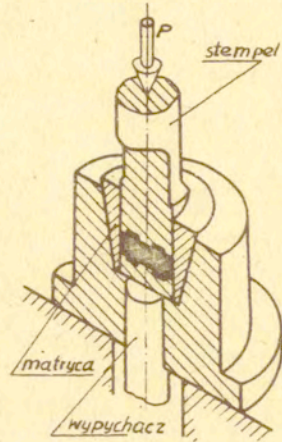
Rys. 119. Schematy spęczania: a) swobodnie, b) w stemple, c) w matrycy



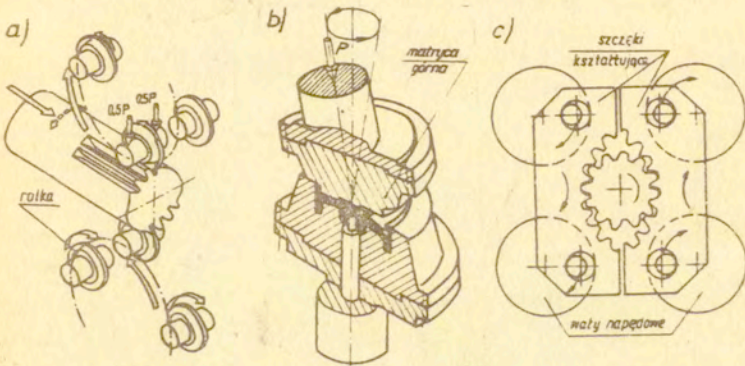
Rys. 120. Schematy kucia:
a) z wypływką, b) bez wypływki



Rys. 121. Wgłębienie:
a) swobodne, b) w obejmie



Rys. 122. Dogniatanie
powierzchni kształtowych



Rys. 123. Specjalne metody kształtowania: a) Grob'a ,
b) wahająca matrycą, c) walcowanie szczękami o wewnętrznym
uzębieniu

Literatura do rozdziału I

1. Praca zbiorowa pod red. W.Olszaka, P.Perzyny i A.Sawczuka. Teoria plastyczności, PWN, Warszawa, 1965.
2. Praca zbiorowa pod red. J.Erbela. Encyklopedia technik wytwarzania stosowanych w przemyśle maszynowym. Tom I. Skrypt PW, Warszawa, 1975.
3. Obróbka plastyczna. Nazwy i określenia. PN-65/M-66001.
4. Obróbka plastyczna. Tłoczenie. Nazwy i określenia. PN-60/M-66002.
5. Obróbka plastyczna. Kucie. Nazwy i określenia. PN-65/M-66003.
6. Obróbka plastyczna. Walcowanie. Nazwy i określenia. PN-65/M-66004.
7. Obróbka plastyczna. Ciągnięcie. Nazwy i określenia. PN-65/M-66005.

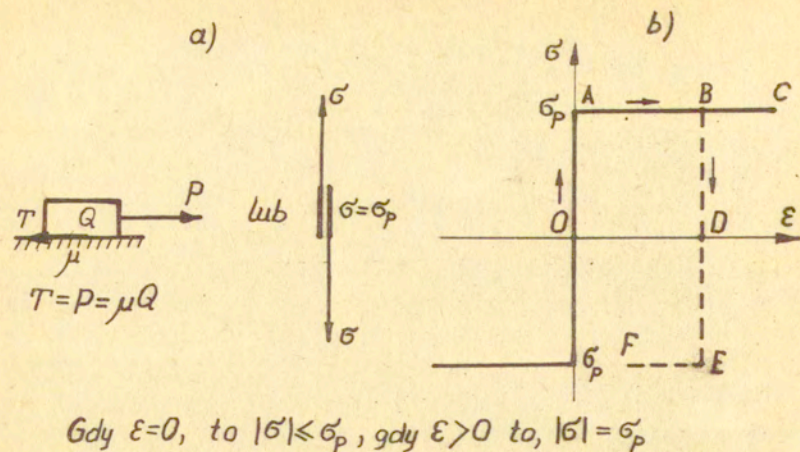
R o z d z i a ł I I

MODELE CIAŁ ODKSZTAŁCALNYCH

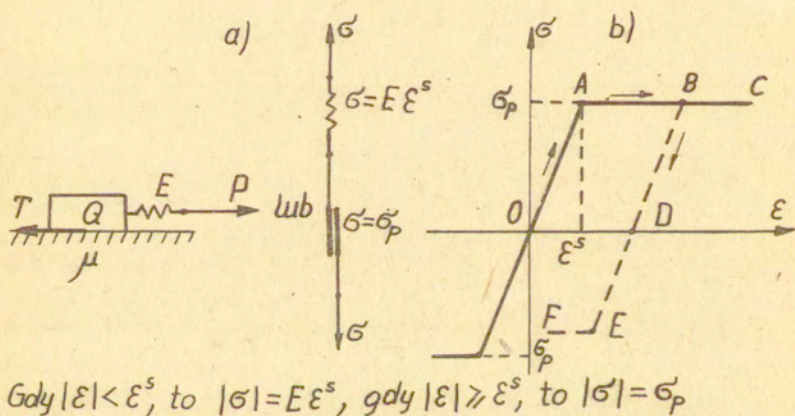
2.1. Wiadomości ogólne

W technice spotykane są materiały o różnej zależności między naprężeniami σ i odkształceniami ϵ . Własności mechaniczne materiału są określone kształtem krzywej σ - ϵ oraz jego ściśliwością. Do analizy procesów obróbki plastycznej metali przyjmowane są nawet wyidealizowane materiały, które swym zachowaniem wyraźnie odbiegają od materiałów rzeczywistych. Typów ciał odkształcalnych jest wiele. Poniżej zostaną przedstawione tylko te ciała, które związane są ze zjawiskami plastyczności. Na rysunkach od 2.1 do 2.9 przedstawiono modele mechaniczne oraz wykresy zależności σ - ϵ dla najczęściej spotykanych ciał odkształcalnych. Teoria plastyczności stawia sobie za cel formułowanie związków fizycznych dla tych ciał.

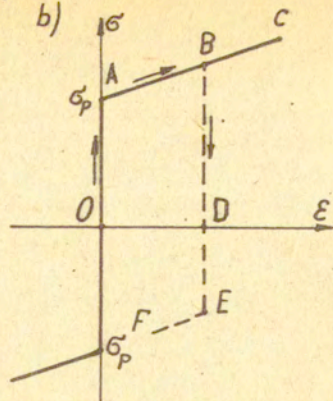
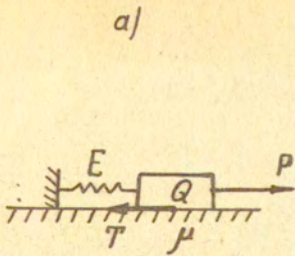
Analiza złożonych modeli mechanicznych ciał odkształcalnych pozwala na konstruowanie /budowanie/ równań reologicznych. Te równania reologiczne wiążą ze sobą najczęściej dewiatory naprężeń z dewiatorami odkształceń lub też dewiatory naprężeń z dewiatorami lub tensorami prędkości odkształceń. Zbudowane związki reologiczne pozwalają przeprowadzać teoretyczną analizę materiałów konstrukcyjnych na pełzanie i na relaksację.



Rys. 2.1. Materiał sztywno-idealnie plastyczny: a - model mechaniczny, b - wykres zależności σ - ϵ

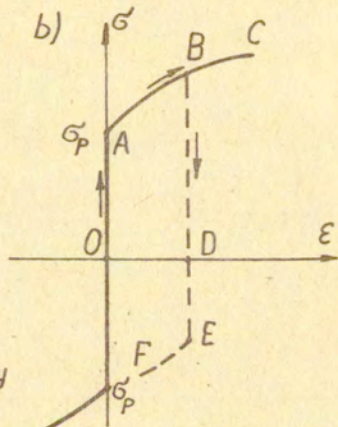
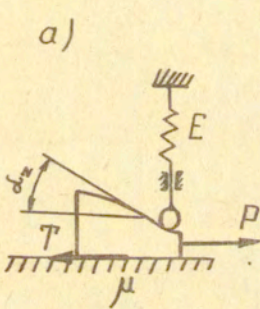


Rys. 2.2. Materiał sprężysto-idealnie plastyczny: a - model mechaniczny, b - wykres zależności σ - ϵ



Gdy $\varepsilon=0$, to $|\sigma| \leq \sigma_p$, gdy $\varepsilon > 0$, to $|\sigma| = \sigma_p + E\varepsilon$ (lub $\sigma = \sigma_p + k_1\varepsilon$, $k_1 = k \operatorname{tg} \alpha$, k jest stałą sprężyny)

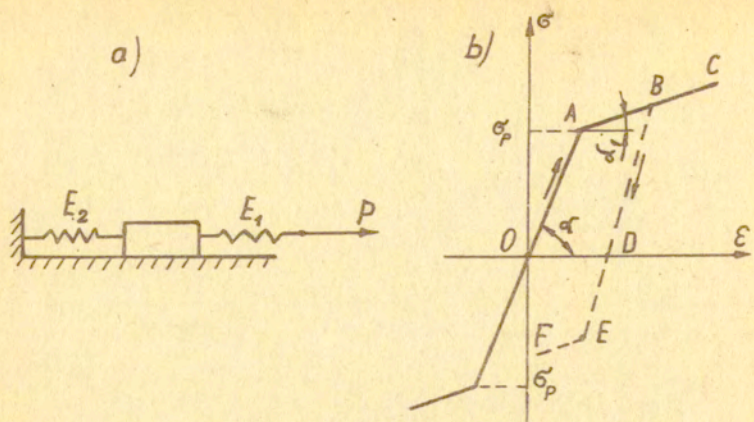
Rys. 2.3. Materiał sztywno-idealnie plastyczny o liniowym wzmocnieniu: a - model mechaniczny, b - wykres zależności σ - ε



$$E_1 = E \operatorname{tg} \alpha_z, \alpha_z - \text{kąt zmienny}$$

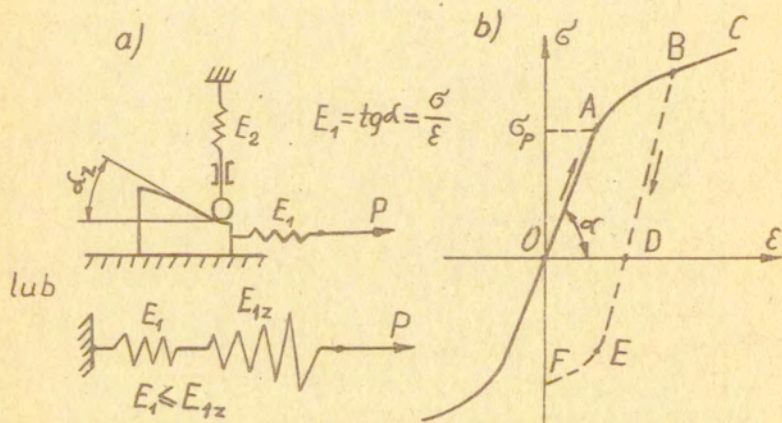
Gdy $\varepsilon=0$, to $|\sigma| \leq \sigma_p$, gdy $\varepsilon > 0$, to $|\sigma| = \sigma_p + E_1\varepsilon$

Rys. 2.4. Materiał sztywno-idealnie plastyczny o nieliniowym wzmocnieniu: a - model mechaniczny, b - wykres zależności σ - ε



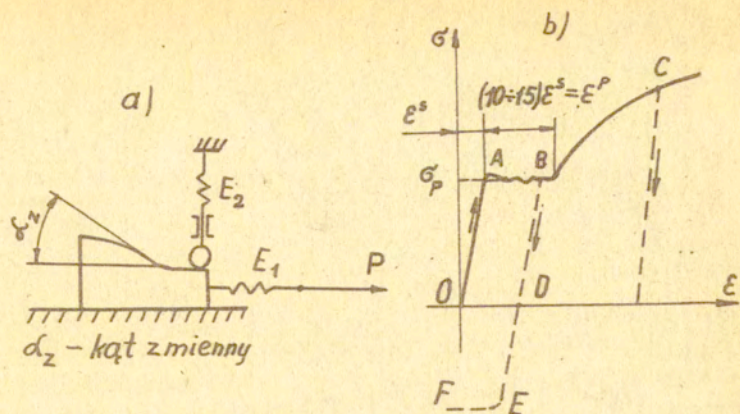
Gdy $|\epsilon| < \epsilon^s$, to $|\sigma| = E_1 \epsilon^s$, gdy $|\epsilon| \geq \epsilon^s$, to $|\sigma| = \sigma_p + E_2 \epsilon$

Rys. 2.5. Materiał sprężysto-plastyczny o liniowym wzmocnieniu: a - model mechaniczny, b - wykres zależności σ - ϵ

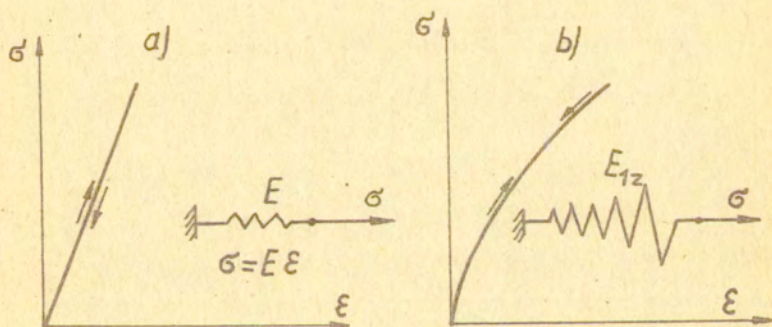


Gdy $|\epsilon| \leq \epsilon^s$, to $|\sigma| = E_1 \epsilon^s$, gdy $|\epsilon| > \epsilon^s$, to $|\sigma| = E_1 \epsilon^s + E_2 \epsilon \operatorname{tg} \alpha_z$
 α_z - kąt zmienny

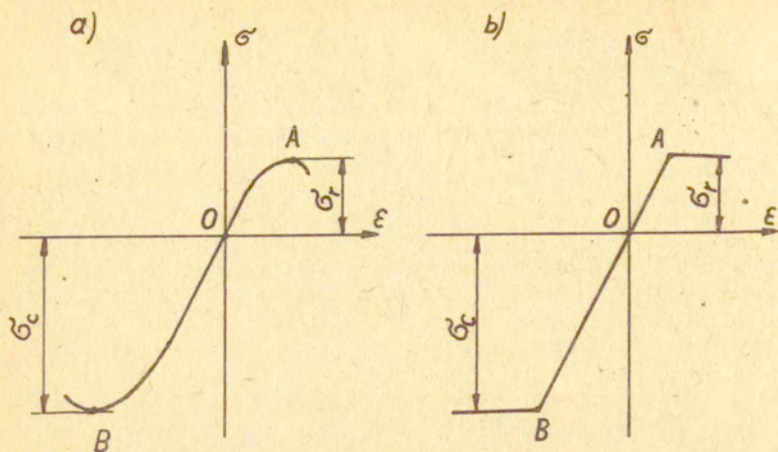
Rys. 2.6. Materiał sprężysto-plastyczny o nieliniowym wzmocnieniu bez wyraźnej granicy plastyczności: a - model mechaniczny, b - wykres zależności σ - ϵ



Rys. 2.7. Materiał sprężysto-plastyczny o nieliniowym wzmocnieniu z przystankiem plastycznym: a - model mechaniczny, b - wykres zależności σ - ϵ . Gdy $\epsilon \leq \epsilon^s$, to $\sigma = E_1 \epsilon^s$, a gdy $\epsilon > \epsilon^s$, to $\sigma = \sigma_p$, jeśli $\epsilon > 15 \epsilon^s$, to $\sigma = E_1 \epsilon^s + E_2 \epsilon \operatorname{tg} \alpha_2$



Rys. 2.8. Materiały idealnie sprężyste: a - liniowo-sprężyste, b - nieliniowo-sprężyste



Rys. 2.9. Wykres zależności σ - ϵ dla materiałów kruchych: a - wykres rzeczywisty, b - wykres uproszczony

Najprostszym modelem ciała odkształcalnego jest sprężyna symbolizująca materiał liniowo-sprężysty (rys. 2.8a), dla którego zależność między naprężeniem σ i odkształceniem ϵ jest liniowa i niezależna od czasu. Materiał ten dla małych odkształceń zachowuje się liniowo i sprężyste, dla dużych odkształceń zależność ta może być nieliniowa i mogą pojawiać się odkształcenia plastyczne. Przejście między zakresem sprężystym a plastycznym może być stopniowe (rys. 2.6b) lub nagłe (rys.

2.7b). Na rysunkach od 2.1. do 2.7. odcinki OA odpowiadają procesowi sprężystemu, a odcinki ABC odpowiadają procesowi plastycznemu.

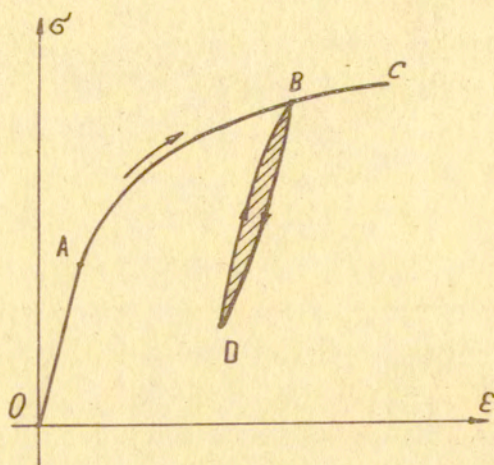
Wykresy σ - ϵ materiałów rzeczywistych (rys. 2.6 i 2.7) są zbyt złożone, aby mogły stanowić model materiału do rozwiązywania konkretnych zagadnień technicznych z powodu trudnego

lub wręcz niemożliwego opisu matematycznego. Stosowane są pewne uproszczenia polegające na zastąpieniu wykresów krzywoliniowych ciągiem linii prostych (rys. 2.5).

W przypadku, gdy mamy do czynienia z dużymi odkształczeniami całkowitymi możemy pominąć odkształcenia sprężyste, które są z reguły małe i wówczas otrzymujemy modele ciał sztywnoplastycznych (rys. 2.1 i 2.3).

Na rysunkach od 2.1 do 2.7 przy pomocy strzałek i linii przerywanych pokazano proces obciążenia i proces odciążania materiału. Materiał w procesie odciążania zachowuje się sprężysto i nachylenie wykresu (linia BD) przebiega w przybliżeniu tak samo jak w pierwszym stadium obciążania (odcinek OA). Przebieg odciążania możemy prowadzić tak daleko, aż naprężenie σ zmieni znak z dodatniego na ujemny i wówczas materiał osiąga granicę plastyczności na ściskanie. Dla materiałów idealnie-plastycznych granice plastyczności przy rozciąganiu i przy ściskaniu (w czasie odciążania) są w przybliżeniu takie same. Natomiast dla materiałów wykazujących wzmocnienie granica plastyczności przy ściskaniu (realizowanym zaraz po rozciąganiu) jest mniejsza niż przy rozciąganiu. Zjawisko to tłumaczy efekt Bauschingera.

Z badań doświadczalnych wiemy, że przy obciążeniu próbki do punktu B i odciążeniu jej do punktu D i następnie przy ponownym obciążeniu do punktu C (rys. 2.10) wykres odciążania BD i wykres ponownego obciążania DB tworzą wąską pętlę, której pole przedstawia pracę dysypowaną (rozproszoną) w czasie cyklu roboczego BDB. Zjawisko to określane jest mianem histerozy sprężystej. W naszych rozważaniach będziemy przyjmować pokrywanie się odcinków BD i DB dla wszystkich typów ciał sprężysto-plastycznych i sztywno-plastycznych.



Rys. 2.10. Zależność między σ i ϵ z uwzględnieniem zjawiska histerezy sprężystej

2.2. Wykresy dla złożonych stanów

Jednoosiowe stany naprężenia (rozciąganie, ściskanie) w zakresie sprężystym, gdzie ważne jest prawo Hooke'a, opisywane są liniową zależnością

$$\begin{aligned} \sigma &= E \epsilon, \\ E &= \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon} = \operatorname{const}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Po przekroczeniu granicy sprężystości zależność między naprężeniem σ i odkształceniem ϵ jest na ogół nieliniowa i może być opisana równaniem

$$\sigma = E_p \epsilon, \quad (2.2)$$

gdzie $E_p = \operatorname{tg} \alpha_1 = \varphi(\epsilon) = \frac{\sigma}{\epsilon}$ jest modułem plastycznym zależ-

nym od odkształcenia. Dla złożonych stanów sprężystych możliwa jest zależność między intensywnością naprężeń σ_i i intensywnością odkształceń ϵ_i (rys. 2.11) analogiczna do jednoosiowych stanów, a mianowicie

$$\sigma_i = E \epsilon_i \quad (2.3)$$

Dla zagadnień plastycznych występujących w przestrzennym stanie naprężenia słuszny jest związek

$$\sigma_i = E_p \epsilon_i \quad (2.4)$$

gdzie $E_p = \text{tg } \alpha_1 = \frac{\sigma_i}{\epsilon_i}$ jest modułem plastycznym zależnym od intensywności odkształceń ϵ_i ,

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

jest intensywnością naprężeń,

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$$

jest intensywnością odkształceń, $\nu = \left| -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right|$ jest współczynnikiem skurczu poprzecznego (liczba Poissona), który wraz ze

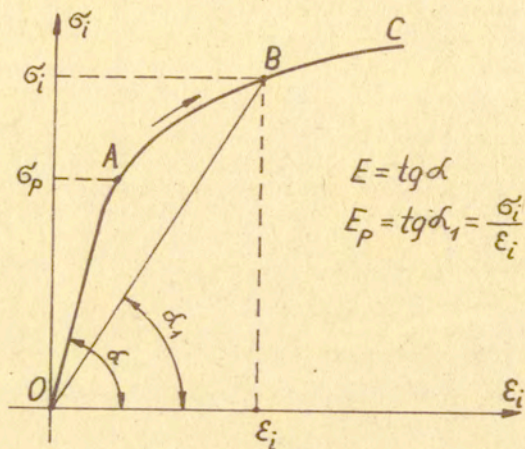
wzrostem odkształcenia dąży do wartości granicznej 0,5. Zależność między intensywnością naprężeń σ_i i intensywnością odkształceń ϵ_i przykładowo pokazano na rysunku 2.11. Równanie

(2.4) wskazuje na to, że złożony, dowolny stan naprężenia

sprowadza się do prostego rozciągania lub ściskania i odwzorować go można za pomocą prostego wykresu. Intensywność naprężeń σ_i jest tylko funkcją intensywności odkształceń ϵ_i ($\sigma_i = \varphi(\epsilon_i)$) zarówno przy sprężystym jak i plastycznym odkształcaniu czynnym. Funkcja φ zależy tylko od materiału. Wykresy podane na rysunkach od 2.1. do 2.9 są ważne również i dla osi współrzędnych σ_i , ϵ_i .

Dla procesów związanych z pojawieniem się odkształceń plastycznych nie ma jednoznacznej zależności wiążącej naprężeń

nia i odkształcenia. W teorii plastyczności możliwa jest zależność między naprężeniami i prędkościami odkształceń w odróżnieniu od teorii sprężystości, gdzie występuje zależność między naprężeniami i odkształceniami (gdyż występują tutaj bardzo małe odkształcenia). W zagadnieniach obróbki plastycznej występują duże odkształcenia.

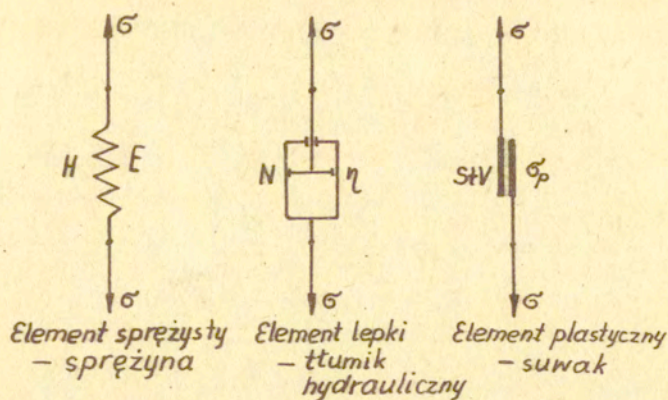


Rys. 2.11. Zależność między σ_i i ϵ_i

2.3. Proste modele mechaniczne

Równania fizyczne i wykresy zależności σ - ϵ dla różnych ciał można otrzymać z analizy złożonych modeli mechanicznych. Te złożone modele otrzymujemy ze składowania prostych modeli mechanicznych (rys. 2.12) zwanych elementami. Stosując różne zestawienia elementu sprężystego z elementem lepkiem, elementu sprężystego z elementem plastycznym i elementu lepkiego z elementem plastycznym oraz elementu sprężystego, lepkiego i plastycznego otrzymujemy różne złożone modele mechaniczne ciał.

Ciało idealnie-sprężyste podlegające prawu Hooke'a wyobrażamy sobie w postaci sprężyny.



Rys. 2.12. Proste modele mechaniczne ciał

Sprężyna jest modelem ciała doskonale sprężystego (rys. 2.12a) inaczej zwanego ciałem Hooke'a. Dla przypadku jednoosiowego stanu naprężenia ciało to opisywane jest związkami (2.1), natomiast dla złożonych stanów naprężenia występuje proporcjonalna zależność między składowymi dwiatorka naprężenia S_{ij} i dwiatorka odkształcenia e_{ij}

$$S_{ij} = 2G e_{ij} \quad (2.5)$$

przy istnieniu tylko sprężystej zmiany objętości $\zeta_s = 3K \varepsilon_s$ (lub $\zeta_{kk} = 3K \varepsilon_{kk}$, gdzie K jest modułem ścisłości, inaczej — modułem odkształcenia objętościowego).

Model mechaniczny ciała lepkiego podlegający prawu Newtona dla cieczy lepkiej przedstawiony jest na rysunku 2.12b. Ciało to dla jednoosiowego stanu naprężenia opisane jest równaniem

$$\zeta = \lambda \frac{d\varepsilon}{dt} = \lambda \dot{\varepsilon}, \quad (2.6)$$

gdzie λ jest liniowym współczynnikiem lepkości. Dla złożonego stanu naprężenia występuje proporcjonalna zależność między składowymi dewiatora naprężenia S_{ij} i dewiatora prędkości odkształcenia \dot{e}_{ij} :

$$S_{ij} = 2\eta \dot{e}_{ij} . \quad (2.7)$$

Zmiana objętości jest wprost proporcjonalna do ciśnienia hydrostatycznego p , $-p = 3K \epsilon_s$. Symbolem η oznaczono współczynnik lepkości dynamicznej.

Modelem mechanicznym ciała sztywno-idealnie plastycznego (rys. 2.12c) jest suwak przesuwany po płaszczyźnie przy istnieniu tarcia suchego. Materiał sztywno-idealnie plastyczny (rys. 2.1) nazywany jest ciałem Saint-Venanta. Ciało to przy naprężeniach mniejszych od uplastyczniających nie odkształca się. Płynięcie następuje dopiero po osiągnięciu granicy plastyczności

$$\sigma = \sigma_p = const . \quad (2.8)$$

2.4. Złożone modele mechaniczne

Składając w różny sposób proste modele ciał (rys. 2.12) otrzymamy złożone modele ciał odkształcalnych. Łącząc szeregowo model mechaniczny ciała idealnie-sprężystego (rys. 2.12a) i model mechaniczny ciała sztywno-idealnie plastycznego (rys. 2.12c) otrzymamy model ciała sprężysto-idealnie plastycznego (rys. 2.2). Ciało takie nazywamy ciałem Prandtla. W zakresie odkształceń sprężystych występuje zależność

$$\sigma_i = E \epsilon_i , \quad (2.9)$$

a w zakresie odkształceń plastycznych ważna jest zależność

$$\sigma_i = \sigma_p = const . \quad (2.10)$$

Podobnie tworzone są modele innych ciał pokazanych na rysunkach od 2.3. do 2.7.

Do bardziej złożonych modeli ciał należy ciało Maxwella, Kelvina, Bingham'a i wiele innych. Poniżej zostanie podana zasada budowania równań reologicznych dla niektórych ciał.

Ciało Maxwella otrzymuje się z szeregowego połączenia sprężyny H i tłumika N (rys. 2.13a) — wzór strukturalny modelu $M = H + N$. Oba ciała H i N przenoszą tę samą ciążę P ($P = P_H = P_N$), ale przemieszczenie δ końców badanego modelu M jest równe sumie przemieszczenia δ_H modelu H i przemieszczenia δ_N modelu N

$$\delta = \delta_H + \delta_N \quad (2.11)$$

Przemieszczenie sprężyny δ_H jest proporcjonalne do siły obciążającej P , $\delta_H = k_1 P$, k_1 jest współczynnikiem proporcjonalności.

Natomiast w tłumiku hydraulicznym prędkość przemieszczania perforowanego tłoka jest zależna od siły P i współczynnika k_2 ,

$$\dot{\delta}_N = \frac{d\delta_N}{dt} = k_2 P.$$

Różniczkując równanie (2.11) względem czasu ($\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta_H}{dt} + \frac{d\delta_N}{dt}$) i podstawiając do niego zależności $\dot{\delta}_H = \frac{d\delta_H}{dt} = k_1 \frac{dP}{dt}$, $\dot{\delta}_N = \frac{d\delta_N}{dt} = k_2 P$, otrzymamy równanie reologiczne ciała Maxwella

$$\dot{\delta} = k_1 \frac{dP}{dt} + k_2 P \quad (2.12a)$$

Przechodząc od przemieszczeń δ i siły P do odkształceń ϵ i naprężeń σ oraz zamieniając współczynniki k_1 na $\frac{1}{E}$ i k_2 na $\frac{1}{\lambda}$, otrzymamy równanie fizyczne dla jednoosiowego stanu naprężenia

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\lambda} \quad (2.12b)$$

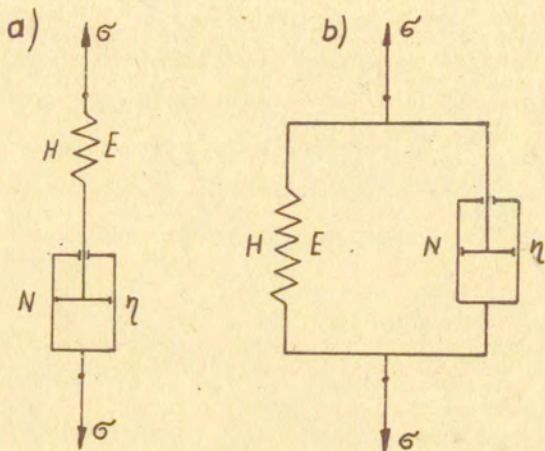
lub w prędkościach

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\lambda} \quad (2.12c)$$

Jeżeli weźmiemy równanie reologiczne ciała Hooke'a (2.5) i zróżniczkujemy je względem czasu ($\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij}$) oraz równanie reologiczne cieczy Newtona (2.7) - $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\eta} S_{ij}$ i będziemy uważać sumę lewych stron obu równań za dewiator prędkości odkształceń modelu Maxwella, to otrzymamy równanie fizyczne dla złożonego stanu naprężenia

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} + \frac{1}{2\eta} S_{ij} \quad (2.13)$$

Równania (2.12c) i (2.13) pozwalają uwzględniać zdolność ciał stałych do pełzania i relaksacji.



Rys. 2.13. Złożone modele mechaniczne ciał: a - ciało Maxwella, b - ciało Kelvina

Ciało Kelvina (rys. 2.13b) otrzymane jest z równoległego połączenia sprężyny H i tłumika N ($K = H \parallel N$). Do wyprowadzenia równania reologicznego wykorzystamy warunek siły $P = P_H + P_N$ (siła P potrzebna do przemieszczenia końców modelu K jest równa sumie siły odkształcenia sprężyny $P_H = \frac{\delta_H}{k_1}$ i siły przemieszczenia tłoka $P_N = \frac{\delta_N}{k_2}$). Dla jednoosiowego stanu naprężenia

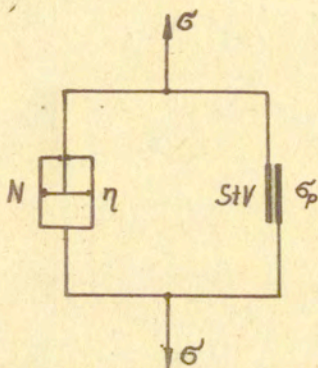
nia ważny jest związek

$$\sigma = E \varepsilon + \lambda \dot{\varepsilon}, \quad (2.14)$$

a dla złożonego stanu naprężenia występuje zależność

$$S_{ij} = 2G e_{ij} + 2\eta \dot{e}_{ij}. \quad (2.15)$$

Model ciała Bingham składa się z równoległego połączenia elementu lepkiego N i elementu plastycznego StV (rys. 2.14), a zatem jest ciałem lepko-plastycznym. Równania (2.16 i 2.20) ciała Bingham stosowane są do obliczeń procesów obróbki plastycznej metali. Nadają się do opisywania odkształcania metali w wysokich temperaturach, analizy gęstych smarów, farb olejnych oraz stosowane są w hydrodynamicznej teorii smarowania. Z tego też powodu temu ciału należy poświęcić więcej miejsca.



Rys. 2.14. Model mechaniczny ciała Bingham

Z rysunku 2.14 widać, że siła potrzebna do odkształcania całego modelu jest sumą oporu elementu lepkiego i elementu plastycznego. Stąd też dla stanu jednoosiowego natychmiast otrzymujemy związek fizyczny

$$\sigma = \sigma_p + \lambda \dot{\varepsilon}. \quad (2.16)$$

Dla przestrzennego stanu związek fizyczny musi być słuszny dla wszystkich składowych dewiatora naprężenia S_{ij} i tensora prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_{ij}$. Składowe naprężenia σ_{ij} całego ciała są sumą odpowiednich składowych naprężenia elementu lepkiego σ_{ij}^l i elementu plastycznego σ_{ij}^p .

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^l + \sigma_{ij}^p. \quad (2.17)$$

Wychodząc z warunku nieściśliwości $\dot{\epsilon}_{ij}\delta_{ij} = \dot{\epsilon}_{ii} = 0$ i warunku plastyczności Hubera-Misesa $S_{ij}S_{ij} = 2k^2$, otrzymamy składowe naprężenia elementu plastycznego S_{ij}^p (zgodnie z prawem płynięcia Levy-Misesa $\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda S_{ij}$, $\lambda = \frac{\dot{\epsilon}_i}{2k}$) wyrażone równaniem

$$S_{ij}^p = \frac{2k}{\dot{\epsilon}_i} \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (2.18)$$

Składowe naprężenia elementu lepkiego zgodnie z prawem Newtona będą wyrażone zależnością

$$S_{ij}^l = 2\eta \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (2.19)$$

Dokonując dodawania składowych, otrzymamy równanie fizyczne dla ciała lepko-plastycznego zwanego ciałem Bingham

$$S_{ij} = 2\left(\eta + \frac{k}{\dot{\epsilon}_i}\right) \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (2.20)$$

gdzie $\dot{\epsilon}_i$ jest intensywnością prędkości odkształcenia (rów. 4.78).

Równanie fizyczne dla ciała Bingham (2.20) po rozpisaniu dla zagadnień osiowo-symetrycznych będzie miało postać

$$\begin{bmatrix} S_r \\ S_\theta \\ S_z \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = 2\left(\eta + \frac{k}{\dot{\epsilon}_i}\right) \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_r \\ \dot{\epsilon}_\theta \\ \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\epsilon}_{rz} \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Do analizy procesów obróbki plastycznej metali przyjmowany jest często model materiału sztywno-idealnie plastyczny (rys. 2.1). Przy pomocy tego modelu w procesie technologicznym można obliczyć rozkład naprężeń, odkształcenia, prędkości od-

kształceń oraz wielkość energii potrzebnej do realizacji tego procesu. Obliczone wartości nieznacznie odbiegają od wartości rzeczywistych. Przy rozciąganiu lub ściskaniu stali miękkiej otrzymujemy przystanek plastyczny (rys. 2.7), świadczący o słuszności przyjmowaniu modelu materiału sprężysto-idealnie plastycznego (rys. 2.2).

Literatura do rozdziału II

1. Praca zbiorowa pod red. W.Olszaka, P.Perzyny i A.Sawozuka. Teoria plastyczności. PWN, Warszawa, 1965.
2. W.Derski, S.Ziemba. Analiza modeli reologicznych. PWN, Warszawa, 1968.
3. Н.Н.Малинин. Прикладная теория пластичности и ползучести. Машиностроение, Москва, 1975.
4. Л.М.Качанов. Основы теории пластичности. Изд. "Наука", Москва, 1969.

R o z d z i a ł I I I

TEORIA STANU NAPRĘŻENIA

3.1. Wstęp

Przez stan naprężenia w danym punkcie rozumiemy ogół naprężeń działających na wszystkich możliwych przekrojach przechodzących przez ten punkt. Stan naprężenia jest w danym punkcie określony, jeżeli znane są jego składowe występujące na ściankach elementarnego prostopadłościanu, o nieskończenie małych wymiarach liniowych dx , dy , dz , zbudowanego dookoła punktu. Krawędzie elementarnego prostopadłościanu pokrywają się z układem współrzędnych kartezjańskich x, y, z . Należy zaznaczyć, że kształt badanego nieskończenie małego elementu zależy od przyjętego układu współrzędnych. I tak np. w układzie kartezjańskim tym elementem jest prostopadłościan o wymiarach dx , dy , dz , a w układzie współrzędnych walcowych r, φ, z - jest wycinek klina.

W teorii plastyczności badamy równowagę nieskończenie małego elementu, a wynikiem tego badania są różniczkowe równania równowagi i ruchu. Jeżeli stan naprężenia zależy od współrzędnych x, y, z , to mówimy, że jest on niejednorodny, gdy natomiast stan naprężenia w ciele nie zależy od współrzędnych, to jest on jednorodny. W naszych rozważaniach przyjmujemy, że stan naprężenia w materiale jest niejednorodny, a to dlatego, aby można było uwzględnić zmianę wartości naprężenia w kierunkach osi współrzędnych. Zmianę tę zapisujemy w postaci różniczki częściowej wyrażającej przyrost danej składowej naprężenia wywoła-

ny przyrostem odpowiedniej współrzędnej np. zmiana naprężenia σ_x w kierunku osi x jest różniczką cząstkową postaci $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$.

Na ciało będące ^ucontinuum materialnym mogą działać siły zewnętrzne /obciążenia i reakcje/, siły wewnętrzne, siły międzycząsteczkowe /molekularne/ przyciągające lub odpychające oraz siły masowe. Siły zewnętrzne mogą działać na całą powierzchnię i wówczas będą nazywane siłami powierzchniowymi lub mogą działać na małą powierzchnię i wtedy będą nazywane siłami skupionymi. Do sił zewnętrznych należy nacisk jednego ciała na drugie oraz ciśnienie hydrostatyczne. Do sił wewnętrznych należą naprężenia pochodzące od obciążeń zewnętrznych oraz siły międzycząsteczkowe utrzymujące materiał w spójności. Do sił masowych /objętościowych/ X_x, X_y, X_z , odnoszące się do jednostki objętości, należą siły grawitacyjne /ciężar/, siły magnetyczne oraz siły inercji /bezwładności/, gdy ciało jest w ruchu.

Naprężenia działające na ścianki pod dowolnym kątem można rozłożyć na składowe normalne σ równoległe do osi współrzędnych x, y, z /np. σ_x naprężenie skierowane wzdłuż osi x / oraz składowe styczne τ oznaczone dwoma wskaźnikami osi współrzędnych /np. τ_{xy} jest naprężeniem stycznym działającym na płaszczyźnie prostopadłej do osi x i równoległej do osi y , wskaźnik pierwszy x oznacza, że naprężenie styczne τ jest prostopadłe do osi x , a wskaźnik drugi y oznacza, że jest ono równoległe do osi y /. A zatem mówiąc o składowych naprężeniach, mamy na myśli ich wartości /liczby/, ponieważ ich kierunki są określone odpowiednimi wskaźnikami i nie budzą wątpliwości. Na przykład na ściankę prostopadłą do osi x działa naprężenie wypadkowe p_x o składowych $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$, co można

zapisać następująco:

$$P_x(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}).$$

Na pozostałych ściankach elementu zapis naprężeń jest analogiczny:

$$P_y(\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}), \quad P_z(\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z).$$

Na ścianki elementu o wymiarach liniowych dx, dy, dz /małe rzędu pierwszego/ działają siły będące małymi rzędu drugiego. I tak np. na ściankę prostopadłą do osi x działają siły

$$P_x = \sigma_x dy dz, \quad P_{xy} = \tau_{xy} dy dz, \quad P_{xz} = \tau_{xz} dy dz$$

oraz w środku elementu działa siła masowa $X = \rho X_x dx dy dz$, która jest małą rzędu trzeciego ($\rho dx dy dz$ - masa elementu, $\rho = \frac{d^3}{d^3} -$ gęstość).

W rozważaniach zagadnień praktycznych często pomijamy siły masowe.

W teorii plastyczności wszelkie zależności można wyprowadzić z samych rozważań teoretycznych, natomiast w analizie procesów obróbki plastycznej, którą zajmuje się stosowana teoria plastyczności ujęcie zagadnienia w ścisły sposób matematyczny jest trudne i często zmusza nas do przyjęcia założeń upraszczających oraz odwołaniu się do doświadczenia. Rozwiązania w niniejszej pracy oparte będą na następujących założeniach:

- założenie o ciągłej budowie materiału (pomijamy ziarnistą budowę materiału),
- założenie o jednorodności materiału w odniesieniu do stałych materiałowych,
- założenie o izotropowej budowie materiału (własności mechaniczne materiału nie zależą od kierunku obciążenia).

Istnieją również rozwiązania dla materiału anizotropowego i niejednorodnego.

A zatem do analizy teoretycznej deformacji plastycznej przyjmować będziemy materiał ciągły, jednorodny i izotropowy.

W teorii stanu naprężenia rozpatrywany jest jednoosiowy, płaski i przestrzenny stan naprężenia.

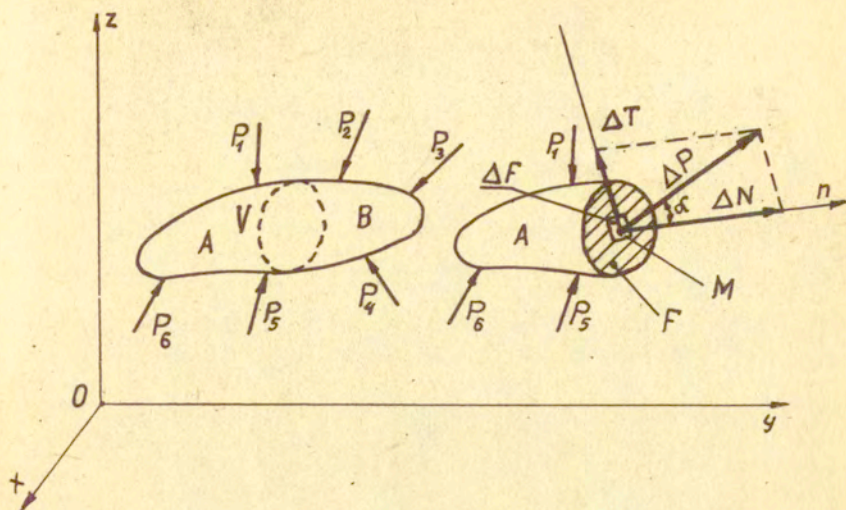
3.2. Definicja naprężenia

Jeśli na ciało o objętości V działają siły zewnętrzne P_i ($i = 1, 2, \dots$) i odpowiadające im siły wewnętrzne G_i i jeśli znajduje się ono w równowadze, to każda jego myślowo wyodrębniona część będzie również znajdowała się w równowadze. Dla znalezienia wielkości sił wewnętrznych /naprężeń/ w dowolnym punkcie M tego ciała należy myślowo podzielić go na dwie części A i B za pomocą przekroju przechodzącego przez ten punkt /rys. 3.1 /. Rozpatrując tylko część A ciała stwierdzamy, że jest ona w równowadze pod działaniem sił zewnętrznych P_i działających na część A i sił wewnętrznych rozłożonych na przekroju F , pochodzących z oddziaływania części B na część A . Siłom wewnętrznym działającym na przekrój F przeciwdziałają siły spójności materiału równe co do wielkości, lecz przeciwnie skierowane.

Na element powierzchni ΔF przekroju F , zorientowanego jednostkowym normalnym wektorem n , działa wypadkowa siła ΔP , zastępująca oddziaływanie odrzuconej części B . Gdy element powierzchni ΔF dąży do zera, to granica ilorazu $\frac{\Delta P}{\Delta F}$ dąży do granicy $\frac{dP}{dF}$ nazywanej wektorem naprężenia lub krócej — naprężeniem, co można zapisać następująco:

$$G = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF} \quad (3.1)$$

Elementarną siłę ΔP można rozłożyć na składową normalną ΔN



Rys. 3.1. Szkic ilustrujący naprężenie w punkcie M

i na składową styczną ΔT . Składowa siła normalna ΔN daje naprężenie normalne

$$\sigma_n = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta F} = \frac{dN}{dF}, \quad /3.2/$$

a składowa styczna daje naprężenie styczne

$$\tau = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta F} = \frac{dT}{dF}. \quad /3.3/$$

Siły P , N i T są całkami odpowiednich naprężeń i powierzchni

$$dF \text{ np. } P = \int_F \sigma dF.$$

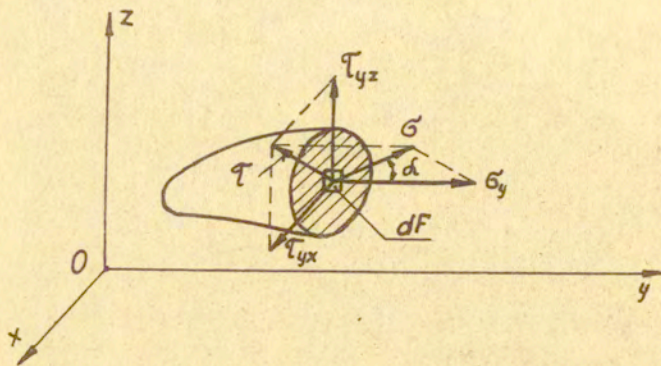
Jeśli rozkład sił na powierzchni przekroju F jest równomierny, to naprężenia określić można ze wzorów

$$\sigma = \frac{P}{F}, \quad \sigma_n = \frac{N}{F}, \quad \tau = \frac{T}{F}. \quad /3.4/$$

Naprężenie jest zatem siłą działającą na jednostkę powierzchni.

Naprężenie na płaszczyźnie jest wielkością wektorową i ma wartość, kierunek i zwrot. Kierunek naprężenia tworzy kąt α zawarty między nim a normalną n do powierzchni. Natomiast naprężenie w punkcie jest tensorem.

Naprężenie σ można rozłożyć na składową normalną do rozpatrywanego przekroju, którą nazywamy naprężeniem normalnym i oznaczamy przez σ_n oraz na składową leżącą w danym przekroju, nazywaną naprężeniem stycznym i oznaczoną przez τ . Składową styczną τ można rozłożyć na składową równoległą do osi x i na składową równoległą do osi z /rys. 3.2/. Jeśli ciało przetniemy płaszczyzną prostopadłą do osi y /rys. 3.2/, to



Rys. 3.2. Naprężenia w przekroju.

składową normalną jest σ_y , a składowymi stycznymi są naprężenia τ_{yx} i τ_{yz} .

Odnośnie znaków naprężeń stycznych przyjmujemy następującą umowę. Jeśli naprężenie styczne τ powoduje obrót elementu zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to przyjmuje się je za dodatnie, gdy natomiast obraca element w stronę przeciwną do ruchu wskazówek zegara, to uważa się je za ujemne.

Jednostką naprężenia w układzie SI jest megapascal MPa ($1Pa = 1N/m^2$) lub inaczej - meganewton na metr kwadratowy

$$= \frac{MN}{m^2}$$

3.3. Pojęcie bieguna naprężenia

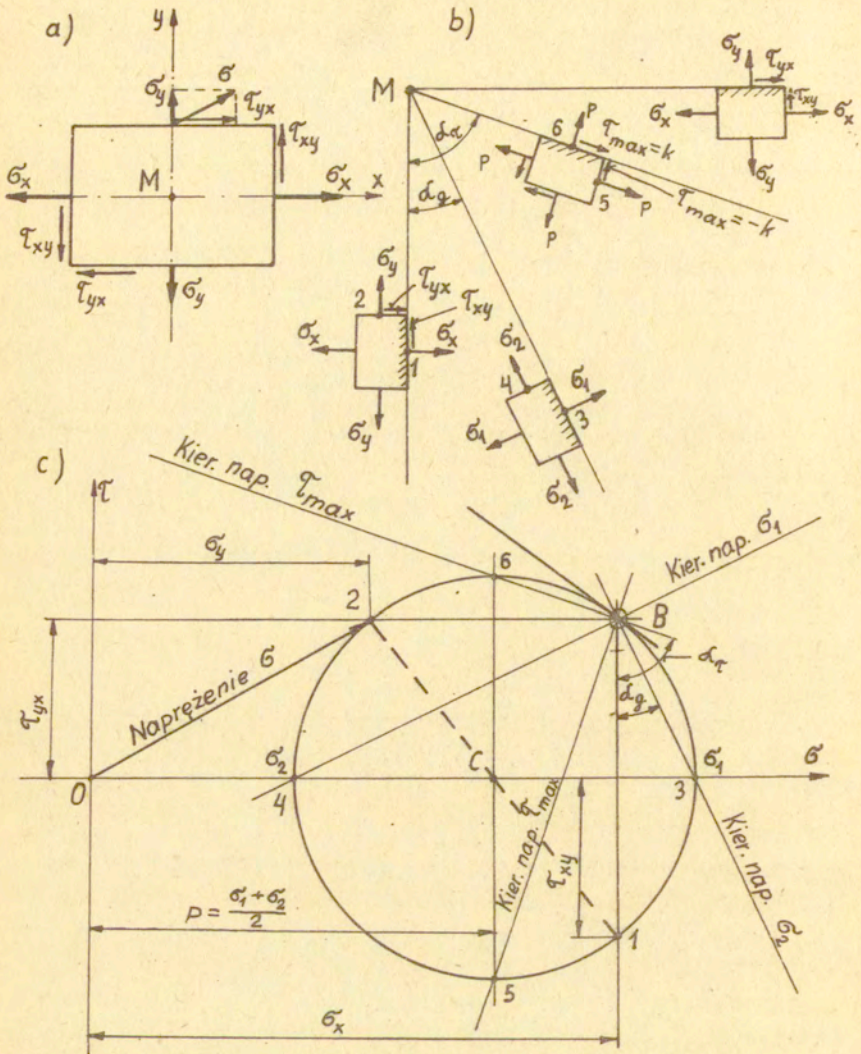
Biegunem naprężenia nazywamy taki punkt B na kole Mohra /rys. 3.3 c/, że jeżeli przez niego przeprowadzimy prostą równoległą do rozpatrywanej płaszczyzny fizycznej, to w przecięciu tej prostej z kołem Mohra otrzymamy punkt, który przedstawia stan naprężenia na tej płaszczyźnie fizycznej /rys. 3.3 a/. Pojęcie bieguna do teorii plastyczności wprowadził W. Prager.

Biegun naprężenia B może znajdować się w każdym punkcie na kole Mohra zależnie od stanu naprężenia. Przyjmijmy zatem położenie bieguna B jak na rysunku 3.3 c. Przez biegun B przechodzą kierunki naprężeń głównych σ_1 i σ_2 i kierunki maksymalnych naprężeń stycznych $\tau_{\max} = \pm k$. Naprężenie w biegunie określone jest przez przeprowadzenie prostej stycznej do koła Mohra przez ten biegun B. Kierunki maksymalnych naprężeń stycznych zwane są kierunkami linii poślizgu w analizowanym punkcie M obszaru uplastycznionego.

Jeśli składowym naprężeń σ i τ na różnych przekrojach α prostopadłościanu /rys. 3.3 a i 3.3 b/, odpowiadają punkty 1, 2, 3 ... na kole Mohra /rys. 3.3 c/, to przeprowadzone proste przez te punkty 1, 2, 3 ... równoległe do pomyślanych przekrojów prostopadłościanu przetną się wszystkie w jednym punkcie B na kole Mohra zwanym biegunem naprężenia.

Przykład 1

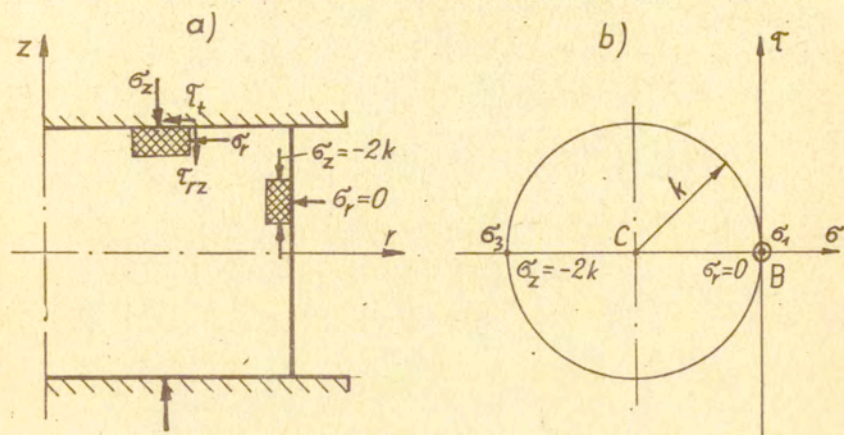
Wyznaczyć koło Mohra i na nim biegun naprężenia B dla swobodnej powierzchni bocznej ściskanego walca /rys. 3.4 a/.



Rys. 3.3. Ilustracja bieguny na kole Mohra: a - naprężenia na płaszczyźnie fizycznej, b - naprężenia na fizycznych płaszczyznach obróconych, c - koło Mohra /płaszczyzna naprężeń/

Rozwiązanie

Na swobodnej powierzchni bocznej walca występują naprężenia $\sigma_r = 0$, $\sigma_z = -2k$ /spełniony jest warunek plastyczności Treski $\sigma_r - \sigma_z = 2k$ /. Biegun B tego stanu naprężenia znajduje się w punkcie $\sigma_1 = 0$ /rys. 3.4b/.



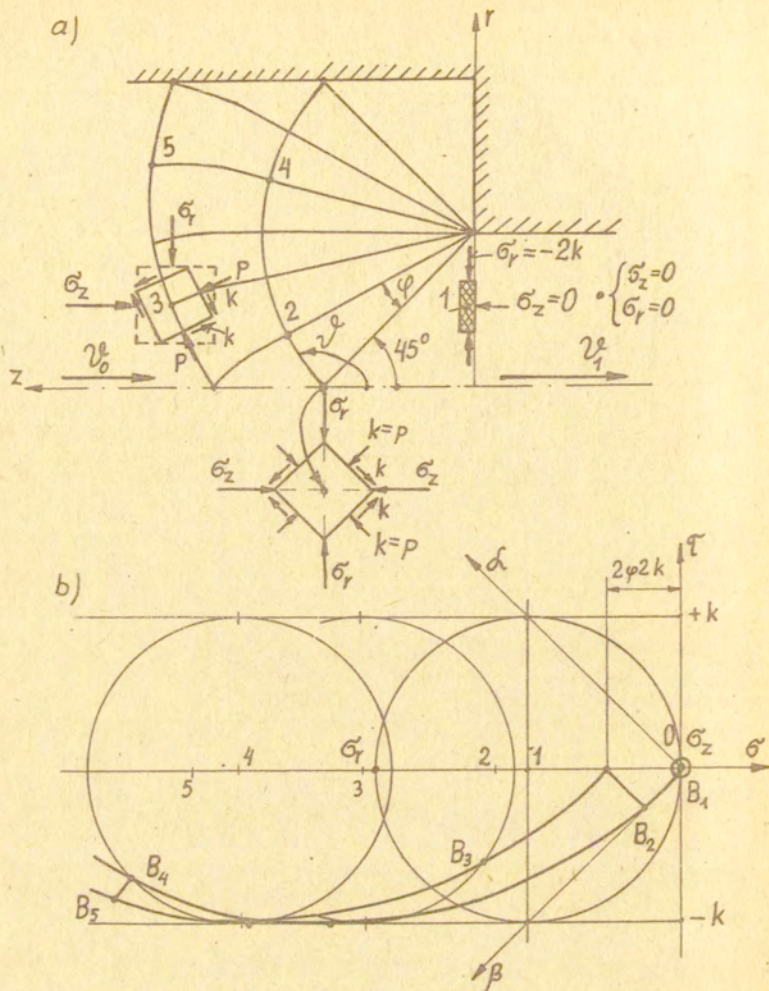
Rys. 3.4. Schemat ściskania walca i koło Mohra dla brzegowego warunku naprężeniowego: a - płaszczyzna fizyczna, b - płaszczyzna naprężeń

Przykład 2

Narysować koło Mohra i określić położenie bieguna naprężeń dla punktów 1, 2, 3 i 4 materiału wyciskanego współbieżnie (rys. 3.5a).

Rozwiązanie

Najpierw wyznaczamy położenie koła Mohra i bieguna dla punktu 1, w którym znany jest stan naprężenia /rys. 3.5b/. Następnie, tocząc koło Mohra po prostej +k znajdujemy kolejne położenia bieguna B /leżą na cykloidzie/ odpowiadające odpowiednim punktom na płaszczyźnie fizycznej /rys. 3.5a/.



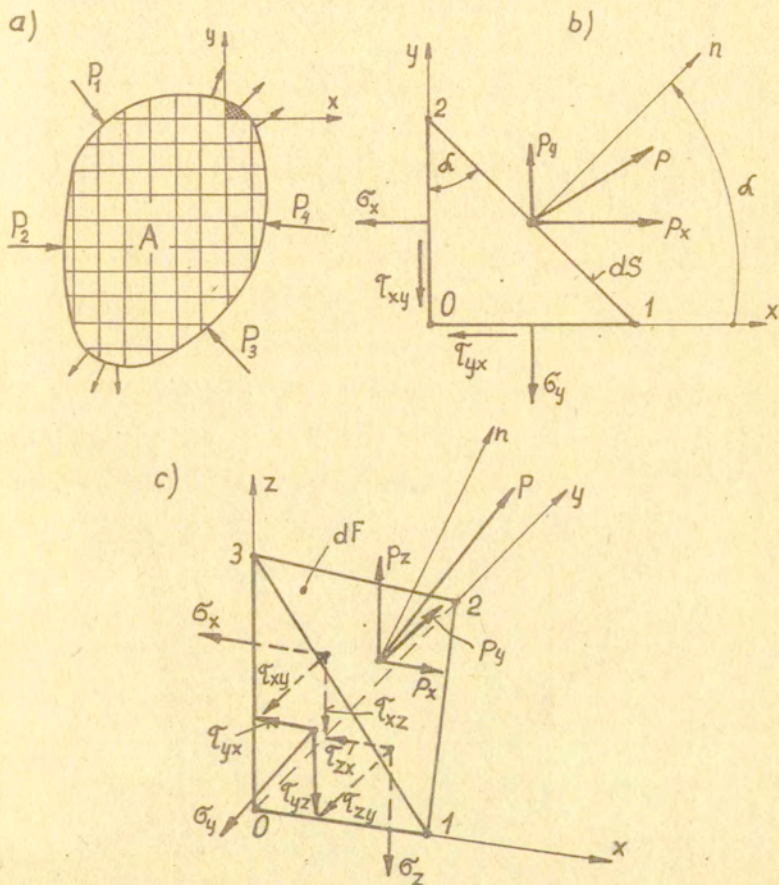
Rys. 3.5. a/ Schemat wyciskania współbieżnego i naprężenia w punktach, b/ Koła Mohra dla rozpatrywanych punktów

3.4. Warunki brzegowe dla naprężeń

Dla rozwiązania problemu często potrzebne są warunki

brzegowe dla naprężeń, które w każdym przypadku muszą być spełnione. Warunki brzegowe sformułujemy w ten sposób, aby wyrażały zależności pomiędzy naprężeniami i siłami zewnętrznymi obciążającymi ciało.

Weźmy ciało A obciążone siłami zewnętrznymi P_i /rys. 3.6a/ i podzielmy go myślowo na małe elementy. Jeśli całe



Rys. 3.6. Szkic do wyprowadzenia równań warunków równowagi dla naprężeń: a- ciało A obciążone siłami P_i , b - element w płaskim stanie naprężenia, c - element w trójosiowym stanie naprężenia

ciało jest w równowadze to i mały myślowo wydzielony element na jego brzegu jest również w równowadze. Element ten ograniczony jest od wewnątrz trzema wzajemnie prostopadłymi płaszczyznami przekroju, a od zewnątrz - powierzchnią ciała. Przy małych wymiarach elementu powierzchnię zewnętrzną możemy aproksymować płaszczyzną, otrzymując w rezultacie elementarny czworościan /rys. 3. 6c/. Dla płaskiego stanu naprężenia tym elementem jest trójkąt /rys. 3. 6b/. Dla zbadania równowagi elementu, oddziaływanie ciała A na rozważany element zastąpimy naprężeniami, natomiast jako siłę zewnętrzną, działającą na skośną ściankę czworościanu, przyjmujemy jednostkową siłę zewnętrzną p posiadającą wymiar naprężenia. Siły masowe /proporcjonalne do objętości ciała/ pomijamy, gdyż szybciej dążą do zera niż naprężenia.

Orientację ukośnej ścianki 1, 2, 3 określa normalna zewnątrz n , której cosinusy kierunkowe można zapisać

$$\cos/n,x/ = c_x, \quad \cos/n,y/ = c_y, \quad \cos/n,z/ = c_z. \quad (3.5a)$$

Pole ścianki 1, 2, 3 oznaczamy przez dF , a ścianki prostopadłe do osi x , y , z oznaczmy odpowiednio przez dF_x , dF_y , dF_z . Pola te są rzutami pola dF na odpowiednie kierunki

$$dF_x = dF c_x, \quad dF_y = dF c_y, \quad dF_z = dF c_z. \quad (3.5b)$$

Rzutując na oś x wszystkie siły działające na element otrzymamy równanie równowagi

$$p_x dF - \sigma_x dF_x - \tau_{yx} dF_y - \tau_{zx} dF_z = 0 .$$

Podobne równania otrzymamy z rzutowania wszystkich sił na oś y i na oś z . Po uporządkowaniu i uproszczeniu przez dF otrzymamy trzy równania naprężeń ważne na brzegu ciała

$$p_x = \sigma_x c_x + \tau_{yx} c_y + \tau_{zx} c_z ,$$

$$p_y = \tau_{xy} c_x + \sigma_y c_y + \tau_{zy} c_z , \quad /3.6a/$$

$$p_z = \tau_{xz} c_x + \tau_{yz} c_y + \sigma_z c_z .$$

Wykorzystując warunki Cauchy'ego równości naprężeń stycznych na przekrojach wzajemnie prostopadłych $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ równania /3.6a/ możemy zapisać następująco:

$$p_x = \sigma_x c_x + \tau_{xy} c_y + \tau_{xz} c_z ,$$

$$p_y = \tau_{yx} c_x + \sigma_y c_y + \tau_{yz} c_z , \quad /3.6b/$$

$$p_z = \tau_{zx} c_x + \tau_{zy} c_y + \sigma_z c_z .$$

Równania /3.6b/ formułują poszukiwane warunki brzegowe dla naprężeń w trójosiowym układzie współrzędnych kartezjańskich. Dla płaskiego układu współrzędnych x, y równania /3.6b/ sprowadzają się do postaci

$$p_x = \sigma_x c_x + \tau_{xy} c_y ,$$

$$p_y = \tau_{yx} c_x + \sigma_y c_y . \quad /3.7/$$

Równania /3.6b/ ogólnie tensorowo można zapisać

$$p_i = \sigma_{ij} c_j , \quad /3.8/$$

gdzie σ_{ij} jest symetrycznym tensorem naprężenia, c_j jest cosinusem kierunkowym, a wskaźniki i, j mogą przybierać wartości x, y, z /np. $i = x, j = x, y, z$, następnie $i = y, j = x, y, z$ oraz $i = z, j = x, y, z$ /. Równanie /3.8/ wprowadza dodatkowe alternatywne oznaczenia naprężeń $\sigma_{xx} = \sigma_x$, $\sigma_{xy} = \tau_{xy}$ itd.

Gdy w zadaniu działa tylko ciśnienie hydrostatyczne, to naprężenie na powierzchni ma zawsze kierunek normalnej zewnętrznej. Gdy zwrot wektora naprężenia jest zgodny ze zwrotem normalnej zewnętrznej, to naprężenie jest dodatnie, jeśli naprężenie to ma zwrot przeciwny normalnej zewnętrznej, to jest ono ujemne. A zatem przyjmujemy, że naprężenia rozciągające są dodatnimi, a ściskające - ujemnymi (ciśnienie q rozciągające pierścień powoduje ściskające naprężenie promieniowe σ_r , pierścień jest rozciągany, a zatem naprężenie obwodowe σ_θ jest dodatnie czyli rozciągające).

3.5. Jednoosiowy stan naprężenia

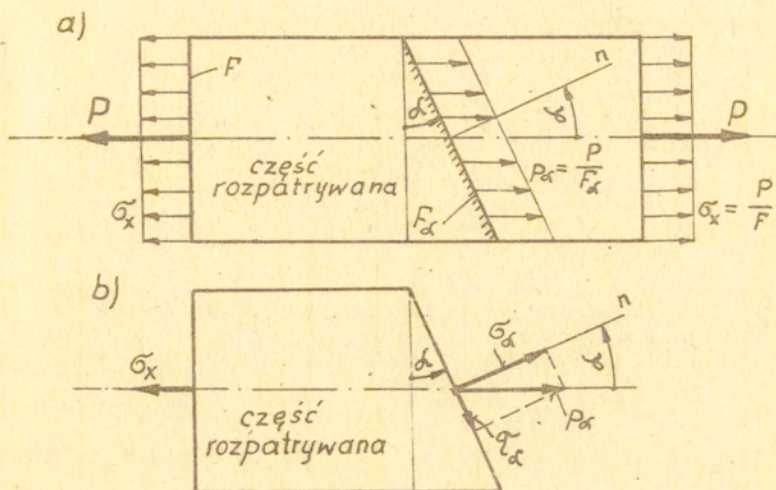
W celu wyznaczenia naprężeń w dowolnym przekroju rozciąganego lub ściskanego pręta należy myślowo przecięć go płaszczyzną pod kątem α do kierunku działania siły P , odrzucić jedną część pręta i rozważyć równowagę części pozostałej /rys.3.7/. Oznaczając przekrój normalny pręta przez F , a przekrój pod kątem α - przez F_α /określony normalną zewnętrzną n / oddziaływanie części odrzuconej na część rozważaną zastępujemy naprężeniem osiowym $p_\alpha = \frac{P}{F_\alpha} (F_\alpha = \frac{F}{\cos \alpha})$, które rozłożyć możemy na naprężenie normalne do przekroju α σ'_α i na naprężenie styczne τ'_α /rys.3.7b/.

Naprężenie osiowe p_α w przekroju F_α zmienia się wraz ze zmianą kąta α , $p_\alpha = \sigma_x \cos \alpha$. Naprężenie normalne w przekroju F_α / $\sigma'_\alpha = p_\alpha \cos \alpha$ / wyrazi się zależnością

$$\sigma'_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha, \quad /3.9/$$

a naprężenie styczne / $\tau'_\alpha = p_\alpha \sin \alpha$ / przyjmie ostateczną postać

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha . \quad (3.10)$$



Rys. 3.7. Rozkład sił w pręcie rozciągany

Równanie (3.9) można bezpośrednio otrzymać z rzutowania wszystkich sił na kierunek normalnej n do przekroju F_{α}

$$\sum P_n = \sigma_{\alpha} F_{\alpha} - \sigma_x F \cos \alpha .$$

Po uwzględnieniu zależności między przekrojami F i F_{α} ,

$F = F_{\alpha} \cdot \cos \alpha$, otrzymujemy zależność /3.9/

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha .$$

Natomiast rzutując wszystkie siły /działające na rozważaną

część pręta/ na kierunek stycznej w przekroju F_{α} , $\sum P_s =$

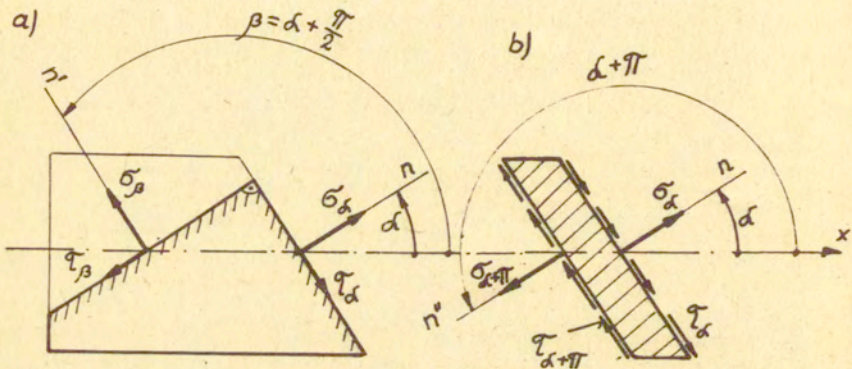
$\tau_{\alpha} F_{\alpha} - \sigma_x F \sin \alpha$, otrzymamy zależność na naprężenie styczne w przekroju F_{α} (3.10)

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha .$$

W przekroju prostopadłym β do przekroju α , $\beta = \alpha + 90^\circ$,
 /rys. 3.8a/ zależności między naprężeniami wyrażają się na-
 stępująco:

$$\sigma_\beta = \sigma_x \cos^2 \beta = \sigma_x \cos^2 (\alpha + 90^\circ) = \sigma_x \sin^2 \alpha, \quad (3.11a)$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\beta = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2(\alpha + 90^\circ) = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.11b)$$



Rys. 3.8. Naprężenia w przekrojach: a - wzajemnie prostopadłych, b - wzajemnie równoległych

W przekrojach wzajemnie prostopadłych α, β naprężenia normalne σ_α i σ_β są różne co do wartości, a jednakowe co do znaku /rów. 3.9 i 3.11a/, natomiast naprężenia styczne τ_α i τ_β różnią się jedynie znakami /rów. 3.10 i 3.11b/. W przekrojach równoległych zarówno naprężenia normalne σ jak i styczne τ mają inne kierunki /rys. 3.8b/.

W przekroju α naprężenia styczne τ_α będą największe, gdy $\sin 2\alpha = 1$, wówczas kąt $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. A zatem dla kąta $\alpha = \frac{\pi}{4}$ naprężenia styczne są największe i wynoszą

$$\tau_{\alpha=45^\circ} = \tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2}. \quad (3.12)$$

Dla kąta $\alpha = 0$ mamy: $\sigma'_\alpha = \sigma'_x = \sigma_1$, $\tau_\alpha = 0$, $\sigma'_\beta = 0$, $\tau_\beta = 0$.

3.6. Płaski ogólny stan naprężenia

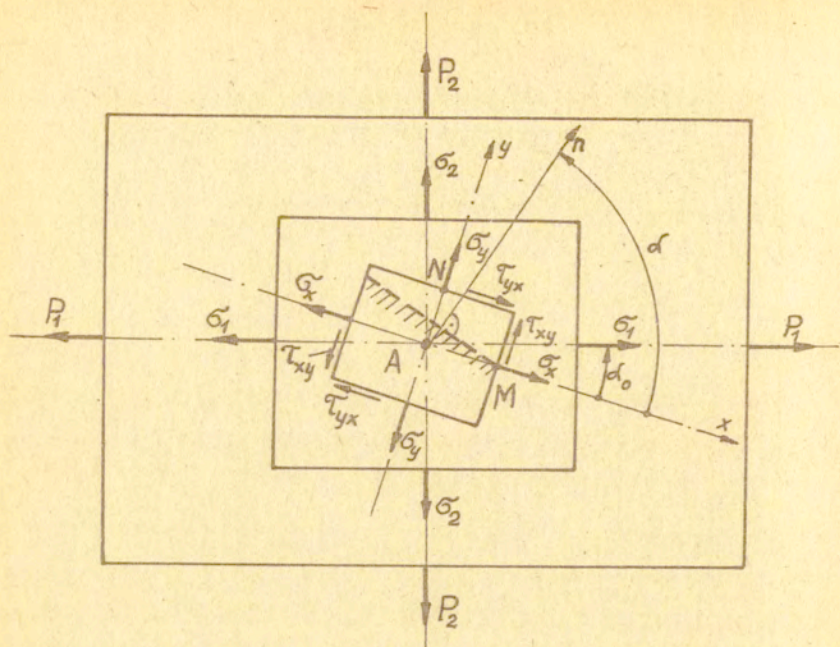
Płaski ogólny stan naprężenia jest to taki stan, w którym na ścianki wyciętego elementu oprócz naprężeń normalnych /osiowych/ σ_x , σ_y działają jeszcze naprężenia styczne τ_{xy} , τ_{yx} /rys. 3.9/. A zatem jest on jednoznacznie określony przez składowe naprężenia σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{yx} , działające w dwóch wzajemnie prostopadłych przekrojach przechodzących przez dany punkt. Można go również określić za pomocą dwóch składowych naprężeń głównych σ_1 , σ_2 i kąta α_0 , określającego kierunek tych naprężeń względem przyjętego układu odniesienia.

Stan naprężenia w dowolnym punkcie M można podać w postaci macierzy utożsamianej z tensorem naprężenia. Tensor naprężenia dla płaskiego stanu naprężenia w osiach x , y ma budowę

$$\sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.13a)$$

a w osiach głównych /1, 2/ ma budowę

$$\sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.13b)$$



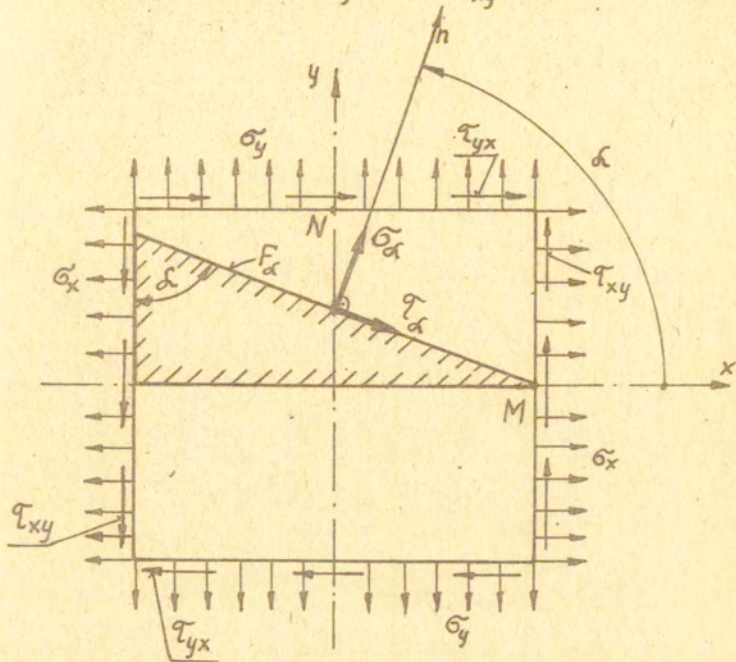
Rys. 3.9. Siły na przekrojach rozpatrywanych elementów

W przekroju pod kątem α występują naprężenia normalne σ_α i naprężenia styczne τ_α , które możemy wyznaczyć stosując równania statyki lub też stosując superpozycję naprężeń σ_x i naprężeń σ_y . Zatem rozpatrując równowagę trójkątnego elementu określonego kątem α (rys. 3.10), łatwo i bezpośrednio znajdujemy zależność na naprężenie normalne σ_α i na naprężenie styczne τ_α . Grubość elementu przyjmujemy jeden.

Rzutuując wszystkie siły na kierunek normalnej n , otrzymamy

$$\sum P_n = \sigma_\alpha F_\alpha - (\sigma_x F_\alpha \cos \alpha) \cos \alpha - (\sigma_y F_\alpha \sin \alpha) \sin \alpha + \\ - (\tau_{xy} F_\alpha \cos \alpha) \sin \alpha - (\tau_{yx} F_\alpha \sin \alpha) \cos \alpha = 0,$$

$$\sigma'_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha . \quad /3.14/$$



Rys. 3.10. Ilustracja płaskiego ogólnego stanu naprężenia

Następnie rzutując wszystkie siły na kierunek stycznej do przekroju α , otrzymamy

$$\begin{aligned} \sum P_s = & \tau_\alpha F_\alpha - (\sigma_x F_\alpha \cos \alpha) \sin \alpha + (\sigma_y F_\alpha \sin \alpha) \cos \alpha + \\ & + (\tau_{xy} F_\alpha \cos \alpha) \cos \alpha - (\tau_{yx} F_\alpha \sin \alpha) \sin \alpha = 0 , \end{aligned}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha . \quad /3.15/$$

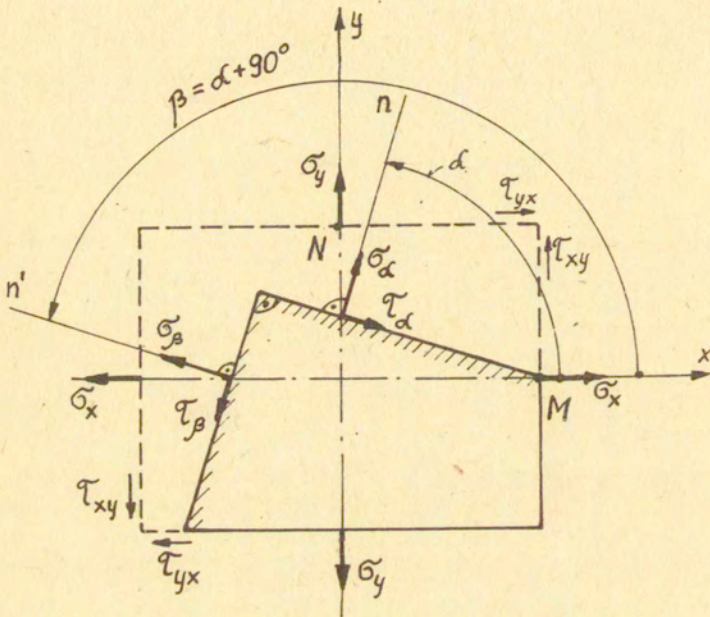
Podstawiając do równań /3.14/ i /3.15/ zależności trygonometryczne $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, otrzymamy równania

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \\ \tau_{\alpha} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha.\end{aligned}\quad /3.16/$$

W przekroju β prostopadłym do przekroju α , $\beta = \alpha + 90^\circ$ (rys. 3.11) mamy następujące zależności:

$$\begin{aligned}\sigma_{\beta} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha, \\ \tau_{\beta} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.\end{aligned}\quad /3.17/$$



Rys. 3.11. Naprężenia na przekrojach wzajemnie prostopadłych płaskiego ogólnego stanu naprężenia

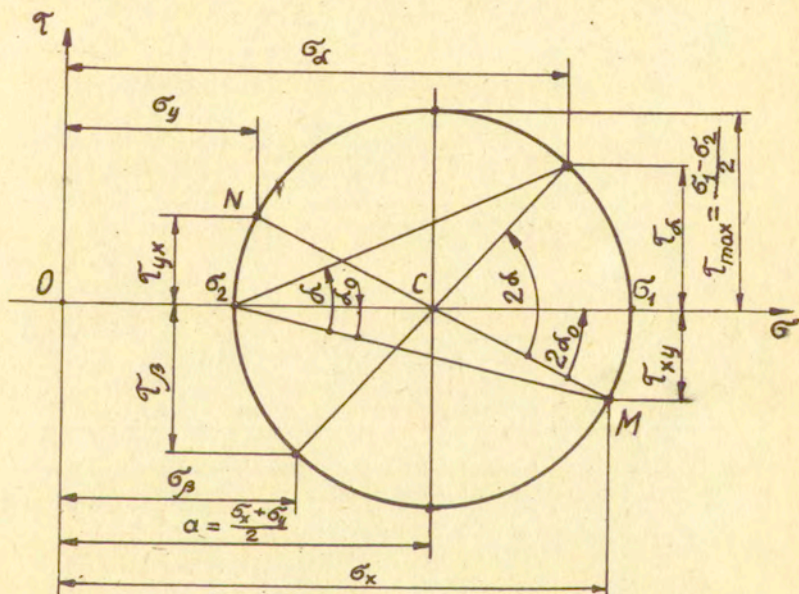
Rugując kąt α z równań /3.16/ /podnosimy wyrazy bez kąta α

i osobno z kątem α do kwadratu i dodajemy stronami/, otrzymamy równanie koła naprężeń

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha\right)^2 + (\tau_{xy} \sin 2\alpha)^2 + (-\tau_{xy} \cos 2\alpha)^2$$

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad /3.18/$$

Równanie /3.18/ określa miejsce geometryczne punktów na kole o promieniu równym $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$. Środek tego koła oddalony jest od początku układu osi σ, τ o wielkość $a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$. Zatem równanie /3.18/ jest typu $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ i przedstawia koło przesunięte względem początku układu o wielkość a . Równanie /3.18/ jest równaniem koła naprężeń, nazywanym często kołem Mohra /Otto Mohr - 1882 r./ o interpretacji graficznej przedstawionej na rys. 3.12.



Rys. 3.12. Koło Mohra dla płaskiego ogólnego stanu naprężenia.

Stan naprężenia na przekroju α określony jest przez składowe σ_x i τ_x . Można je również wyrazić przez naprężenia główne σ_1, σ_2 i kąt α_0 , pod jakim działa naprężenie σ_1 w stosunku do dodatniego kierunku osi x . Kierunek główny wyznaczymy, jeżeli naprężenie styczne τ_x przyrównamy do zera, a zatem otrzymamy

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad /3.19/$$

Równanie /3.19/ możemy również otrzymać z przyrównania do zera pochodnej naprężenia normalnego σ_x względem kąta α , $\frac{d\sigma_x}{d\alpha} = 0$. Wówczas mówimy, że pod obliczonym kątem α_0 występują największe naprężenia.

Dla przekrojów, w których $\tau_x = 0$, mamy płaski ogólny stan naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$, który przedstawiony przy pomocy koła Mohra pozwala jednoznacznie określić naprężenia główne

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \end{aligned} \quad /3.20/$$

3.7. Płaski stan naprężenia

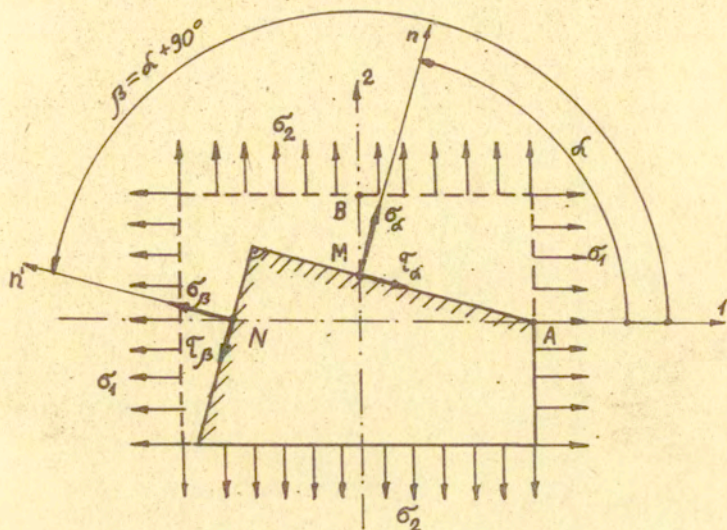
Jeśli naprężenie σ_x, σ_y są naprężeniami głównymi σ_1, σ_2 /naprężenia styczne są równe zeru $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ /, to kierunki naprężeń 1 i 2 nazywamy kierunkami głównymi, a przekroje, w których one występują - przekrojami głównymi. Jest to płaski stan naprężenia, gdyż $\sigma_3 = 0$.

W przekroju nachylonym pod kątem α będą występowały naprężenia normalne σ_α i naprężenia styczne τ_α .

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha, \\ \tau_\alpha &= (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad /3.21/$$

które możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \\ \tau_{\alpha} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.\end{aligned}\quad /3.22/$$



Rys. 3.13. Przekroje wzajemnie prostopadłe elementu prostokątnego obciążonego naprężeniami głównymi σ_1, σ_2

W przekroju prostopadłym do przekroju α czyli w przekroju $\beta = \alpha + 90^\circ$, mamy naprężenia

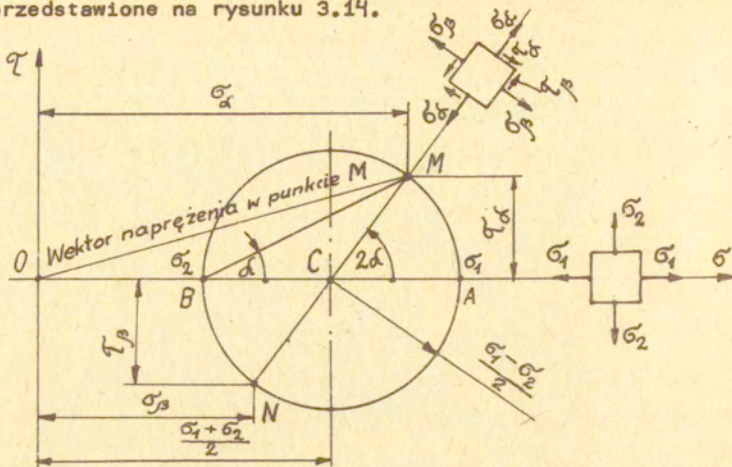
$$\begin{aligned}\sigma_{\beta} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \\ \tau_{\beta} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.\end{aligned}\quad /3.23/$$

Po wyrugowaniu kąta α z równań /3.22/ otrzymujemy równanie okręgu w postaci

$$\left(\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{\alpha}^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2, \quad /3.24/$$

podobne równanie otrzymujemy z równań /3.23/.

Odwzorowaniem graficznym równań /3.22/ i /3.23/ jest koło naprężeń przedstawione na rysunku 3.14.



Rys. 3.14. Koło Mohra

Z koła Mohra łatwo otrzymujemy zależności na wyznaczenie naprężeń głównych

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}. \end{aligned} \quad /3.25/$$

Największe naprężenia w przekroju α znajdziemy, gdy pierwszą pochodną funkcji σ_α /3.21/ względem kąta α przyrównamy do zera

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} &= -2\sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha + 2\sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha = 0, \\ (\sigma_2 - \sigma_1) \sin 2\alpha &= 0. \end{aligned} \quad /3.26/$$

Wyrażenie /3.26/ jest równe zeru, gdy $\sin 2\alpha = 0$, a to zachodzi dla kątów $\alpha = 0$ i $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Wstawiając za α wartości 0 i $\frac{\pi}{2}$ do równań /3.21/, otrzymamy

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(\alpha=0) &= \sigma_1, \quad \tau_\alpha(\alpha=0) = 0, \\ \sigma_\alpha(\alpha=\frac{\pi}{2}) &= \sigma_2, \quad \tau_\alpha(\alpha=\frac{\pi}{2}) = 0. \end{aligned}$$

Największe naprężenie styczne /rów. 3.21/₂ będzie wówczas,

gdy $\sin 2\alpha = 1$, a to zachodzi dla kątów $\alpha = 45^\circ$ i $\alpha = 135^\circ$.

Zatem maksymalne naprężenia styczne wynoszą

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \text{i} \quad \tau_{max} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \dots$$

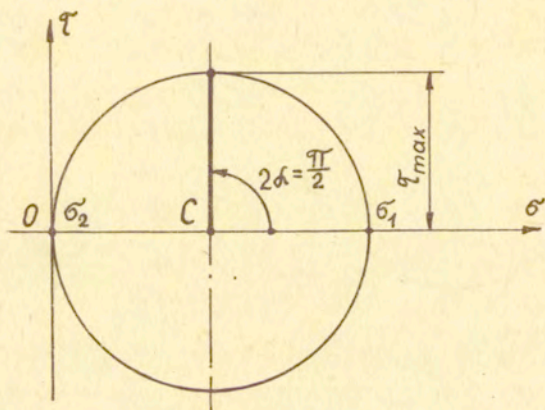
Zależności te również wynikają z istnienia ekstremum $\frac{\partial \tau_\alpha}{\partial \alpha} = 0$ funkcji $\frac{1}{3} \cdot 21/2 ((\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha = 0$, dla $\sigma_1 \neq \sigma_2$, $\cos 2\alpha = 0$, $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$).

Gdy $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$, to koło Mohra sprowadza się do punktu i wówczas $\tau = 0$ dla każdego przekroju /każdy kierunek jest kierunkiem głównym/. Stan ten jest wzechstronnym rozciąganiem

/napięta skóra na bębnie muzycznym/. Gdy $\sigma_1 = \sigma_2 < 0$, to taki stan nazywa się równomiernym ściskaniem. Jeśli $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$, to mamy liniowy stan naprężenia, $\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha$,

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha \quad \text{/rów. 3.9 i 3.10. Dla kąta } \alpha = 45^\circ \text{ — } \sigma_\alpha = \frac{\sigma_1}{2},$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2}. \quad \text{Graficznie stan ten przedstawiony jest na rysunku 3.15.}$$



Rys. 3.15. Koło Mohra dla jednoosiowego rozciągania

Jeśli w danym punkcie materiału mamy naprężenia główne $\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma$, to pod kątem $\alpha = \frac{\pi}{4}$ wystąpi czyste ścinanie (rys. 3.23), dla którego $\tau_\alpha = \tau_{max} = \pm \sigma$, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$.

3.8. Przykłady

Przykład 1

Wyznaczyć rachunkowo i wykreślić składowe naprężenia σ_α , τ_α w przekroju $\alpha = 30^\circ$ i składowe σ_β , τ_β w przekroju $\beta = \alpha + 90^\circ$, jeśli prostopadłościan obciążony jest naprężeniami głównymi $\sigma_1 = 160 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_2 = 40 \text{ MN/m}^2$ /rys. 3.16a/.

Rozwiązanie

1. Teoretycznie naprężenia obliczamy z równań:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \frac{160 + 40}{2} + \frac{160 - 40}{2} \cos 60^\circ = 130 \text{ MN/m}^2,$$

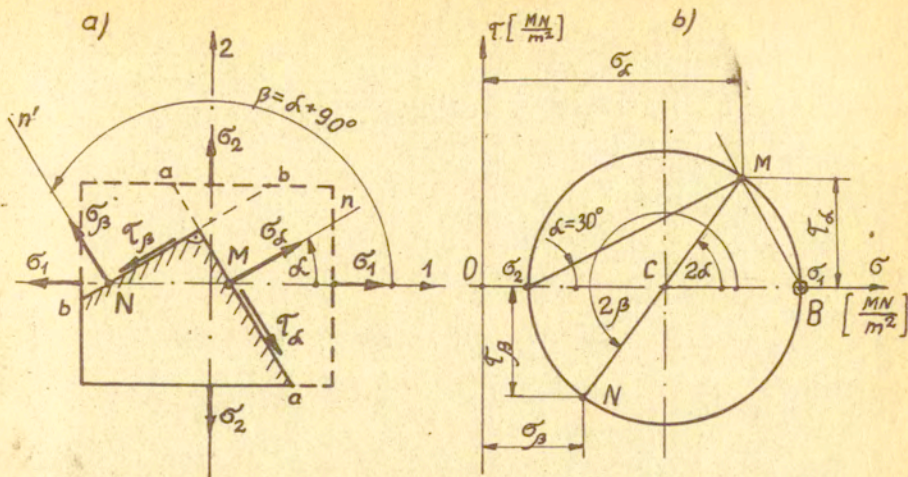
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \frac{160 - 40}{2} \sin 60^\circ = 52 \text{ MN/m}^2,$$

$$\sigma_\beta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \frac{160 + 40}{2} - \frac{160 - 40}{2} \cos 60^\circ = 70 \text{ MN/m}^2,$$

$$\tau_\beta = - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = - \frac{160 - 40}{2} \sin 60^\circ = - 52 \text{ MN/m}^2.$$

2. Wykreślić składowe naprężenia w przekrojach α i $\alpha + 90^\circ$: wyznaczamy przy pomocy koła Mohra /rys. 3.16b/. W tym celu obieramy skalę: 1 cm = 20 MN/m² i na osi σ odmierzamy odcinki $\sigma_1 = 8$ cm, $\sigma_2 = 2$ cm i z połowy średnicy rysujemy koło przechodzące przez te dwa punkty. Ze środka koła C wyprowadzamy prostą CM pod kątem $2\alpha = 60^\circ$ w kierunku dodatnim. Współrzędne punktu M oznaczają naprężenia w punkcie M na płaszczyźnie fizycznej, $\sigma_\alpha = 130 \text{ MN/m}^2$, $\tau_\alpha = 52 \text{ MN/m}^2$. Przedłużając odcinek MC do punktu N, otrzymamy naprężenia w przekroju $\alpha + 90^\circ$, $\sigma_\beta = 70 \text{ MN/m}^2$, $\tau_\beta = - 52 \text{ MN/m}^2$.

Wartość naprężeń otrzymamy, mnożąc długości odpowiednich odcinków przez przyjętą skalę.



Rys. 3.16. Ilustracja graficzna przykładu 1:
 a - płaszczyzna fizyczna, b - koło Mohra /płaszczyzna naprężeń/

W punkcie $B = \sigma_1$ mamy biegun naprężenia, wyznaczający naprężenia na wszystkich możliwych przekrojach prostopadłościannu /rys. 3.16a/.

Przykład 2

Znaleźć teoretycznie i wykreślić naprężenia na płaszczyźnie nachylonej do kierunku głównego 1 pod kątem $\alpha = -30^\circ$ oraz na płaszczyźnie prostopadłej do niej. Naprężenia główne wynoszą $\sigma_1 = 300 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_3 = -700 \text{ MN/m}^2$.

Rozwiązanie

1. Teoretycznie naprężenia obliczamy ze wzorów /3.22/ i /3.23/

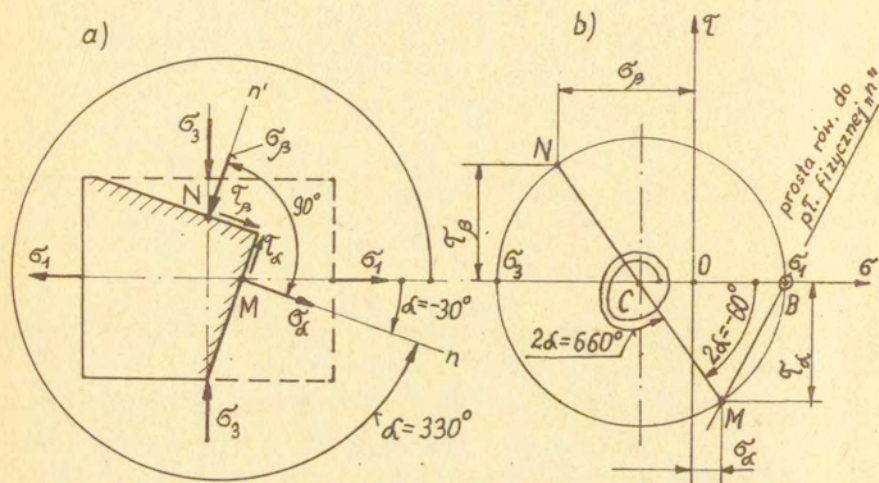
$$\sigma_\alpha = \frac{300-700}{2} + \frac{300-(-700)}{2} \cos 2 \cdot -30^\circ = 50 \text{ MN/m}^2,$$

$$\tau_\alpha = \frac{300-(-700)}{2} \sin 2 \cdot -30^\circ = -433 \text{ MN/m}^2,$$

$$\sigma_{\beta} = \frac{300-700}{2} - \frac{300-700}{2} \cos 2\alpha / -30 = -450 \text{ MN/m}^2,$$

$$\tau_{\beta} = - \frac{300-700}{2} \sin 2\alpha / -30 = 433 \text{ MN/m}^2.$$

2. Wykreślić naprężenia znajdujemy z koła Mohra /rys. 3.17b/, otrzymanego w podobny sposób jak w przykładzie 1. Kąt 2α , odkładany w kierunku dodatnim, wynosi 660° , a w kierunku ujemnym - $2\alpha = -60^\circ$. Punkty M i N określają stan naprężeń na rozpatrywanych płaszczyznach fizycznych /rys. 3.17a/. Punkt B jest biegunem.



Rys. 3.17. Ilustracja geometryczna przykładu :
a - płaszczyzna fizyczna, b - płaszczyzna naprężeń

Przykład 3

Przyjmijmy, że tensor naprężeń głównych

$$\sigma_{1,2} = \begin{bmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -18 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right]$$

określa stan naprężenia w punkcie A elementu prostokątnego. Jak zmienią się jego elementy w przekroju pod kątem

$$\alpha = -\frac{\pi}{8} \text{ do osi } \sigma_1 \text{ /rys. 3.18a/?}$$

Rozwiązanie

1. Elementy nowego tensora σ_{ij} obliczamy ze wzorów /3.22/ i /3.23/:

$$\sigma_x = \frac{-14-18}{2} + \frac{-14-18}{2} \cos 2\alpha - \frac{\pi}{8} = -14,59 \text{ kN/m}^2,$$

$$\tau_{xy} = \frac{-14-18}{2} \sin 2\alpha - \frac{\pi}{8} = -1,41 \text{ kN/m}^2,$$

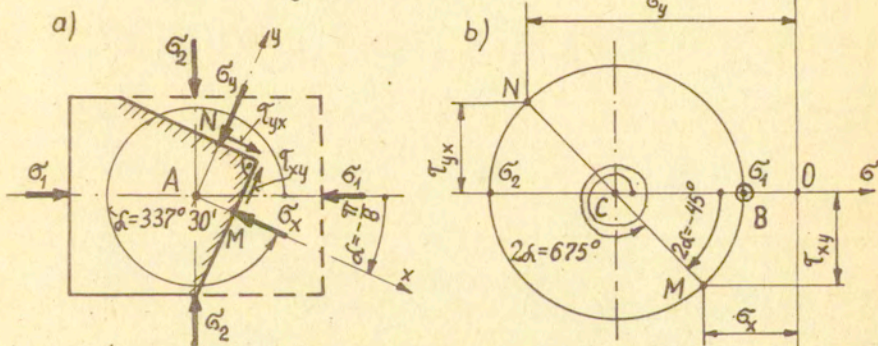
$$\sigma_y = \frac{-14-18}{2} - \frac{-14-18}{2} \cos 2\alpha - \frac{\pi}{8} = -17,41 \text{ kN/m}^2,$$

$$\tau_{yx} = -\frac{-14-18}{2} \sin 2\alpha - \frac{\pi}{8} = 1,41 \text{ kN/m}^2.$$

Poszukiwany tensor ma budowę

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14,59 & -1,41 \\ 1,41 & -17,41 \end{bmatrix}.$$

2. Z koła Mohra odczytujemy takie same wartości naprężeń elementów tensora σ_{ij} /rys. 3.18b/.



Rys. 3.18. Ilustracja geometryczna przykładu 3: a - płaszczyzna fizyczna, b - płaszczyzna naprężeń

Przykład 4

Wyznaczyć naprężenia główne i kąt ich działania w prostopadłościennym wycinku blachy, jeśli na ściankach bocznych stwierdzono występowanie naprężeń:

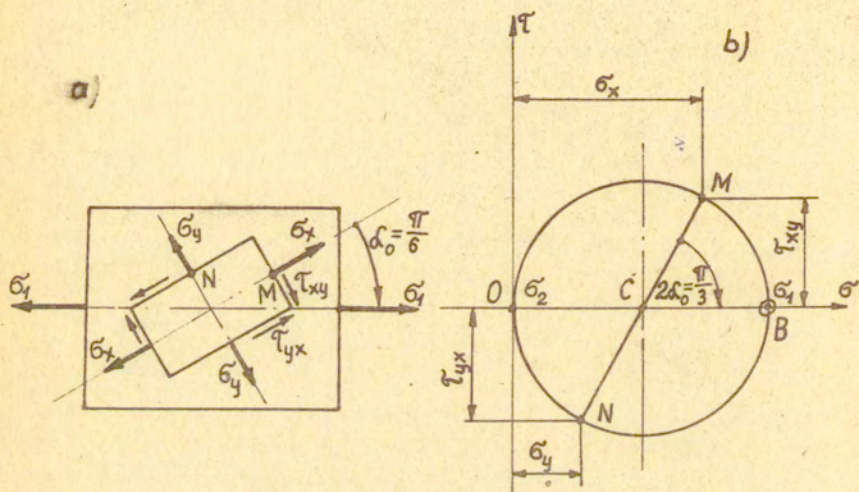
$$\sigma_x = 99 \text{ MN/m}^2, \quad \tau_{xy} = 57 \text{ MN/m}^2, \quad \sigma_y = 33 \text{ MN/m}^2, \quad \tau_{yx} = -57 \text{ MN/m}^2.$$

Rozwiązanie

1. Obliczenie kąta działania naprężeń głównych /3.19/:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 57}{99 - 33} = 1,7272,$$

$$\alpha_0 = 30^\circ.$$



Rys. 3.19. Wykreślna ilustracja przykładu 4:
a - płaszczyzna fizyczna, b - płaszczyzna naprężeń

2. Obliczenie naprężeń głównych /3.20/:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{99 + 33}{2} + \sqrt{\left(\frac{99 - 33}{2}\right)^2 + 57^2} \approx 132 \text{ MN/m}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{99 + 33}{2} - \sqrt{\left(\frac{99 - 33}{2}\right)^2 + 57^2} \approx 0.$$

3. Wykreślenie koła Mohra: Obieramy podziałkę np. 1 cm = 40 MN/m²

i na osi σ odkładamy odcinki naprężeń:

$$\sigma_x = \frac{99}{40} = 2,47 \text{ cm}, \quad \sigma_y = \frac{33}{40} = 0,82 \text{ cm}$$

i w połowie różnicy długości $\sigma_x - \sigma_y$ rysujemy koło przechodzące przez punkty

$$\tau_{xy} = \frac{57}{40} = 1,42 \text{ cm} \quad \text{i} \quad \tau_{yx} = -\frac{57}{40} = -1,42 \text{ cm}.$$

Z koła Mohra odczytujemy naprężenia główne; $\sigma_2 = 0$,

$$\sigma_1 = 3,29 \cdot 40 \approx 132 \text{ MN/m}^2 \quad \text{oraz kąt } 2\alpha_0 \approx 60^\circ.$$

Biegun znajduje się w punkcie B.

Przykład 5

Mamy naprężenia $\sigma_\alpha = 4 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_\beta = -2 \text{ MN/m}^2$, $\tau_\alpha = -3 \text{ MN/m}^2$ i $\tau_\beta = 3 \text{ MN/m}^2$. Wyznaczyć naprężenia główne σ_1 i σ_3 oraz kąt α_0 , pod którym one działają.

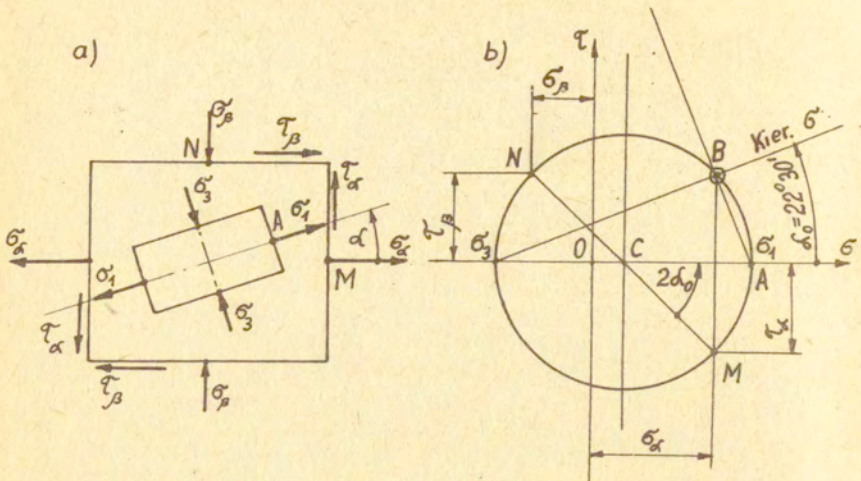
Rozwiązanie

1. Obliczenie kąta α_0 /3.19/;

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} = \frac{2/-3/}{4/-2/} = \frac{-6}{-6} = -1, \quad 2\alpha_0 = -45^\circ, \quad \alpha_0 = -22^\circ 30',$$

kąt α_0 znajduje się pomiędzy σ_α i σ_β .

2. Wykreślne znaczenie naprężeń



Rys. 3.20. Ilustracja graficzna przykładu 5:
a - płaszczyna fizyczna, b - płaszczyna naprężeń

3. Obliczenie naprężeń głównych /3.20/:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} = \frac{4 + (-2)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(4 - (-2))^2 + 4 \cdot (-3)^2} = 5,3 \text{ MN/m}^2,$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\beta^2} = \frac{4 + (-2)}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(4 - (-2))^2 + 4 \cdot 3^2} = -3,3 \text{ MN/m}^2.$$

Przykład 6

Wyznaczyć składowe naprężenia związane ze ściankami prostopadłościanu, stanowiącego część pręta obciążonego naprężeniem ściskającym $\sigma_1 = -800 \text{ N/m}^2$. Położenie prostopadłościanu na ściskanym pręcie pokazano na rysunku 3.21a.

Dane: $\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 = -800 \text{ N/m}^2$, $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

Rozwiązanie

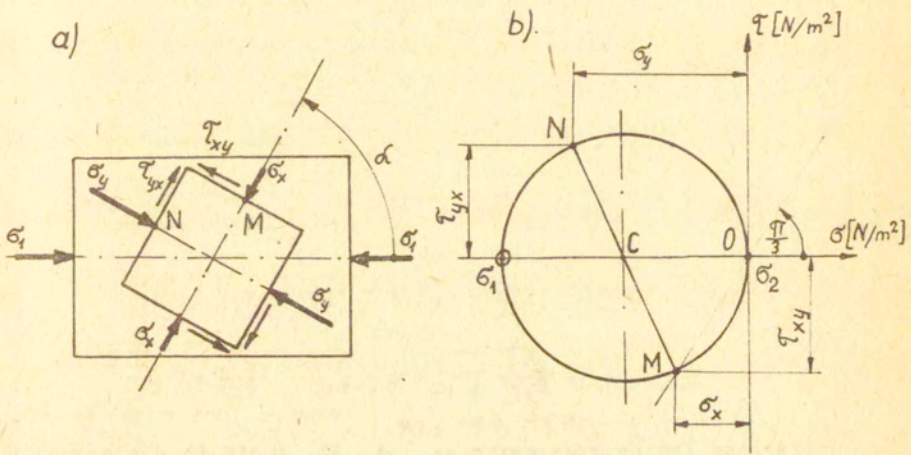
1. Obliczenie składowych naprężeń (3.22 i 3.23):

$$\sigma_x = \frac{-800+0}{2} + \frac{-800-0}{2} \cos \frac{2\pi}{3} = -200 \text{ N/m}^2,$$

$$\tau_{xy} = \frac{-800-0}{2} \sin \frac{2\pi}{3} = -346 \text{ N/m}^2,$$

$$\sigma_y = \frac{-800+0}{2} - \frac{-800-0}{2} \cos \frac{2\pi}{3} = -600 \text{ N/m}^2,$$

$$\tau_{yx} = -\frac{-800-0}{2} \sin \frac{2\pi}{3} = 346 \text{ N/m}^2.$$



Rys. 3.21. Ilustracja graficzna przykładu 6:
a - płaszczyna fizyczna, b - płaszczyna naprężeń

Przykład 7

Wyjaśnić, czy w elemencie przedstawionym na rysunku 3.22a

panuje, liniowy czy płaski stan naprężenia.

Dane: $\sigma_x = 1,5 \text{ kN/m}^2$, $\tau_{xy} = 1,4 \text{ kN/m}^2$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{yx} = -1,4 \text{ kN/m}^2$.

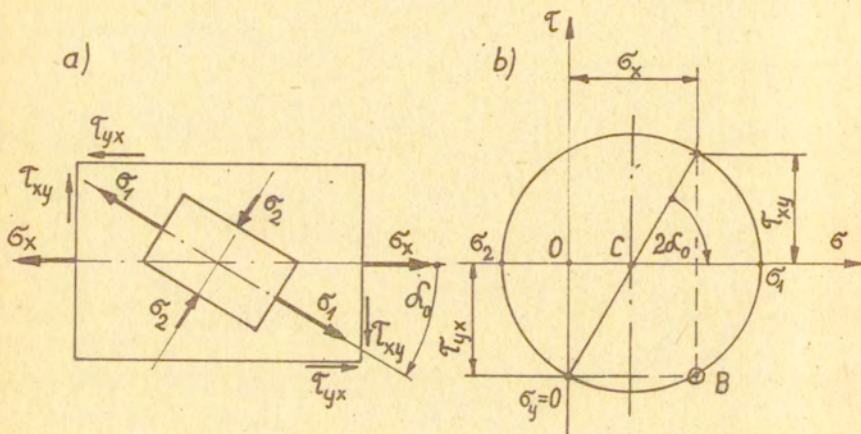
Rozwiązanie

Obliczamy naprężenia główne definiujące płaski stan naprężenia

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{1,5 + 0}{2} + \sqrt{\left(\frac{1,5 - 0}{2}\right)^2 + 1,4^2} = 2,338 \text{ kN/m}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{1,5 + 0}{2} - \sqrt{\left(\frac{1,5 - 0}{2}\right)^2 + 1,4^2} = -0,832 \text{ kN/m}^2.$$

Wykreślenie koła Mohra.



Rys. 3.22. Ilustracja graficzna przykładu 7:
a - płaszczyzna fizyczna, b - płaszczyzna naprężeń

W rozpatrywanym elemencie panuje płaski stan naprężenia.

Obliczamy kąt α_0 - nachylenia naprężeń głównych w stosunku do

osi x

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 1,4}{1,5 - 0} \approx 1,867,$$

$$2\alpha_0 \approx 61^\circ 50', \quad \alpha_0 = 30^\circ 55'.$$

Przykład 8

Wyznaczyć rachunkowo i wykreślić składowe naprężenia σ_α , σ_β , τ_α i τ_β na ściankach prostopadłościanu, stanowiącego część prostopadłościanu obciążonego naprężeniami głównymi

$$\sigma_1 = 100 \text{ MN/m}^2 \quad \text{ i } \quad \sigma_3 = -100 \text{ MN/m}^2 \quad \text{ i } \quad \text{nachylonego pod kątem } \frac{\pi}{4}.$$

Rozwiązanie

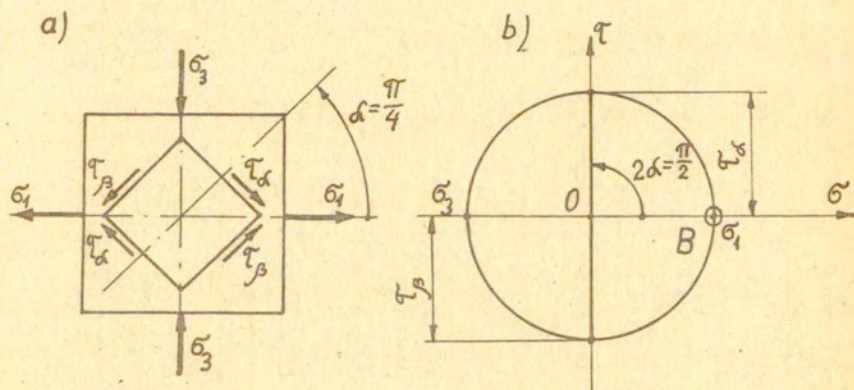
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2 \cdot 45^\circ = \frac{100 - 100}{2} + \frac{100 - (-100)}{2} \cdot 0 = 0,$$

$$\sigma_\beta = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2 \cdot 45^\circ = \frac{100 - 100}{2} - \frac{100 - (-100)}{2} \cdot 0 = 0,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2 \cdot 45^\circ = \frac{100 - (-100)}{2} \sin 90^\circ = 100 \text{ MN/m}^2,$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2 \cdot 45^\circ = -\frac{100 - (-100)}{2} \sin 90^\circ = -100 \text{ MN/m}^2.$$

Jest to przypadek czystego ścinania.



Rys. 3.23. Geometryczne odwzorowanie czystego ścinania: a - płaszczyzna fizyczna, b - płaszczyzna naprężeń

3.9. Przestrzenny stan naprężenia

3.9.1. Wprowadzenie

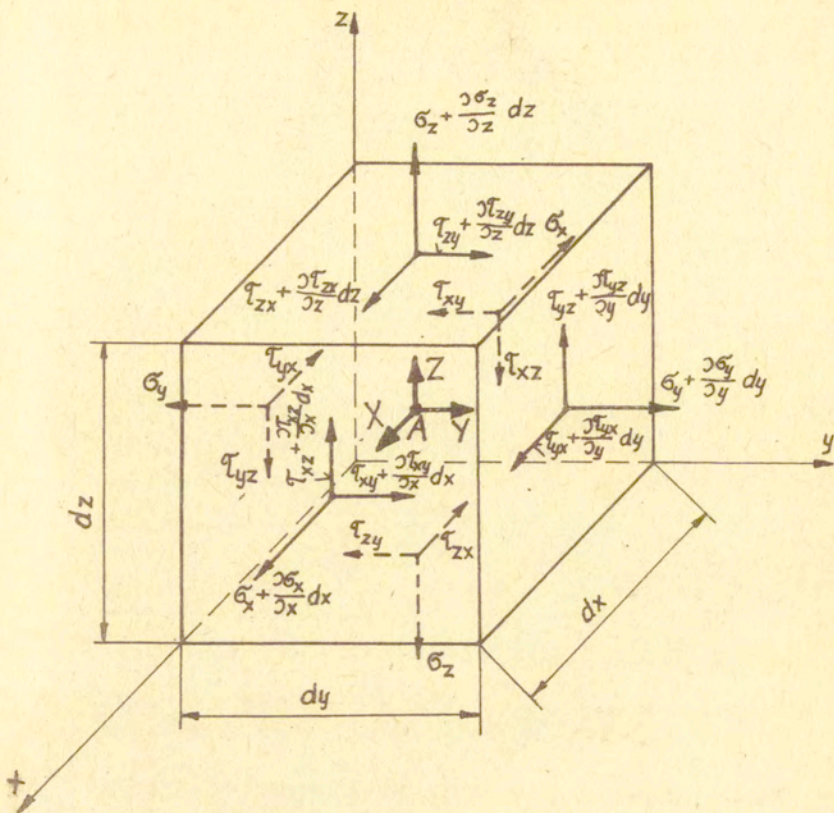
Wokół dowolnego punktu A ciała o objętości V , będącego w równowadze pod wpływem działania sił zewnętrznych, można myślowo utworzyć prostopadłościan o nieskończenie małych wymiarach liniowych dx , dy , dz . Krawędzie tego prostopadłościanu tworzą układ współrzędnych kartezjańskich x , y , z .

W celu rozpatrzenia równowagi elementarnego prostopadłościanu jednostkowe siły powierzchniowe zaczepiamy w środkach jego ścianek, a jednostkową siłę masową o składowych X_x , X_y , X_z zaczepiamy w środku prostopadłościanu. Na ścianki rozważanego prostopadłościanu /rys. 3.24/ działają trzy naprężenia normalne σ_x , σ_y , σ_z i sześć składowych naprężeń stycznych τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{yx} , τ_{zy} , τ_{xz} .

Zakładamy, że stan naprężenia w analizowanym ciele nie jest jednorodny, a zatem występuje zmiana wartości naprężenia w kierunkach osi współrzędnych /składowe naprężenia są funkcjami współrzędnych x , y , z : $\sigma_x = \sigma_x(x, y, z)$ itd./.

Zmianę tę zapisujemy w postaci różniczki wyrażającej przyrost danej składowej naprężenia /np. σ_x / wywołanej przyrostem odpowiedniej współrzędnej dx , przy przejściu w kierunku prostopadłym do ścianki przeciwległej $\left[\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right]$. Zwroty naprężeń przyjmujemy dodatnie.

Jeśli element prostopadłościenny ma być w równowadze statycznej, to naprężenia działające na niego muszą spełniać sześć warunków równowagi: trzy warunki momentów sił względem osi x^* , y^* , z^* przechodzących przez jego środek A i równoległych do osi układu x , y , z — $\sum M_{x^*} = 0$, $\sum M_{y^*} = 0$, $\sum M_{z^*} = 0$ oraz trzy warunki rzutów sił na osie x , y , z — $\sum P_x = 0$, $\sum P_y = 0$ i $\sum P_z = 0$.



Rys. 3.24. Element prostokątny w przestrzennym stanie naprężenia

Równanie sumy momentów wszystkich sił działających na prostokąt względem osi x' przechodzącej przez środek prostokąta i równoległej do osi x będzie

$$\tau_{yz} dz dx \frac{dy}{2} + / \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy / \cdot dz dx \frac{dy}{2} +$$

$$- \tau_{zy} \, dx \, dy \, \frac{dz}{2} - \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz / dx \, dy \, \frac{dz}{2}.$$

Pozostałe naprężenia nie dają momentu, gdyż przechodzą przez środek elementu, bądź są równoległe do osi x' . Po odrzuceniu małych czwartego rzędu i przeprowadzeniu redukcji, otrzymujemy równość naprężeń stycznych: $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Stosując to samo rozumowanie do pozostałych osi y' i z' przechodzących przez środek prostopadłościanu i równoległych do osi y i z , otrzymamy dalsze zależności: $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Otrzymane zależności naprężeń stycznych

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx}, & /3.27/ \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}, \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}. \end{aligned}$$

naszą nazwę warunków Cauchy'ego i ograniczają ilość składowych naprężeń stycznych z sześciu do trzech.

Zatem w każdym punkcie ciała mamy sześć różnych składowych stanu naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$.

Naprężenia występujące w przestrzennym stanie można zapisać za pomocą macierzy 3×3

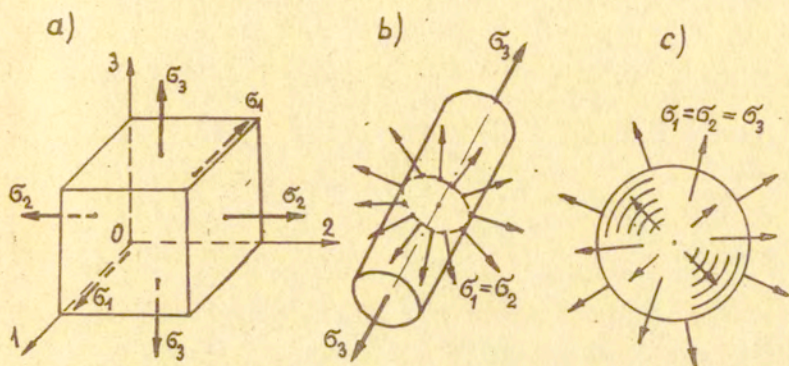
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad /3.28/$$

Macierz /3.28/ nazywana jest tensorem naprężenia opisującym naprężenia w punkcie ciała. Z uwagi na zależności /3.27/ tensor /3.28/ nazywany jest symetrycznym tensorem naprężenia. Tensor jest wielkością matematyczną będącą zbiorem składowych stanu naprężenia.

Przekroje, w których naprężenia styczne są równe zeru

nazywamy przekrojami głównymi, a naprężenia w nich występujące naprężeniami głównymi. Przestrzenny główny stan naprężenia można podzielić na:

- ogólny stan naprężenia - $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 > 0$ /rys. 3.25a/ lub $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 < 0$,
- cylindryczny /walcowy/ stan naprężenia - $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3 > 0$ /rys. 3.25b/,
- kulisty stan naprężenia - $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$ /rys. 3.25c/.



Rys. 3.25. Stany naprężenia: a - przestrzenny, b - walcowy, c - kulisty

3.9.2. Równania równowagi i ruchu

Równania różniczkowe równowagi wewnętrznej i równania ruchu znajdziemy z warunków rzutów wszystkich sił /działających na prostopadłościan/ na osie układu współrzędnych x, y, z . Na element działa również siła masowa /ciężkości/ $G = m g$ [kg $\frac{m}{s^2}$] o składowych X_x, X_y, X_z odniesionych do jednostki masy /składowa na osi $x = X_x \int dx dy dz$. Masę m określamy z gęstości $\rho = \frac{m}{V}$ [kg/cm³] ($m = \rho V = \rho \int dx dy dz$) lub z ciężaru

właściwego $\rho = \frac{G}{V} [N/cm^3]$ ($\rho V = m g$, $m = \frac{\rho}{g} dx dy dz$,

$\rho = \frac{\rho'}{g}$). W przypadku ruchu, równowaga dynamiczna wymaga dodatkowego wprowadzenia sił bezwładności d'Alemberta.

Siła bezwładności d'Alemberta jest iloczynem masy ($m = \rho dx dy dz$)

$$\text{i przyspieszenia } a_i = -\frac{\partial u_i^2}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

/i = x, y, z/, które jest pochodną materialną prędkości liniowej $v_i^e = v_i^e(x, y, z, t)$.

a. Równania równowagi i ruchu dla przestrzennego stanu naprężenia

Z warunku rzutu wszystkich sił na oś x / $\sum P_x = 0$ /

otrzymamy równanie

$$\begin{aligned} & / \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx / dy dz - \sigma_x dy dz + \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy / dx dz + \\ & - \tau_{yx} dx dz + \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz / dx dy - \tau_{zx} dx dy + \\ & + X_x \rho dx dy dz = 0, \end{aligned}$$

które po redukcji i podzieleniu przez dx dy dz daje pierwsze równanie różniczkowe równowagi

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X_x = 0.$$

Pozostałe równania otrzymujemy z warunków $\sum P_y = 0$ i $\sum P_z = 0$.

Po uwzględnieniu zależności /3.27/ równania różniczkowe równowagi wewnętrznej można zapisać

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X_x = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho X_y = 0,$$

(3.29a)

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho X_z = 0$$

lub krócej za pomocą rachunku tensorowego

$$\sigma_{ij,j} + \rho X_i = 0, \quad /3.29b/$$

gdzie $\sigma_{ij,j}$ oznacza różniczkowanie po j ($\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$, wskaźniki $i = x, j = x, y, z$ dają równanie pierwsze), oznaczenia dwuwskaźnikowe ($\partial \sigma_{xx}$) równoważne są oznaczeniom jednowskaźnikowym ($\partial \sigma_x$).

Uwzględniając w równaniach rzutów wszystkich sił na osie x, y, z / $\Sigma P_x = 0, \Sigma P_y = 0, \Sigma P_z = 0$ / składowe siły bezwładności

$$\begin{aligned} & - \rho \, dx \, dy \, dz \, \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ & - \rho \, dx \, dy \, dz \, \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \\ & - \rho \, dx \, dy \, dz \, \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

otrzymamy różniczkowe równania ruchu materii ciągłej

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho X_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \quad /3.30/$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho X_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

które ogólnie można zapisać $\sigma_{ij,j} + \rho X_i = \rho \ddot{u}_i$.

W równaniach /3.30/ u_x, u_y, u_z są przemieszczeniami cząstki materiału w kierunku osi x, y, z .

Stosunek przyrostu przemieszczenia du_i do przyrostu czasu dt jest liniową prędkością płynięcia $v_i^l, v_i^l = \frac{du_i}{dt} / i=x, y, z/$,

natomiast przyrost prędkości płynięcia dv_i^l w czasie dt określa przyspieszenie $a_i = \frac{dv_i^l}{dt} = \frac{d^2 u_i}{dt^2}$. Składowe prędkości

płynięcia $v_x^t(v_x^t, v_y^t, v_z^t)$ są zależne od czasu t i współrzędnych x, y, z czyli $v_x^t = v_x^t(t, x, y, z)$, $v_y^t = v_y^t(t, x, y, z)$, $v_z^t = v_z^t(t, x, y, z)$. Obliczając różniczkę zupełną prędkości płynięcia v_x^t

$$dv_x^t = \frac{\partial v_x^t}{\partial t} dt + \frac{\partial v_x^t}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x^t}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x^t}{\partial z} dz$$

i dzieląc jej obie strony przez dt , otrzymamy przyspieszenie /przyrost prędkości dv_x^t w czasie dt / w kierunku osi x

$$a_x = \frac{dv_x^t}{dt} = \frac{dv_x^t}{dt} = \frac{\partial v_x^t}{\partial t} + v_x^t \frac{\partial v_x^t}{\partial x} + v_y^t \frac{\partial v_x^t}{\partial y} + v_z^t \frac{\partial v_x^t}{\partial z}, \quad /3.31/$$

gdzie $\frac{dx}{dt} = v_x^t$, $\frac{dy}{dt} = v_y^t$, $\frac{dz}{dt} = v_z^t$. Równanie /3.31/ jest pochodną materialną prędkości płynięcia i składa się z pochodnej lokalnej $\frac{\partial v_x^t}{\partial t}$ i pochodnej unoszenia. Rozumując podobnie wyprowadzamy pozostałe dwie pochodne materialne /przyśpieszenia a_y i a_z /. Uwzględniając te pochodne w równaniu /3.30/, otrzymamy inną postać równania ruchu

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X_x = \rho \left(\frac{\partial v_x^t}{\partial t} + v_x^t \frac{\partial v_x^t}{\partial x} + v_y^t \frac{\partial v_x^t}{\partial y} + v_z^t \frac{\partial v_x^t}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho X_y = \rho \left(\frac{\partial v_y^t}{\partial t} + v_x^t \frac{\partial v_y^t}{\partial x} + v_y^t \frac{\partial v_y^t}{\partial y} + v_z^t \frac{\partial v_y^t}{\partial z} \right), \quad /3.32a/$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho X_z = \rho \left(\frac{\partial v_z^t}{\partial t} + v_x^t \frac{\partial v_z^t}{\partial x} + v_y^t \frac{\partial v_z^t}{\partial y} + v_z^t \frac{\partial v_z^t}{\partial z} \right).$$

Równanie /3.32a/ według konwencji sumacyjnej możemy zapisać

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_j} + \rho X_1 = \rho \left(\frac{\partial v_1^t}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_1^t}{\partial x_j} \right), \quad /3.32b/$$

gdzie $1, j = x, y, z$. Sumowanie przebiega po j , bo i jest nieme.

Równanie /3.32/ stosowane są do rozwiązywania zagadnień dynamicznych. Do rozwiązywania procesów obróbki plastycznej /wyciskanie, tłoczenie/, gdzie występują duże odkształcenia

a ruch jest ustalony, stosowane jest równanie

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_j} = \rho \nu_j \frac{\partial w_1}{\partial x_j} . \quad /3.33/$$

b. Równania równowagi i ruchu dla płaskiego stanu naprężenia

W płaskim stanie naprężenia występują tylko składowe naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$, gdyż znikają składowe naprężenia zależne od współrzędnej z: $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$. W związku z tym różniczkowe równania równowagi /3.29/ ważne dla przestrzennego stanu naprężenia redukują się do postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho X_x &= 0 , \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho X_y &= 0 \end{aligned} \quad /3.34a/$$

lub krócej

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_j} + \rho X_1 = 0 , \quad /3.34b/$$

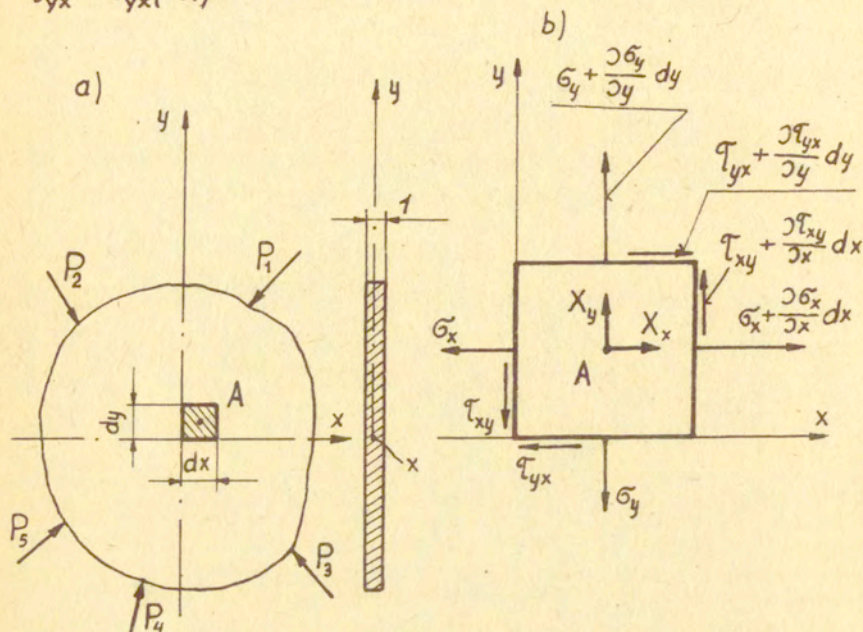
natomiast różniczkowe równania ruchu /3.32/ przyjmują postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho X_x &= \rho \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho X_y &= \rho \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial t^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad /3.35a/$$

lub krócej
$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_j} + \rho X_1 = \rho \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \nu_j \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_j^2} \right) . \quad /3.35b/$$

Równania /3.34/ i /3.35/ bardzo prosto można wyprowadzić rozpatrując równowagę płyty o grubości 1 obciążonej siłami skupionymi P_1 /rys. 3.26a/. Skoro cała płyta jest w równowadze to i każdy jej element $dx \, dy$ jest również w równowadze. Siły zewnętrzne P_1 obciążające płytę powodują występowanie w niej naprężeń $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ różnych w różnych miejscach płyty /rys. 3.26b/. Naprężenia te są funkcjami współrzędnych

$$x, y : \sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y) \\ \tau_{yx} = \tau_{yx}(x, y).$$



Rys. 3.26. Schemat płaskiego stanu naprężenia: a - płyta obciążona siłami P_{1-5} , b - element płyty A obciążony naprężeniami

Z warunku sumy momentów sił względem punktu A ($\sum M_A = 0$), otrzymujemy warunek równości naprężeń stycznych w przekrojach wzajemnie prostopadłych

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad /3.36/$$

Prawo /3.36/ pozwala na zmianę porządku wskaźników przy naprężeniach stycznych.

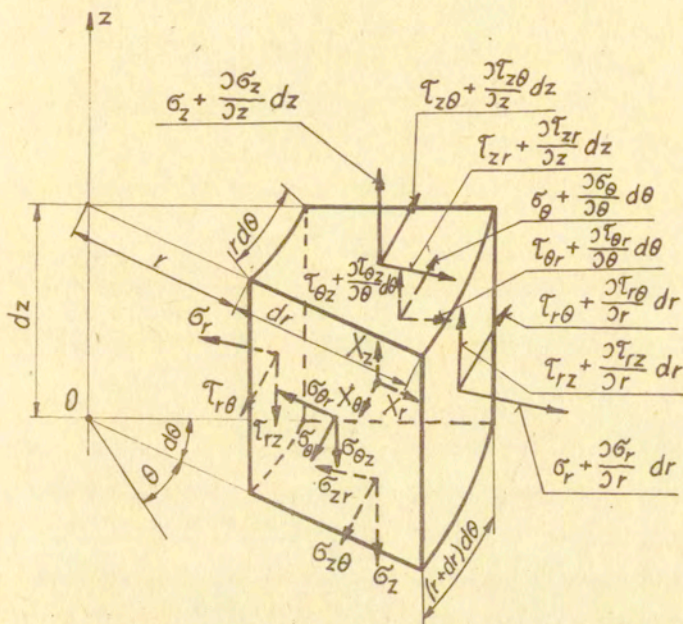
Z warunku rzutu sumy wszystkich sił na oś x ($\sum P_x = 0$) i następnie na oś y ($\sum P_y = 0$) i po wykorzystaniu równości /3.36/, otrzymujemy różniczkowe równania równowagi /3.34/.

Uwzględniając w warunkach równowagi wewnętrznej siłę bezwład-

ności d'Alemberta $(-\xi dx dy \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, -\xi dx dy \frac{\partial^2 y}{\partial t^2})$, otrzymamy różniczkowe równania ruchu /3.35/.

c. Równania równowagi i ruchu we współrzędnych biegunowych i walcowych

Przy rozwiązywaniu zagadnień przestrzennych w postaci walca kołowego lub pierścienia występuje często zamiana współrzędnych układu kartezjańskiego x, y, z na współrzędne układu walcowego /cylindrycznego/ r, θ, z / $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ lub odwrotnie $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctg \frac{y}{x}, z = z$ /.



Rys. 3.27. Element wraz z przyłożonymi do jego ścianek naprężeniami i składowymi x_r, x_θ, x_z jednostkowej siły masy

Rozpatrując równowagę elementu /rys. 3.27/ znajdziemy równania równowagi dla ogólnego przypadku we współrzędnych biegunowych i następnie dla przypadku szczególnego we współrzędnych walcowych.

Na element działają składowe normalne naprężenia: naprężenia promieniowe σ_r , naprężenia obwodowe σ_θ oraz naprężenia styczne $\tau_{r\theta}$, τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$. Działają również składowe siły masowej, odniesionej do jednostki masy, w kierunku promienia X_r , w kierunku obwodowym X_θ i w kierunku osi z X_z .

Równanie rzutów sił na kierunek promienia przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} & (\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr)(r+dr)d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz - (\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta) dr dz \sin \frac{d\theta}{2} + \\ & - \sigma_\theta dr dz \sin \frac{d\theta}{2} + (\tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} dz)(r + \frac{dr}{2}) d\theta dr + \\ & - \tau_{zr} dr(r + \frac{dr}{2}) d\theta - \tau_{\theta r} dr dz \cos \frac{d\theta}{2} + (\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta) dr dz \cos \frac{d\theta}{2} + \\ & + \rho X_r dr(r + \frac{dr}{2}) d\theta dz = 0. \end{aligned}$$

Dla nieskończenie małego kąta $d\theta$ można przyjąć:

$\sin \frac{d\theta}{2} \cong \frac{d\theta}{2}$, $\cos \frac{d\theta}{2} \cong 1$. Po zredukowaniu, pominięciu małych rzędu czwartego i podzieleniu przez wspólny czynnik $r dr d\theta dz$,

otrzymamy ostatecznie równanie

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho X_r = 0.$$

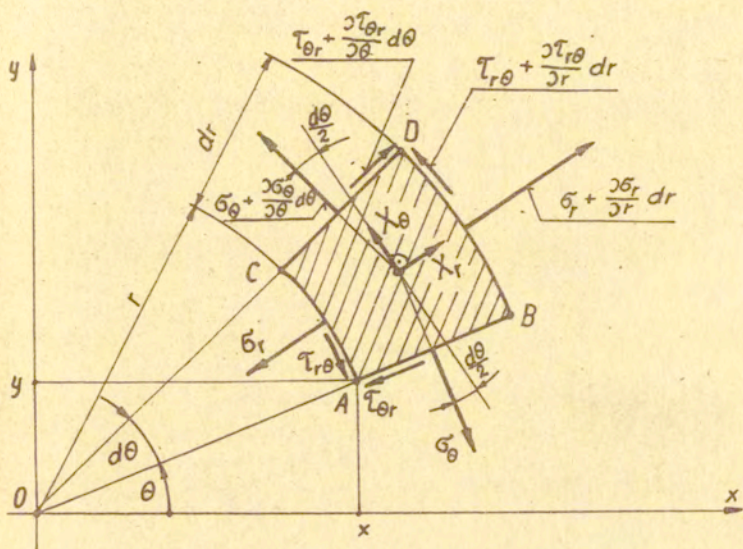
Z kolei rzutując wszystkie siły na kierunek stycznej do obwodu i następnie na kierunek osi z i postępując analogicznie jak w przypadku pierwszym, otrzymamy dalsze dwa równania równowagi wewnętrznej we współrzędnych walcowych, przybiorą one postać

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho X_r = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \rho \chi_{\theta} = 0, \quad /3.37/$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \rho \chi_z = 0.$$

Jeżeli mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia w płaszczyźnie prostopadłej do osi z , to wszystkie składowe w kierunku osi z znikają i można wówczas przyjąć układ współrzędnych biegunowych r, θ w płaszczyźnie stanu naprężenia /rys. 3.28/. W układzie tym warunki równowagi



Rys. 3.28. Płaski element we współrzędnych biegunowych. Punkt A ma współrzędne biegunowe: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctg \frac{y}{x}$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

wewnętrznej /3.37/ redukują się do dwóch równań

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} + \rho \chi_r = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \rho \chi_{\theta} = 0.$$

/3.38/

Równania równowagi /3.38/ we współrzędnych biegunowych r, θ

dla płaskiego stanu naprężenia można również otrzymać z rozpatrzenia równowagi elementu ABCD wyciętego z tarczy /rys. 3.28/. Na ścianki elementu ABCD w płaszczyźnie rysunku działają naprężenia promieniowe σ_r , obwodowe σ_θ i styczne $\tau_{r\theta}$ i $\tau_{\theta r}$ zależne od promienia r i kąta θ .

Jeśli rozkład naprężeń jest symetryczny względem osi przechodzącej przez punkt O i prostopadłej do płaszczyzny odkształcenia, to składowe naprężenia nie zależą od kąta θ i są tylko funkcjami r . Zatem naprężenia styczne $\tau_{r\theta}$ i $\tau_{\theta r}$ są równe zero. Naprężenia obwodowe σ_θ na wskutek osiowej symetrii są jednakowe w każdym punkcie, a to powoduje, że pochodna σ_θ względem kąta θ jest równa zero ($\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0$). Pochodne cząstkowe zamieniają się na pochodne zwyczajne.

W związku z tym, równania równowagi /3.38/ sprowadzają się do jednego równania o postaci

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad /3.39/$$

Różniczkowe równania równowagi we współrzędnych biegunowych mają zastosowanie przy rozwiązywaniu krążków, pierścieni, cylindrów i rur grubościennych.

Jeśli układ walcowy jest osiowo-symetryczny, to i rozkład naprężeń jest symetryczny względem osi z . Wówczas składowe naprężenia nie zależą od kąta θ , a jedynie od promienia r . A zatem pochodne naprężeń względem kąta θ są równe zero ($\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0$) i naprężenia styczne leżące w płaszczyźnie θ są również równe zero ($\tau_{r\theta} = 0$, $\tau_{z\theta} = 0$).

W układzie walcowym osiowo-symetrycznym ogólne równania różniczkowe równowagi /3.37/ sprowadzają się do postaci

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho X_r = 0, \quad /3.40/$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \rho X_z = 0.$$

Jeśli rozpatrywany element /rys. 3.27/ znajduje się w ruchu, jak to ma miejsce podczas płynięcia plastycznego, to do równań równowagi /3.40/ musimy dodać jeszcze siły bezwładności d'Alemberta. Postępując podobnie jak w przypadku przestrzennego stanu naprężenia /3.32/ siły bezwładności wprowadzamy przy pomocy prędkości płynięcia promieniowego v_r i wzdłużnego $v_z / v_\theta = 0$.

Równania ruchu z pominięciem sił masowych, we współrzędnych walcowych i dla zagadnień osiowo-symetrycznych, będą miały postać

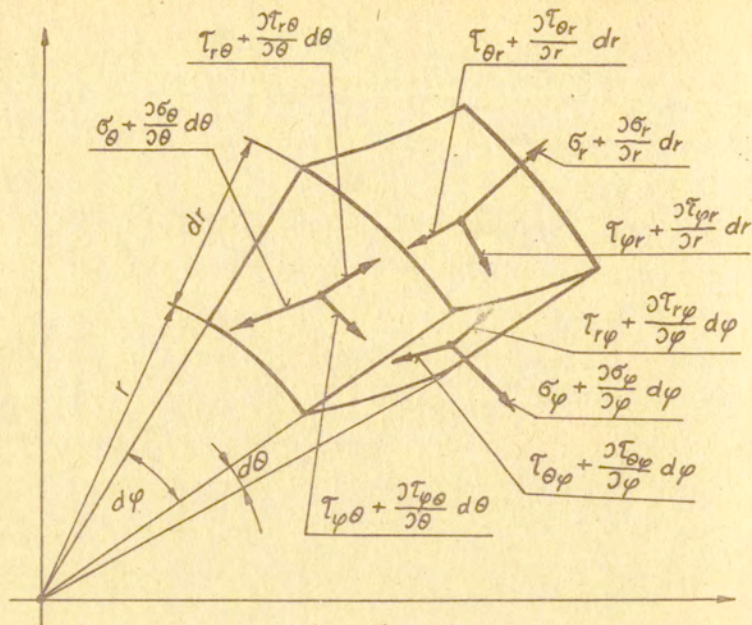
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad /3.41/$$

d. Równania równowagi i ruchu we współrzędnych kulistych

We współrzędnych kulistych r, φ, θ wydzielony element kuli /rys. 3.29/ będzie w równowadze, gdy zostaną spełnione warunki równowagi wewnętrznej. Na element kuli działają naprężenia normalne $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\theta$ i naprężenia styczne $\tau_{r\varphi}, \tau_{r\theta}$ i $\tau_{\theta\varphi}$.

Dla ogólnego przypadku równania równowagi wewnętrznej we współrzędnych kulistych mają postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [2\sigma_r - (\sigma_\theta + \sigma_\varphi) + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta] &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\tau_{r\theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta] &= 0, \quad /3.42/ \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\tau_{r\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta] &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 3.29. Element we współrzędnych kulistych

Dla osiowo-symetrycznych zagadnień we współrzędnych kulistych naprężenia nie zależą od kąta φ ($\tau_{\varphi r} = \tau_{\theta\varphi} = \tau_{r\varphi} = 0$) i równania równowagi /3.42/ redukują się do postaci

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [2\sigma_r - (\sigma_\theta + \sigma_\varphi) + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta] = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [3\tau_{r\theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta] = 0. \quad /3.43/$$

Jeśli przyjmiemy, że stan naprężenia w kuli jest symetryczny względem środka kuli, to w każdym jej punkcie istnieje taki sam stan naprężenia. Ponadto w każdym jej punkcie

kierunek promieniowy r i kierunki obwodowe φ i θ są kierunkami głównymi, a naprężenia w nich działające są naprężeniami głównymi, przy czym $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$. Dla tego stanu naprężenia różniczkowe równanie równowagi, określające stan naprężenia w powłoce kulistej sprowadza się do jednego równania typu

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad /3.44/$$

Równanie /3.44/ można bezpośrednio otrzymać z warunku rzutu wszystkich sił na kierunek promieniowy

$$(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr)(r + dr)^2 (d\theta)^2 - \sigma_r \cdot r^2 (d\theta)^2 - 2\sigma_\theta r dr (d\theta)^2 = 0,$$

$$\text{przy czym } d\varphi = d\theta, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta.$$

Jeśli rozważane ciało jest w ruchu, to do równania równowagi /3.44/ należy dołączyć siłę bezwładności wyrażoną przy pomocy prędkości promieniowej v_r^e . Równanie ruchu we współrzędnych kulistych dla kulistej symetrii można napisać w postaci

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \left(\frac{\partial v_r^e}{\partial t} + v_r^e \frac{\partial v_r^e}{\partial r} \right) \quad /3.45/$$

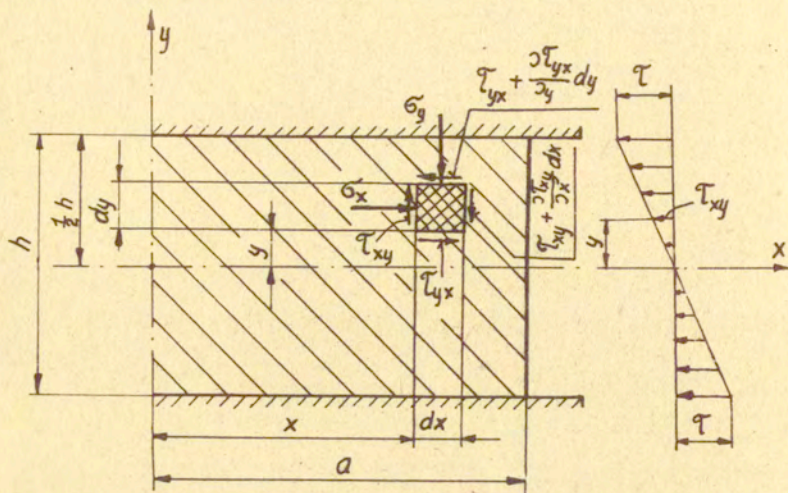
W kulistej symetrii znikają prędkości płłynięcia zależne od kąta φ i kąta θ ($v_\varphi^e = v_\theta^e = 0$).

3.9.3. Całkowanie równań równowagi

a. Całkowanie równań równowagi dla płaskiego stanu naprężenia

Rozpatrzmy stan naprężenia w ściskającym paśmie przedstawionym na rysunku 3.30. Współrzędna y zmienia się od 0 do $\frac{h}{2}$, a naprężenie styczne τ_{xy} zmienia się od 0 (w środku pasma) do τ (na powierzchni kontaktu materiału pasma z na-

rzędziem). Zakładamy również, że naprężenie σ_x zależy tylko od x czyli na całej wysokości h jest jednakowe, natomiast naprężenie τ_{xy} zależy tylko od y .



Rys. 3.30. Schemat ścisania pasma i rozkładu naprężeń

Weźmy zatem równanie równowagi $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$ i scałkujemy go względem y w przedziale od 0 do $\frac{h}{2}$. Ponieważ σ_x zależy tylko od x , to różniczka cząstkowa $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$ przechodzi w różniczkę zwyczajną $\frac{d\sigma_x}{dx}$. Naprężenie styczne τ_{xy} zależy tylko od y , to $\int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy = \tau_{xy}$. Z proporcji odcinków $\tau : \frac{h}{2} = \tau_{xy} : y$ (rys. 3.30), otrzymujemy $\tau_{xy} = \frac{2\tau}{h} y$. Wobec tego możemy napisać

$$\int_0^{\frac{h}{2}} \frac{d\sigma_x}{dx} dy + \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy = 0,$$

$$\frac{d\sigma_x}{dx} \frac{h}{2} + \frac{2\tau}{h} \frac{h}{2} = 0.$$

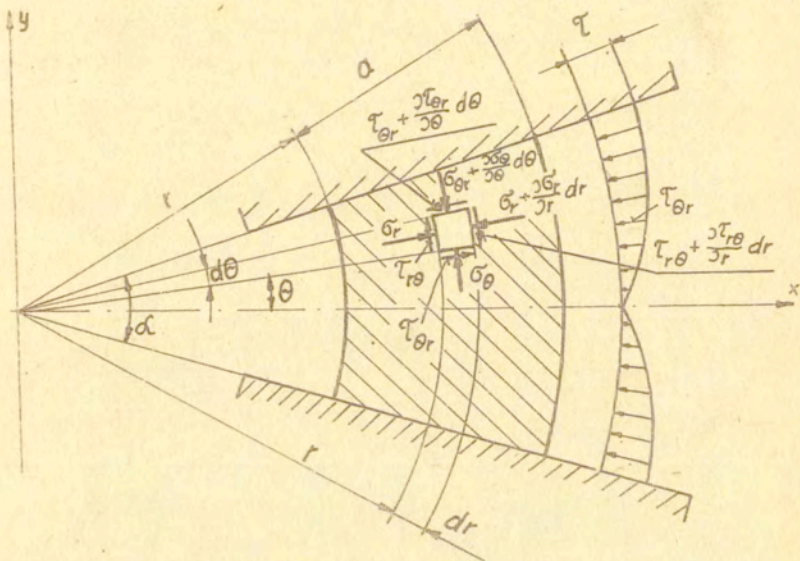
Ostatecznie scażkowane równanie równowagi (3.34a, bez siły masowej) będzie miało postać

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2\tau}{h} = 0 \quad /3.46/$$

Ze względu ^{na} przyjęte ograniczenia zależności naprężeń σ_x i τ_{xy} od współrzędnych x, y , równanie /3.46/ jest przybliżonym równaniem równowagi dla płaskiego zadania we współrzędnych prostokątnych.

b. Całkowanie równań równowagi dla płaskiego stanu naprężenia we współrzędnych biegunowych

Rozpatrzmy plastyczne płynięcie w płaskim stanie w matrycy klinowej przedstawione na rysunku 3.31.



Rys. 3.31. Schemat przecięgania pasma przez matrycę klinową

Scażkujemy równanie równowagi /3.38/₁ bez siły masowej

względem kąta θ w granicach od 0 do $\frac{\alpha}{2}$

$$\int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} d\theta + \frac{1}{r} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{1}{r} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} (\sigma_r - \sigma_\theta) d\theta = 0.$$

Zakładamy, że naprężenia σ_r i σ_θ nie zależą od kąta θ i to, że naprężenie styczne $\tau_{\theta r}$ przy zmianie kąta θ od 0 do $\frac{\alpha}{2}$ zmienia się liniowo według zależności

$$\tau_{\theta r} = \frac{2\tau}{\alpha} \theta.$$

Po uwzględnieniu podanych upraszczających założeń, równanie równowagi dla płaskiego stanu we współrzędnych biegunowych będzie miało postać

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\tau}{r\alpha} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad /3.47/$$

Przy analizowaniu przecięcia prętów kołowych przez macierz stożkową bierzemy równanie równowagi /3.43/₁ we współrzędnych kulistych. Równanie to całkujemy względem kąta θ w granicach od 0 do $\frac{\alpha}{2}$. Przyjmujemy również, że naprężenia normalne σ_r i σ_θ nie zależą od kąta θ , naprężenie styczne $\tau_{r\theta}$ zmienia się liniowo w zależności od kąta θ ($\tau_{r\theta} = \frac{2\tau}{\alpha} \theta$), dla małych kątów $\theta - \text{ctg } \theta = \theta$ oraz warunek pełnej plastyczności $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$, $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta$.

Po przeprowadzeniu całkowania, podstawieniu granic całkowania i przekształceniu, otrzymujemy przybliżone równanie równowagi dla zadań osiowej symetrii we współrzędnych kulistych

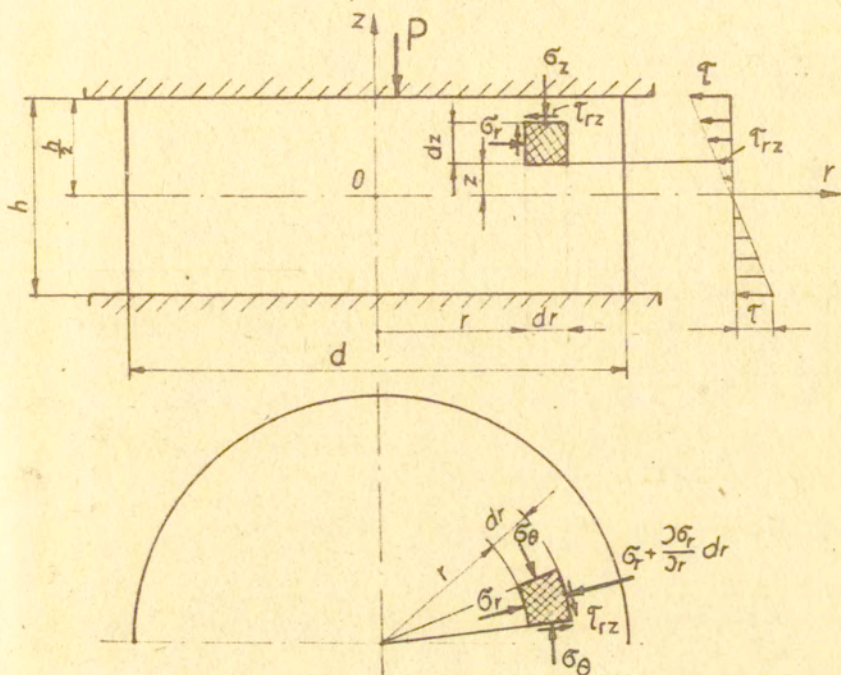
$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{4\tau}{r\alpha} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0. \quad /3.48/$$

c. Całkowanie równań równowagi dla układu walcowego osiowo-symetrycznego

W układzie walcowym osiowo-symetrycznym rozpatruje się

płynięcie plastyczne ściskanych próbek cylindrycznych oraz wyciskanie metalu w cylindrycznej matrycy kątowej.

Przy analizie ściskania próbek walcowych /rys. 3.32/



Rys. 3.32. Schemat ściskania walca i rozkładu naprężeń

przyjmujemy, że naprężenia σ_r i σ_θ nie zależą od kąta θ i nie zależą od współrzędnej z , a zależą jedynie od promienia r .

Naprężenia styczne τ_{rz} zmieniają się liniowo od 0 do τ ($\tau_{rz} = \frac{2\tau}{h} z$ otrzymujemy z proporcji odcinków $\tau : \frac{h}{2} = \tau_{rz} : z$) w zależności od zmiennej współrzędnej z .

W związku z tym, równanie równowagi /3.40/₁ /bez siły maso-

wej/ będziemy całkować względem z w granicach od 0 do $\frac{h}{2}$

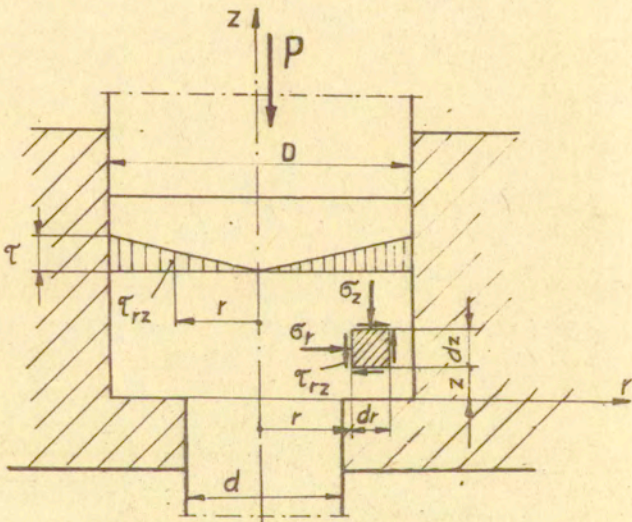
$$\int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz + \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} dz = 0,$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} z \Big|_0^{\frac{h}{2}} + \tau_{rz} \Big|_0^{\frac{h}{2}} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \Big|_0^{\frac{h}{2}} = 0.$$

Po przeprowadzeniu obliczeń, otrzymujemy przybliżone równanie równowagi dla osiowej symetrii

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\tau}{h} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad /3.49/$$

Przy wyciskaniu w matrycy cylindrycznej kątowej /rys. 3.33/ występuje nacisk materiału na ścianki boczne matrycy i wówczas naprężenie styczne $\tau_{rz} = \frac{2\tau}{d} r$ zależy od promienia r /naprężenie τ_{rz} zmienia się od 0 do τ , bo promień r zmienia się od 0 do $\frac{d}{2}$).



Rys. 3.33. Schemat wyciskania w matrycy cylindrycznej kątowej

W tym przypadku całkujemy równanie /3.40/₂ /bez siły masowej/ względem promienia r zmieniającego się w granicach od 0

$$\text{do } \frac{d}{2} \quad \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} dr + \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dr + \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{\tau_{rz}}{r} dr = 0.$$

Podstawiając za wyrażenia podcałkowe $\tau_{rz} = \frac{2\tau}{d} r$ i różniczkę

$$\frac{d\tau_{rz}}{dr} = \frac{2\tau}{d} \quad \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{2\tau}{d} dr + \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{d\sigma_z}{dz} dr + \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{2\tau}{d} dr = 0,$$

otrzymamy uproszczone równanie równowagi

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{4\tau}{d} = 0. \quad /3.50/$$

Równanie /3.50/ możemy otrzymać prościej przez zwiniecie funkcji podcałkowych z naprężeniami stycznymi

$$\int_0^{\frac{d}{2}} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} r dr + \int_0^{\frac{d}{2}} \tau_{rz} dr = \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{d(r\tau_{rz})}{dr} dr.$$

Wówczas równanie wyjściowe całkowe

$$\int_0^{\frac{d}{2}} \frac{d\sigma_z}{dz} r dr + \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{d(r\tau_{rz})}{dr} dr = 0$$

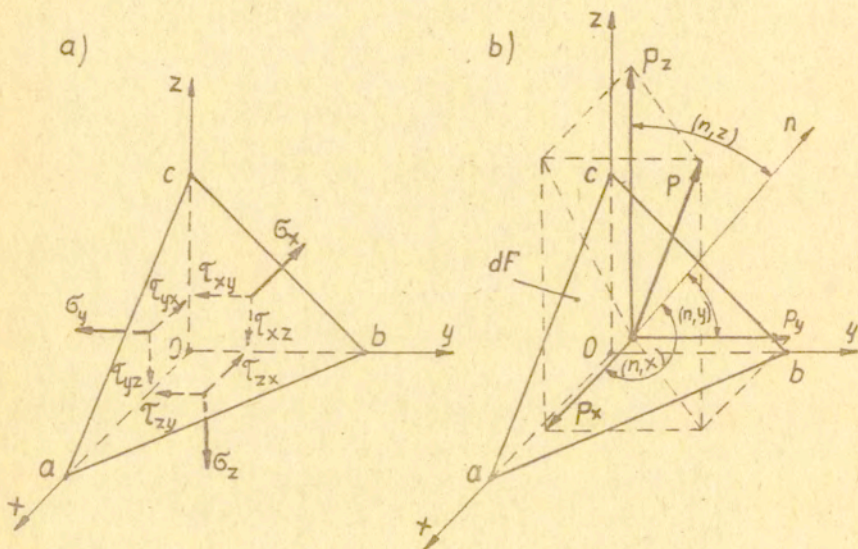
$$\frac{d\sigma_z}{dz} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\frac{d}{2}} + r\tau_{rz} \Big|_0^{\frac{d}{2}} = 0$$

rozwiązywane jest natychmiast.

3.10. Stan naprężenia w punkcie

3.10.1. Naprężenia na dowolnej płaszczyźnie

Rozpatrzmy równowagę małego elementu czworościennego $Oabc$, otaczającego rozważany punkt A ośrodka materialnego. Czworoscian ograniczony jest trzema ścianami tworzącymi układ współrzędnych prostokątnych x, y, z oraz czwartą ścianką abc dowolnie nachyloną do osi układu x, y, z o normalnej n . Na ścianki Obc , Oac , i Oab działają naprężenia normalne $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ i naprężenia styczne $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}$ (rys. 3.34a). Na ściankę pochyłą abc działa wypadkowe naprężenie p o składowych p_x, p_y, p_z (rys. 3.34b). Naprężenia te utrzymują czworoscian w równowadze.



Rys. 3.34. Elementarny czworoscian i naprężenia na niego działające.

Zakładamy, że ścianka abc posiada elementarną powierzchnię dF , której prosta normalna "n" tworzy z osiami układu współrzędnych x, y, z kąty określone cosinusami kierunkowymi a_x, a_y, a_z ($a_x = \cos(n, x)$, $a_y = \cos(n, y)$, $a_z = \cos(n, z)$). Elementarne powierzchnie ścianek bocznych czworościanu wyrażają się zależnościami

$$dF_{Obc} = dF \cos(n, x) = dF a_x,$$

$$dF_{Oac} = dF \cos(n, y) = dF a_y,$$

$$dF_{Oab} = dF \cos(n, z) = dF a_z.$$

Czworościan $Oabc$ będzie w równowadze, jeśli suma rzutów wszystkich sił działających na oś x będzie równa zero — $\sum P_x = 0$, na oś y będzie równa zero — $\sum P_y = 0$ i na oś z będzie równa zero — $\sum P_z = 0$. Zatem równanie sumy rzutów sił na oś x wyrazi się

$$p_x dF - \sigma_x dF a_x - \tau_{yx} dF a_y - \tau_{zx} dF a_z = 0,$$

a po redukcji ma postać

$$p_x = \sigma_x a_x + \tau_{yx} a_y + \tau_{zx} a_z.$$

Gdy dokonamy rzutowania sił na pozostałe osie układu i zastosujemy warunki Cauchy'ego równości naprężeń stycznych na przekrojach wzajemnie prostopadłych, to równania równowagi czworościanu możemy napisać

$$p_x = \sigma_x a_x + \tau_{xy} a_y + \tau_{xz} a_z,$$

$$p_y = \tau_{yx} a_x + \sigma_y a_y + \tau_{yz} a_z, \quad (3.51a)$$

$$p_z = \tau_{zx} a_x + \tau_{zy} a_y + \sigma_z a_z,$$

a przy przyjęciu konwencji sumacyjnej Einsteina możemy je zapisać w postaci

$$p_i = \sigma_{ij} a_j, \quad (3.51b)$$

gdzie $i, j = x, y, z$.

W równaniach równowagi (3.51) nie występują siły masowe, ponieważ są one nieskończenie małe.

Na ścianie pochyłej abc czworobocianu $Oabc$ działa wypadkowe naprężenie

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2},$$

które można rozłożyć na naprężenia normalne p_n i na naprężenie styczne p_t (rys. 3.35). Naprężenie normalne p_n do powierzchni dF jest sumą rzutów składowych p_x, p_y, p_z na kierunek normalnej n

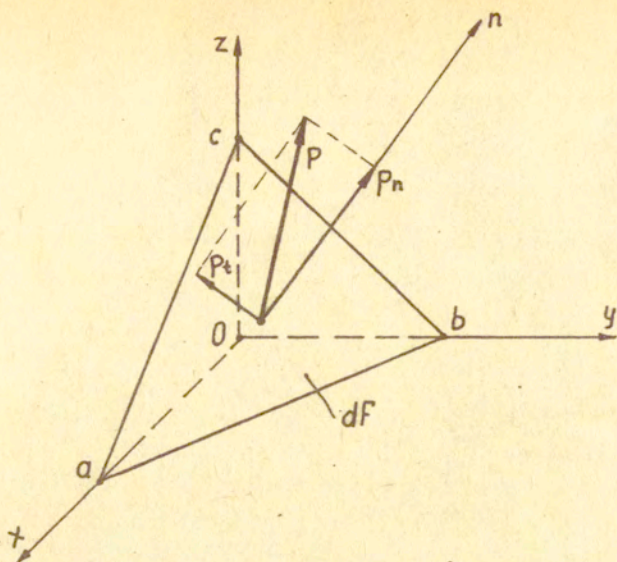
$$p_n = p_x a_x + p_y a_y + p_z a_z.$$

Po wykorzystaniu równań (3.51a) i uporządkowaniu naprężenie normalne p_n wyrazi się zależnością

$$p_n = \sigma_x a_x^2 + \sigma_y a_y^2 + \sigma_z a_z^2 + 2\tau_{xy} a_x a_y + 2\tau_{yz} a_y a_z + 2\tau_{zx} a_z a_x \quad \text{lub krócej} \quad p_n = \sigma_{ij} a_i a_j. \quad (3.52b)$$

Natomiast naprężenie styczne p_t otrzymuje się z naprężenia wypadkowego p i naprężenia normalnego p_n ($p^2 = p_n^2 + p_t^2$)

$$p_t = \sqrt{p^2 - p_n^2}. \quad (3.53)$$



Rys. 3.35. Rozkład naprężenia wypadkowego p na składową normalną p_n i styczną p_t

3.10.2. Naprężenia główne

W ogólnym przypadku na pochylą płaszczyznę dF działa naprężenie p o składowych p_n i p_t . My natomiast chcemy znaleźć płaszczyznę dF tak pochyloną, aby występowało na niej tylko naprężenie normalne p_n , a naprężenie styczne p_t było równe zeru ($p_t = 0$). W tym przypadku wypadkowe naprężenie p leży na prostej normalnej n ($p_n = p$) i nazywa się naprężeniem głównym ($p_n = p = \sigma$).

Rzutując naprężenie główne σ na osie układu współrzędnych, otrzymamy jego składowe

$$p_x = \sigma a_x, \quad p_y = \sigma a_y, \quad p_z = \sigma a_z.$$

które wstawione do równań (3.51a) i po dokonaniu redukcji wyrazów podobnych, utworzą jednorodny układ równań liniowych względem cosinusów kierunkowych a_x, a_y, a_z o postaci

$$\begin{aligned} a_x(\sigma_x - \sigma) + a_y \tau_{xy} + a_z \tau_{xz} &= 0, \\ a_x \tau_{yx} + a_y(\sigma_y - \sigma) + a_z \tau_{yz} &= 0, \\ a_x \tau_{zx} + a_y \tau_{zy} + a_z(\sigma_z - \sigma) &= 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Układ równań (3.54) zawiera cztery niewiadome, a mianowicie naprężenie główne σ i trzy cosinusy kierunkowe a_x, a_y, a_z , określające położenie płaszczyzny abc. Do rozwiązania układu równań (3.54) potrzebne jest jeszcze jedno równanie będące warunkiem geometrycznym cosinusów kierunkowych

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$$

znanym z geometrii analitycznej.

Układ równań (3.54) posiada niezerowe rozwiązanie tylko wtedy, gdy wyznacznik utworzony ze współczynników przy niewiadomych a_x, a_y, a_z równa się zeru

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.55a)$$

Wyznacznik (3.55a) zgodnie z konwencją sumacyjną Einsteina można zapisać następująco:

$$\left| \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} \right| = 0. \quad (3.55b)$$

Rozwinięcie wyznacznika (3.55a) daje równanie trzeciego stopnia względem σ .

$$\sigma^3 - \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma[\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] +$$

$$- [\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - (\sigma_x \tau_{yz}^2 + \sigma_y \tau_{zx}^2 + \sigma_z \tau_{xy}^2)] = 0. \quad (3.56a)$$

Równanie to ma zawsze trzy pierwiastki rzeczywiste $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, mające znaczenie naprężeń głównych, które układamy w porządku $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Wprowadzając oznaczenia:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{ii} = \sigma_{ij} \delta_{ij},$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ij}),$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \det \|\sigma_{ij}\| =$$

(3.56b)

$$= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (\varepsilon_{pqr} \varepsilon_{ijk} \sigma_{pi} \sigma_{qj} \sigma_{rk}) =$$

$$= \frac{1}{6} (2\sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} - 3\sigma_{ij} \sigma_{ji} \sigma_{kk} + \sigma_{ii} \sigma_{jj} \sigma_{kk}).$$

równanie (3.56a) można zapisać w postaci

$$\sigma^3 - \sigma^2 I_1 + \sigma I_2 - I_3 = 0. \quad (3.56c)$$

Współczynniki I_1, I_2, I_3 nazywamy niezmiennikami stanu naprężenia, gdyż nie zależą od obrotu osi układu współrzędnych x, y, z . Wyrażenia niezmiennicze I_1, I_2, I_3 nadają się do

formułowania praw fizycznych. Pierwiastki rzeczywiste $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ również nie zależą od orientacji osi układu współrzędnych. Równanie (3.56c) nazywa się równaniem charakterystycznym, sekularnym lub wiekowym.

Jeśli osie układu współrzędnych x, y, z pokrywają się z kierunkami głównymi w rozpatrywanym punkcie, to niezmienniki stanu naprężenia można wyrazić za pomocą naprężeń głównych, gdyż wówczas naprężenia styczne równają się zeru

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_s, \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{vmatrix}, \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

gdzie $\sigma_s = \frac{1}{3}\sigma_{11} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ i nazywa się naprężeniem średnim.

Dla płaskiego stanu naprężenia, $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$, niezmienniki redukują się do postaci

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y, \quad I_2 = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2, \quad I_3 = 0.$$

Wobec tego równanie kubiczne (3.56a) zapiszemy w postaci

$$\sigma \left[\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) \right] = 0.$$

Po oznaczeniu $\sigma = \sigma_3 = 0$ pozostałe pierwiastki obliczamy z równania kwadratowego

$$\sigma^2 - \sigma(\sigma_x + \sigma_y) + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0.$$

Wyróżnik tego równania

$$\Delta = (\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2.$$

Zatem pierwiastki

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (3.58)$$

Pierwiastki (3.58) warto porównać z wzorami (3.16), otrzymanymi z konstrukcji koła Mohra.

Aby wyznaczyć kąt nachylenia płaszczyzn głównych należy podstawić do równań (3.54) np. $\sigma = \sigma_1$ oraz $\sigma_z = 0$,

$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$, a otrzymamy

$$(\sigma_x - \sigma_1) a_x + \tau_{xy} a_y = 0,$$

$$\tau_{yx} a_x + (\sigma_y - \sigma_1) a_y = 0.$$

Po odpowiednich przekształceniach i wprowadzeniu $a_x = \cos \alpha$, $a_y = \sin \alpha$ oraz $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$, znajdziemy kąt nachylenia płaszczyzny głównej

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y},$$

gdzie $\alpha_0 = \alpha_1 = n \frac{\pi}{2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Nas interesuje jedynie α_1 przy $n = 0$ i $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ przy $n = 1$, dla których wartości ekstremalne $\sigma_1 = \sigma_{\alpha_1}$, $\sigma_z = \sigma_{\alpha_2}$ są wzajemnie prostopadłe.

Równanie (3.56c) możemy rozwiązać, jeśli za naprężenie główne σ podstawimy $\sigma = s + \sigma_s$ ($I_1 = 3\sigma_s$, $\sigma_s = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_s \delta_{ij}$). Po przeprowadzeniu reduk-

cji i przekształceń otrzymamy równanie

$$s^3 - s(3\sigma_s^2 - I_2) - (2\sigma_s^3 - \sigma_s I_2 + I_3) = 0. \quad (3.59)$$

Równanie (3.59) jest typu

$$x^3 + a x + b = 0,$$

którego pierwiastki są następujące:

$$x_1 = 2 \sqrt{-\frac{a}{3}} \cos \omega,$$

$$x_2 = 2 \sqrt{-\frac{a}{3}} \cos(\omega - 120^\circ),$$

$$x_3 = 2 \sqrt{-\frac{a}{3}} \cos(\omega - 240^\circ),$$

przy czym $\cos 3\omega = \frac{-b}{2\sqrt{(-\frac{a}{3})^3}}$, $a = -(3\sigma_s^2 - I_2)$.

Czynnik $2\sqrt{-\frac{a}{3}}$ po podstawieniu odpowiednich wartości równa się $\frac{2}{3} \sigma_H (\sigma_H = \sigma_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)})$.

Poszukiwane pierwiastki równania zastępczego (3.59) będą miały postać

$$s_1 = \frac{2}{3} \sigma_H \cos \omega,$$

$$s_2 = \frac{2}{3} \sigma_H \cos(\omega - 120^\circ), \quad (3.50a)$$

$$s_3 = \frac{2}{3} \sigma_H \cos(\omega - 240^\circ),$$

a równania wiekowego (3.56c) wyrażę się zależnościami

$$\sigma_1 = \sigma_s + \frac{2}{3} \sigma_H \cos \omega,$$

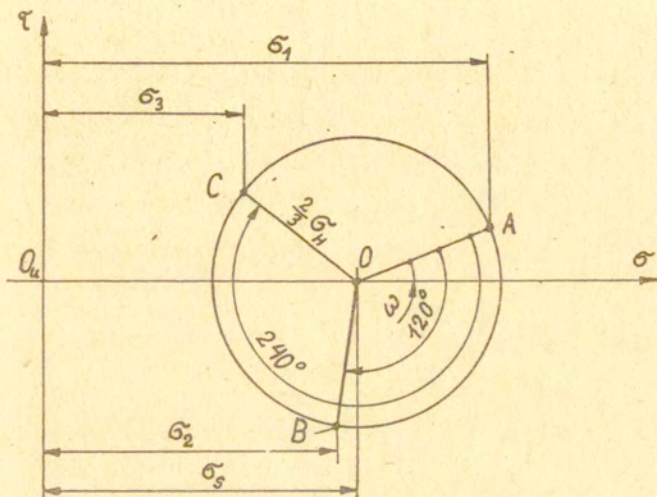
$$\sigma_2 = \sigma_s + \frac{2}{3} \sigma_H \cos(\omega - 120^\circ), \quad (3.60b)$$

$$\sigma_3 = \sigma_s + \frac{2}{3} \sigma_H \cos(\omega - 240^\circ).$$

Należy zwrócić uwagę, że suma składowych dewiatora naprężeń jest zawsze równa zero

$$s_1 + s_2 + s_3 = \frac{2}{3}\sigma_H [\cos\omega + \cos(\omega - 120^\circ) + \cos(\omega - 240^\circ)] = 0.$$

Wartości naprężeń, wyrażone zależnościami (3.60b), można przedstawić wykreślnie za pomocą trójramiennej gwiazdy naprężeń podanej przez T. Pełczyńskiego (rys. 3.36).



Rys. 3.36. Gwiazda naprężeń

Z gwiazdy naprężeń OABC o ramieniu równym $\frac{2}{3}\sigma_H$ rzuty końców ramion wyznaczają największe naprężenia normalne. Ramie gwiazdy OA tworzy z dodatnim kierunkiem osi σ kąt ω , wyznaczany ze wzoru

$$\cos\omega = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\frac{2}{3}\sigma_H}.$$

Wyrażenia σ_s , σ_H i kąt ω są niezmiennikami stanu naprężenia. Odgrywają one dużą rolę w teorii plastyczności. Niez-

miennik $\sigma_s = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, będący średnią wartością naprężeń, wpływa na zmianę objętości odkształcanego ciała. Niezmiennik $\sigma_H = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ wpływa jedynie na zmianę postaci odkształcanego ciała. Niezmiennik ω charakteryzuje schemat stanu naprężenia.

3.10.3. Rozkład tensora naprężenia

Stan naprężenia w punkcie wygodnie jest rozpatrywać jako złożony z dwóch części: równomiernego, wszechstronnego ściskania lub rozciągania wywołanego naprężeniem średnim σ_s oraz części pozostałej po jego odjęciu. Zatem tensor naprężenia $T_\sigma = \sigma_{ij}$ można rozłożyć na dewiator naprężenia $D_\sigma = s_{ij}$ i na tensor kulisty naprężenia $K_\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} = \sigma_s \delta_{ij}$ ($\sigma_s = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$), co można zapisać

$$T_\sigma = D_\sigma + K_\sigma \quad (3.61b)$$

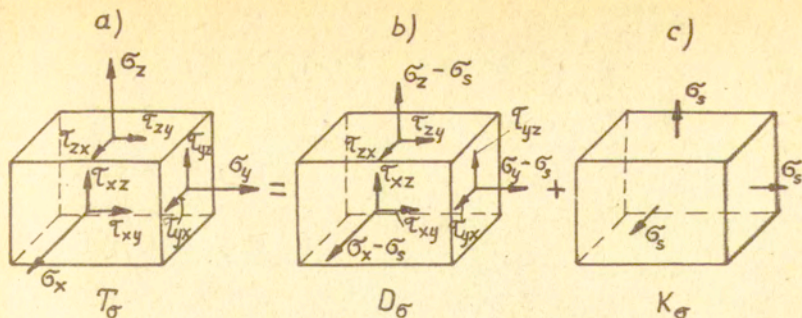
lub za pomocą wskaźników

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (3.61b)$$

Rozkład tensora naprężenia T_σ na dewiator naprężenia D_σ i na tensor kulisty naprężenia K_σ można przedstawić przy pomocy macierzy

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}}_{T_\sigma} = \underbrace{\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_s & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_s & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_s \end{vmatrix}}_{D_\sigma} + \underbrace{\begin{vmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{vmatrix}}_{K_\sigma} \quad (3.61c)$$

lub graficznie jak na rysunku 3.37.



Rys. 3.37. Graficzny rozkład tensora naprężenia T_σ na dewiator naprężenia D_σ i na tensor kulisty naprężenia K_σ

Dla naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (naprężenia styczne równe są zeru), tensor naprężenia σ_{ij} ma postać

$$T_\sigma = \sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}, \quad (3.62a)$$

dewiator naprężenia S_{ij}

$$D_\sigma = S_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{vmatrix}, \quad (3.62b)$$

tensor kulisty

$$K_\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \end{vmatrix}. \quad (3.62c)$$

Zatem tensor naprężenia w osiach głównych można ogólnie zapisać w postaci macierzy

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{vmatrix} \quad (3.62d)$$

czyli $T_\sigma = D_\sigma + K_\sigma$ (3.62e)

Tensor kulisty K_σ często nazywany jest aksjatorem naprężenia i oznaczany jest przez A_σ .

Wszystkie składowe tensora kulistego $\sigma_s = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ są sobie równe. Tensor kulisty powoduje wszechstronne (hydrostatyczne) ściskanie lub rozciąganie. Wywołuje on zmianę objętości odkształcanego ciała. Dewiator natomiast wywołuje jedynie zmianę postaci ciała odkształcanego.

Dewiator naprężenia jako wielkość fizyczna, powodująca zmianę postaci ciała (równanie 3.61c), posiada niezmienniki czyli funkcje skalarne składowych dewiatora naprężenia (wartości niezmienników nie ulegają zmianie przy obrocie układu współrzędnych)

$$\mathcal{J}_1 = s_{ii} = 0, \quad (3.63)$$

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)],$$

$$\mathcal{J}_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki},$$

gdzie $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ jest dewiatorem naprężenia.

Dla naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ niezmienniki dewiatora naprężenia mają postać

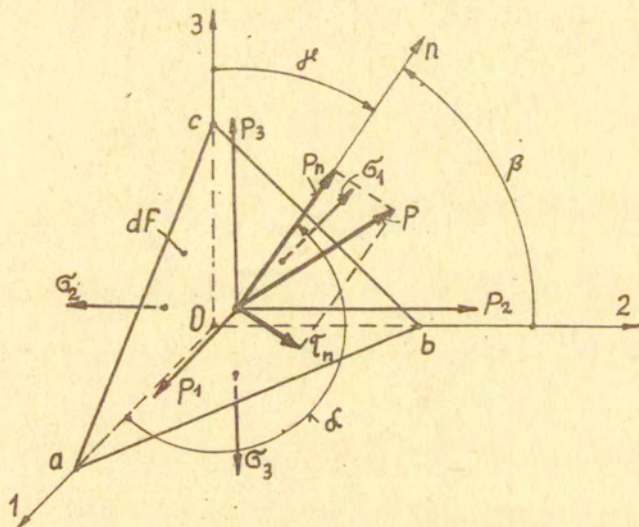
$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= 0, \\ \mathcal{J}_2 &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2], \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\mathcal{J}_3 = (\sigma_1 - \sigma_s)(\sigma_2 - \sigma_s)(\sigma_3 - \sigma_s) = \frac{1}{27} [2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)],$$

gdzie $\sigma_s = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ jest średnim naprężeniem.

3.11. Maksymalne naprężenia styczne

Przyjmijmy kierunki główne naprężeń w rozpatrywanym punkcie A za układ odniesienia. Oś x pokrywa się z kierunkiem głównym 1, oś y - z kierunkiem głównym 2, a oś z - z kierunkiem głównym 3. Na osiach 1, 2, 3 budujemy elementarny czworościan (rys. 3.38). Naprężenie styczne τ_n na ukośnej ścianie czworościanu abc będzie wyrażone naprężeniami głównymi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ i orientacją tej ścianki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Przyjęcie kierunków głównych za wyjściowy układ odniesienia bardzo upraszcza analizę naprężeń stycznych.



Rys. 3.38. Elementarny czworościan $Oabc$ zbudowany na osiach głównych

Analizę czworościanu zbudowanego na kierunkach głównych opieramy o równania ogólne (3.51), formalnie zastępując w nich naprężenia normalne naprężeniami głównymi, a naprężenia styczne-

ne - zerami. Otrzymamy wówczas składowe naprężenia p w kierunkach osi 1, 2, 3

$$p_1 = \sigma_1 a_1, \quad p_2 = \sigma_2 a_2, \quad p_3 = \sigma_3 a_3.$$

Składową normalną p_n naprężenia p znajdziemy, jeśli zrzutujemy składowe osiowe p_1, p_2, p_3 na kierunek normalny n

$$p_n = \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2. \quad (3.65)$$

Wypadkową naprężenia p znajdujemy z zależności geometrycznej

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2. \quad (3.66)$$

Z zależności $p^2 = p_n^2 + \tau_n^2$ otrzymujemy naprężenie styczne na pochyłej powierzchni czworosięianu

$$\tau_n^2 = p^2 - p_n^2. \quad (3.67a)$$

Podstawiając do równania (3.67a) zależności (3.66) i (3.65), otrzymamy interesujące nas naprężenie styczne

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2 - (\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2)^2. \quad (3.67b)$$

Po podniesieniu trójmianu do kwadratu, uporządkowaniu i wykorzystaniu zależności: $1 - a_1^2 = a_2^2 + a_3^2$, $1 - a_2^2 = a_1^2 + a_3^2$, $1 - a_3^2 = a_1^2 + a_2^2$ ze związku geometrycznego cosinusów kierunkowych

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \quad (3.68)$$

otrzymamy po zwinięciu wzór na naprężenie styczne w przekroju dowolnie nachylonym względem przekrojów głównych

$$\tau_n = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 a_1^2 a_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 a_2^2 a_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 a_3^2 a_1^2}. \quad (3.69)$$

Zapytajmy teraz, dla jakich wartości cosinusów kierunko-

wych a_1, a_2, a_3 funkcja (3.69) będzie miała ekstremum. Funkcja ta jest ciągła i różniczkowalna ze względu na zmienne a_1, a_2, a_3 i dodatkowo związana warunkiem geometrycznym $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Zatem badamy ekstremum funkcji wielu zmiennych. W tym celu budujemy funkcję pomocniczą typu

$$\bar{\Phi}(a_1, a_2, a_3) = \varphi(a_1, a_2, a_3) + \lambda g(a_1, a_2, a_3),$$

(gdzie $\varphi(a_1, a_2, a_3) = \tau_n^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 a_1^2 a_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 a_2^2 a_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 a_3^2 a_1^2$,

$g(a_1, a_2, a_3) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 1$) i formułujemy warunki konieczne istnienia ekstremum, przyrównując do zera pochodne cząstkowe funkcji

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial a_3} = 0.$$

Warunki konieczne istnienia ekstremum badanej funkcji $\bar{\Phi}$ przyjmują postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial a_1} &= 2a_1 [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 a_2^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 a_3^2 + \lambda] = 0, \\ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial a_2} &= 2a_2 [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 a_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 a_3^2 + \lambda] = 0, \\ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial a_3} &= 2a_3 [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 a_2^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 a_1^2 + \lambda] = 0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Równania (3.70) nie są spełnione, jeśli:

1. $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, ze względu na warunek poboczny (3.68),
2. $a_1 = a_2 = 0$, wobec (3.68) $a_3 = 1$ i $\tau_n = 0$,
 $a_2 = a_3 = 0$, wobec (3.68) $a_1 = 1$ i $\tau_n = 0$,
 $a_3 = a_1 = 0$, wobec (3.68) $a_2 = 1$ i $\tau_n = 0$,
3. $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$, to układ równań (3.70) staje się sprzeczny (nie posiada rozwiązań). My natomiast szukamy ekstremów niezerowych funkcji τ_n . Pozostaje zatem na-

stępujący zestaw możliwych rozwiązań:

I. $a_1 = 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0,$

II. $a_1 \neq 0, a_2 = 0, a_3 \neq 0,$

III. $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 = 0.$

Zbadajmy szczegółowo tylko zestaw I, ponieważ badanie zestawu II i III jest analogiczne.

Przyjmując rozwiązanie $a_1 = 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0,$ mamy spełnienie równania pierwszego $(3.70)_1$, a z równania drugiego $(3.70)_2$ i równania trzeciego $(3.70)_3$ otrzymujemy zależności

$$(\sigma_2 - \sigma_3)^2 a_3^2 = -\lambda, \quad (\sigma_2 - \sigma_3)^2 a_2^2 = -\lambda.$$

Porównując powyższe zależności, eliminujemy czynnik Lagrange'a, otrzymując $a_3^2 = a_2^2$. Warunek (3.68) i $a_1 = 0$ daje $a_2^2 + a_3^2 = 1$ oraz to, że

$$a_2^2 = a_3^2 = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = a_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Zatem zestaw I obejmuje następujące rozwiązania:

$$a_1 = \cos(n,1) = 0 \quad \text{czyli kąt } (n,1) = 90^\circ,$$

$$a_2 = \cos(n,2) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{czyli kąt } (n,2) = \pm 45^\circ, \quad (3.71a)$$

$$a_3 = \cos(n,3) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{czyli kąt } (n,3) = \pm 45^\circ.$$

Podstawiając cosinusy kierunkowe $a_1 = 0, a_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$

$a_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ (równanie 3.71a) do równania (3.69), otrzymamy ekstremalne naprężenie styczne na pochyłej ścianie czworoscianu

$$\tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2}} \quad (3.71b)$$

oraz towarzyszące mu naprężenie normalne $p_n = \sigma_{23}$ (z równania 3.65)

$$\sigma_{23} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \quad (3.71c)$$

Przeprowadzając podobne rozumowanie znajdziemy wartości cosinusów kierunkowych dla rozwiązań zestawu II i III oraz odpowiadające im wartości naprężenia stycznego i normalnego:

1. zestaw II. $a_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$

$$\tau_{13} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (3.72)$$

$$\sigma_{13} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2},$$

2. zestaw III. $a_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_3 = 0,$

$$\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad (3.73)$$

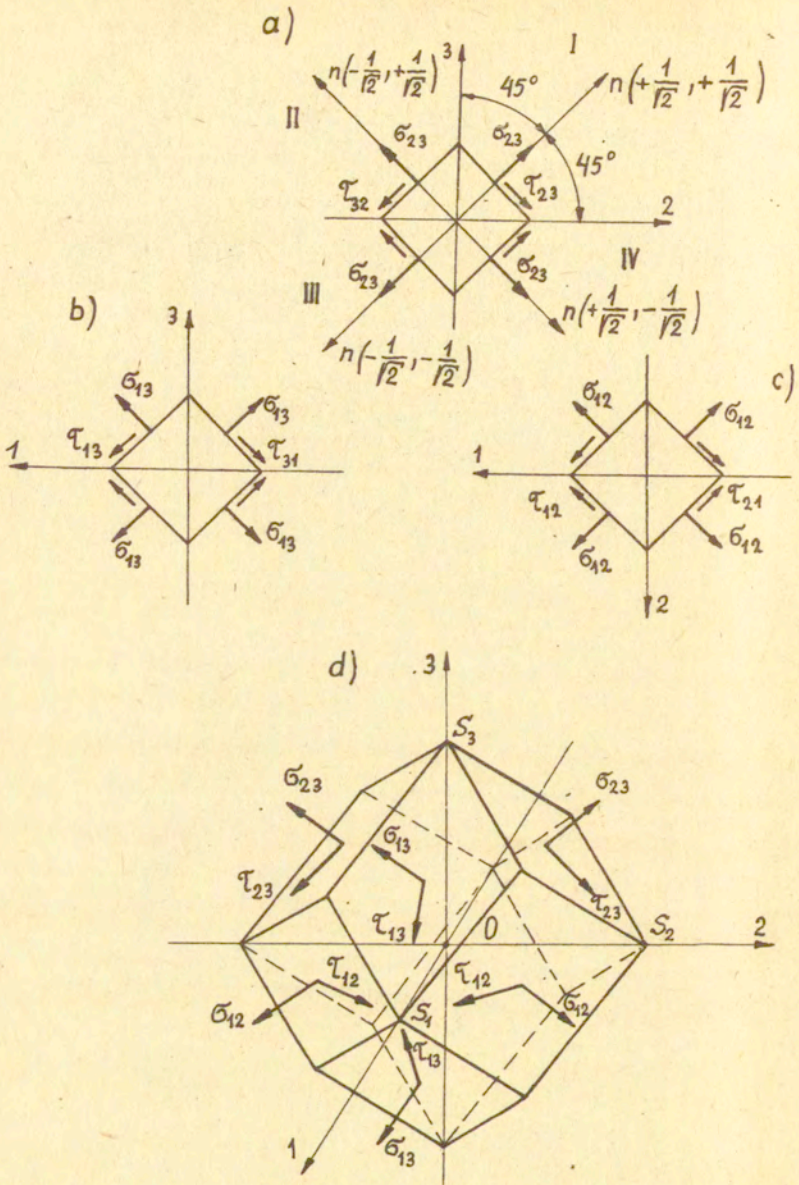
$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Podwójne znaki cosinusów kierunkowych (3.71a) dają cztery kombinacje rozwiązań

1. $b = + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad - \text{normalna } n \text{ w I ćwiartce,}$
2. $b = - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad - \text{normalna } n \text{ w III ćwiartce,}$
3. $b = - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad - \text{normalna } n \text{ w II ćwiartce,}$
4. $b = + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad - \text{normalna } n \text{ w IV ćwiartce.}$

Rozwiązania te graficznie przedstawiono na rysunku (3.39a).

Wszystkie trzy zestawy rozwiązań (3.71), (3.72), (3.73)



Rys. 3.39. Naprężenia na ściankach czworościanu i dwunastościanu foremnego

można przedstawić przy pomocy połączonych czworościanów, tworzących dwunastościan rombowy (3 zestawy rozwiązań po 4 kombinacje równa się 12 płaszczyzn), który wraz z przyłożonymi do ścianek naprężeniami pokazano na rysunku 3.39d.

Dla uzyskania większej przejrzystości pokazano tylko naprężenia na widocznych ściankach dwunastościanu.

Zwroty naprężeń stycznych zależą od wartości naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Musi być spełniony warunek naprężeń stycznych

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 0. \quad (3.74)$$

Zwroty naprężeń pokazane na rysunku 3.39 odpowiadają założeniu $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ i ogólnej regule znaków naprężeń.

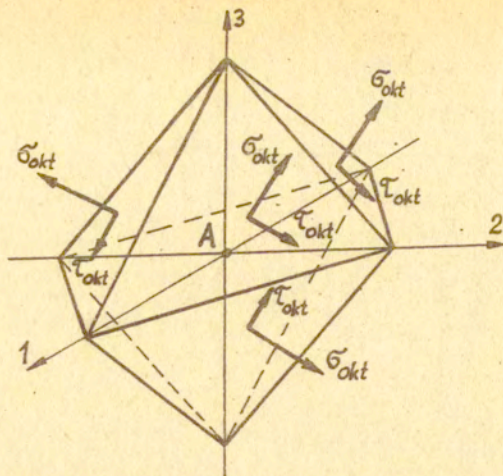
3.12. Naprężenia oktaedryczne

Jak wykazała teoria budowy kryształów i potwierdziła praktyka, odkształcenia plastyczne zachodzą przede wszystkim na płaszczyznach oktaedranu czyli ośmiościanu foremnego. Odkształcenia te wywołane są naprężeniami, działającymi wzdłuż ścianek oktaedranu zwanymi naprężeniami oktaedrycznymi (rys. 3.40). Płaszczyzny oktaedranu są jednakowo nachylone do wszystkich osi przekrojów głównych 1, 2, 3 (osi układu współrzędnych).

Orientację płaszczyzny oktaedrycznej (jednakowo nachylonej do wszystkich osi układu współrzędnych), określają równe co do bezwzględnej wartości cosinusy kierunkowe, które wynika-

$$a_1 = a_2 = a_3 = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right|, \quad (3.75)$$

ją ze związku geometrycznego (3.68). Równość (3.75) daje



Rys. 3.40. Ósmościan foremny wraz z naniesionymi naprężeniami

osiem różnych kombinacji znaków cosinusów kierunkowych, a więc osiem płaszczyzn równo oddalonych od rozważanego punktu A ciała odkształcanego.

Podstawiając wartości cosinusów kierunkowych (3.75) do zależności (3.65), otrzymamy normalne naprężenie oktaedryczne (ma kierunek normalnej zewnętrznej)

$$\sigma_{okt} = p_{n_{okt}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (3.76)$$

które jest średnim naprężeniem powodującym wszechstronne ściskanie lub rozciąganie (zmienia objętość). Natomiast naprężenia styczne oktaedryczne τ_{okt} , powodujące zmianę kształtu elementu odkształcanego, otrzymujemy z równania (3.69) po podstawieniu zależności (3.75)

$$\tau_{okt} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (3.77)$$

Naprężenia normalne σ_{okt} i styczne τ_{okt} są jednakowe na

wszystkich ściankach ośmiościanu foremnego otaczającego rozważany punkt ciała.

Korzystając ze wzorów (3.71b), (3.72b) i (3.73b) możemy naprężenie styczne oktaedryczne (3.77) wyrazić przez naprężenia styczne leżące na dowolnie nachylonej ściance czworościanu

$$\tau_{\text{okt}} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2} \quad (3.78)$$

Styczne naprężenie oktaedryczne możemy wyrazić przy pomocy niezmienników stanu naprężenia I_1 i I_2 zależnością

$$\tau_{\text{okt}}^2 = \frac{2}{9} (I_1^2 - 3 I_2). \quad (3.79)$$

Wprowadzając do równania (3.79) niezmienniki wyrażone za pomocą naprężeń głównych (3.57), otrzymamy zależność (3.77), a gdy wprowadzimy niezmienniki dla ogólnego stanu naprężenia (3.56b), to otrzymamy ogólną zależność na naprężenie styczne oktaedryczne

$$\tau_{\text{okt}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (3.80)$$

Przez każdy punkt przestrzeni można przeprowadzić jednocześnie:

1. trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny główne,
2. trzy pary płaszczyzn o normalnych dzielących kąty między płaszczyznami na połowy. Na tych płaszczyznach działają naprężenia normalne i styczne określone wzorami (3.71), (3.72) i (3.73),
3. cztery płaszczyzny oktaedryczne, na których działają naprężenia określone wzorami (3.76), (3.77).

Zatem wokół każdego punktu można przeprowadzić 13

(3 + 3 · 2 + 4 = 13) płaszczyzn charakterystycznych, tworzących różne figury geometryczne, których ściany będą należały do pierwszej, do drugiej bądź do trzeciej grupy płaszczyzn. Z tych płaszczyzn można zbudować sześciian, czworościan, ośmiościan i dwunastościan foremny na płaszczyznach głównych.

3.13. Geometryczna interpretacja przestrzennego stanu naprężenia

Stawiamy sobie zadanie odwzorowania na płaszczyźnie rysunku związku między składowymi σ i τ naprężenia na elementarnej płaszczyźnie czworościanu w osiach głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Aby rozwiązać to zadanie, należy określić cosinusy kierunkowe a_1, a_2, a_3 , będące funkcjami naprężeń $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma, \tau$. Punktem wyjścia są równania naprężeń na pochyłej płaszczyźnie czworościanu

$$\begin{aligned} p_n = \sigma &= \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2, \\ p^2 = \sigma^2 + \tau^2 &= \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2, \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Jest to układ równań liniowych jednorodnych o trzech niewiadomych a_1^2, a_2^2, a_3^2 . Rozwiązanie tego układu przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}, \\ a_2^2 &= \frac{(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}, \\ a_3^2 &= \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Wielkości a_1, a_2, a_3 muszą być liczbami rzeczywistymi, a więc $a_1^2 \geq 0, a_2^2 \geq 0, a_3^2 \geq 0$. Przyjmując wartości większe od zera, będziemy mieli dużo kół współśrodkowych o środku na osi odciętej σ . Przyjmując, że cosinusy kierunkowe (3.82) są równe zeru, otrzymamy równania

$$\begin{aligned}(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 &= 0, \\(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2 &= 0, \\(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 &= 0.\end{aligned}\tag{3.83}$$

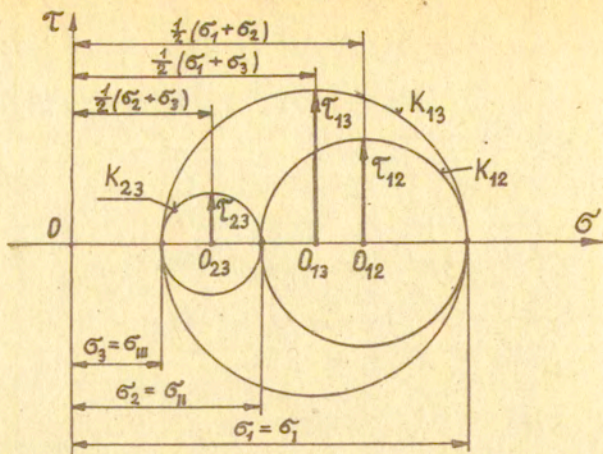
Z równań (3.83) po wymnożeniu, dodaniu do obu stron każdego równania odpowiednio wyrazu $(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2})^2, (\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2})^2, (\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2})^2$, zredukowaniu i zwinięciu dwumianów do kwadratu, otrzymamy następujące równania okręgów:

$$\begin{aligned}\left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 &= \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2, \\ \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2, \\ \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2.\end{aligned}\tag{3.84}$$

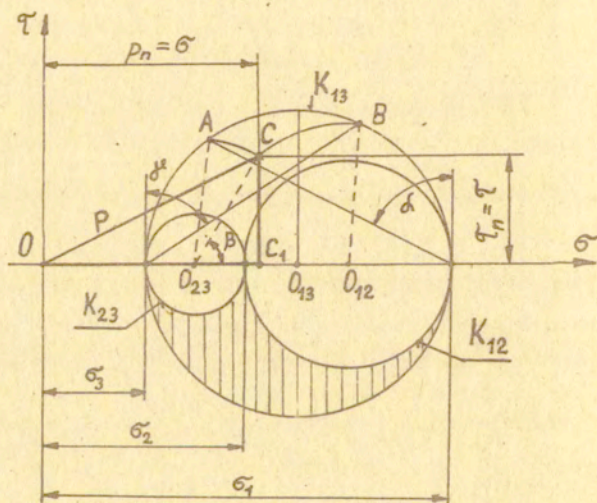
Obrazem geometrycznym równań (3.84) są okręgi, które oznaczamy literą K i indeksami naprężeń $\rightarrow K_{23}, K_{13}, K_{12}$.

Okręgi te nazywamy kołami głównymi i przedstawione są na rysunku 3.41. Koła główne odwzorowują poszukiwane naprężenia na przekrojach prostopadłych do odpowiednich przekrojów głównych. Do wykreślenia kół głównych potrzeba jedynie znać wartości $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Określane są naprężenia normalne $\sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}$ i styczne $\tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}$.

Składowe σ i τ naprężenia p na dowolnie nachylonej płaszczyźnie abc czworościanu (rys. 3.42) względem kierunków głównych określimy, postępując w następujący sposób. Z punktu σ_1 wyprowadzamy prostą nachyloną do pionu pod kątem α , a z punktu σ_3 - pod kątem β . Kąty α i β określają



Rys. 3.41. Koło Mohra: Koło $K_{12} - a_3 = 0$, $n \perp z$, $n \parallel (x, y)$, $dF \perp (x, y)$, koło $K_{23} - a_1 = 0$, $n \perp x$, $n \parallel (y, z)$, $dF \perp (y, z)$, koło $K_{31} - a_2 = 0$, $n \perp y$, $n \parallel (z, x)$, $dF \perp (z, x)$



Rys. 3.42. Wykreślna konstrukcja naprężeń σ i τ na dowolnie nachylonej płaszczyźnie abc rozwiązanego czworościanu

położenie płaszczyzny abc względem kierunków głównych (rys. 3.38), kąt β wynika ze związku (3.68). Ze środków kół K_{12} i K_{23} kreślimy łuki przechodzące przez punkty A i B . Łuki te przecinają się w punkcie C , którego współrzędne przedstawiają naprężenie normalne σ i naprężenie τ , występujące na dowolnie nachylonej płaszczyźnie czworoscianu.

3.14. Szczególne przypadki stanu naprężenia

Zilustrujmy za pomocą kół naprężeń Mohra i zapiasu macierzowego niektóre szczególne przypadki stanu naprężenia wyrażone przez naprężenia główne. Zatem rozważmy następujące przypadki stanu naprężenia:

1. Przestrzenne nierównomierne rozciąganie - $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$ (rys. 3.41). Rozkład tensora naprężenia T_σ na dwiator D_σ i na tensor kulisty K_σ przedstawiono równaniami (3.62).

2. Przestrzenne nierównomierne ściskanie - $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < 0$ (rys. 3.43a). Rozkład tensora naprężenia przedstawia się następująco ($\sigma_s = \frac{-\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$):

$$\begin{vmatrix} -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sigma_1 - \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 - \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 - \sigma_s \end{vmatrix} + \sigma_s \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \quad (3.65)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{-2\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2\sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2\sigma_3 + \sigma_1 + \sigma_2}{3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \end{vmatrix}$$

3. Stan hydrostatyczny - $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ (rys. 3.43b).

W przypadku $\sigma > 0$ mamy hydrostatyczne rozciąganie, a gdy $\sigma < 0$ - hydrostatyczne ściskanie. W obu przypadkach koła Mohra sprowadzają się do punktu położonego na dodatniej lub ujemnej półosi σ . Rozkład tensora, dla przypadku $\sigma > 0$, ma postać ($\sigma_s = \sigma$)

$$\begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - \sigma \end{vmatrix} + \sigma \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix}, \quad (3.86)$$

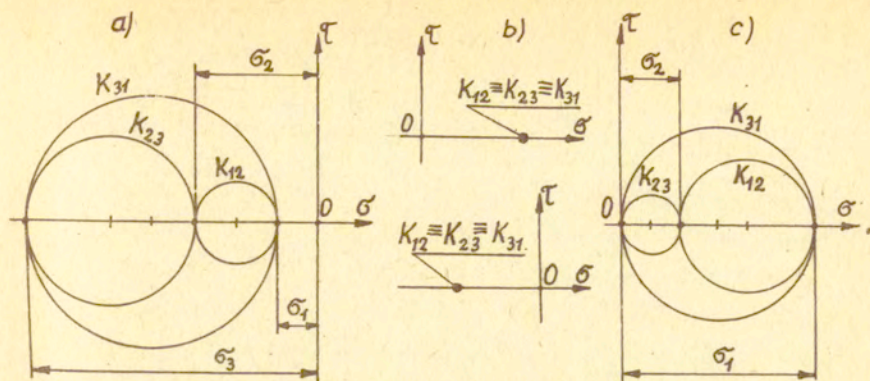
gdy $\sigma < 0$, to mamy ($\sigma_s = -\sigma$)

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sigma - (-\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma - (-\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma - (-\sigma) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix}. \quad (3.87)$$

4. Dwuosiowe (płaskie) rozciąganie - $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 = 0$ (rys. 3.43c). Gdy $\sigma_1 = 0 > \sigma_2 > \sigma_3$, to mamy płaskie ściskanie i wówczas wszystkie koła Mohra będą leżały na ujemnej półosi σ . Dla płaskiego rozciągania mamy ($\sigma_s = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + 0}{3}$)

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 - \sigma_s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{vmatrix} = \quad (3.88)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \end{vmatrix}.$$



Rys. 3.43. Koła naprężeń Mohra: a - dla nierównomiernego ściskania, b - dla stanu hydrostatycznego, c - dla płaskiego rozciągania

5. Płaskie równomierne rozciąganie (stan błonowy) -

$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3 = 0$. (rys. 3.44a). Cechą charakterystyczną tego stanu jest to, że dwa koła pokrywają się, a trzecie sprowadza się do punktu położonego w odległości $\sigma_1 = \sigma_2$ od początku układu.

6. Czyste ścinanie - $\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 = -\sigma_3$ (rys. 3.44b).

Występują tylko naprężenia styczne τ_{xy} i τ_{yx} . Oprócz koła K_{31} (rys. 3.19) mamy jeszcze dwa koła o dwukrotnie mniejszym promieniu. Czyste ścinanie można wyrazić za pomocą tablic

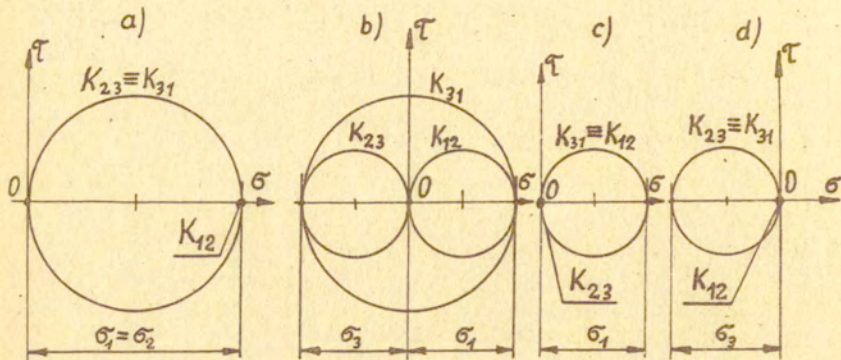
$$\begin{vmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{vmatrix}.$$

7. Jednoosiowe rozciąganie - $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (rys.

3.44c). Dwa koła główne pokrywają się, a trzecie sprowadza się do punktu leżącego w początku układu współrzędnych σ, τ .

Stan ten macierzowo możemy zapisać ($\sigma_3 = \frac{1}{3}\sigma_1$)

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\sigma_1 \end{vmatrix} \quad (3.89)$$



Rys. 3.44. Koła Mohra: a - dla równomiernego płaskiego rozciągania, b - dla czystego ścinania, c - dla jednoosiowego rozciągania, d - dla jednoosiowego ściskania

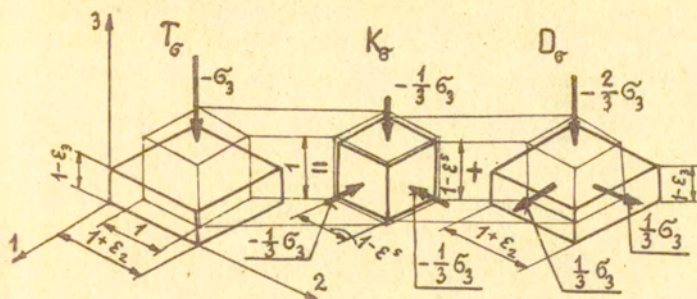
8. Jednoosiowe ściskanie - $\sigma_1 = \sigma_2 = 0 > \sigma_3$ (rys.

3.44d). Jednoosiowe ściskanie posiada cechy podobne do jednoosiowego rozciągania. Przypadek ten możemy zapisać ($\sigma_3 = -\frac{\sigma_3}{3}$)

macierzowo ($T_\sigma = K_\sigma + D_\sigma$)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}\sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}\sigma_3 \end{vmatrix} \quad (3.90)$$

lub przedstawić schematycznie jak na rysunku 3.45.



Rys. 3.45. Schemat rozłożenia tensora naprężenia T_σ jednoosiowego ściskania na tensor kulisty K_σ , na dewiator D_σ

3.15. Niezmienniki stanu naprężenia

Z rozpatrzenia stanu naprężenia otrzymujemy pewne związki naprężeń, których wartość nie zależy od wybranego układu osi współrzędnych x, y, z , a jedynie zależy od sposobu obciążenia ciała. Związki te nazywamy niezmiennikami stanu naprężenia. Z tych właśnie powodów niezmienniki wchodzą do związków fizycznych i przez to odgrywają ważną rolę w teorii plastyczności.

Tymi niezmiennikami są:

1. Niezmiennik liniowy (3.56b)₁

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_s, \quad (3.91a)$$

a wobec równania (3.76)

$$I_1 = 3\sigma_{\text{okt}}. \quad (3.91b)$$

Niezmiennik I_1 jest tensorem kulistym stanu naprężenia

(ciśnienie hydrostatyczne) i on powoduje jedynie zmianę objętości materiału. Niezmienniki I_2 i I_3 stanu naprężenia (3.56b)₂ nie mają większego znaczenia.

2. Największe znaczenie w teorii plastyczności ma drugi niezmiennik dewiatora naprężenia (3.63)₂

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)], \quad (3.92)$$

który powoduje zmianę kształtu (postaci) materiału odkształconego.

3. Niezmiennikiem jest również naprężenie styczne oktaedryczne (3.80)

$$\tau_{\text{okt}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (3.93)$$

Niezmienniki (3.91), (3.92), (3.93) można również wyrazić przy pomocy naprężeń głównych, wówczas znikają tylko naprężenia styczne.

4. Ważnym niezmiennikiem jest również intensywność naprężenia σ_1 . Jest to wielkość skalarna. Intensywność naprężenia σ_1 związana jest z drugim niezmiennikiem dewiatora naprężenia \mathcal{J}_2 w sposób

$$\sigma_1 = \sqrt{\mathcal{J}_2} = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (3.94a)$$

czyli

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}. \quad (3.94b)$$

Jeśli przyjmiemy, że intensywność naprężeń σ_1 jest równa granicy plastyczności na ścinanie k ($\sigma_1 = k = \frac{\sigma_p}{3}$), to otrzymamy wyrażenie na intensywność naprężeń stycznych w osiach współrzędnych x, y, z

$$\delta k^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2),$$

$$\sigma_p = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \quad (3.95a)$$

w osiach głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$$\sigma_p = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (3.95b)$$

dla osiowej symetrii

$$\sigma_p = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2}, \quad (3.95c)$$

gdzie σ_p jest granicą plastyczności na rozciąganie.

Intensywność naprężenia σ_1 można również wyrazić zależnością

$$\sigma_1 = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad (3.96)$$

która po rozpisaniu dwiatorów naprężenia ($S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$) przyjmie postać równania (3.95a). Dla prostego rozciągania

$\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ intensywność naprężenia σ_1 równa się głównemu naprężeniu rozciągającemu σ_1 ($\sigma_1 = \sigma_1$) i nazywa się intensywnością naprężenia lub naprężeniem uogólnionym.

Intensywność naprężenia σ_1 możemy również związać z naprężeniami stycznymi oktaedrycznymi (3.80) zależnością

$$\sigma_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{okt}}. \quad (3.97)$$

3.16. Tensory naprężenia przy zmiennej konfiguracji ciała

Rozważmy ciało A o konfiguracji w czasie t_0 (przed odkształceniem) i następnie to ciało o konfiguracji w czasie

t_1 (po odkształceniu). Na to ciało w czasie t_0 działa siła P_0 , pod wpływem której ulega ono odkształceniu w czasie od t_0 do t_1 . Na myślowo wyodrębniony element powierzchni (rys. 3.46) w położeniu pierwotnym dF_0 o normalnej zewnętrznej n_0 działa siła dP_0 , a po odkształceniu na zmieniony element powierzchni dF o normalnej zewnętrznej n_p działa siła dP . Siła dP jest funkcją powierzchni odkształconego elementu dF , jej orientacji w przestrzeni określonej wektorem normalnym zewnętrznym n i naprężenia σ spowodowanego tą siłą dP . W analizie tensorowej operuje się składowymi, stąd też zakładamy, że wektor dP ma składowe dP_j , a naprężenie σ ma składowe σ_{ij} . W elemencie działa naprężenie określone tensorem naprężenia σ_{ij} odniesionym do stanu odkształconego (czyli współrzędnych w danej chwili, jest tzw. opis przestrzenny czyli opis Eulera). Tensor σ_{ij} będziemy nazywać tensorem naprężenia Eulera.

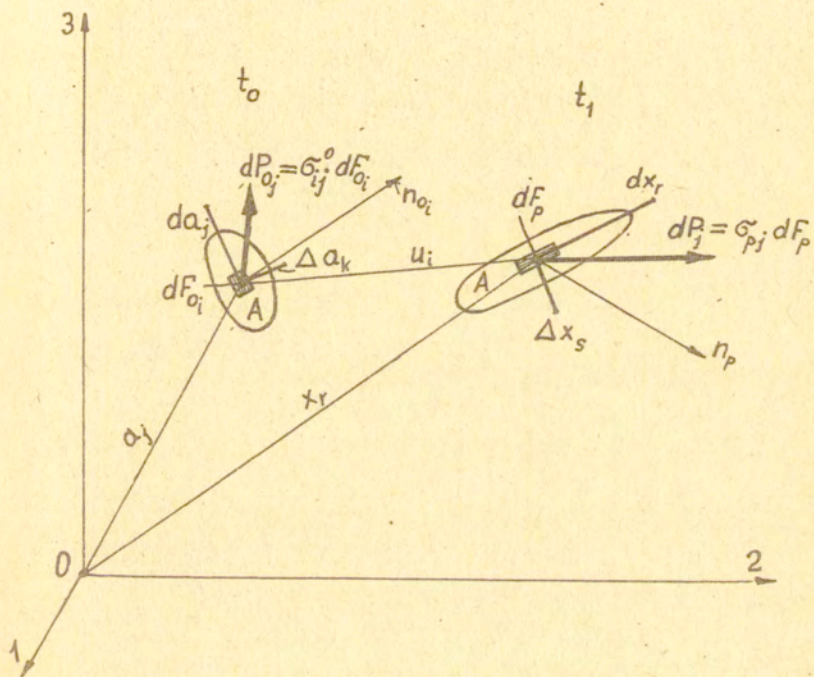
Aby określić stan naprężenia w danej konfiguracji ciała odkształconego, należy znać sposób zmiany elementarnej powierzchni początkowej dF_0 ciała nieodkształconego na powierzchnię dF ciała odkształconego oraz przyjąć odpowiednią regułę odpowiedniości (zależności) sił dP_0 i dP w ciele nieodkształconym i w ciele odkształconym i połączyć ze sobą te dwie wielkości ulegające zmianie.

W celu znalezienia odpowiedniości elementarnych powierzchni należy rozważyć pola równoległoboków, utworzonych na liniach materialnych w stanie nieodkształconym da i Δa i w stanie odkształconym dx i Δx . Pola te są iloczynami wektorowymi boków ($da \times \Delta a$ i $dx \times \Delta x$), które możemy napisać w składowych następująco:

$$dF = dx \times \Delta x = \begin{vmatrix} 1 & j & k \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ \Delta x_1 & \Delta x_2 & \Delta x_3 \end{vmatrix},$$

$$dF_{0j} = dF_0 n_{0j} = \varepsilon_{ijk} da_j \Delta a_k, \quad (3.98a)$$

$$dF_p = dF n_p = \varepsilon_{prs} dx_r \Delta x_s. \quad (3.98b)$$



Rys. 3.46. Konfiguracja ciała A w położeniu pierwotnym t_0 i w położeniu odkształczonym t_1 wraz z naniesionymi wielkościami.

Korzystając z definicji jednoznacznego odwzorowania składowych współrzędnych początkowych a_j względem współrzędnych końcowych x_r

$$a_j = a_j(x_r, t) \quad (3.99a)$$

i zależności odwrotnej

$$x_r = x_r(a_j, t), \quad (3.99b)$$

elementarne powierzchnie (3.98) wyrażą się zależnościami

$$dF_{o_i} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_r} dx_r \frac{\partial a_k}{\partial x_s} dx_s, \quad (3.100a)$$

$$dF_p = \varepsilon_{prs} \frac{\partial x_r}{\partial a_t} da_t \frac{\partial x_s}{\partial a_u} da_u. \quad (3.100b)$$

Aby odwzorowanie to było jednoznaczne, to funkcje (3.99) muszą być ciągłe, mieć pierwsze pochodne cząstkowe i jacobian różny od zera. Różniczki tego odwzorowania będą następujące:

$$\begin{aligned} da_j &= \frac{\partial a_j}{\partial x_r} dx_r, \\ \Delta a_k &= \frac{\partial a_k}{\partial x_s} dx_s, \\ dx_r &= \frac{\partial x_r}{\partial a_t} da_t, \\ \Delta x_s &= \frac{\partial x_s}{\partial a_u} da_u, \end{aligned} \quad (3.101)$$

a jacobian ma postać

$$J = \det \left| \frac{\partial a_l}{\partial x_m} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_i}{\partial x_1} \frac{\partial a_j}{\partial x_2} \frac{\partial a_k}{\partial x_3}. \quad (3.102a)$$

Z prawa zachowania masy mamy

$$I = \det \left| \frac{\partial a_1}{\partial x_m} \right| = \frac{\frac{m}{dV}}{\frac{m}{dV_0}} = \frac{\xi}{\xi_0}, \quad (3.102b)$$

gdzie ξ jest gęstością w stanie odkształconym

$$\left(\xi(x) = \xi_0(a) \frac{\partial a_1}{\partial x_j} \right), \quad \xi_0 \text{ jest gęstością w stanie pierwotnym}$$

$$\left(\xi_0(a) = \xi(x) \frac{\partial x_1}{\partial a_j} \right), \quad m = \int_V \xi \, dV \text{ jest masą ciała.}$$

Zależności (3.102a) i (3.102b) ogólnie można zapisać

$$\xi_{ijk} \frac{\partial a_i}{\partial x_p} \frac{\partial a_j}{\partial x_r} \frac{\partial a_k}{\partial x_s} = \xi_{prs} \det \left| \frac{\partial a_l}{\partial x_m} \right| = \xi_{prs} \frac{\xi}{\xi_0}. \quad (3.102c)$$

Mnożąc obie strony równania (3.100a) przez $\frac{\partial a_1}{\partial x_p}$

i wykorzystując równanie (3.102c) i zależność (3.98b), otrzymamy elementarną powierzchnię po odkształceniu

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i}{\partial x_p} n_{o_1} \, dF_{o_1} &= \xi_{ijk} \frac{\partial a_1}{\partial x_p} \frac{\partial a_1}{\partial x_r} \, dx_r \frac{\partial a_k}{\partial x_s} \, dx_s = \\ &= \xi_{prs} \frac{\xi}{\xi_0} \, dx_r \, dx_s = \frac{\xi}{\xi_0} n_p \, dF, \\ dF_p &= dF_{o_1} \frac{\xi_0}{\xi} \frac{\partial a_1}{\partial x_p}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Jaka może być zależność siły dP_{o_j} od siły dP . Wiemy, że na powierzchnię początkową dF_{o_1} działa siła o wartości

$$dP_{o_j} = G_{1j}^o \, dF_{o_1} = G_{1j}^o n_{o_1} \, dF_{o_1}, \quad (3.104a)$$

a na powierzchnię odkształconą dF działa siła

$$dP_j = \sigma_{pj} dF_p = \sigma_{pj} n_p dF$$

lub

$$dP_s = \sigma_{ps} dF_p = \sigma_{ps} n_p dF, \quad (3.104b)$$

gdzie σ_{ij}^0 jest tensorem naprężenia, σ_{pj} jest tensorem naprężenia Eulera, czyli tensorem naprężenia zależnym od współrzędnych w danej chwili x_i (opis przestrzenny). Zależność siły dP na elemencie odkształconym dF od siły dP_0 na elemencie nieodkształconym dF_0 może być różna. Lagrange przyjął prostą zależność (rys. 3.47a)

$$dP_{0j} = dP_j. \quad (3.105a)$$

Zależność (3.105a) wyraża, że kierunek i wielkość siły na elemencie nieodkształconym dF_0 i na elemencie odkształconym dF są takie same, gdyż siła jest równoległe przeniesiona (nie ma równowagi elementu).

Kirchhoff natomiast przyjął zależność sił proporcjonalną do gradientu współrzędnych (rys. 3.47b)

$$dP_{0j} = \frac{\partial a}{\partial x_s} dP_s. \quad (3.105b)$$

Zmiana współrzędnych powoduje zmianę kierunku siły i zmianę jej wielkości w zależności od konfiguracji powierzchni dF . Zależności sił (3.105a) i (3.105b) są najprostsze z możliwych do ustalenia.

Korzystając z reguły (3.105a) i zależności (3.104a) możemy napisać

$$dP_{0j} = L_{1j} n_{0i} dF_0 = dP_j, \quad (3.106)$$

podobnie biorąc regułę (3.105b) i zależność (3.104a) mamy

$$dP_{o_j} = K_{ij} n_{o_i} dF_o = \frac{\partial a_1}{\partial x_s} dP_s \quad (3.107)$$

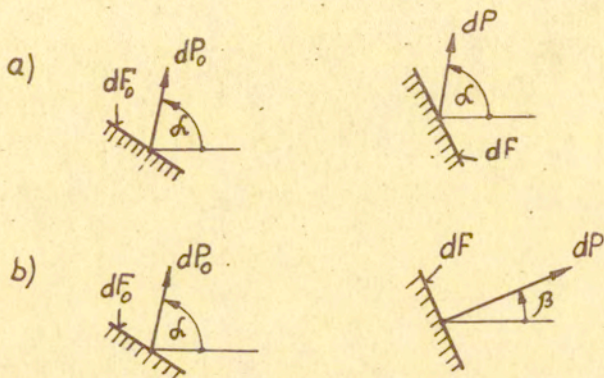
Wielkość $L_{ij} = \frac{dP_k}{dF_{o_i}} \delta_{kj}$ jest tensorem naprężenia Lagrange'a (ozn. σ_{ij}^L)

(naprężenie odniesione jest do współrzędnych początkowych

a_i , czyli jest w tzw. opisie materialnym), wielkość $K_{ij} =$

$= \frac{\partial a_i}{\partial x_s} \frac{dP_s}{dF_{o_i}}$ jest tensorem naprężenia Kirchhoffa (ozn. σ_{ij}^K) w opisie materialnym. $\sigma_{ij}^C = \frac{\partial x_j}{\partial a_s} \frac{dP_s}{dF_{o_i}}$ jest tensorem naprężenia Cauchy'ego.

Biorąc zależności (3.106), (3.104b) i (3.103), otrzy-



Rys. 3.47. Reguły odpowiedności sił: a - Lagrange'a, b - Kirchhoffa

mamy tensor naprężenia Lagrange'a

$$L_{ij} n_{o_i} dF_o = \sigma_{pj} n_p dF = \sigma_{pj} dF_p = \sigma_{pj} dF_{o_i} \frac{\xi_o}{\xi} \frac{\partial a_i}{\partial x_p},$$

$$L_{ij} = \frac{\xi_o}{\xi} \frac{\partial a_i}{\partial x_p} \sigma_{pj} \quad (3.108)$$

Tensor naprężenia Lagrange'a nie jest symetryczny,

$L_{ij} \neq L_{ji}$. Następnie biorąc zależności (3.107), (3.104b) i

(3.103), otrzymamy tensor naprężenia Kirchhoffa

$$K_{ij} n_{oi} dF_o = \frac{\partial a_j}{\partial x_s} dP_s = \frac{\partial a_j}{\partial x_s} \sigma_{ps} dF_p = \frac{\partial a_j}{\partial x_s} \sigma_{ps} \frac{\xi_o}{\xi} dF_{oi} \frac{\partial a_i}{\partial x_p},$$

$$K_{ij} = \frac{\xi_o}{\xi} \frac{\partial a_i}{\partial x_p} \frac{\partial a_j}{\partial x_s} \sigma_{ps}. \quad (3.109)$$

Tensor naprężenia Kirchhoffa jest symetryczny $K_{ij} = K_{ji}$ podobnie jak tensor naprężenie Eulera σ_{ps} .

Ze związku (3.109) i (3.108) otrzymujemy zależność między tensorem naprężenia Kirchhoffa i tensorem naprężenia Lagrange'a

$$K_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_s} L_{is}. \quad (3.110)$$

Z zależności (3.108) i (3.109) otrzymujemy tensor naprężenia Eulera

$$\sigma_{pj} = \frac{\xi}{\xi_o} \frac{\partial x_p}{\partial a_1} L_{1j} = \frac{\xi}{\xi_o} \frac{\partial x_p}{\partial a_1} \frac{\partial x_i}{\partial a_s} K_{is} \quad (3.111)$$

i następnie zależność między tensorem naprężenia Lagrange'a i tensorem naprężenia Kirchhoffa

$$L_{1j} = \frac{\partial x_j}{\partial a_s} K_{is}. \quad (3.112)$$

Tensor naprężenia Kirchhoffa (3.109) i tensor naprężenia Eulera (3.111) można wyrazić przy pomocy wektora przemieszczeń $u_1 = x_1 - a_1$ cząstki A. Składowe wektora przemieszczenia u_1 zależą od składowych współrzędnych x_1 i od czasu t

$$u_1(x_1, t) = x_1 - a_1(x_1, t).$$

Wektor przemieszczenia u_1 ma współrzędne początkowe (t_o)

$$a_1 = x_1 - u_1(x_1, t) \quad (3.113a)$$

i współrzędne końcowe (t_1)

$$x_p = a_p(x_p, t) + u_p(x_p, t) \quad (3.113b)$$

Różniczkując wyrażenie (3.113a) względem x_p i drugi raz względem x_s , otrzymamy

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_p} = \delta_{ip} - \frac{\partial u_i}{\partial x_p},$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_s} = \delta_{js} - \frac{\partial u_i}{\partial x_s},$$

gdzie $\delta_{ip} = \frac{\partial x_i}{\partial x_p}$, $\delta_{js} = \frac{\partial x_j}{\partial x_s}$

i wstawiając do tensora Kirchhoffa (3.109), otrzymamy tensor naprężenia Kirchhoffa wyrażony za pomocą przemieszczeń u

$$K_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \left[\sigma_{ij} - \left(\delta_{js} \frac{\partial u_i}{\partial x_p} + \delta_{ip} \frac{\partial u_j}{\partial x_s} - \frac{\partial u_i}{\partial x_p} \frac{\partial u_j}{\partial x_s} \right) \sigma_{ps} \right] \quad (3.114)$$

gdzie $\sigma_{ij} = \sigma_{ps} \delta_{ip} \delta_{js}$.

Następnie różniczkując wyrażenie (3.113b) względem a_i i drugi raz względem a_s , otrzymamy

$$\frac{\partial x_p}{\partial a_i} = \delta_{pi} + \frac{\partial u_p}{\partial a_i},$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_s} = \delta_{js} + \frac{\partial u_i}{\partial a_s},$$

$$\delta_{pi} = \frac{\partial a_p}{\partial a_i}, \quad \delta_{js} = \frac{\partial a_j}{\partial a_s}$$

i wstawiając do tensora Eulera (3.111), otrzymamy tensor naprężenia Eulera wyrażony za pomocą przemieszczeń u

$$\sigma_{pJ} = \sum_{\alpha_0}^{\alpha} K_{1s} \left(\delta_{p1} + \frac{\partial u_p}{\partial a_1} \right) \left(\delta_{js} + \frac{\partial u_s}{\partial a_s} \right),$$

$$\sigma_{pJ} = \sum_{\alpha_0}^{\alpha} \left[K_{pJ} + \left(\delta_{js} \frac{\partial u_p}{\partial a_1} + \delta_{p1} \frac{\partial u_s}{\partial a_s} + \frac{\partial u_p}{\partial a_1} \frac{\partial u_s}{\partial a_s} \right) K_{1s} \right], \quad (3.115)$$

gdzie $K_{pJ} = K_{1s} \delta_{p1} \delta_{js}$.

Do tworzenia związku fizycznego naprężenie - odkształcenie należy brać tensor naprężenia Kirchhoffa, ponieważ tensor odkształcenia jest zawsze symetryczny. Tensor naprężenia Lagrange'a nie nadaje się do tworzenia związku fizycznego, gdyż jest on niesymetryczny.

Przykład

Obliczyć tensory naprężenia dla jednoosiowego rozciągania (rys. 4.22a) i sporządzić wykres ich zależności.

Rozwiązanie

1. Określenie współrzędnych początkowych, końcowych oraz przemieszczenia wybranego elementu przekroju.

Jeśli przyjmiemy proporcjonalne wydłużanie pręta rozciąganego ($l_1: x_i = l_0: a_i$), to otrzymamy współrzędne początkowe

$$a_i = x_i \frac{l_0}{l_1}$$

i współrzędne końcowe

$$x_i = a_i \frac{l_1}{l_0}.$$

Przemieszczenie u elementarnego przekroju wynosi

$$u_i = x_i - a_i.$$

2. Obliczenie pochodnych

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{l_0}{l_1}, \quad \frac{l_0}{l_1} = 1 - \frac{\Delta l}{l_1}, \quad \Delta l = l_1 - l_0,$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_i} = \frac{l_1}{l_0}, \quad \frac{l_1}{l_0} = 1 + \frac{\Delta l}{l_0}, \quad \Delta l = l_1 - l_0.$$

3. Obliczenie tensorów naprężenia

Dla jednoosiowego rozciągania mamy następujące naprężenia

$$(V_0 = V_1, F_0 l_0 = F_1 l_1, F_1 = F_0 \frac{l_0}{l_1}):$$

– naprężenie Cauchy'ego $\sigma^C = \frac{P}{F_1} = \frac{P}{F_0} \frac{l_1}{l_0} = \frac{P}{F_0} (1 + \frac{\Delta l}{l_0}) = \sigma^L (1 + \epsilon),$

– naprężenie Lagrange'a $\sigma^L = \frac{P}{F_0},$

– naprężenie Kirchhoffa $\sigma^K = \frac{P}{F_0} \frac{l_0}{l_1} = \sigma^L \frac{l_0}{l_1} = \sigma^L (1 - \frac{\Delta l}{l_1}) = \sigma^L \frac{1}{1 + \epsilon}$

oraz zależności między tensorami naprężenia (wzory 3.110, 3.109, 3.112, 3.108, 3.111):

$$\sigma_{ij}^K = \frac{\partial a_i}{\partial x_p} \sigma_{jp}^L = \frac{l_0}{l_1} \sigma_{jp}^L = (1 - \frac{\Delta l}{l_1}) \sigma_{jp}^L,$$

$$\sigma_{ij}^K = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial a_i}{\partial x_m} \frac{\partial a_j}{\partial x_n} \sigma_{mn}^C = \frac{\rho_0}{\rho} (\frac{l_0}{l_1})^2 \sigma_{mn}^C = \frac{\rho_0}{\rho} (1 - \frac{\Delta l}{l_1})^2 \sigma_{mn}^C,$$

$$\sigma_{ij}^L = \frac{\partial x_j}{\partial a_k} \sigma_{ik}^K = \frac{l_1}{l_0} \sigma_{ik}^K = (1 + \frac{\Delta l}{l_0}) \sigma_{ik}^K,$$

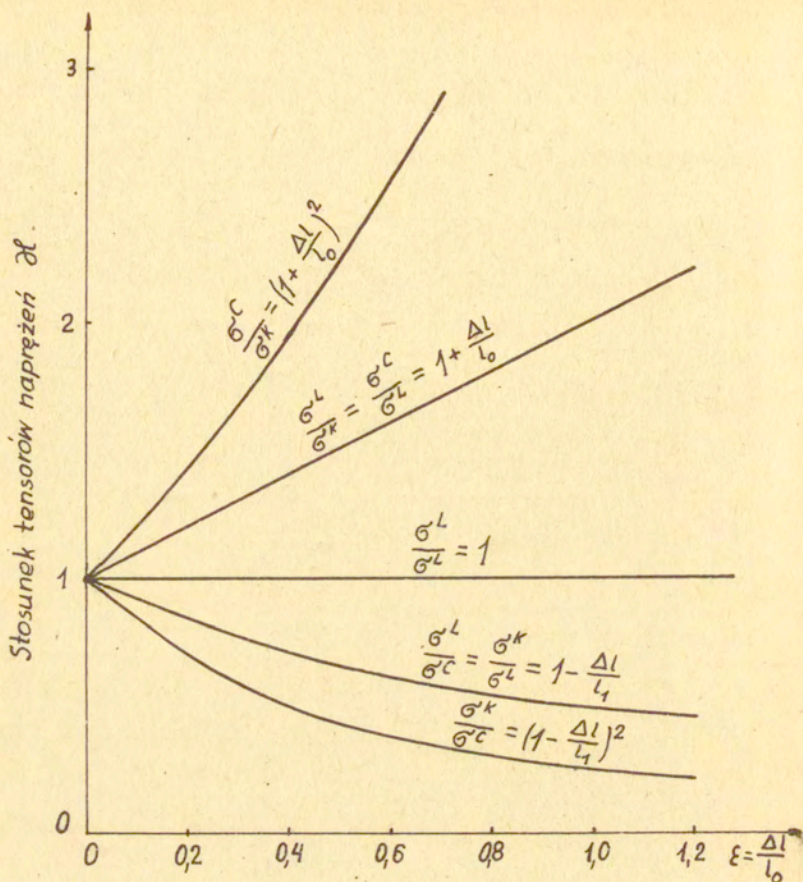
$$\sigma_{ij}^L = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial a_i}{\partial x_m} \sigma_{jm}^C = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{l_0}{l_1} \sigma_{jm}^C = \frac{\rho_0}{\rho} (1 - \frac{\Delta l}{l_1}) \sigma_{jm}^C,$$

$$\sigma_{ij}^C = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \sigma_{jk}^L = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{l_1}{l_0} \sigma_{jk}^L = \frac{\rho}{\rho_0} (1 + \frac{\Delta l}{l_0}) \sigma_{jk}^L,$$

$$\sigma_{ij}^C = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial x_j}{\partial a_l} \sigma_{kl}^K = \frac{\rho}{\rho_0} (\frac{l_1}{l_0})^2 \sigma_{kl}^K = \frac{\rho}{\rho_0} (1 + \frac{\Delta l}{l_0})^2 \sigma_{kl}^K.$$

Dla warunku stałej objętości gęstość materiału przed i po odkształceniu jest taka sama, $\rho_0 = \rho$.

Na rysunku 3.48 pokazano zależność stosunków naprężeń σ^L od odkształcenia względnego $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$.



Rys. 3.48. Zależność stosunku tensorów naprężeń od odkształcenia względnego ϵ

LITERATURA DO ROZDZIAŁU III

1. W.Szczepiński. Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej. PWN, Warszawa, 1967.
2. J.Walczak. Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności. PWN, Warszawa-Kraków, 1977.
3. M.T.Huber. Stereomechanika techniczna. PWN, Warszawa, 1958.
4. M.T.Huber. Teoria sprężystości. Część I. PWN, Warszawa, 1954.
5. T.W.Pełczyński, T.A.Pełczyński. Teoria procesów obróbki plastycznej. Część I. Skrypt PW, 1978.
6. Y.C.Fung. Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN, Warszawa, 1969.

TEORIA STANU ODKSZTAŁCENIA

4.1. Wiadomości ogólne

Odształceniem ośrodka ciągłego nazywamy zmianę odległości między jego nieskończenie małymi cząstkami. Odształcenie to wywołane jest obciążeniem zewnętrznym lub polem temperatury.

W wyniku odkształcenia punkty ciała doznają przemieszczeń. I tak np. wybrany punkt M (rys. 4.6) przemieści się o wektor u o składowych u_x, u_y, u_z w prostokątnym układzie współrzędnych x, y, z ($u(u_x, u_y, u_z)$). Składowe u_x, u_y, u_z przemieszczenia u są funkcjami współrzędnych punktu x, y, z :

$$u_x = u_x(x, y, z), \quad u_y = u_y(x, y, z), \quad u_z = u_z(x, y, z).$$

Mamy tutaj do czynienia z wektorowym polem przemieszczeń, co oznacza, że odkształcenie zależy od położenia punktu czyli odkształcenie nie jest jednorodne. W wielu przypadkach przyjmuje się odkształcenie jednorodne, to znaczy takie, które nie zależy od położenia punktu.

W teorii sprężystości jak również i w teorii plastyczności przyjmuje się, że w obrębie nieskończenie małego obszaru odkształcenie jest jednorodne, a przemieszczenia nieskończenie małych elementów są liniowe. Przy przemieszczeniach liniowych (rys. 4.1):

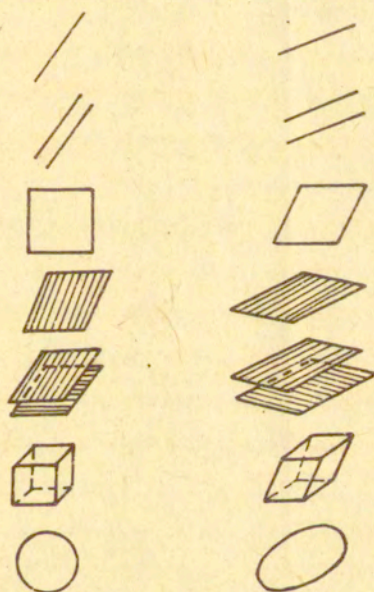
- prosta przekształca się w prostą,
- dwie proste równoległe przekształcają się w dwie proste równoległe,
- kwadrat przekształca się w romb,
- okrąg przekształca się w elipsę,

- płaszczyzna przekształca się w płaszczyznę,
- dwie płaszczyzny równoległe przekształcają się w dwie płaszczyzny równoległe,
- prostopadłościan przekształca się w równoległoscian,
- kula przekształca się w elipsoidę.

W przypadku, gdy mamy odkształcenie niejednorodne, ściany proste przekształcają się w powierzchnie zakrzywione. Ale, gdy wymiary rozpatrywanego elementu są nieskończenie małe, to powierzchnie zakrzywione możemy aproksymować płaszczyznami, mimo że całe ciało uległo odkształceniu niejednorodnemu.

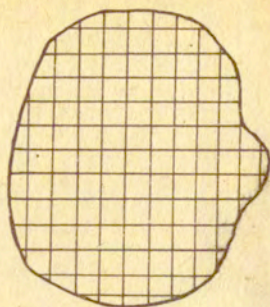
Przed odkształceniem

Po odkształceniu

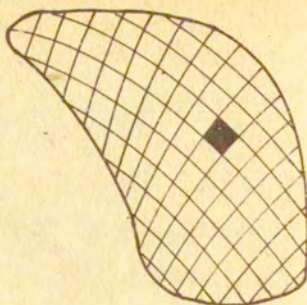


Rys. 4.1. Przekształcenia elementów przy przemieszczeniach liniowych

Przed odkształceniem



Po odkształceniu



Rys. 4.2. Przekształcenie siatki przy przemieszczeniach nieliniowych

Aby zbadać odkształcenie w punkcie, trzeba opisać zmiany geometryczne nieskończenie małego elementu zawierającego ten punkt. We współrzędnych kartezjańskich tym elementem jest nieskończenie mały prostopadłościan o wymiarach dx , dy , dz , który przekształca się w nieskończenie mały równoległoscian. Dla jednoznacznego opisu odkształceń elementarnego prostopadłościanu wystarcza znać:

- zmianę długości trzech jego boków tworzących naroże,
- zmianę kątów między tymi bokami.

↳ Odkształcenia te muszą być uzależnione od współrzędnych x , y , z , aby można było przeliczać je na dowolnie obrany układ współrzędnych. Zatem ogół odkształceń dla wszystkich możliwych kierunków w rozpatrywanym punkcie nazywamy stanem odkształcenia w punkcie. Istota odkształcenia wypływa z gradientu przemieszczenia

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j}$$

W analogii do stanu naprężenia rozróżniamy jednoosiowy, płaski i przestrzenny stan odkształcenia. Jeśli odkształceniu towarzyszy tylko zmiana objętości, to takie odkształcenie na-

zywamy czysto objętościowym np. kula zmienia swoje wymiary na skutek działania temperatury lub ciśnienia hydrostatycznego ($\delta_{xy}^x = \delta_{yz}^y = \delta_{zx}^z = 0$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon \neq 0$). Jeśli odkształceniu towarzyszy tylko zmiana postaci (kształtu), to takie odkształcenie nazywamy czysto postaciowym lub kątowym. Przy odkształcaniu czysto postaciowym objętość ciała odkształcanego jest niezmienną ($\Delta V = V_0 - V_1 = 0$).

4.1.1. Miara odkształcenia plastycznego

Odkształceniem plastycznym nazywamy odkształcenie trwałe, pozostające w danym ciele po usunięciu obciążenia, które spowodowało to odkształcenie i zachodzące bez naruszenia spójności materiału (bez pęknięć).

Do analizy procesów obróbki plastycznej używane są odkształcenia względne ε , współczynnik odkształcenia λ i odkształcenie logarytmiczne φ . Odkształcenia te łatwo można wyprowadzić, rozpatrując zmianę długości boku elementarnego prostopadłościanu lub zmianę długości rozciąganego pręta (rys. 4.3).

Wydłużenie dl ściany prostopadłościanu (rys. 4.3a) lub pręta (rys. 4.3b) możemy odnieść do długości początkowej l_0 lub do długości w danej chwili l .

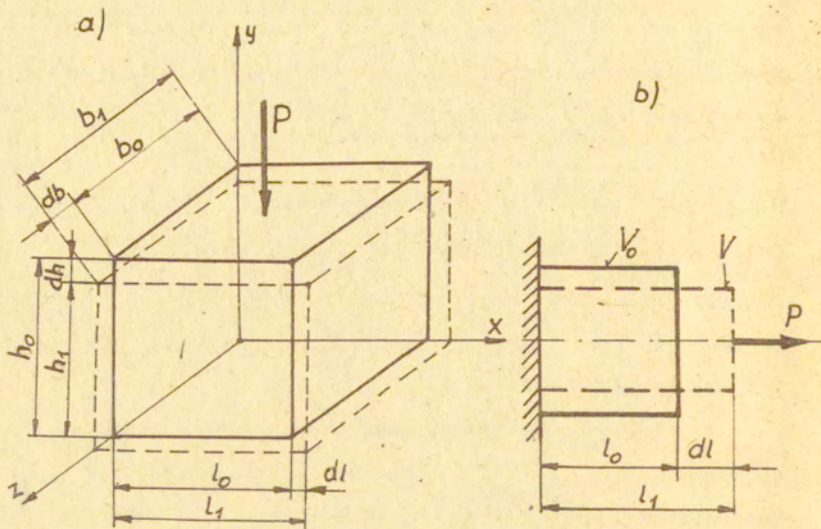
Jeżeli dl odniesiemy do l_0 ($\frac{dl}{l_0} = d\varepsilon$) i scałkujemy w granicach od l_0 do l_1 , to otrzymamy wyrażenie

$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l_0} = \frac{l}{l_0} \Big|_{l_0}^{l_1} = \frac{l_1 - l_0}{l_0}, \quad (4.1)$$

które nazywamy odkształceniem względnym. Jeśli natomiast względny przyrost długości $\frac{dl}{l}$ scałkujemy w granicach od 0 do l_1 , to otrzymamy zależność

$$\lambda = \int_0^{L_1} \frac{dl}{l_0} = \frac{l}{l_0} \Big|_0^{L_1} = \frac{L_1}{l_0}, \quad (4.2)$$

którą nazywamy współczynnikiem odkształcenia.



Rys. 4.3. Szkice do wyprowadzenia wzorów miar odkształceń

Współczynnik odkształcenia λ jest używany w analizie procesu walcowania: w kierunku długości $\lambda = \frac{l_1}{l_0}$, w kierunku szerokości $\beta = \frac{b_1}{b_0}$, w kierunku wysokości $\beta^h = \frac{h_1}{h_0}$.

Gdy wydłużenie dl odniesiemy do długości w danej chwili l , to otrzymamy elementarny przyrost odkształcenia

$$d\varphi = \frac{dl}{l},$$

który po scałkowaniu w granicach od l_0 do l_1

$$\varphi = \int_{l_0}^{l_1} d\varphi = \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l} = \ln l \Big|_{l_0}^{l_1} = \ln \frac{l_1}{l_0} \quad (4.3)$$

daje całkowite odkształcenie przy zmianie długości l .

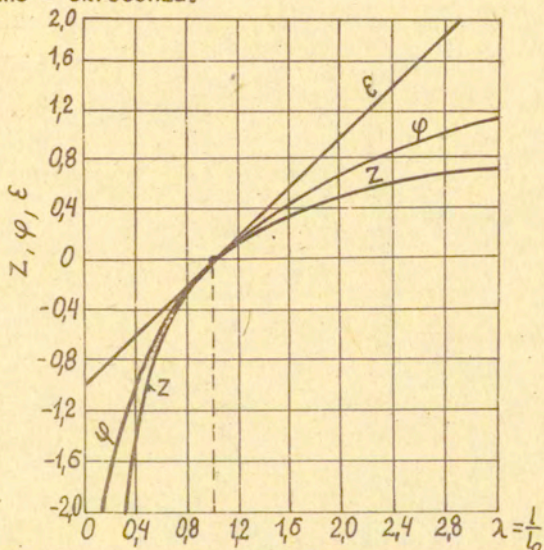
od wartości początkowej l_0 do wartości końcowej l_1 nazywane odkształceniem logarytmicznym lub rzeczywistym. Całkowite odkształcenie logarytmiczne φ jest sumą (całką) dowolnie małych odkształceń względnych $\frac{dl}{l}$.

Odształcenie logarytmiczne φ z odpowiednim indeksem może odnosić się do wysokości ($\varphi_h = \ln \frac{h_1}{h_0}$), do promienia ($\varphi_r = \ln \frac{r_1}{r_0}$), do grubości ścianki rury ($\varphi_s = \ln \frac{s_1}{s_0}$). Odształcenie logarytmiczne φ jest najbardziej właściwą miarą dużych odkształceń. Zaproponowane zostało ono w 1909 r. przez Ludwika.

Ze wzorów (4.1, 4.2, 4.3) otrzymujemy zależność między ε , λ i φ (rys. 4.4)

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \lambda - 1, & \varepsilon &= e^\varphi - 1, \\ \lambda &= \varepsilon + 1, & \lambda &= e^\varphi, \\ \varphi &= \ln \lambda, & \varphi &= \ln(\varepsilon + 1). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Za dodatnie odkształcenia liniowe będziemy uważać wydłużenia, a za ujemne - skrócenia.



Rys. 4.4. Zależność między różnymi miarami odkształceń

Dla bardzo małych odkształceń, odkształcenie logarytmiczne φ jest w przybliżeniu równe odkształceniu względnemu ε ($\varphi \cong \varepsilon$). Udowodnić to można przez rozwinięcie funkcji $\varphi = \ln(\varepsilon+1)$ w szereg potęgowy ($\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$), szereg ten jest zbieżny dla małych wartości x)

$$\varphi = \ln(\varepsilon+1) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \frac{\varepsilon^4}{4} + \dots \cong \varepsilon,$$

gdź odkształcenie względne ε jest bardzo małe, a jeszcze podniesione do potęgi drugiej, trzeciej itd. daje małe wyższego rzędu, które można pominąć nie poplenując większego błędu.

Przy ciągnięciu prętów, drutu z przekroju F_0 do przekroju F_1 stosowany jest stopień zgniotu

$$Z = \frac{dF}{F_0} = \frac{F_0 - F_1}{F_0}, \quad (4.5a)$$

który przy założeniu stałej objętości ($V_0 = V_1$, $F_0 l_0 = F_1 l_1$, $\frac{F_1}{F_0} = \frac{l_0}{l_1}$) wyrazi się zależnością

$$Z = \frac{l_1 - l_0}{l_1}. \quad (4.5b)$$

Przy kuciu lub walcowaniu stosowany jest stopień przekucia określony wyrażeniem

$$\lambda_p = \frac{F_0}{F_1} = \frac{l_1}{l_0}. \quad (4.6)$$

Zależność odkształceń ε , λ i φ od współczynnika zgniotu Z jest następująca:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{Z}{1-Z}, \\ \lambda &= \frac{1}{1-Z}, \\ \varphi &= -\ln(1-Z), \\ Z &= 1 - \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.1.2. Objętość przemieszczona

Elementarną objętością przemieszczoną w czasie procesu spęczania o wielkość dh_x jest iloczyn pola podstawy F_x i przemieszczenia dh_x (rys. 4.5)

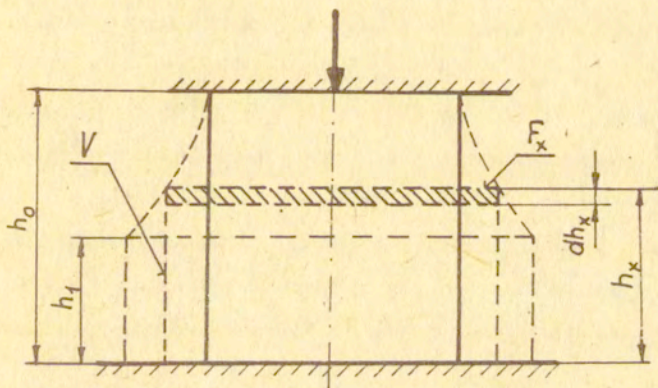
$$dV_p = F_x dh_x .$$

Całkowita objętość przemieszczona jest sumą elementarnych objętości przemieszczonych w granicach wysokości spęczania h_0 i h_1

$$V_{pc} = \int_{h_0}^{h_1} F_x dh_x = \int_{h_0}^{h_1} \frac{V}{h_x} dh_x = V \int_{h_0}^{h_1} \frac{dh_x}{h_x} ,$$

$$V_{pc} = V \ln \frac{h_1}{h_0} = V \varphi_h . \quad (4.8)$$

Objętość przemieszczona (4.8) wyrażona jest przez odkształcenie rzeczywiste φ_h i z tego powodu nazywa się objętością przemieszczoną rzeczywistą.



Rys. 4.5. Szkic ilustrujący objętość przemieszczoną

Zgodnie z prawem stałej objętości, suma objętości przemieszczonych w trzech kierunkach jest równa zero. Jeśli objętość przemieszczoną rzeczywistą V_{pc} odniesiemy do objętości

początkowej V , to otrzymamy objętość przemieszczoną właściwą, która równa jest odkształceniu rzeczywistemu φ w rozpatrywanym kierunku osi.

4.2. Teoria małych odkształceń plastycznych

W celu wyznaczenia odkształceń w punkcie M rozpatrywanego ciała należy wokół niego zbudować nieskończenie mały prostopadłościan o krawędziach dx , dy , dz równoległych do osi x , y , z i rozważyć jego zmianę położenia, zmianę długości krawędzi (boków) i zmianę kątów nachylenia jego ścian do osi układu współrzędnych x , y , z przed i po odkształceniu (rys. 4.6). Elementarny prostopadłościan w wyniku działania siły ulegnie przesunięciu (w wyniku odkształcenia całego ciała) i przekształci się w elementarny równoległościan. Punkt M przemieści się o wektor u o składowych u_x , u_y , u_z do podłożenia punktu M_1 .

Krawędzie równoległościanu (rys. 4.6) doznają odkształceń liniowych ε_x , ε_y , ε_z (wydłużeń jednostkowych), a kąty proste ścian doznają odkształceń kątowych (postaciowych) oznaczanych literą δ^{ℓ} z odpowiednimi indeksami. Jeśli krawędź początkowo równoległa do osi x obróciła się w kierunku osi y , to zachodzącą zmianę kąta oznaczamy przez δ_{xy}^{ℓ} . Odkształcenie postaciowe w płaszczyźnie xy jest równe sumie kątów o jakie obróciły się krawędzie dx i dy w stosunku do osi x i osi y ,

$$\delta_{xy}^{\ell} = \delta_{xy}^{\ell'} + \delta_{yx}^{\ell'} \quad (4.9a)$$

Pomiędzy odkształceniami kątowymi w płaszczyźnie zachodzą podobne zależności jak między naprężeniami stycznymi

$$\delta_{xy}^{\ell'} = \delta_{yx}^{\ell'} \quad , \quad \delta_{yz}^{\ell'} = \delta_{zy}^{\ell'} \quad , \quad \delta_{zx}^{\ell'} = \delta_{xz}^{\ell'} \quad , \quad (4.9b)$$

co oznacza, że

$$d_{xy}^{\ell'} = d_{yx}^{\ell'} = \frac{1}{2} d_{xy}^{\ell}, \quad d_{yz}^{\ell'} = d_{zy}^{\ell'} = \frac{1}{2} d_{yz}^{\ell}, \quad d_{zx}^{\ell'} = d_{xz}^{\ell'} = \frac{1}{2} d_{zx}^{\ell}. \quad (4.9c)$$

Za dodatnie odkształcenia liniowe $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ będziemy uważali wydłużenia, a za ujemne - skrócenia. Za dodatnie odkształcenie kątowe będziemy uważali zmniejszenie się kąta prostego zawartego między dodatnimi kierunkami osi, ujemnymi zaś - powiększenie się tegoż kąta.

Składowe odkształcenia liniowego ε i składowe odkształcenia postaciowego d^{ℓ} wygodnie i przejrzysto jest określić z rozważenia przemieszczenia, zmiany wymiarów i zmiany postaci jednego boku prostopadłościanu. A zatem rozpatrzmy rzut ściany ABCD prostopadłościanu na płaszczyznę xy przed i po odkształceniu (rys. 4.7). Boki prostokąta dx, dy równoległe do osi x, y przemieszczą się i zmienią swoją długość o wielkość $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx, \frac{\partial u_y}{\partial y} dy$ oraz obrócić się o kąt α i β od osi x i y . Zmiana długości boku prostokąta zależna jest od przemieszczenia u i wymiaru boku dx lub dy .

Korzystając z definicji odkształcenia względnego (liniowego) określimy wydłużenia jednostkowe krawędzi prostokąta AB i AD .

Wydłużenie krawędzi AD w kierunku osi x będzie

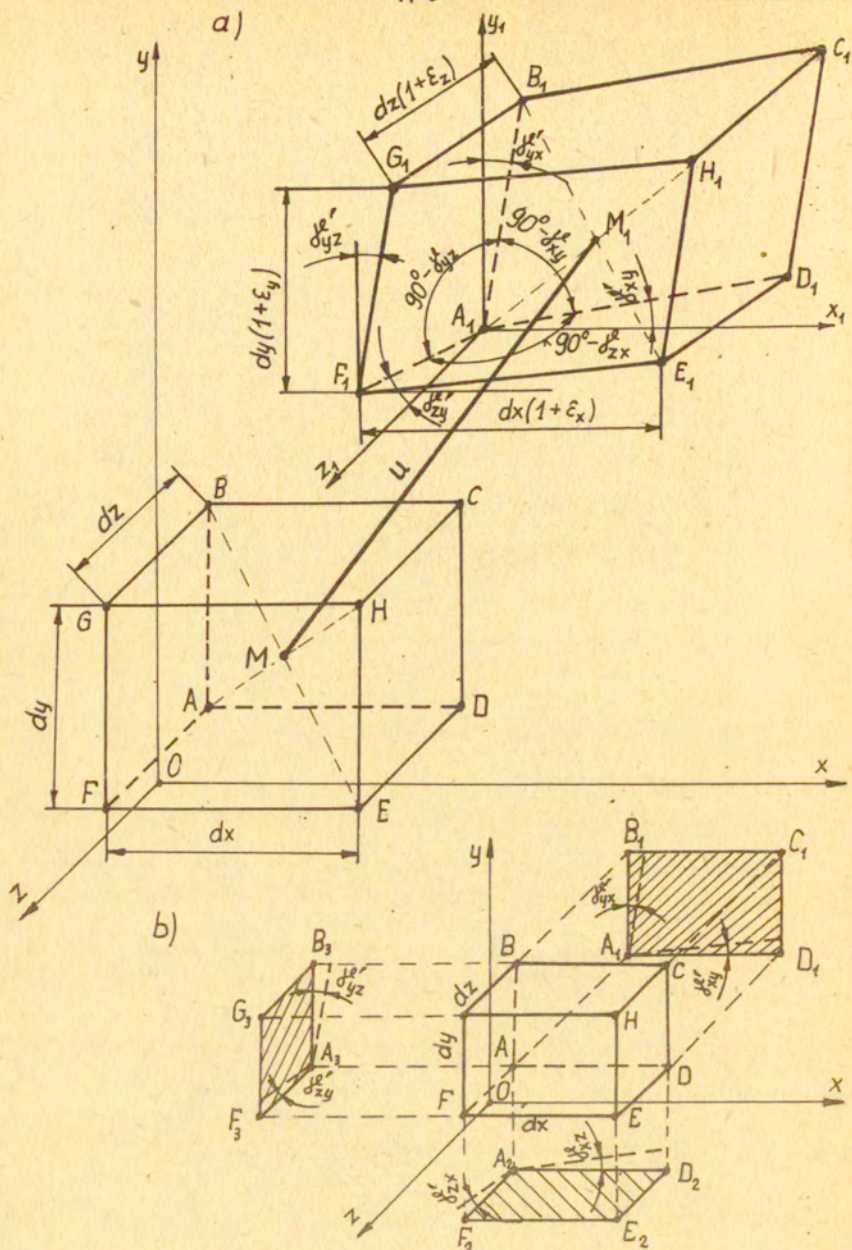
$$\varepsilon_x = \frac{A_1 D_2 - AD}{AD} = \frac{(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + dx - u_x) - dx}{dx} \quad (4.10a)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x},$$

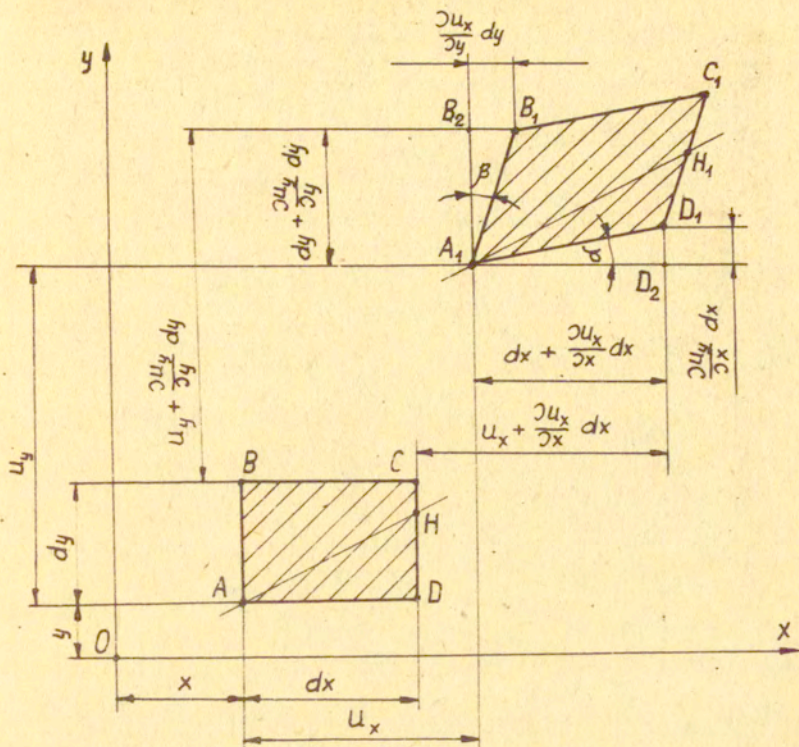
a krawędzi AB wzdłuż osi y będzie

$$\varepsilon_y = \frac{A_1 B_2 - AB}{AB} = \frac{(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + dy - u_y) - dy}{dy} \quad (4.10b)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}.$$



Rys. 4.6. a) Przemieszczenie i odkształcenie elementarnego prostopadłościanu o wymiarach dx, dy, dz ; b) Elementarny prostopadłościan i jego rzuty przed odkształceniem z zaznaczeniem kątów obrotu krawędzi



Rys. 4.7. Rzut prostopadłościanu przed i po odkształceniu na płaszczyznę xy

Krawędź AD w płaszczyźnie xy obróci się o kąt α mierzoney w radianach

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}},$$

który po odrzuceniu w mianowniku $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_x$ jako wielkości bardzo małej w stosunku do jedności będzie miał wartość

$$\operatorname{tg} \alpha \cong \alpha \cong \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (4.11a)$$

Postępując analogicznie otrzymamy kąt obrotu krawędzi AB w płaszczyźnie xy

$$tg \beta \cong \beta \cong \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (4.11b)$$

Całkowita deformacja kąta prostego BAD (odkształcenie kątowe) wyrazi się następująco:

$$\gamma_{xy}^e = \beta + \alpha = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (4.11c)$$

Postępując w podobny sposób znajdziemy odkształcenia na dwóch pozostałych ściankach prostopadłościanu. A zatem stan odkształcenia w otoczeniu punktu M opisany jest następującymi odkształceniami:

$$\begin{aligned} \text{- liniowymi: } \quad \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \text{- kątowymi: } \quad \gamma_{xy}^e &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz}^e = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ &\gamma_{zx}^e = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

przy czym $\gamma_{xy}^e = \gamma_{yx}^e$, $\gamma_{yz}^e = \gamma_{zy}^e$, $\gamma_{zx}^e = \gamma_{xz}^e$.

Równania (4.12) są różniczkowymi liniowymi i geometrycznymi ^{równaniami}

Cauchy'ego. Wiążą one ze sobą odkształcenia i przemieszczenia.

Dziewięć składowych, określających odkształcenie w punkcie tworzą tensor odkształcenia, który możemy zapisać w postaci

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (4.13)$$

gdzie wskaźniki $i, j = x, y, z$, u_i i u_j są składowymi wektora przemieszczenia. Podstawiając wskaźniki $i = x, j = x, y, z$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x_x} + \frac{\partial u_x}{\partial x_x} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial x} , \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x_y} + \frac{\partial u_y}{\partial x_x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \delta_{xy}^e , \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x_z} + \frac{\partial u_z}{\partial x_x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \delta_{xz}^e , \end{aligned} \quad (4.14a)$$

Następnie podstawiając wskaźniki $i = y, j = x, y, z$ oraz $i = z, j = x, y, z$ otrzymamy dalszych sześć równań odkształceń będących pozostałymi składowymi stanu odkształcenia

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \delta_{yx}^e , \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} , \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \delta_{yz}^e , \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \delta_{zx}^e , \\ \varepsilon_{zy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \delta_{zy}^e , \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} . \end{aligned} \quad (4.14b)$$

Tensor odkształcenia ε_{ij} (4.13) jest symetryczną częścią gradientu wektora przemieszczenia

$$u_{(i,j)} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) .$$

Gradient wektora przemieszczenia $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ składa się z części symetrycznej $u_{(i,j)}$ i części niesymetrycznej (asymetrycznej) $u_{[i,j]}$

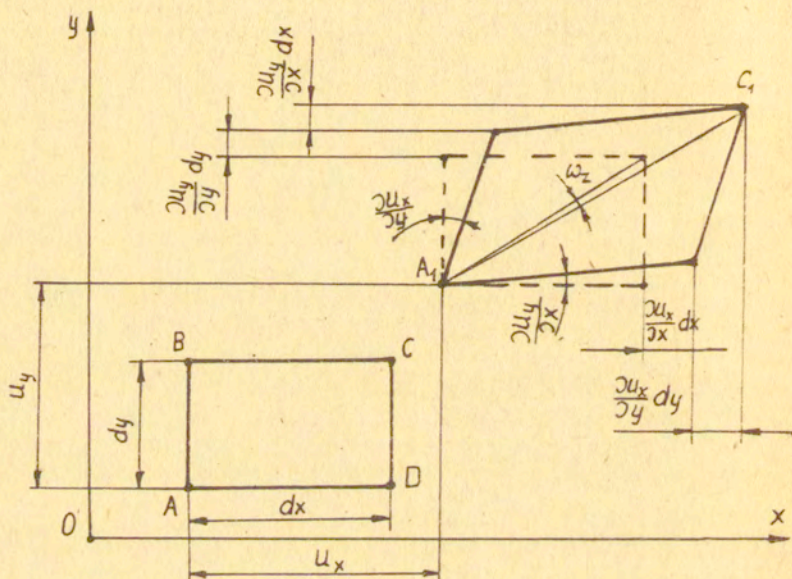
$$u_{i,j} = u_{(i,j)} + u_{[i,j]} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) . \quad (4.15)$$

Niesymetryczna część gradientu wektora przemieszczenia $u_{[i,j]}$ jest obrotem. Wektor obrotu ω elementu prostopadłościenn-

nego wyniku z rotacji (rot \mathbf{u}) czyli wirowości pola wektorowego $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$ i posiada współrzędne

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right), \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).\end{aligned}\tag{4.16}$$

Na rysunku (4.8) zaznaczono współrzędną ω_z określającą obrót elementu (wyrażonego przekątną) w płaszczyźnie osi x, y dookoła osi z .



Rys. 4.8. Ilustracja współrzędnej ω_z obrotu i odkształceń elementu w płaszczyźnie xy

Składowe stanu odkształcenia w rozpatrywanym punkcie (4.14) można przedstawić w postaci macierzy

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}d_{xy}^{\beta} & \frac{1}{2}d_{xz}^{\beta} \\ \frac{1}{2}d_{yx}^{\beta} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}d_{yz}^{\beta} \\ \frac{1}{2}d_{zx}^{\beta} & \frac{1}{2}d_{zy}^{\beta} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (4.17)$$

Mnożnik $\frac{1}{2}$ przy odkształceniach postaciowych ułatwia zapis tensorowy i powoduje symetryczność tensora odkształcenia. Świadczy on również o tym, że bierzemy średnie wartości odkształceń postaciowych prostopadłościanu. Macierz tę nazywamy tensorem odkształcenia.

Wzory na odkształcenie liniowe (4.12) można otrzymać z analizy zmiany położenia i zmiany długości odcinka AB pokazanego na rysunku 4.9a. Pomijając wyprowadzenie (szczegółowe wyprowadzenie podano w pracy [12]) możemy napisać ostateczne ogólne równanie na odkształcenie liniowe uwzględniające zmianę układu współrzędnych

$$\varepsilon_l = \varepsilon_x a_x^2 + \varepsilon_y a_y^2 + \varepsilon_z a_z^2 + d_{xy}^{\beta} a_x a_y + d_{yz}^{\beta} a_y a_z + d_{zx}^{\beta} a_z a_x. \quad (4.18)$$

Jeśli kierunek 1, na którym leży analizowany odcinek AB jest równoległy do osi x ($a_x = 1$, $a_y = 0$, $a_z = 0$), to odkształcenie liniowe będzie

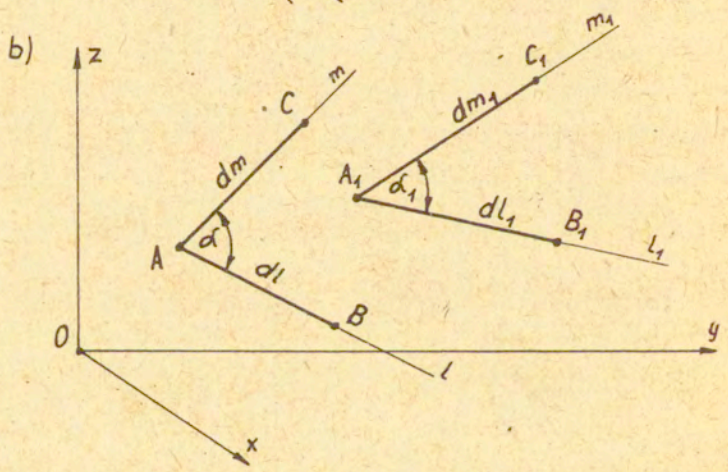
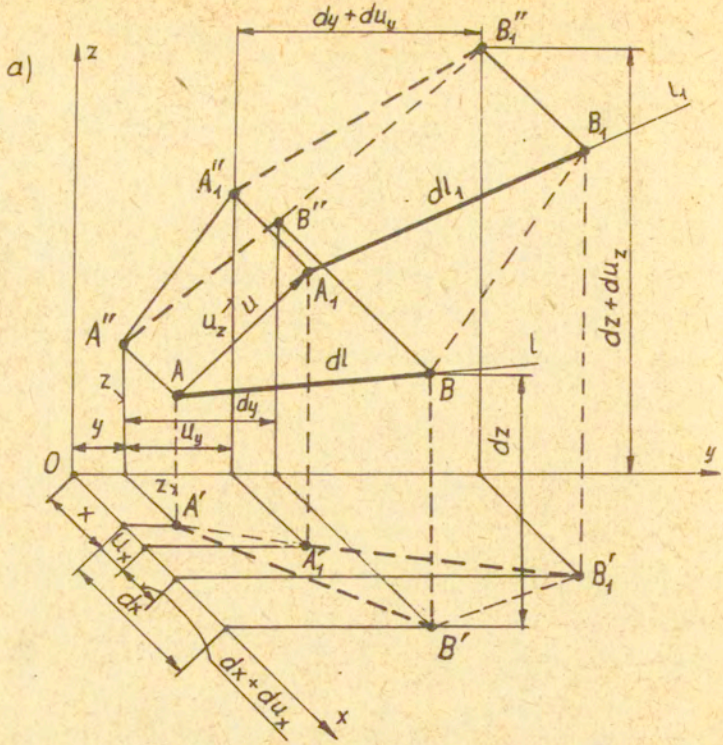
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x},$$

gdy kierunek 1 jest równoległy do osi y ($a_x = 0$, $a_y = 1$, $a_z = 0$), to wówczas

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y},$$

a jeśli odcinek AB jest równoległy do osi z ($a_x = 0$, $a_y = 0$, $a_z = 1$), to wtedy mamy

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$



Rys. 4.9. a) Przemieszczenie i odkształcenie odcinka AB ,
b) Zmiana kąta między dwoma odcinkami

W celu znalezienia równań na odkształcenia kątowe (postaciowe) (4. 12) należy rozpatrzyć zmianę kąta między dwoma odcinkami (rys. 4.9b) poprowadzonymi w kierunku prostej l i w kierunku prostej m przed i po odkształceniu w prostokątnym układzie współrzędnych. Z analizy zmiany kąta między odcinkami AB i AC otrzymujemy ostateczne ogólne równanie

$$\begin{aligned} \frac{\delta l_m^l}{2} = & \varepsilon_x a_x^l a_x^m + \varepsilon_y a_y^l a_y^m + \varepsilon_z a_z^l a_z^m + \\ & + \frac{\delta_{xy}^l}{2} (a_x^l a_y^m + a_x^m a_y^l) + \\ & + \frac{\delta_{yz}^l}{2} (a_y^l a_z^m + a_y^m a_z^l) + \\ & + \frac{\delta_{zx}^l}{2} (a_z^l a_x^m + a_z^m a_x^l) . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Jeśli przyjmiemy, że odcinek AB o kierunku l jest równoległy do osi x ($a_x^l = 1, a_y^l = 0, a_z^l = 0$), a odcinek AC o kierunku m jest równoległy do osi y ($a_x^m = 0, a_y^m = 1, a_z^m = 0$), to otrzymujemy równanie na odkształcenie postaciowe w płaszczyźnie xy

$$\delta_{xy}^l = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} .$$

Następnie zakładając, że odcinki AB i AC tworzą kąt prosty w płaszczyźnie yz ($a_x^l = 0, a_y^l = 1, a_z^l = 0, a_x^m = 0, a_y^m = 0, a_z^m = 1$) i drugi raz w płaszczyźnie zx ($a_x^l = 0, a_y^l = 0, a_z^l = 1, a_x^m = 1, a_y^m = 0, a_z^m = 0$), otrzymamy dwa pozostałe równania na odkształcenia kątowe

$$\begin{aligned} \delta_{yz}^l &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} , \\ \delta_{zx}^l &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} . \end{aligned}$$

Wielkość $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \delta_{xy}^l, \delta_{yz}^l, \delta_{zx}^l$ opisują jednozna-

cznie odkształcenie elementarnego prostopadłościanu o krawędziach równoległych do osi x, y, z układu współrzędnych przyjętego dowolnie w rozpatrywanym punkcie ciała jako początku układu. Wielkości te noszą nazwę składowych stanu odkształcenia.

Odształcenie postaciowe J_n^e w płaszczyźnie dowolnie nachylonej względem kierunków głównych odkształceń określa wzór

$$\frac{J_n^e}{2} = \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 a_x^2 a_y^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 a_y^2 a_z^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 a_z^2 a_x^2} \quad , \quad (4.20)$$

gdzie n oznacza normalną zewnętrzną do danej płaszczyzny.

4.2.1. Rozłożenie tensora odkształcenia na dewiator i na tensor kulisty

Tensor odkształcenia ε_{ij} można rozłożyć na dewiator $D_\varepsilon = e_{ij}$ i na tensor kulisty $K_\varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$

$$\begin{aligned} T_\varepsilon &= D_\varepsilon + K_\varepsilon \\ \varepsilon_{ij} &= e_{ij} + \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad , \quad (4.21) \end{aligned}$$

gdzie $\frac{1}{3} \varepsilon_{kk} = \varepsilon_s = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ jest średnim odkształceniem tworzącym czysto objętościowe odkształcenie prostopadłościanu, e_{ij} jest dewiatorem odkształcenia powodującym czysto postaciowe odkształcenie. Tensor kulisty $\frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} = \varepsilon_s \delta_{ij}$ przedstawia równomierne wydłużenie lub skrócenie elementu, a zatem określa zmianę objętości ciała

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad .$$

Dewiator odkształcenia e_{ij} posiada pięć niezależnych współrzędnych (gdyż $e_{ij} = e_{ji}$, $e_{ii} = 0$), które z tensorem kulistym określają symetryczny tensor odkształcenia ε_{ij}

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_s, \varepsilon_y - \varepsilon_s, \frac{1}{2}j_{xy}, \frac{1}{2}j_{yz}, \frac{1}{2}j_{zx}, \varepsilon_s = \frac{1}{3}.$$

$(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ np. składowa $\varepsilon_3 = \varepsilon_s$ jest znana, gdyż zachodzi $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$.

Macierz (4.17) w rozłożeniu na dewiator i na tensor kulisty ma postać

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}}_{\text{Tensor odksz.}} = \underbrace{\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_s & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_s & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_s \end{vmatrix}}_{\text{Dewiator odksz.}} + \underbrace{\begin{vmatrix} \varepsilon_s & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_s \end{vmatrix}}_{\varepsilon_s} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\delta_{ij}}. \quad (4.22)$$

Tensor kulisty

Macierz tensora odkształcenia w osiach głównych ma postać

$$T_\varepsilon = \varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}, \quad (4.23)$$

a macierz dewiatora odniesiona do osi głównych ma postać

$$D_\varepsilon = e_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{3} \end{vmatrix}. \quad (4.24)$$

Dla jednoosiowego rozciągania ($\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = -\nu\varepsilon$,

$\varepsilon_3 = -\nu\varepsilon$) tensor odkształcenia T_ε , dewiator odkształcenia D_ε

i tensor kulisty K_ε mają postać

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon \end{vmatrix},$$

$$D_\varepsilon = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}\varepsilon(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\varepsilon(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\varepsilon(1+\nu) \end{vmatrix}, \quad (4.25)$$

$$K_\varepsilon = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\varepsilon(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\varepsilon(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\varepsilon(1-2\nu) \end{vmatrix},$$

ponieważ

$$\begin{aligned}\xi_3 &= \frac{1}{3}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = \frac{1}{3}(\varepsilon - \nu\varepsilon - \nu\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}(1-2\nu), \\ \xi_1 - \xi_3 &= \varepsilon - \xi_3 = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3}(1-2\nu) = \frac{2}{3}\varepsilon(1+\nu), \\ \xi_2 - \xi_3 &= -\nu\varepsilon - \xi_3 = -\nu\varepsilon - \frac{\varepsilon}{3}(1-2\nu) = -\frac{1}{3}\varepsilon(1+\nu), \\ \xi_3 - \xi_5 &= -\nu\varepsilon - \xi_5 = -\nu\varepsilon - \frac{\varepsilon}{3}(1-2\nu) = -\frac{1}{3}\varepsilon(1+\nu).\end{aligned}$$

4.2.2. Odształcenia główne

W każdym punkcie odształcanego ciała można znaleźć trzy kierunki, w których tylko występują odształcenia liniowe. Odształcenia postaciowe będą równe zeru. Występujące odształcenia liniowe nazywamy odształceniami głównymi, a kierunki w których one występują - kierunkami głównymi odształceń. Znaczy to, że elementarny prostopadłościan, zbudowany na kierunkach głównych, po odształceniu pozostaje prostopadłościanem jedynie o zmienionych długościach boków.

Dla udowodnienia istnienia trzech kierunków głównych w odształconym ciele przeanalizujmy odształcenia katowe równoległoboku pokazanego na rysunku 4.7. Krawędź A_1D_1 obróciła się w kierunku od osi x do osi y , a krawędź A_1B_1 została obrócona w kierunku od osi y do osi x . Wypływa z tego wniosek, że między odcinkami A_1D_1 i A_1B_1 istnieje odcinek A_1H_1 , który doznał tylko wydłużenia, a zatem jest to jeden kierunek główny. Pozostałe dwa kierunki główne wynikają z rozpatrzenia rzutów prostopadłościanu na płaszczyznę yz i zx .

Przyjmijmy, że przekątna prostopadłościanu AH o długości r (rys. 4.10) posiada kierunek odształcenia głównego i tworzy z osiami x , y , z kąty, których cosinusy kierunkowe są równe odpowiednio a_x , a_y , a_z . Krawędzie prostopadłościanu

ra_x, ra_y, ra_z w wyniku odkształcenia doznają wydłużeń $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ i obrotów $\frac{d^l}{2} \varepsilon_{xy}, \frac{d^l}{2} \varepsilon_{yz}, \frac{d^l}{2} \varepsilon_{zx}$. Przekątna AH dozna wydłużenia $r\varepsilon$, którego rzuty na osie x, y, z będą $ra_x\varepsilon, ra_y\varepsilon, ra_z\varepsilon$. Rzutując wszystkie przyrosty długości (przekątnej $r - r\varepsilon$, krawędzi $AD_1 - r\varepsilon_x$, kąta $\frac{d^l}{2} \varepsilon_{xy} - r\frac{d^l}{2} \varepsilon_{xy}$, kąta $\frac{d^l}{2} \varepsilon_{xz} - r\frac{d^l}{2} \varepsilon_{xz}$) na oś x

$$ra_x\varepsilon = ra_x\varepsilon_x + ra_y \frac{d^l \varepsilon_{xy}}{2} + ra_z \frac{d^l \varepsilon_{xz}}{2} = 0,$$

na oś y

$$ra_y\varepsilon = ra_x \frac{d^l \varepsilon_{yx}}{2} + ra_y\varepsilon_y + ra_z \frac{d^l \varepsilon_{yz}}{2} = 0,$$

na oś z

$$ra_z\varepsilon = ra_x \frac{d^l \varepsilon_{zx}}{2} + ra_y \frac{d^l \varepsilon_{zy}}{2} + ra_z\varepsilon_z = 0$$

i dokonując przekształceń, otrzymamy jednorodny układ równań liniowych względem cosinusów kierunkowych a_x, a_y, a_z o postaci

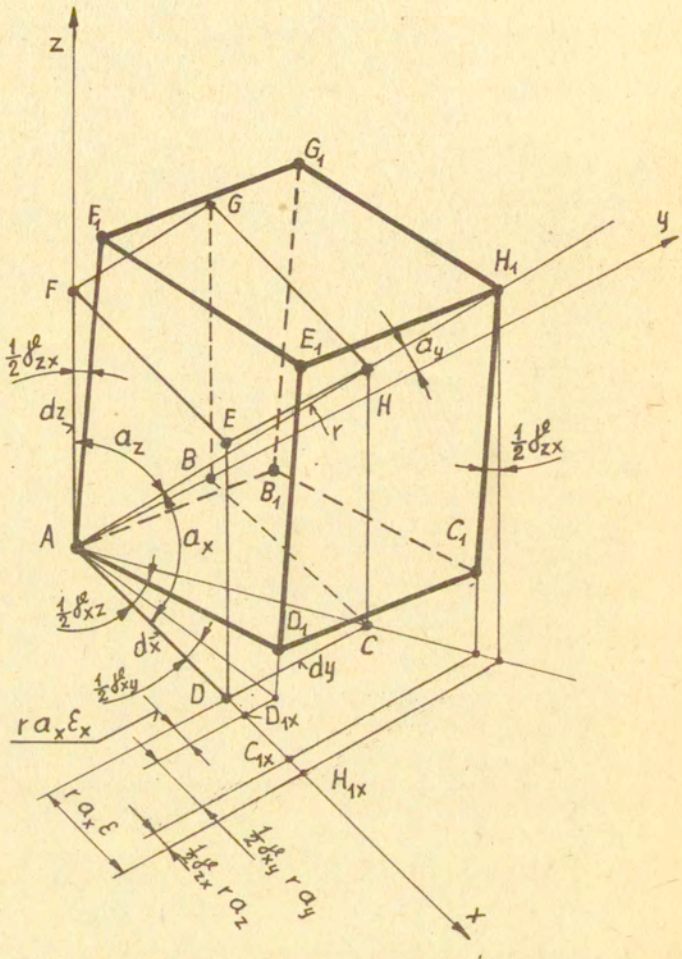
$$\begin{aligned} (\varepsilon_x - \varepsilon)a_x + \frac{1}{2}d^l \varepsilon_{xy} a_y + \frac{1}{2}d^l \varepsilon_{xz} a_z &= 0, \\ \frac{1}{2}d^l \varepsilon_{yx} a_x + (\varepsilon_y - \varepsilon)a_y + \frac{1}{2}d^l \varepsilon_{yz} a_z &= 0, \\ \frac{1}{2}d^l \varepsilon_{zx} a_x + \frac{1}{2}d^l \varepsilon_{zy} a_y + (\varepsilon_z - \varepsilon)a_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Warunkiem rozwiązania układu (4.26) względem niewiadomych a_x, a_y, a_z jest, aby wyznacznik utworzony ze współczynników przy cosinusach kierunkowych był równy zero

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}d^l \varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}d^l \varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}d^l \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}d^l \varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}d^l \varepsilon_{zx} & \frac{1}{2}d^l \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0, \quad (4.27a)$$

który również można zapisać

$$|\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}| = 0. \quad (4.27b)$$



Rys. 4.10. Odształcenie elementarnego prostopadłościanu w przestrzeni.

Rozwiązaniem wyznacznika (4.27) jest równanie charakterystyczne trzeciego stopnia względem niewiadomej $\bar{\epsilon}$

$$\bar{\epsilon}^3 - \bar{\Phi}_1 \bar{\epsilon}^2 + \bar{\Phi}_2 \bar{\epsilon} - \bar{\Phi}_3 = 0. \quad (4.28)$$

gdzie

$$\bar{\Phi}_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_{kk},$$

$$\bar{\Phi}_2 = \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x - \frac{1}{4} (\delta_{xy}^2 + \delta_{yz}^2 + \delta_{zx}^2) = \frac{1}{2} (\epsilon_{ii} \epsilon_{jj} - \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}), \quad (4.29a)$$

$$\bar{\Phi}_3 = \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z + \frac{1}{4} \delta_{xy} \delta_{yz} \delta_{zx} - \frac{1}{4} (\epsilon_x \delta_{yz}^2 + \epsilon_y \delta_{zx}^2 + \epsilon_z \delta_{xy}^2) = \epsilon_{ij}.$$

Oznaczenia $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \bar{\Phi}_3$ są niezmiennikami tensora odkształcenia. $\bar{\Phi}_1$ jest niezmiennikiem liniowym, $\bar{\Phi}_2$ - kwadratowym, a $\bar{\Phi}_3$ - sześciennym.

W osiach głównych niezmienniki tensora odkształcenia mają postać

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 3 \epsilon_s, \\ \bar{\Phi}_2 &= \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_3 \epsilon_1, \\ \bar{\Phi}_3 &= \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3. \end{aligned} \quad (4.29b)$$

Podobnie jak dla tensorów można sformułować wyrażenia na niezmienniki dewiatora odkształcenia. Gdy do wzorów (4.29a) zamiast odkształceń liniowych $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ wprowadzimy wyrażenia $\epsilon_x - \epsilon_s, \epsilon_y - \epsilon_s, \epsilon_z - \epsilon_s$, $\epsilon_s = \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \frac{1}{3} \epsilon_{kk}$, to otrzymamy niezmienniki dewiatora odkształcenia

$$(\bar{\Phi}_1 = \epsilon_{ii} = \epsilon_{ij} \delta_{ij}, \quad \bar{\Phi}_2 = \epsilon_{ij} \delta_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \delta_{ij} = \epsilon_{ii} - \epsilon_{kk} = 0)$$

$$\bar{\Phi}_3 = 0,$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_2 &= \frac{1}{6} [(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\delta_{xy}^2 + \\ &+ \delta_{yz}^2 + \delta_{zx}^2)] = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij}, \end{aligned} \quad (4.30a)$$

$$\phi_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_s & \frac{1}{2} \sigma_{xy} & \frac{1}{2} \sigma_{xz} \\ \frac{1}{2} \sigma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_s & \frac{1}{2} \sigma_{yz} \\ \frac{1}{2} \sigma_{zx} & \frac{1}{2} \sigma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_s \end{vmatrix}.$$

W odniesieniu do osi głównych niezmienniki dewiatora odkształcenia mają postać

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 0, \\ \phi_2 &= \frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2], \\ \phi_3 &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_s)(\varepsilon_2 - \varepsilon_s)(\varepsilon_3 - \varepsilon_s), \\ \varepsilon_s &= \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \end{aligned} \tag{4.30b}$$

Należy stwierdzić, że każda funkcja skalarna niezmienników jest również niezmiennikiem. Kierunki odkształceń głównych dla ośrodków izotropowych pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych.

Jeśli przyjmiemy warunek nieściśliwości $\varepsilon_{kk} = 0$, to składowe dewiatora e_{ij} są jednocześnie składowymi tensora odkształcenia ε_{ij} i wówczas drugi niezmiennik dewiatora odkształcenia wyraża się

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij}.$$

4.2.2.1. Gwiazda odkształceń

Wielu badaczy dalszą analizę stanu odkształcenia opiera na drugim niezmienniku dewiatora odkształcenia ϕ_2 (4.30a)₂, tworząc z niego intensywność odkształcenia wchodzącą w związki fizyczne. Natomiast T. Fełczyński dalszą analizę odkształcenia oparł na znalezieniu pierwiastków równania (4.28) i wykorzystaniu ich funkcyjnej zależności.

Równanie (4.28) ma zawsze trzy pierwiastki rzeczywiste ε , będące odkształceniami głównymi, które układamy w takim porządku

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3.$$

Podstawiając wyrażenie $\mathcal{E} = e + \mathcal{E}_s$ do równania (4.28) otrzymamy równanie typu $x^3 - x a - b = 0$ o postaci

$$e^3 - e(3\mathcal{E}_s^2 - \Phi_2) - (2\mathcal{E}_s^3 - \Phi_2\mathcal{E}_s + \Phi_3) = 0,$$

które po rozwiązaniu i przekształceniu ma pierwiastki rzeczywiste

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_H \cos \omega, \\ \mathcal{E}_2 &= \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_H \cos(\omega - 120^\circ), \\ \mathcal{E}_3 &= \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_H \cos(\omega - 240^\circ), \end{aligned} \quad (4.31)$$

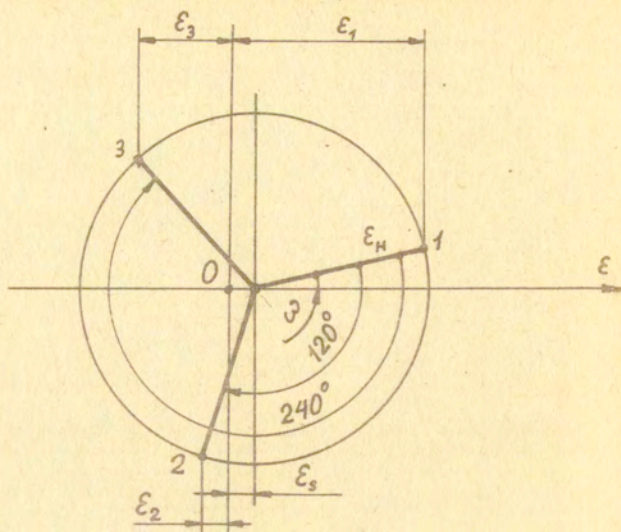
gdzie $\mathcal{E}_s = \frac{1}{3}(\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y + \mathcal{E}_z)$ jest średnim odkształceniem,

$$\mathcal{E}_H = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\mathcal{E}_x - \mathcal{E}_y)^2 + (\mathcal{E}_y - \mathcal{E}_z)^2 + (\mathcal{E}_z - \mathcal{E}_x)^2 + \frac{3}{2}(\mathcal{J}_{xy}^2 + \mathcal{J}_{yz}^2 + \mathcal{J}_{zx}^2)}$$

jest niezmiennikiem zwanym intensywnością odkształcenia postaciowego, $\cos 3\omega = \frac{\sqrt{2}(2\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3)(2\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1)(2\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)}{[(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)^2 + (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3)^2 + (\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1)^2]^{\frac{1}{2}}}$.

Odkształcenia główne $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ są zależne od odkształcenia średniego \mathcal{E}_s i od intensywności odkształcenia postaciowego \mathcal{E}_H . Są one wyrażone przy pomocy składowych odkształcenia $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z, \mathcal{J}_{xy}, \mathcal{J}_{yz}, \mathcal{J}_{zx}$. Wartości odkształceń głównych wyrażone wzorami (4.31) dają się przedstawić wykreślnie za pomocą gwiazdy odkształceń (rys. 4.11) o długości ramion \mathcal{E}_H .

Odkształcenia główne $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ są rzutami ramion gwiazdy \mathcal{E}_H na oś \mathcal{E} . Odkształcenie \mathcal{E}_s mówi o oddaleniu gwiazdy od początku układu współrzędnych. Kąt ω charakteryzuje schemat odkształcenia. Odkształcenia $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ związane są z kątem ω tak, aby była spełniona zależność $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_3$.



Rys. 4.11. Gwiazda odkształceń

Przykład

Przedstawić stan jednoosiowego rozciągania i skonstruować dla niego gwiazdę odkształceń.

Rozwiązanie

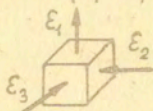
Jednoosiowe rozciąganie charakteryzuje się schematami:

- naprężenia



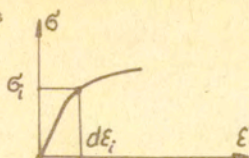
$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

- odkształcenia ($\epsilon_1 = \epsilon$, $\epsilon_2 = -\nu\epsilon$, $\epsilon_3 = -\nu\epsilon$)



$$T_{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{vmatrix},$$

- wykres



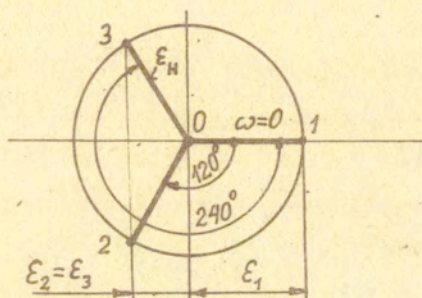
$$\text{Praca } L = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_i$$

Gwiazda odkształceń:

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = 0, \text{ ponieważ } \nu = 0,5, \text{ gdyż } \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,$$

$$\varepsilon_H = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \varepsilon, \cos 3\omega = 1, 3\omega = \arccos 1,$$

$$3\omega = 0, \omega = 0.$$



4.2.3. Koło Mohra dla odkształceń

Stan odkształcenia można przedstawić wykreślnie w układzie współrzędnych $\varepsilon, \frac{1}{2}\mu$ za pomocą kół odkształceń Mohra. Koła te służą do przejrzystego zilustrowania charakterystycznych cech danego rodzaju stanu odkształcenia i do dokonywania wykreślnej transformacji odkształceń z kierunków głównych na dowolne. Posługiwanie się tą konstrukcją wykreślną jest zupełnie analogiczne jak w przypadku kół naprężeń.

Dla płaskiego ogólnego stanu odkształcenia (występują odkształcenia $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \mu_{xy}$) przez odpowiednie przekształcenia równań (4.23 i 4.24) otrzymujemy wzory transformacyjne

na odkształcenia liniowe ε i odkształcenia kątowe \mathcal{J}^{ℓ}

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{\mathcal{J}_{xy}^{\ell}}{2} \sin 2\alpha, \\ \varepsilon_{\beta} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha - \frac{\mathcal{J}_{xy}^{\ell}}{2} \sin 2\alpha, \\ \frac{\mathcal{J}_{\alpha}^{\ell}}{2} &= -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\alpha + \frac{\mathcal{J}_{xy}^{\ell}}{2} \cos 2\alpha, \\ \frac{\mathcal{J}_{\beta}^{\ell}}{2} &= \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\alpha - \frac{\mathcal{J}_{xy}^{\ell}}{2} \cos 2\alpha.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Jeśli dane są odkształcenia główne $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ to w płaszczyźnie o normalnej n tworzącej kąt α z kierunkiem odkształcenia głównego ε_1 i w płaszczyźnie do niej prostopadłej ($\beta = \alpha + 90^\circ$) odkształcenia wyrażą się wzorami

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha} &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \cos 2\alpha, \\ \frac{\mathcal{J}_{\alpha}^{\ell}}{2} &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \sin 2\alpha, \\ \varepsilon_{\beta} &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \cos 2\alpha, \\ \frac{\mathcal{J}_{\beta}^{\ell}}{2} &= -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \sin 2\alpha,\end{aligned}\tag{4.33}$$

o graficznym odwzorowaniu pokazanym na rysunku 4.13.

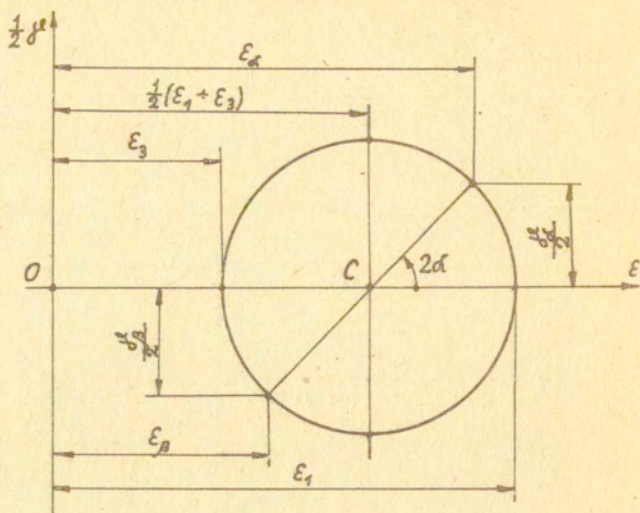
Z koła odkształceń Mohra (rys. 4.13) otrzymujemy zależności na wyznaczenie odkształceń głównych

$$\varepsilon_{1,3} = \frac{\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\beta})^2 + \mathcal{J}_{\alpha}^{\ell 2}}\tag{4.34}$$

oraz wzór na wyznaczenie głównych kierunków odkształceń

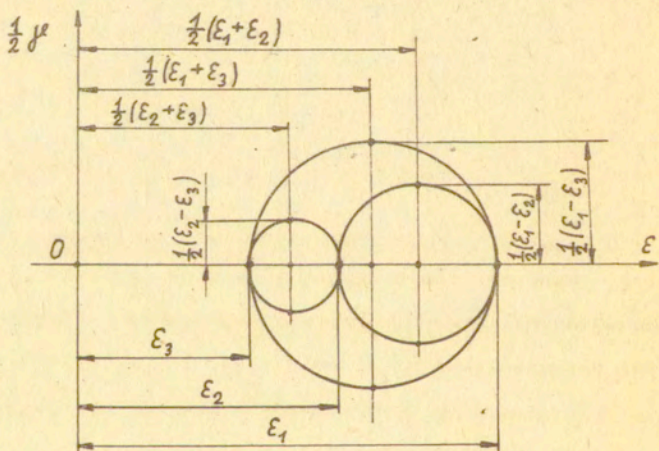
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{\mathcal{J}_{\alpha}^{\ell}}{\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\beta}}.\tag{4.35}$$

Wskaźniki α i β przy odkształceniach ε i \mathcal{J}^{ℓ} mogą przybierać oznaczenia x i y — $\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_x, \varepsilon_{\beta} = \varepsilon_y, \mathcal{J}_{\alpha}^{\ell} = \mathcal{J}_{xy}^{\ell}, \mathcal{J}_{\beta}^{\ell} = \mathcal{J}_{yx}^{\ell}$.



Rys. 4.13. Koło odkształceń Mohra dla płaskiego stanu odkształcenia

Przestrzenny stan odkształcenia $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ można odwzorować za pomocą trzech kół (rysunek 4.14).



Rys. 4.14. Koło Mohra dla przestrzennego stanu odkształcenia

Koło o średnicy $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ przedstawia płaski stan odkształcenia w płaszczyznach równoległych do osi 3, koło $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$ przedstawi płaski stan odkształcenia w płaszczyznach równoległych do osi 1 i koło $\varepsilon_3 - \varepsilon_1$ - w płaszczyznach równoległych do osi 2. Z wykresu (rys. 4.14) odczytujemy ekstremalne odkształcenia postaciowe (występują w płaszczyznach odchylonych o kąt $\frac{\pi}{4}$ względem kierunków głównych odkształceń)

$$\begin{aligned} d_{12}^{\ell} &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ d_{23}^{\ell} &= \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \\ d_{31}^{\ell} &= \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (4.36a)$$

i odpowiadające im główne odkształcenia postaciowe

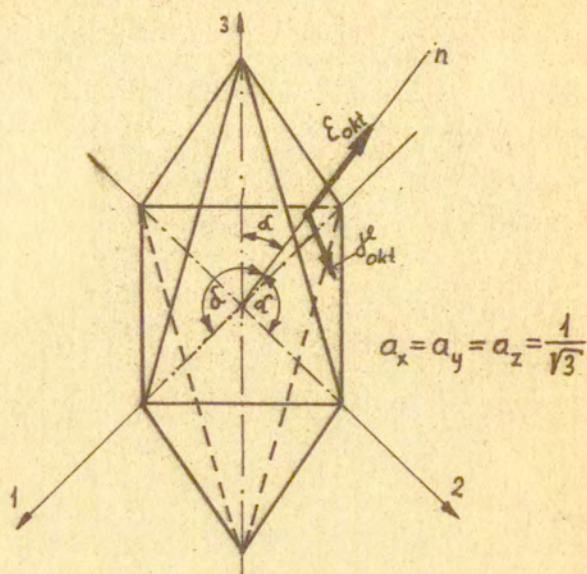
$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, \\ \varepsilon_{23} &= \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2}, \\ \varepsilon_{31} &= \frac{\varepsilon_3 + \varepsilon_1}{2}. \end{aligned} \quad (4.36b)$$

Największe odkształcenie postaciowe przy założeniu $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ będzie wynosić $d_{\max}^{\ell} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$.

4.3. Odkształcenia oktaedryczne

W każdym punkcie ciała możemy wyróżnić odkształcenia oktaedryczne opisujące zmiany geometryczne ośmiościanu (oktaedranu) foremnego zbudowanego na kierunkach głównych odkształceń. Istnienie odkształceń oktaedrycznych na płaszczyznach oktaedranu foremnego wykazała teoria budowy kryształów i potwierdziła praktyka. Odkształcenia te wywołane są naprężeniami oktaedrycznymi działającymi na ściankach oktaedranu. Ścianki

oktaedranu foremnego są jednakowo nachylone ($\alpha = 54^{\circ}44'$) do wszystkich osi układu współrzędnych x, y, z (rys. 4.15).



Rys. 4.15. Ósmiościan (oktaedran) foremny z naniesionymi odkształceniami oktaedrycznymi

Wzory na odkształcenia oktaedryczne występujące na ściankach oktaedranu wyprowadza się w sposób analogiczny jak wzory na naprężenia oktaedryczne. Liniowe odkształcenie oktaedryczne w kierunku normalnym określa wzór w postaci ogólnej

$$\varepsilon_{\text{okt}} = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \quad (4.37a)$$

a odkształcenie postaciowe (zmiana kąta między normalną n a płaszczyzną oktaedryczną) będzie miało postać

$$d_{\text{okt}}^e = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2} + \frac{3}{2} (d_{xy}^{e2} + d_{yz}^{e2} + d_{zx}^{e2}) \quad (4.37b)$$

Odkształcenia oktaedryczne w funkcji odkształceń głównych określają wzory

$$\varepsilon_{\text{okt}} = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \quad (4.38a)$$

$$j_{\text{okt}}^{\ell} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}, \quad (4.38b)$$

a w funkcji głównych odkształceń postaciowych

$$j_{\text{okt}}^{\ell} = \frac{2}{3} \sqrt{j_{12}^{\ell 2} + j_{23}^{\ell 2} + j_{31}^{\ell 2}}, \quad (4.38c)$$

gdzie $j_{12}^{\ell} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $j_{23}^{\ell} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $j_{31}^{\ell} = \varepsilon_3 - \varepsilon_1$.

Odształcenia oktaedryczne wyrażone wzorami (4.37 i 4.38) są niezmiennikami, gdyż nie zależą od osi układu współrzędnych.

Odształcenie liniowe oktaedryczne ε_{okt} możemy wyrazić za pomocą pierwszego niezmiennika tensora odkształcenia Φ_1 , a odkształcenie postaciowe oktaedryczne j_{okt}^{ℓ} - za pomocą drugiego niezmiennika dewiatora odkształcenia ϕ_2

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{okt}} &= \frac{1}{3} \Phi_1, \\ j_{\text{okt}}^{\ell} &= \frac{2\sqrt{6}}{3} \sqrt{\phi_2}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

4.4. Odształcenia objętościowe

Jeśli weźmiemy nieskończenie mały element prostopadłościenny o długościach krawędzi dx , dy , dz (rys. 4.16), to jego objętość przed odkształceniem wynosi $V_0 = dx dy dz$, a po odkształceniu - $V_1 = dx(1 + \varepsilon_x) dy(1 + \varepsilon_y) dz(1 + \varepsilon_z)$.

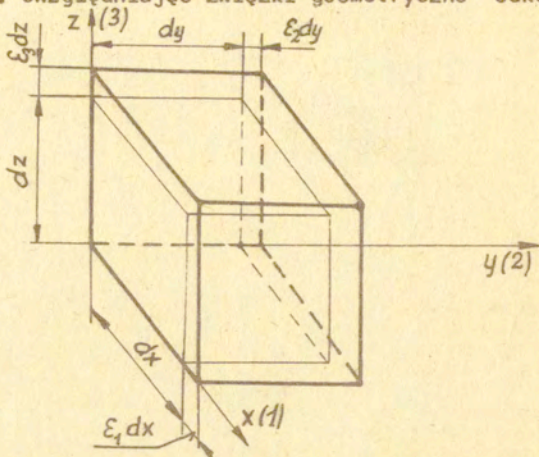
Względna zmiana objętości tego elementu prostopadłościennego wyrazi się wzorem

$$\theta \equiv \frac{df}{f} \frac{V_1 - V_0}{V_0} = (1 + \varepsilon_x) (1 + \varepsilon_y) (1 + \varepsilon_z) - 1. \quad (4.40)$$

Po wymnożeniu i odrzuceniu małych wyższego rzędu (drugiego i trzeciego) odkształcenie objętościowe będzie wynosić

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (4.41)$$

Względną zmianę objętości θ nazywamy dylatacją objętości. Dylatacja jest skalarem i nie zależy od obranego układu osi współrzędnych. Uwzględniając związki geometryczne odkształceń



Rys. 4.16. Zmiana objętości elementu prostopadłościennego

Cauchy'ego (4.12) dylatację objętości możemy przedstawić jako dywergencję pola wektorowego przemieszczeń

$$\theta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \operatorname{div} u \quad (4.42)$$

Względna zmiana objętości θ jest pierwszym niezmiennikiem tensora odkształcenia Φ_1 ($\theta = \Phi_1$). Znaczący to, że pierwszy niezmiennik tensora odkształcenia Φ_1 określa jednostkową zmianę objętości elementarnego prostopadłościennika. Tę zmianę objętości możemy wyrazić za pomocą średniego odkształcenia

$$\varepsilon_s = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\theta = \Phi_1 = 3\varepsilon_s \quad (4.43a)$$

co można również zapisać w postaci macierzy

$$\Theta = \Phi_1 = \begin{vmatrix} \varepsilon_s & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_s \end{vmatrix}. \quad (4.43b)$$

A zatem względna zmiana objętości Θ wyraża się tensorem kulistym odkształcenia. Inaczej mówiąc odkształcenie czysto objętościowe wyraża się tensorem kulistym odkształcenia lub też, że tensor kulisty odkształcenia określa czysto objętościowe odkształcenie. Odkształcenie średnie ε_s jest jednym z trzech elementów tensora kulistego odkształcenia.

Zmiana objętości prostopadłościanu jest jednak znikomo mała i można ją pominąć. I właśnie z tego powodu w teorii plastyczności przyjmuje się, że metale są nieściśliwe. Założenie to prowadzi do przyrównania do zera pierwszego niezmiennika tensora odkształcenia

$$\Phi_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (4.44)$$

Odkształcenie czysto objętościowe cechuje się równością odkształceń głównych $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, gdyż wówczas koła odkształceń Mohra sprowadzają się do punktu (średnica koła $= \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 0$ itd.), a odkształcenia postaciowe f^e są równe zeru. Taki stan odkształcenia wywołany jest wszechstronnym rozciąganiem lub ścisaniem.

4.5. Odkształcenia we współrzędnych walcowych, kulistych i biegunowych

Często zachodzi konieczność wyznaczania odkształceń w gałkach w kształcie walca lub rury o przekroju pierścieniowym

i z tego powodu celowym jest podanie składowych odkształceń we współrzędnych walcowych, kulistych i biegunowych. Składowe te określone są za pomocą przemieszczeń w kierunku promieniowym u_r , obwodowym u_θ i w kierunku wysokości u_z . Składowe odkształcenia wyprowadzone są z nieskończenie małego elementu przestrzennego czy też płaskiego.

Wiele praktycznych procesów obróbki plastycznej metali przebiega w warunkach osiowej symetrii. Do tych procesów należy wyciskanie, spęczanie, ciągnięcie prętów, drutu oraz odkształcanie cylindrów grubościennych i pierścieni i podanie dla nich wzorów na składowe odkształcenia jest konieczne.

Składowe odkształcenia we współrzędnych walcowych r, θ, z dla przypadku ogólnego mają postać

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \delta_{r\theta}^{\mu} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}, \\ \delta_{\theta z}^{\mu} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \\ \delta_{rz}^{\mu} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \delta_{rz}^{\mu}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \delta_{r\theta}^{\mu}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \delta_{\theta z}^{\mu}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

W układzie walcowym osiowo-symetrycznym składowe odkształcenia nie zależą od kąta θ ($u_\theta = 0$) i wyrażają się zależnościami

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \delta_{rz}^{\mu} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ \delta_{\theta z}^{\mu} &= 0, \quad \delta_{r\theta}^{\mu} = 0. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Gdyby odkształcenie zależało od kąta θ , to w płaszczyźnie r, z musiałyby występować skręcanie warstw materiału. Z doświadczeń wiemy, że cylindryczna próbka przed odkształceniem pozostaje również kołowa po odkształceniu, a to dowodzi, że odkształcenie

nie zależy od kąta θ .

Składowe odkształcenia we współrzędnych kulistych r, θ, φ dla przypadku ogólnego wyrażają się zależnościami

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta \right), \\ \delta_{\theta\varphi}^{\ell} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \sin \theta - u_\varphi \cos \theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right), \\ \delta_{r\varphi}^{\ell} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}, \\ \delta_{r\theta}^{\ell} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

W przypadku istnienia symetrii kulistej ($u_\varphi = u_\theta = 0$) wzory (4.47) redukują się do postaci

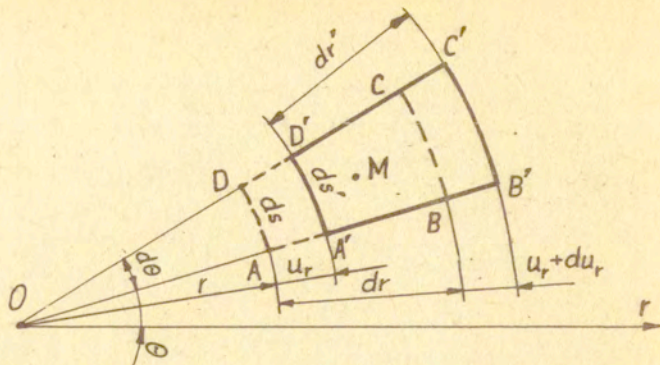
$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}, \\ \delta_{\theta\varphi}^{\ell} &= \delta_{r\varphi}^{\ell} = \delta_{r\theta}^{\ell} = 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Jeśli mamy do czynienia z płaskim stanem odkształcenia, to w płaszczyźnie prostopadłej do osi z wszystkie składowe odkształcenia zależne od osi z znikają. Można wówczas przyjąć biegunowy układ współrzędnych r, θ w płaszczyźnie odkształcenia. W układzie tym składowe odkształceń (4.45) redukują się do postaci

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \\ \delta_{r\theta}^{\ell} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Dla przypadku kołowsymetrycznego zmiany geometryczne elementu (rys. 4.17) zależą tylko od promienia r .

Element nie doznaje zmiany postaci. Kierunki promieniowy i obwodowy są kierunkami głównymi odkształceń.



Rys. 4.17. Odształcenie nieskończenie małego elementu płaskiego ABCD w otoczeniu punktu M

Odształcenie promieniowe $\epsilon_r = \frac{dr' - dr}{dr}$ i odkształcenie obwodowe $\epsilon_\theta = \frac{ds' - ds}{ds}$ ($dr' - dr = du_r$, $ds' - ds = (r + u_r)d\theta - r d\theta = u_r d\theta$) dla kołowsymetrycznego płaskiego stanu odkształcenia wynoszą

$$\epsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r}. \quad (4.50)$$

Warunek nierozdzielności odkształceń dla płaskiego kołowsymetrycznego stanu odkształcenia ($u_r = r \epsilon_\theta$, po zróżniczkowaniu względem r , $\frac{du_r}{dr} = \epsilon_\theta + r \frac{d\epsilon_\theta}{dr}$) wyrazi się zależnością

$$\epsilon_r = \epsilon_\theta + r \frac{d\epsilon_\theta}{dr}. \quad (4.51)$$

4.6. Intensywność odkształcenia

W analizie odkształceń plastycznych metali stosowane jest pojęcie intensywności odkształcenia postaciowego i intensywności odkształcenia. Intensywność odkształcenia inaczej nazywana jest odkształceniem zastępczym lub zredukowanym.

Intensywność odkształcenia postaciowego wyrażona jest za pomocą drugiego niezmiennika dewiatora odkształcenia zależnością

$$j_i^{\ell} = 2 \sqrt{\phi_2} \quad (4.52a)$$

Mnożnik 2 dobrany jest tak, aby dla czystego ścinania ($j_{xy}^{\ell} \neq 0$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = j_{yz}^{\ell} = j_{zx}^{\ell} = 0$) intensywność odkształcenia j_i^{ℓ} była równa odkształceniu postaciowemu j_{xy}^{ℓ} ($d_i^{\ell} = d_{xy}^{\ell}$). Wprowadzając drugi niezmiennik dewiatora odkształcenia ϕ_2 (4.30a)₂ do równania (4.52a) otrzymamy intensywność odkształcenia postaciowego

$$j_i^{\ell} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(j_{xy}^{\ell 2} + j_{yz}^{\ell 2} + j_{zx}^{\ell 2})} \quad (4.52b)$$

Intensywność odkształcenia postaciowego (4.52b) można również wyrazić za pomocą odkształcenia postaciowego oktaedrycznego (4.37b), wówczas mnożnik wynosi $\sqrt{\frac{3}{2}}$, a więc

$$j_i^{\ell} = \sqrt{\frac{3}{2}} j_{okt}^{\ell} \quad (4.52c)$$

Intensywność odkształcenia postaciowego można wyrazić za pomocą odkształceń głównych

$$j_i^{\ell} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad (4.52d)$$

Intensywność odkształcenia postaciowego (4.52a) tensorowo można zapisać

$$j_i^{\ell} = 2 \sqrt{\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}} = \sqrt{2 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} = \sqrt{2 e_{ij} e_{ij}} \quad (4.52e)$$

Mnożniki przy intensywności naprężeń stycznych $\sigma_i^{\ell} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} \cdot S_{ij}}$ (dla ścinania $\sigma_i^{\ell} = k$) i przy intensywności odkształceń postaciowych $d_i^{\ell} = \sqrt{2 e_{ij} e_{ij}}$ (dla ścinania $d_i^{\ell} = d_{xy}^{\ell}$) dobierane są tak, aby przyrost pracy odkształcenia plastycznego oparty na intensywnościach $dL^p = \sigma_i^{\ell} d\varepsilon_i$ był równy przyrostowi pracy plastycznej opartej na dewiatorach $dL^p = S_{ij} \cdot e_{ij}$ ($\sigma_{kk}^{\ell} = 0$, $\varepsilon_{kk} = 0$), a więc

$$\sigma_i^{\ell} d\varepsilon_i = S_{ij} e_{ij} \quad (4.53)$$

Intensywność odkształcenia definiowana jest zależnością

$$\xi_i^P = \sqrt{\frac{4}{3} \sigma_2^2} , \quad (4.54a)$$

która w rozwinięciu ma postać

$$\xi_i^P = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)} , \quad (4.54b)$$

a w zapisie tensorowym

$$\xi_i^P = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^P e_{ij}^P} . \quad (4.54c)$$

Mnożnik $\sqrt{\frac{4}{3}}$ dobrany jest tak, aby intensywność odkształcenia ξ_i^P dla prostego rozciągania ($\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -0,5\varepsilon$) była równa odkształceniu głównemu ε_1 ($\xi_i^P = \varepsilon_1 = \varepsilon$). Podobnie intensywność naprężenia $\sigma_i^P = \sqrt{3\sigma_2^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{S_{ij} S_{ij}}$ (3.96) dla prostego rozciągania ($\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) równa się głównemu naprężeniu rozciągającemu $\sigma_i^P = \sigma = \sigma_1$. Intensywność odkształcenia (4.54b) wyrażona za pomocą odkształceń głównych ma postać

$$\xi_i^P = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} . \quad (4.54d)$$

$$\text{Intensywność odkształcenia } \xi_i^P = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} \quad (4.54c)$$

we współrzędnych walcowych r, θ, z osiowo-symetrycznych ($i, j = r, \theta, z$) wyraża się

$$\xi_i^P = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_z^2 + 2\varepsilon_{rz}} , \quad (4.55)$$

$$2\varepsilon_{rz} = \sigma_{rz}^e ,$$

a we współrzędnych kulistych r, θ, φ — kulistej symetrii wyraża się zależnością

$$\xi_i^P = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{r\theta}^2} . \quad (4.56)$$

Przyrost intensywności odkształcenia można zapisać za pomocą przyrostów odkształceń liniowych

$$d\varepsilon_i^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2} \quad (4.57a)$$

lub za pomocą przyrostów odkształceń logarytmicznych

$$d\varphi_i^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2 + d\varphi_3^2}, \quad (4.57b)$$

które po scałkowaniu odpowiednio wyrażają się

$$\varepsilon_i^p = \int_0^{\varepsilon_i^p} d\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}, \quad (4.57c)$$

$$\varphi_i^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}.$$

Intensywność odkształcenia (4.57c) można otrzymać podstawiając związki fizyczne (6.41a)

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2}{3} E_p (\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \frac{2}{3} E_p (\varphi_2 - \varphi_3),$$

$$\sigma_3 - \sigma_1 = \frac{2}{3} E_p (\varphi_3 - \varphi_1),$$

do warunku plastyczności

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

i przyrównaniu go do związku fizycznego

$$\sigma_p = E_p \varphi_p$$

i uwzględnieniu warunku nieściśliwości materiału

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0.$$

Operacje te dają zależność

$$\varphi_p = \frac{2}{3} \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}{2}}$$

i następnie postać końcową odkształcenia logarytmicznego zredukowanego

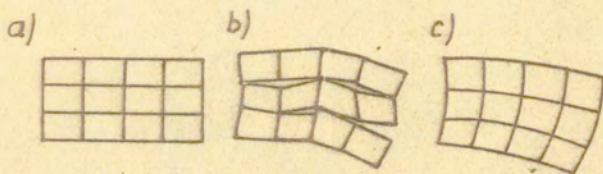
$$\varphi_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}.$$

4.7. Równania ciągłości odkształceń

Równania ciągłości odkształceń nazywane są warunkami zgodności odkształceń lub warunkami całkowalności czy też

warunkami nierozdzielności.

Przemieszczenia u_x, u_y, u_z , a tym samym i odkształcenia $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}^x, \varepsilon_{yz}^y, \varepsilon_{zx}^z$ są funkcjami współrzędnych x, y, z . Aby równania odkształceń (4.12) dawały układ ciągłych rozwiązań dla trzech składowych przemieszczeń u_x, u_y, u_z , to na składowe odkształcenia muszą być nałożone pewne warunki, czyli muszą być od siebie w jakiś sposób zależne. Wówczas wszystkie elementy prostopadłościenne odkształcają się tak, że nie ma szczelin po odkształceniu (rys. 4.18c). Wzajemne powiązanie składowych stanu odkształcenia zapewnia przyleganie odkształconych elementarnych prostopadłościanów, czyli ciągłość materii. Geometryczne uzasadnienie ciągłości materiału podane na rysunku 4.18.



Rys. 4.18. Szcik ilustrujący ciągłość materiału:
a) elementy przed odkształceniem, b) elementy po odkształceniu w przypadku braku ciągłości materiału, c) elementy po odkształceniu, gdy zachowana jest ciągłość materiału

Warunki ciągłości (nierozdzielności) materiału podał de Saint Venant w 1860 r. w postaci ogólnego równania tensorowego

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0. \quad (4.58)$$

Równanie (4.58) otrzymuje się z tensora małych odkształceń $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ przez różniczkowanie

$$\varepsilon_{ij,kl} = \frac{1}{2}(u_{i,j,kl} + u_{i,kl,j})$$

i zmianę wskaźników oznaczających różniczkowanie

$$\varepsilon_{kl,ij} = \frac{1}{2}(u_{k,lij} + u_{l,kij}),$$

$$\varepsilon_{jl,ik} = \frac{1}{2}(u_{j,lik} + u_{l,jik}),$$

$$\varepsilon_{ik,jl} = \frac{1}{2}(u_{i,kjl} + u_{k,ijl}).$$

Równanie (4.58) ma 81 rozwiązań (3^4 ; $i, j, k, l = 1, 2, 3$), ale tylko 6 jest różnych. Pozostałe równania są tożsamościowo równe.

Rozpisując równanie (4.58) względem wskaźników $i, j, k, l = x, y, z$ otrzymamy równania ($\sigma_{xy}^e = 2 \varepsilon_{xy}$) na jednoznaczne i ciągłe rozwiązanie odkształceń

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial x}, \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Równania (4.59) można otrzymać z równań różniczkowych odkształceń Cauchy'ego (4.12) przez odpowiednie różniczkowanie i proste działania algebraiczne.

Równania ciągłości odkształceń można wyrazić za pomocą naprężeń stosując związki fizyczne dla liniowej sprężystości Hooke'a lub też równania równowagi.

4.8. Prędkość płynięcia i odkształcenia

W teorii plastyczności wygodnie jest posługiwać się prędkościami płynięcia i odkształcenia materiału niż przemieszczeniami i odkształceniami. A to dlatego, że teoria płynięcia plastycznego podaje związki między prędkościami odkształceń i naprężeniami. Również warunki brzegowe podawane są często w prędkościach np. prędkość ruchu narzędzia lub prędkość ruchu materiału przy ciągnięciu prętów i drutu.

Prędkość płynięcia materiału v w rozpatrywanym punkcie podawana jest za pomocą składowych v_x, v_y, v_z równoległych do osi współrzędnych x, y, z . Składowe prędkości płynięcia są funkcjami współrzędnych x, y, z i czasu t

$$v_x = v_x(x, y, z, t), \quad v_y = v_y(x, y, z, t), \quad v_z = v_z(x, y, z, t). \quad (4.60)$$

Różniczkując zależność (4.60)₁ otrzymamy przyrost prędkości wzdłuż osi x

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz,$$

który podzielony przez nieskończenie mały czas dt daje przyspieszenie wzdłuż osi x

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad (4.61a)$$

gdzie $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$; $\frac{\partial v_x}{\partial t}$ jest pochodną

lokalną, $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$ jest pochodną materialną.

Przyspieszenie a_x można wyrazić za pomocą przemieszczenia

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_{i,j} v_j = \frac{d^2 u_x}{dt^2}. \quad (4.61b)$$

Pozostałe składowe przyspieszenia a_y i a_z wyprowadza się analogicznie. Składowe a_x, a_y, a_z wektora przyspieszenia a

są pochodnymi czasowymi składowych v_x^e, v_y^e, v_z^e wektora pływnięcia v^e .

Składowe prędkości pływnięcia v_x^e, v_y^e, v_z^e są przyrostami składowych przemieszczeń du_x, du_y, du_z dowolnego punktu $M(x, y, z)$ zachodzącymi w nieskończenie małym czasie dt

$$v_x^e = \frac{du_x}{dt}, \quad v_y^e = \frac{du_y}{dt}, \quad v_z^e = \frac{du_z}{dt}, \quad (4.62a)$$

które ogólnie można zapisać

$$v_i^e = \frac{du_i}{dt}. \quad (4.62b)$$

lub w dalszym rozwinięciu (we współrzędnych Eulera)

$$v_i^e = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j} v_j^e, \quad (4.62c)$$

$$i, j = x, y, z.$$

Składowe przyrostów przemieszczeń dowolnego punktu wyrażają się zależnościami (4.62a)

$$du_x = v_x^e dt, \quad du_y = v_y^e dt, \quad du_z = v_z^e dt,$$

a ich pochodne względem współrzędnych x, y, z są przyrostami odkształceń wzdłuż osi współrzędnych

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x}(du_x) = \frac{\partial}{\partial x}(v_x^e dt) = \frac{\partial v_x^e}{\partial x} dt, \\ d\varepsilon_y &= \frac{\partial}{\partial y}(du_y) = \frac{\partial}{\partial y}(v_y^e dt) = \frac{\partial v_y^e}{\partial y} dt, \\ d\varepsilon_z &= \frac{\partial}{\partial z}(du_z) = \frac{\partial}{\partial z}(v_z^e dt) = \frac{\partial v_z^e}{\partial z} dt, \\ d\delta_{xy}^e &= \frac{\partial}{\partial y}(du_x) + \frac{\partial}{\partial x}(du_y) = \frac{\partial v_x^e}{\partial y} dt + \frac{\partial v_y^e}{\partial x} dt, \\ d\delta_{yz}^e &= \frac{\partial}{\partial z}(du_y) + \frac{\partial}{\partial y}(du_z) = \frac{\partial v_y^e}{\partial z} dt + \frac{\partial v_z^e}{\partial y} dt, \\ d\delta_{zx}^e &= \frac{\partial}{\partial x}(du_z) + \frac{\partial}{\partial z}(du_x) = \frac{\partial v_z^e}{\partial x} dt + \frac{\partial v_x^e}{\partial z} dt. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Natomiast przyrosty odkształcenia (4.63) zachodzące w małym czasie dt ($\frac{d\varepsilon_x}{dt} = \dot{\varepsilon}_x$ itd.) są prędkościami odkształceń

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{\partial v_x^e}{\partial x}, & \dot{\varepsilon}_y &= \frac{\partial v_y^e}{\partial y}, & \dot{\varepsilon}_z &= \frac{\partial v_z^e}{\partial z}, \\ j_{xy}^e &= \frac{\partial v_x^e}{\partial y} + \frac{\partial v_y^e}{\partial x}, \\ j_{yz}^e &= \frac{\partial v_y^e}{\partial z} + \frac{\partial v_z^e}{\partial y}, \\ j_{zy}^e &= \frac{\partial v_z^e}{\partial y} + \frac{\partial v_y^e}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Równania (4.64) możemy zapisać krócej w postaci tensora prędkości odkształcenia ($\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}$)

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j^e}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^e}{\partial x_j} \right) \quad (4.65a)$$

lub w postaci macierzy składowych prędkości odkształcenia

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = T_{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \dot{\varepsilon}_x & \frac{1}{2} j_{xy}^e & \frac{1}{2} j_{xz}^e \\ \frac{1}{2} j_{yx}^e & \dot{\varepsilon}_y & \frac{1}{2} j_{yz}^e \\ \frac{1}{2} j_{zx}^e & \frac{1}{2} j_{zy}^e & \dot{\varepsilon}_z \end{vmatrix}, \quad (4.65b)$$

gdzie $\frac{1}{2} j_{xy}^e = \dot{\varepsilon}_{xy}$, $\frac{1}{2} j_{xz}^e = \dot{\varepsilon}_{xz}$ itd.

Tensor prędkości odkształcenia (4.65a) jest symetryczną częścią gradientu $v_{i,j}^e$ wektora prędkości v^e

$$\frac{\partial v_i^e}{\partial x_j} = v_{ij}^e = v_{(i,j)}^e + v_{[i,j]}^e = \frac{1}{2}(v_{ij}^e + v_{ji}^e) + \frac{1}{2}(v_{ij}^e - v_{ji}^e) = \dot{\varepsilon}_{ij} + \omega_{ij}^e \quad (4.66)$$

Jeśli symetryczna część gradientu $v_{(i,j)}^e = \frac{1}{2}(v_{i,j}^e + v_{j,i}^e)$ znika, cząsteczka materiału doznaje tylko obrotu $\omega_{[i,j]}^e =$

$$= \frac{1}{2}(v_{i,j}^e - v_{j,i}^e).$$

Przyrosty odkształceń $d\varepsilon_x, d\varepsilon_y, \dots, d\varepsilon_{zx}^e$ odnoszą się

do chwilowego (aktualnego) stanu odkształcenia, nie są natomiast różniczkami tensora odkształcenia (4.17). W przypadku bardzo małego odkształcenia można przyjąć, że przyrosty są różniczkami i można je całkować

$$\int d\varepsilon_x, \int d\varepsilon_y, \dots, \int d\varepsilon_{zx},$$

otrzymując składowe odkształcenia $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \varepsilon_{zx}$

($\varepsilon_{ij} = \int d\varepsilon_{ij}$). Założenie o małości odkształceń powoduje przyrównanie pochodnych cząstkowych (przestrzennych) do pochodnych zwyczajnych $\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \frac{d}{d\bar{t}}$ i wówczas $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \bar{t}} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{d\bar{t}}$.

4.8.1. Rozłożenie tensora prędkości odkształcenia na dewiator i na tensor kulisty

Tensor prędkości odkształcenia $\dot{\varepsilon}_{ij}$ rozkłada się na dewiator prędkości odkształcenia \dot{e}_{ij} i na kulisty tensor prędkości odkształcenia $\frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij}$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij} + \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij}, \quad (4.67)$$

gdzie $\dot{\varepsilon}_{kk} = \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z$ jest miarą prędkości dylatacji. Dla materiału nieściśliwego miara prędkości dylatacji jest równa zeru ($\dot{\varepsilon}_{kk} = 0$). Dewiator prędkości odkształcenia wyraża się zależnością

$$\dot{e}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij}. \quad (4.68)$$

4.8.2. Prędkość odkształcenia we współrzędnych walcowych

Składowe prędkości odkształcenia we współrzędnych walcowych r, θ, z mają postać

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_r &= \frac{\partial v_r^e}{\partial r}, & \dot{\xi}_\theta &= \frac{1}{r} \left(v_r^e + \frac{\partial v_\theta^e}{\partial \theta} \right), & \dot{\xi}_z &= \frac{\partial v_z^e}{\partial z}, \\ \dot{\xi}_{r,\theta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r^e}{\partial \theta} - v_\theta^e \right) + \frac{\partial v_\theta^e}{\partial r} \right], \\ \dot{\xi}_{\theta,z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta^e}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z^e}{\partial \theta} \right), \\ \dot{\xi}_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r^e}{\partial z} + \frac{\partial v_z^e}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Natomiast składowe prędkości odkształcenia we współrzędnych walcowych dla zagadnień osiowo-symetrycznych przybierają postać (znikają składowe zależne od kąta θ)

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_r &= \frac{\partial v_r^e}{\partial r}, & \dot{\xi}_\theta &= \frac{v_\theta^e}{r}, & \dot{\xi}_z &= \frac{\partial v_z^e}{\partial z}, \\ \dot{\xi}_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r^e}{\partial z} + \frac{\partial v_z^e}{\partial r} \right), \\ 2\dot{\xi}_{rz} &= d_{rz}^e. \end{aligned} \quad (4.70)$$

4.8.3. Prędkość odkształcenia dla dużych odkształceń

Dla powolnych procesów odkształcenia większe znaczenie mają przyrosty odkształcenia $d\varepsilon_{ij}$ niż prędkość odkształcenia $\dot{\xi}_{ij}$ (w doświadczeniu nie można zmierzyć prędkości cząstki). Tensor przyrostu odkształcenia mierzony jest względem stanu aktualnego i jest definiowany następująco:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (du_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (du_j) \right], \quad (4.71)$$

gdzie du_1, du_2 są składowymi wektora przyrostu odkształcenia. Nieskończenie małe przyrosty odkształceń tworzą tensor przyrostu odkształcenia, który można przedstawić w postaci macierzy

$$d\varepsilon_{ij} = T_{d\varepsilon} = \begin{vmatrix} d\varepsilon_x & \frac{1}{2} d d_{xy}^e & \frac{1}{2} d d_{xz}^e \\ \frac{1}{2} d d_{yx}^e & d\varepsilon_y & \frac{1}{2} d d_{yz}^e \\ \frac{1}{2} d d_{zx}^e & \frac{1}{2} d d_{zy}^e & d\varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (4.72)$$

Tensor (4.71) służy do opisywania skończonych (dużych) odkształceń. I tak, dla prostego rozciągania (lub ściskania) przyrost wydłużenia w kierunku osi x (przemieszczenie brzo- gu próbki $dl = dL$, chwilowa długość próbki l - chwilowa współrzędna) wynosi

$$d\varepsilon_x = \frac{dl}{l} \quad (4.73a)$$

Całkowite wydłużenie próbki jest całką w granicach od długości początkowej l_0 do długości końcowej l_1

$$\varepsilon_x = \int d\varepsilon_x = \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_1}{l_0} = \ln \frac{l_0 + dl}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon) \quad (4.73b)$$

i nazywane jest naturalnym wydłużeniem lub odkształceniem rzeczywistym.

Prędkość odkształcenia względnego jest zmianą przyrostu odkształcenia względnego $d\varepsilon$ w jednostce czasu dt

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\frac{dl}{l_0}}{dt} = \frac{v}{l_0} [s^{-1}], \quad (4.74)$$

gdzie $v = \frac{dl}{dt}$ jest prędkością ruchu narzędzia, $dl = l_1 - l_0$ jest bezwzględnym przyrostem długości próbki.

Podobnie prędkość odkształcenia rzeczywistego dla ściskania będzie równa

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\frac{dh}{h}}{dt} = \frac{v}{h} [s^{-1}], \quad (4.75)$$

gdzie $d\varphi = \frac{dh}{h}$, $\varphi = \int_{h_0}^{h_1} \frac{dh}{h} = \ln \frac{h_1}{h_0}$, h_0 jest wysokością próbki przed odkształceniem, h_1 - po odkształceniu, v jest prędkością suwaka prasy.

Średnią prędkość odkształcenia naturalnego (rzeczywiste- go) wyznaczamy ze wzoru

$$\dot{\varphi}_s = \frac{\varphi}{t}, \quad (4.76)$$

gdzie t jest czasem odkształcania próbki, φ jest całkowitym odkształceniem naturalnym próbki.

4.8.4. Intensywność prędkości odkształcania

W teorii plastyczności używane jest pojęcie intensywności prędkości odkształceń postaciowych i intensywności prędkości odkształceń. Definiowane są one w sposób analogiczny do intensywności odkształceń.

Intensywność prędkości odkształcania postaciowego związana jest z drugim niezmiennikiem dewiatora prędkości odkształcania $\dot{\phi}_2 = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$ zależnością

$$\dot{J}_i^{\phi} = 2 \sqrt{\dot{\phi}_2}, \quad (4.77a)$$

która po rozpisaniu tensorów prędkości odkształcania $\dot{\epsilon}_{ij}$ ma postać

$$\dot{J}_i^{\phi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2 + \frac{3}{2} (\dot{J}_{xy}^2 + \dot{J}_{yz}^2 + \dot{J}_{zx}^2)}, \quad (4.77b)$$

a ogólnie w zapisie tensorowym wyrazi się

$$\dot{J}_i^{\phi} = \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}. \quad (4.77c)$$

Intensywność prędkości odkształcania definiowana jest zależnością

$$\dot{\epsilon}_i = \sqrt{\frac{4}{3} \dot{\phi}_2}, \quad (4.78a)$$

która w zapisie jawnym ma postać

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2 + \frac{3}{2} (\dot{J}_{xy}^2 + \dot{J}_{yz}^2 + \dot{J}_{zx}^2)}, \quad (4.78b)$$

a w zapisie tensorowym

$$\dot{\xi}_i = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\xi}_{ij} \dot{\xi}_{ij}} \quad (4.78c)$$

Często spotykane jest pojęcie intensywności przyrostu odkształcenia

$$\bar{d}\xi_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)^2 + (d\varepsilon_y - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (dd_{xy}^2 + dd_{yz}^2 + dd_{zx}^2)}, \quad (4.79a)$$

która w zapisie tensorowym ma postać

$$\bar{d}\xi_i = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij}} \quad (4.79b)$$

W przypadku przyjęcia plastycznych przyrostów odkształceń będziemy mieć do czynienia z intensywnością przyrostu plastycznych odkształceń. Intensywność przyrostu odkształcenia $\bar{d}\xi_i$ nie jest równa przyrostowi intensywności odkształcenia $d\xi_i$.

Intensywność prędkości odkształcenia (4.78) we współrzędnych walcowych r, θ, z osiowo-symetrycznych ma postać

$$\dot{\xi}_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\dot{\xi}_r^2 + \dot{\xi}_\theta^2 + \dot{\xi}_z^2 + 2\dot{\xi}_{rz}^2}, \quad (4.80)$$

gdzie $\dot{\xi}_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}$, $\dot{\xi}_\theta = \frac{v_\theta}{r}$, $\dot{\xi}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}$, $\dot{\xi}_{rz} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)$,

a we współrzędnych kulistych r, θ, φ — kulistej symetrii wyraża się zależnością

$$\dot{\xi}_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\dot{\xi}_r^2 + \dot{\xi}_\theta^2 + \frac{1}{2} \dot{\xi}_{r\theta}^2} \quad (4.81)$$

Intensywność prędkości odkształcenia $\dot{\xi}_i$ nazywana jest prędkością odkształcenia zastępczego i często definiowana jest zależnością [13]

$$\dot{\xi}_i = \frac{df}{dt} \quad (4.82a)$$

gdzie $D = \sigma_p \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{1j} \dot{\epsilon}_{1j}}$ jest jednostkową mocą odkształcenia plastycznego, która z drugiej strony jest równa

$$D = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + \sigma_z \dot{\epsilon}_z + 2\tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy} + 2\tau_{yz} \dot{\gamma}_{yz} + 2\tau_{zx} \dot{\gamma}_{zx},$$

$$\sigma_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

jest granicą plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu.

Z definicji tej wynika, że prędkość odkształcenia zastępczego $\dot{\epsilon}_1$ jest następującą funkcją składowych tensora prędkości odkształcenia:

$$\dot{\epsilon}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_y^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + 2\dot{\gamma}_{xy}^2 + 2\dot{\gamma}_{yz}^2 + 2\dot{\gamma}_{zx}^2}. \quad (4.82b)$$

4.9. Warunek nieściśliwości materiału

W teorii plastyczności przyjmuje się, że metale są nieściśliwe, ponieważ zmiana objętości materiału powstała w wyniku odkształcenia jest znikomo mała. Przyjęcie stałej objętości materiału znacznie ułatwia obliczanie odkształceń i całą analizę stanu odkształcenia materiału. Warunek nieściśliwości materiału można wyrazić za pomocą odkształceń i za pomocą prędkości odkształceń.

4.9.1. Wyrażenie warunku stałej objętości za pomocą odkształceń

Względna zmiana objętości (dylatacja objętości) elementu prostopadłościennego wyrażona zależnością

$$\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_{kk} = \text{div } u$$

jest znikomo mała i można ją pominąć, czyli przyrównać do zera

$$\epsilon_{kk} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0. \quad (4.83)$$

Warunek (4.83) mówi, że suma odkształceń w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach układu osi x, y, z jest równa zeru. Jeśli znamy odkształcenie w kierunku osi x i y , to możemy obliczyć trzecią składową odkształcenia wzdłuż osi z , ε_z . Warunek (4.83) możemy zapisać w przyrostach odkształceń plastycznych występujących wzdłuż osi układu współrzędnych x, y, z

$$d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_y^p + d\varepsilon_z^p = 0 \quad (4.84a)$$

lub wzdłuż osi głównych

$$d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = 0. \quad (4.84b)$$

Warunek nieściśliwości materiału dla osiowej symetrii wyraża się

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0, \quad (4.85)$$

gdzie $\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$, $\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}$, $\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

A. Wyrażenie warunku stałej objętości przez odkształcenia względne ε (4.1)

Przyjmując objętość prostopadłościanu przed odkształceniem $V_0 = dx \, dy \, dz$ i po odkształceniu $V_1 = dx_1 \, dy_1 \, dz_1$ ($dx_1 = dx(1 + \varepsilon_x)$, $dy_1 = dy(1 + \varepsilon_y)$, $dz_1 = dz(1 + \varepsilon_z)$) za równe sobie $V_0 = V_1$

$$dx \, dy \, dz = dx(1 + \varepsilon_x) \, dy(1 + \varepsilon_y) \, dz(1 + \varepsilon_z),$$

to otrzymamy złożoną zależność między składowymi odkształcenia względnego ε tworzącymi warunek nieściśliwości

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z = 0. \quad (4.86)$$

B. Wyrażenie warunku stałej objętości za pomocą współczynnika

odkształcenia λ (4.2)

Biorąc pod uwagę stałą objętość

$$V_0 = V_1,$$

$$dx \, dy \, dz = dx_1 \, dy_1 \, dz_1,$$

otrzymamy ostateczną postać warunku nieściśliwości wyrażoną za pomocą współczynnika odkształcenia $\lambda_1 = \frac{dx_1}{dx}$

$$\frac{dx_1}{dx} \frac{dy_1}{dy} \frac{dz_1}{dz} = 1,$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (4.87)$$

Indeksy 1,2,3 mogą przybierać oznaczenie x,y,z .

C. Wyrażenie warunku stałej objętości za pomocą odkształcenia logarytmicznego φ (4.3)

Biorąc pod uwagę wyrażenie

$$\frac{dx_1}{dx} \frac{dy_1}{dy} \frac{dz_1}{dz} = 1$$

i logarytmując go, otrzymamy warunek nieściśliwości materiału w postaci

$$\ln \lambda_1 + \ln \lambda_2 + \ln \lambda_3 = 0,$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0. \quad (4.88)$$

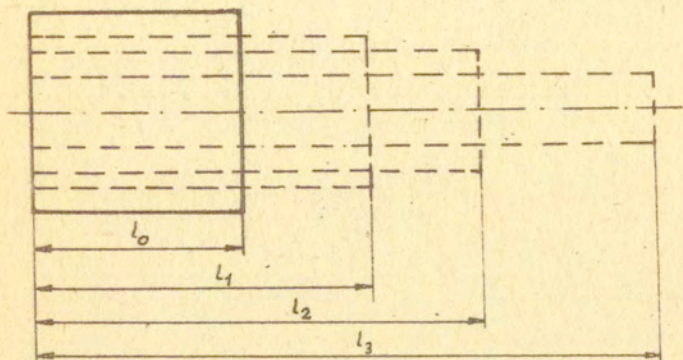
Warunek stałej objętości wyrażony za pomocą odkształceń logarytmicznych (4.88) jest bardzo wygodny do stosowania.

Wynika z niego, że jedno odkształcenie jest innego znaku np. przy kuciu, spęczaniu, walcowaniu — $\varphi_1 = -(\varphi_2 + \varphi_3)$.

Odkształcenia logarytmiczne są addytywne, tzn. można je dodawać dla otrzymania całkowitego odkształcenia składającego się z kilku operacji odkształcenia materiału (np. wlewka).

Przykład

Przewalcujeśmy wlewek na kęs i dalej kęs na pręt i następnie ten pręt na pręt (trzy walcowania). W pierwszym przepuszczeniu mamy odkształcenie 50%, w drugim - 20%, a w trzecim - 60%. Jaki będzie całkowity stopień odkształcenia pręta?



Rys. 4.19. Szkic ilustrujący odkształcenie wlewka

Rozwiązanie

1. Obliczenie całkowitego odkształcenia względnego ε .

Zgodnie z definicją odkształcenia względnego ε mamy

$$\begin{aligned} \varepsilon_{03} &= \frac{l_3 - l_0}{l_0} = \frac{l_3}{l_0} - \frac{l_0}{l_0} = \frac{l_3}{l_0} - \frac{l_2}{l_0} + \frac{l_2}{l_0} - \frac{l_1}{l_0} + \frac{l_1}{l_0} - \frac{l_0}{l_0} = \\ &= \frac{l_3 - l_2}{l_0} + \frac{l_2 - l_1}{l_0} + \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{l_3 - l_2}{l_2} \frac{l_2}{l_1} \frac{l_1}{l_0} + \frac{l_2 - l_1}{l_1} \frac{l_1}{l_0} + \frac{l_1 - l_0}{l_0}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{03} = \varepsilon_{23}(\varepsilon_{12} + 1)(\varepsilon_{01} + 1) + \varepsilon_{12}(\varepsilon_{01} + 1) + \varepsilon_{01},$$

gdzie $\varepsilon_{23} = \frac{l_3 - l_2}{l_2}$, $\varepsilon_{12} = \frac{l_2 - l_1}{l_1}$, $\varepsilon_{01} = \frac{l_1 - l_0}{l_0}$, $\frac{l_2}{l_1} = \varepsilon_{12} + 1$, $\frac{l_1}{l_0} = \varepsilon_{01} + 1$.

Zatem nie ma addytywności cząstkowych odkształceń względnych

$$\varepsilon_{03} = \frac{l_3 - l_0}{l_0} \neq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{l_1 - l_0}{l_0} + \frac{l_2 - l_1}{l_1} + \frac{l_3 - l_2}{l_2}.$$

Całkowite odkształcenie względne będzie równe

$$\varepsilon_{03} = 0,6(0,2+1)(0,5+1) + 0,2(0,5+1) + 0,5 = 1,08 + 0,3 + 0,5 = 1,88.$$

2. Obliczenie całkowitego współczynnika odkształcenia

$$\lambda_{03} = \frac{l_3}{l_0} = \frac{l_3}{l_2} \frac{l_2}{l_4} \frac{l_4}{l_0} = \lambda_{23} \lambda_{12} \lambda_{01},$$

$$\lambda_{03} = (\varepsilon_{23} + 1)(\varepsilon_{12} + 1)(\varepsilon_{01} + 1) = (0,6+1)(0,2+1)(0,5+1) = 2,88,$$

gdzie $\lambda_{23} = \varepsilon_{23} + 1$, $\lambda_{12} = \varepsilon_{12} + 1$, $\lambda_{01} = \varepsilon_{01} + 1$.

3. Obliczenie całkowitego odkształcenia logarytmicznego φ

$$\varphi_{03} = \ln \frac{l_3}{l_0} = \ln \left(\frac{l_3}{l_2} \frac{l_2}{l_4} \frac{l_4}{l_0} \right) = \ln \frac{l_3}{l_2} + \ln \frac{l_2}{l_4} + \ln \frac{l_4}{l_0},$$

$$\varphi_{03} = \varphi_{23} + \varphi_{12} + \varphi_{01}.$$

Istnieje addytywność częstkowych odkształceń logarytmicznych.

Wartość całkowitego odkształcenia logarytmicznego jest równa

$$\varphi_{03} = \ln(0,6+1) + \ln(0,2+1) + \ln(0,5+1) = 0,47 + 0,1823 + 0,4055 = 1,0578,$$

gdzie $\varphi_{23} = \ln(\varepsilon_{23} + 1)$, $\varphi_{12} = \ln(\varepsilon_{12} + 1)$, $\varphi_{01} = \ln(\varepsilon_{01} + 1)$.

4.9.2. Wyrażenie warunku stałej objętości materiału za pomocą prędkości odkształceń

Warunek nieściśliwości materiału (stałej objętości) wygodnie jest przedstawić za pomocą prędkości odkształceń. Wówczas dywergencja pola wektorowego prędkości płynięcia materiału v^e jest równa zero

$$\operatorname{div} v^e = \sum_j \frac{\partial v_j^e}{\partial x_j} = \frac{\partial v_x^e}{\partial x} = \frac{\partial v_y^e}{\partial y} + \frac{\partial v_z^e}{\partial z} = \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}_{kk} = 0, \quad (4.89)$$

wskaźnik $j = x, y, z$.

Warunek nieściśliwości $\dot{\varepsilon}_{kk}$ dla osiowej symetrii wyraża się zależnością

$$\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\theta + \dot{\varepsilon}_z = 0, \quad (4.90)$$

gdzie $\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}$, $\dot{\epsilon}_\theta = \frac{v_r}{r}$, $\dot{\epsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}$.

Warunek nieściśliwości materiału (4.89) można wyprowadzić z prawa zachowania masy. Masa $m = \int \rho(x, y, z, t) dV(x, y, z, t)$ jest ciągłą funkcją objętości i gęstości ciała. Zasada zachowania masy głosi, że masa ciała nie ulega zmianie w trakcie jego ruchu, czyli przed i po odkształceniu musi być taka sama w każdym czasie i dla dowolnej objętości. Zatem przyjmuje się, że zmiana masy m zawartej w objętości V w czasie musi być równa zero, co oznacza, że pochodna materialna masy

$$m = \int \rho dV \text{ jest równa zero, } \frac{dm}{dt} = 0$$

$$m = \left(\int \rho dV \right) = 0. \quad (4.91)$$

Pochodna materialna całki objętościowej (4.91) jest równa

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho v_j \lambda_j dS = 0, \quad (4.92)$$

gdzie $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ jest zmianą gęstości cząstki ciała po czasie, $\int_S \rho v_j \lambda_j dS$ przedstawia zmianę objętości ciała w czasie ($dV = v_j \lambda_j dt dS$ — przyrost objętości w czasie dt), v_j jest wektorem zmiany prędkości objętości ciała — opisuje ruch elementu dS , λ_j jest wektorem normalnym do powierzchni S ograniczonej objętością V — orientuje element powierzchni dS .

Jeżeli gęstość materiału $\rho \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \right]$, która w ogólności zależy od współrzędnych x, y, z i od czasu t , $\rho = \rho(x, y, z, t)$ jest stała, $\rho = \text{const}$, to różniczka gęstości $d\rho$ (pochodna materialna $\dot{\rho} = 0$) jest równa zero

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz = 0, \quad (4.93a)$$

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0,$$

co w skrócie wyrazi się zależnością

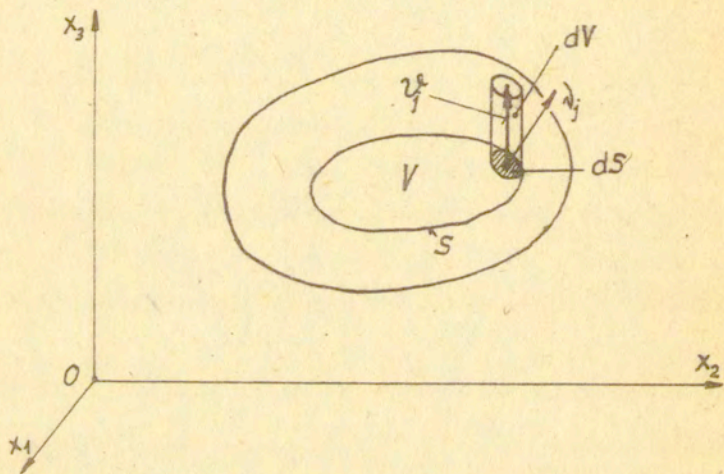
$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{V}_j^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad (4.93b)$$

Wyrażenia $\frac{dx}{dt} = \mathcal{V}_x^{\varphi}$, $\frac{dy}{dt} = \mathcal{V}_y^{\varphi}$, $\frac{dz}{dt} = \mathcal{V}_z^{\varphi}$ są składowymi prędkościami cząstki materiału.

Zgodnie z twierdzeniem Gaussa-Ostrogradskiego, że

$$\int_S \mathcal{V}_j^{\varphi} \nu_j dS = \int_V \operatorname{div} \mathcal{V}_j^{\varphi} dV \quad \text{i tym, że objętość } V \text{ wybrana}$$

była dowolnie w przestrzeni ciała, to przy założeniu, że funkcja φ jest ciągłą funkcją miejsca, to jeśli równanie (4.92) spełnione jest całkowo, to i spełnione jest również w każdym elemencie.



Rys. 4.20. Ilustracja do wzoru (4.92): V - objętość rozważanego ciała organicznego powierzchnię S , dV - element objętości, \mathcal{V}_j^{φ} - wektor prędkości zmiany objętości dV , ν_j - wektor normalny orientujący powierzchnię dS elementu dV

Wówczas równanie (4.92) można napisać

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \operatorname{div} \mathcal{V}_j^{\varphi} = 0, \quad (4.94)$$

gdzie $\operatorname{div} v_j^e = \partial_j v_j^e = v_{j,j}^e = \frac{\partial v_j^e}{\partial x_j}$.

Jeśli ośrodek (ciało) jest nieściśliwy ($\rho = \text{const}$, $\dot{\xi} = 0$) (4.93), to równanie (4.94) redukuje się do prostej postaci

$$\operatorname{div} v_j^e = 0, \quad (4.95a)$$

czyli ostatecznie mamy znany już nam warunek nieściśliwości materiału

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x^e}{\partial x} + \frac{\partial v_y^e}{\partial y} + \frac{\partial v_z^e}{\partial z} &= 0, \\ \dot{\xi}_x + \dot{\xi}_y + \dot{\xi}_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.95b)$$

4.10. Teoria dużych odkształceń plastycznych

Duże odkształcenia nazywane są odkształceniami skończonymi. Można je rozpatrywać w układzie krzywoliniowym lub w układzie współrzędnych prostokątnych kartezjańskich. Wygodnie jest analizę odkształceń przeprowadzać w układzie współrzędnych prostokątnych, a później uogólnić na układy krzywoliniowe. Analiza w układzie prostokątnym jest prostsza i praktyczniejsza.

Do opisywania dużych odkształceń stosuje się dwa opisy:

1. opis materialny (J.L.Lagrange'a) - ruch cząstek materialnych opisuje się za pomocą współrzędnych początkowych a_i (np. milicjant stojący na skrzyżowaniu ulic i obserwujący ruch samochodów),
2. opis przestrzenny (L.Eulera) - ruch cząstek materialnych opisuje się za pomocą współrzędnych w danej chwili czasu x_i (np. kierowca w jadącym samochodzie).

Przyjmujemy, że materia naszego analizowanego ciała jest rozmieszczona w sposób ciągły, pomijamy strukturę cząsteczkową ciała. Ciało to spełnia warunki kontinuum materialnego, a za-

tem jest ciałem teoretycznym i wyidealizowanym.

Funkcja opisująca stan odkształcenia powinna być:

- rosnąca,
- dawać wartość zero, jeśli nie ma odkształcenia ($l_i = l_0$),
- wygodna w stosowaniu, a więc być addytywna,
- obiektywna,
- wynikać z gradientu przemieszczenia.

4.10.1. Wektory przemieszczenia

Do analizy dużych odkształceń przyjmujemy ciało materialne ciągłe. Znaczący to, że punkty sąsiadujące ze sobą przed odkształceniem pozostają sąsiadującymi po odkształceniu. Zatem wybierzmy trzy punkty PQR w bliskim sąsiedztwie (rys. 4.21). Punkty te w chwili czasu $t_0 = 0$, przed odkształceniem, mają współrzędne a_k , a po odkształceniu czyli w chwili czasu t_1 przyjmują położenie P'Q'R' i mają współrzędne x_i . Odcinki $da_k = \overline{PQ}$, $\Delta a_k = \overline{PR}$ w położeniu pierwotnym i odcinki $dx_i = \overline{P'Q'}$, $\Delta x_i = \overline{P'R'}$ w położeniu odkształconym są małe i zakładamy, że są równe sobie:

$$da_k \cong \Delta a_k, \quad dx_i \cong \Delta x_i.$$

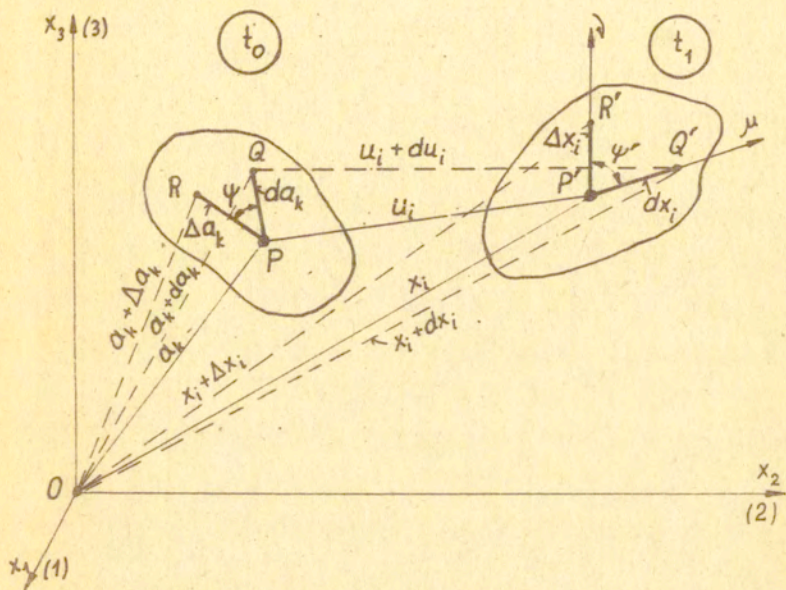
Położenie punktów PQR wyznacza wektor wodzący \vec{a} — w położeniu pierwotnym $\vec{a} = a_k \vec{e}_k$, a po odkształceniu $\vec{x} = x_i \vec{e}_i$. Współrzędne punktów PQR ciała przed odkształceniem a_k i po odkształceniu x_i odnoszą się do tego samego układu współrzędnych prostokątnych x_1, x_2, x_3 . Między współrzędnymi a_k i x_i istnieje transformacja jednoznaczna, wynikająca z definicji ośrodka ciągłego (jakobian $J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \right| \neq 0$). Prawo transformacji współrzędnych punktów ma postać

$$a_k = a_k(x_i, t) \quad (4.96a)$$

i odwrotną

$$x_i = x_i(a_k, t), \quad (4.96b)$$

gdzie $i, k = 1, 2, 3$.



Rys. 4.21. Odkształcenie ciała

Punkt P w wyniku deformacji przemieścił się o wektor u_i o składowych

$$u_i = x_i - a_k \quad (4.97)$$

Współrzędne początkowe, dające opis Lagrange'a, wynikają z zależności

$$a_k = x_i - u_i, \quad (4.98)$$

a współrzędne końcowe, dające opis Eulera, wynikają z zależności

$$x_i = a_k + u_i \quad (4.99)$$

Wektor u_i nazywamy wektorem przemieszczenia punktu P.

Funkcje (4.96) są ciągłe i różniczkowalne. W położeniu pierwotnym ($t_0 = 0$) współrzędne punktu P mają różniczkę zupełną (różniczka zupełna przedstawia wektor o kierunku zgodnym z kierunkiem pochodnej)

$$da_k = \frac{\partial a_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial a_k}{\partial t} dt = a_{k,i} dx_i, \quad (dt = 0) \quad (4.100a)$$

i drugi wektor

$$\Delta a_k = \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \Delta x_j = a_{k,j} \Delta x_j, \quad (4.100b)$$

a w położeniu odkształconym (t_1)

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_k} da_k = x_{i,k} da_k \quad (4.101a)$$

i drugi wektor

$$\Delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_1} \Delta a_1 = x_{i,1} \Delta a_1. \quad (4.101b)$$

Równania (4.101) opisują przekształcenie punktów obszaru w chwili t_0 w punkty obszaru w chwili t_1 .

4.10.2. Tensor stanu odkształcenia

Analizowanie długości dwóch odcinków w stanie początkowym i w stanie odkształconym pozwala na wyznaczenie odkształceń, obrotu i ich interpretację geometryczną.

Kąt ψ między odcinkami w chwili t_0 i t_1 jak i ich długości są inne (rys. 4.21). Iloczyn skalarny tych odcinków w położeniu pierwotnym wyraża się zależnością

$$|da_k| |\Delta a_k| \cos \psi = da_1 \Delta a_1 + da_2 \Delta a_2 + da_3 \Delta a_3 = da_k \Delta a_k$$

(zapis indeksowy),

a w położeniu odkształconym

$$|dx_i| |\Delta x_i| \cos \psi_1 = dx_i \Delta x_i.$$

Jeżeli weźmiemy różnicę iloczynu skalarnego odcinków w stanie odkształconym $dx_i \Delta x_i$ i w stanie nieodkształconym $da_k \Delta a_k$

$$dx_i \Delta x_i - da_k \Delta a_k = ds^2 - ds_0^2 \quad (4.102)$$

i wprowadzimy do niej wyrażenia (4.100), to otrzymamy zależność

$$\begin{aligned} dx_i \Delta x_i - da_k \Delta a_k &= dx_i \Delta x_i - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} dx_i \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \Delta x_j = \\ &= dx_i \Delta x_j \left(\delta_{ij} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right), \end{aligned} \quad (4.103a)$$

a po wprowadzeniu nowego oznaczenia będzie ona miała postać

$$ds^2 - ds_0^2 = 2 \xi_{ij}^A dx_i \Delta x_j, \quad (4.203b)$$

gdzie tensor

$$\xi_{ij}^A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) \quad (4.104)$$

jest nazywany tensorem dużych odkształceń Almansiego. Został on wprowadzony przez E. Almansiego i Hamela dla dużych odkształceń (odkształceń skończonych).

Tensor odkształcenia ξ_{ij}^A jest we współrzędnych przestrzennych (czyli Eulera) i charakteryzuje deformację w otoczeniu punktu o współrzędnych $\{x_i\}$ pod dowolnym kątem.

Jeśli do równania (4.102) wprowadzimy zależności (4.101), to otrzymamy

$$\begin{aligned} dx_i \Delta x_i - da_k \Delta a_k &= \frac{\partial x_i}{\partial a_k} da_k \frac{\partial x_i}{\partial a_1} \Delta a_1 - da_k \Delta a_k = \\ &= da_k \Delta a_1 \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial x_i}{\partial a_1} - q_{k1} \right), \end{aligned} \quad (4.105a)$$

a po wprowadzeniu nowych oznaczeń

$$ds^2 - ds_0^2 = 2 \varepsilon_{kl}^G da_k \Delta a_l, \quad (4.105b)$$

gdzie tensor

$$\varepsilon_{kl}^G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial x_i}{\partial a_l} - q_{kl} \right) \quad (4.106)$$

jest nazywany tensorem dużych odkształceń Greena. Tensor (4.106) został wprowadzony przez Greena i Saint-Venanta, a w literaturze znany jest często pod nazwą tensora odkształcenia Greena. Tensor ε_{kl}^G jest we współrzędnych materialnych (czyli Lagrange'a) i opisuje deformację w punkcie w odniesieniu do współrzędnych początkowych $\{a_k\}$.

W literaturze spotyka się również tensor deformacji Cauchy'ego w opisie Eulera

$$\varepsilon_{ij}^C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \quad (4.107a)$$

lub w opisie Lagrange'a

$$\varepsilon_{kl}^C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial x_i}{\partial a_l} \quad (4.107b)$$

oraz odpowiednio tensor deformacji Fingera

$$\varepsilon_{ij}^F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \quad (4.108a)$$

$$\varepsilon_{ij}^F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial x_j}{\partial a_k} \quad (4.108b)$$

4.10.3. Wyrażenie tensorów deformacji za pomocą gradientów przemieszczeń ($u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$)

Skoro wektor przemieszczenia $u_k(x_k, t) = x_k - a_k(x_k, t)$

(4.97) posiada ciągle współrzędne początkowe (t_0)

$$a_k = x_k - u_k(x_k, t) \quad (4.109a)$$

i końcowe (t_1) $x_i = a_i(x_i, t) + u_i(x_i, t), \quad (4.109b)$

to pochodne współrzędnych początkowych względem współrzędnych końcowych x_i, x_j wyrażają się zależnościami

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_i} = \delta_{ki} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad (4.110)$$

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \delta_{kj} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ki}, \quad \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \delta_{kj}.$$

Podstawiając zależności (4.110) do tensora deformacji Almansiiego (4.104), otrzymamy

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^A &= \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \left(\delta_{ki} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \left(\delta_{kj} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} - \left(\delta_{ki} \delta_{kj} - \delta_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \delta_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

Ostatecznie tensor deformacji Almansiiego ε_{ij}^A wyrażony za pomocą gradientów przemieszczeń ma postać

$$\varepsilon_{ij}^A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad (4.111a)$$

lub zapisany krócej

$$\varepsilon_{ij}^A = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}). \quad (4.111b)$$

Jeśli zależność (4.109b) zróżniczkujemy względem współrzędnych początkowych a_k i a_1

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_k} = \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial a_k}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_1} = \delta_{i1} + \frac{\partial u_i}{\partial a_1}$$

i wstawimy do tensora deformacji Greene (4.106), to po wymnożeniu otrzymamy tensor deformacji Greena wyrażony za pomocą gradientów przemieszczeń

$$\varepsilon_{k1}^G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_1} + \frac{\partial u_i}{\partial a_k} + \frac{\partial u_i}{\partial a_k} \frac{\partial u_i}{\partial a_1} \right) \quad (4.112a)$$

lub zapisany krócej

$$\varepsilon_{k1}^G = \frac{1}{2} (u_{k,1} + u_{1,k} + u_{i,k} u_{i,1}) \quad (4.112b)$$

Jeśli przyjmiemy wskaźniki $i, j = 1$, a $k = 1, 2, 3$ to tensor Almasiego (4.111) będzie miał postać

$$\varepsilon_H^A = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \right],$$

$$\varepsilon_H^A = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right].$$

Wprowadzając za i, j, k odpowiednio x, y, z otrzymamy następujące równania odkształceń Almasiego

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right],$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right],$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right],$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} - \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right),$$

(4.113)

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} - \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right),$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} - \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).$$

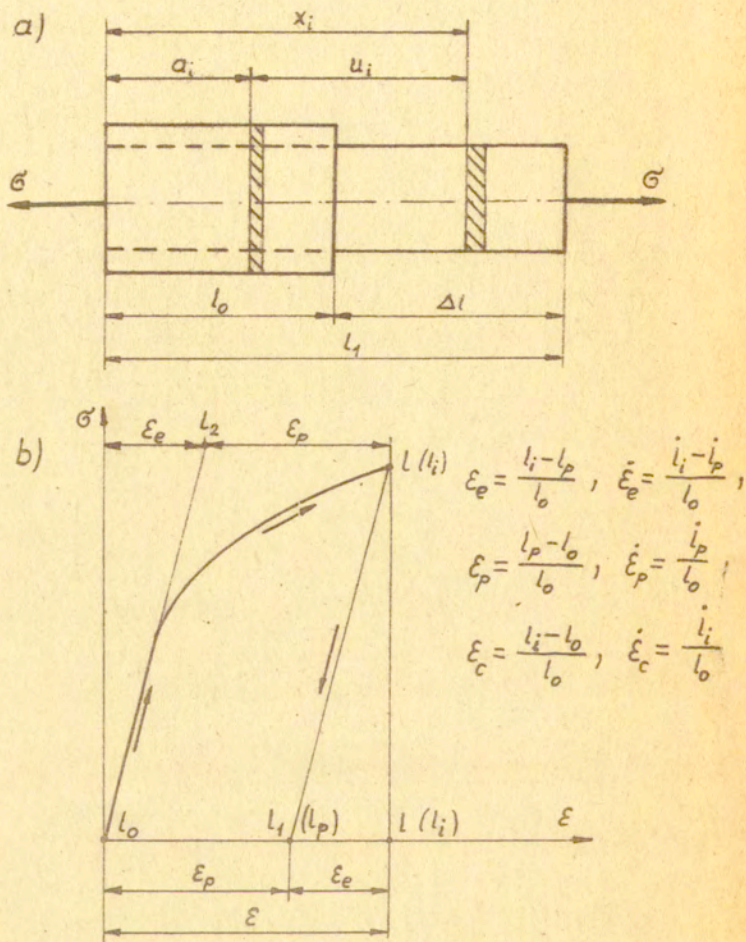
Dla przemieszczeń nieskończenie małych $u_i(u_x, u_y, u_z)$ pierwsze pochodne (4.111) również są nieskończenie małe, a iloczyny tych pochodnych są małymi wyższego rzędu i można je pominąć. Dla tego przypadku tensor odkształcenia Almansiego ε_{ij}^A (4.111) i tensor odkształcenia Greena ε_{kl}^G (4.112) są sobie równe i są równocześnie równe tensorowi nieskończenie małego odkształcenia Cauchy'ego ε_{ij} (4.13)

$$\varepsilon_{ij}^A = \varepsilon_{kl}^G = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (4.114)$$

Tensory $\tilde{\sigma}_{ij}, q_{kl}$ (4.104, 4.106) są tensorami metrycznymi informującymi o przejściu współrzędnych początkowych we współrzędne końcowe. Tensory dużych odkształceń Almansiego ε_{ij}^A i Greena ε_{kl}^G są różne ($\varepsilon_{ij}^A \neq \varepsilon_{kl}^G$). Gdy nie ma odkształcenia, a istnieje tylko sztywne przesunięcie u_i , to wszystkie składowe tensora odkształcenia ε_{ij}^A i ε_{kl}^G są równe zeru w całym obszarze.

Przykład 1

Obliczyć tensory odkształcenia dla prostego rozciągania i zilustrować je wykresem zależności



Rys. 4.22. Schemat rozciągania pręta i wykres rozciągania

Jeśli wydłużenie pręta jest proporcjonalne, to zachodzi

zależność $l_1 : x_1 = l_0 : a_1$, z której wynikają współrzędne początkowe

$$a_1 = x_1 \frac{l_0}{l_1} \quad (4.115a)$$

i współrzędne końcowe położenia elementarnego przekroju

$$x_1 = a_1 \frac{l_1}{l_0} \quad (4.115b)$$

Przesunięcie elementarnego przekroju wynosi

$$u_1 = x_1 - a_1,$$

a dla naszego pręta

$$u_1 = x_1 - x_1 \frac{l_0}{l_1} = x_1 \left(1 - \frac{l_0}{l_1}\right), \quad (4.116a)$$

$$u_1 = a_1 \frac{l_1}{l_0} - a_1 = a_1 \left(\frac{l_1}{l_0} - 1\right). \quad (4.116b)$$

Współrzędne przekroju początkowego wynoszą

$$a_1 = x_1 - u_1, \quad (4.117a)$$

a przekroju końcowego

$$x_1 = a_1 + u_1. \quad (4.117b)$$

Obliczając pochodne cząstkowe przemieszczenia u_1 (4.116)

względem współrzędnych końcowych i początkowych

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 1 - \frac{l_0}{l_1}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial a_1} = \frac{l_1}{l_0} - 1$$

i wstawiając je odpowiednio do równania (4.111), otrzymamy wartość tensora odkształcenia Almansiego

$$\xi_1^A = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{l_0}{l_1}\right) + \left(1 - \frac{l_0}{l_1}\right) - \left(1 - \frac{l_0}{l_1}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{l_0}{l_1}\right)^2 \right] \quad (4.118)$$

i następnie wstawiając do równania (4.112), otrzymamy wartość

tensora odkształcenia Greena

$$\xi_1^G = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l_1}{l_0} - 1 \right) + \left(\frac{l_1}{l_0} - 1 \right) + \left(\frac{l_1}{l_0} - 1 \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l_1}{l_0} \right)^2 - 1 \right]. \quad (4.119)$$

Te same wartości tensorów odkształcenia Almansiego (4.118) i Greena (4.119) otrzymamy, jeśli obliczymy pochodne cząstkowe zależności (4.115).

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_1} = \frac{1}{I_1}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial a_1} = \frac{l_1}{I_0}$$

i wstawimy odpowiednio do tensorów (4.104), (4.106). Tensory δ_{ij} , q_{kl} równają się jedności. Jeśli długości $l_1 = l_0$, to $\xi_{ij}^A = 0$ i $\xi_{kl}^G = 0$, to wówczas nie ma odkształcenia.

Wprowadzając do równań (4.1, 4.3, 4.118 i 4.119) współczynniki odkształcenia $\lambda_1 = \frac{l_1}{I_0}$ i to, że $l_1 = l_0 + \Delta l_1$,

$l_1^2 \cong l_0^2 + 2 \Delta l_1 l_0$ ($\Delta l_1^2 = 0$), otrzymamy następujące zależności odkształceń:

1. odkształcenie Cauchy'ego

$$\xi_1^C = \frac{\Delta l_1}{I_0} = \frac{l_1 - l_0}{I_0} = \lambda_1 - 1, \quad (4.120a)$$

2. odkształcenie Almansiego

$$\xi_1^A = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{l_1}{I_1} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta l_1}{I_0} \right)^2} \right], \quad (4.120b)$$

3. odkształcenie Greena

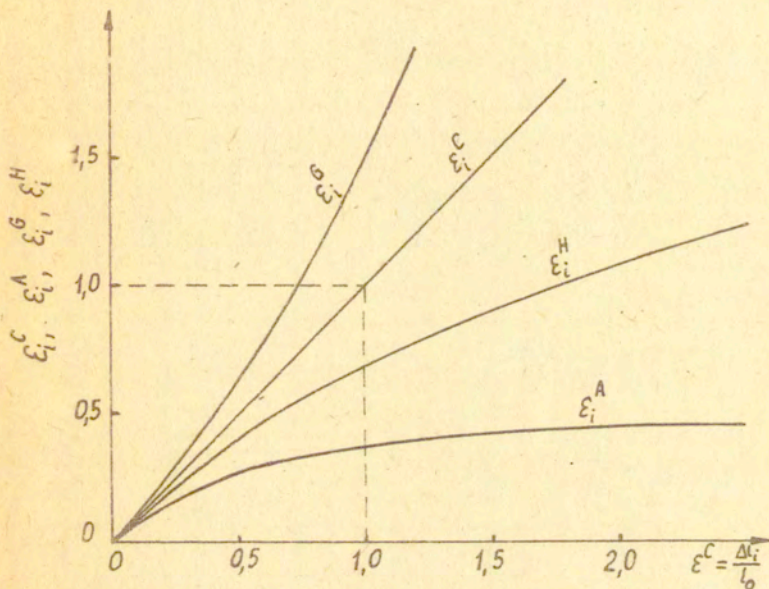
$$\begin{aligned} \xi_1^G &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l_1}{I_0} \right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} (\lambda_1^2 - 1) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\Delta l_1}{I_0} \right)^2 - 1 \right] = \\ &= \frac{\Delta l_1}{I_0} \end{aligned} \quad (4.120c)$$

4. odkształcenie Hencky'ego

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^H &= \varphi_1 = \ln \frac{l_1}{l_0} = \ln \lambda_1 = \ln(1 + \varepsilon_1^C) = \\ &= \ln\left(1 + \frac{\Delta l_1}{l_0}\right) = \ln\left(1 + 2 \varepsilon_1^G\right)^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{1}{(1 - 2 \varepsilon_1^A)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (4.120d)$$

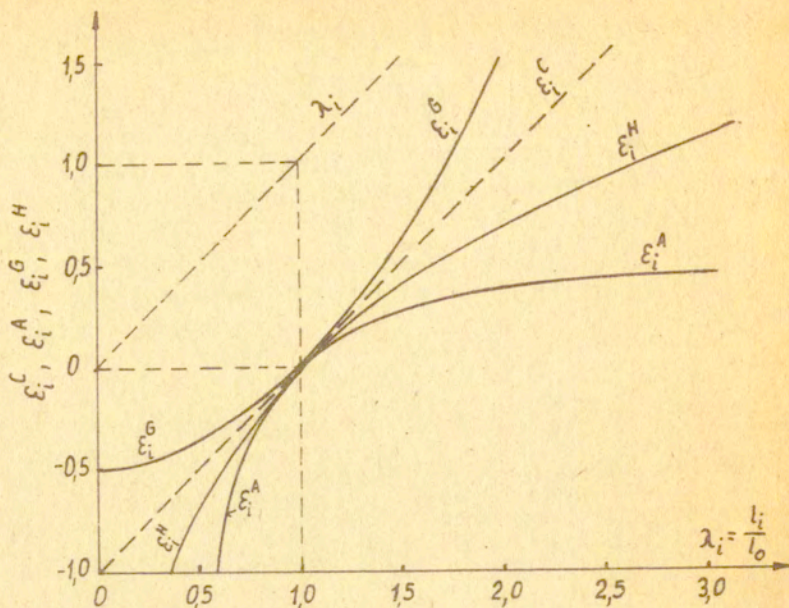
Na rysunku 4.23 pokazano zależność między odkształceniami

ε_1^C , ε_1^A , ε_1^G , ε_1^H .



Rys. 4.23. Zależność między odkształceniami ε_i^G , ε_i^H , ε_i^A a odkształceniami ε_i^C

Posługując się wykresem rozciągania (rysunek 4.22) można napisać zależności na odkształcenie plastyczne ε_p , odkształcenie całkowite ε_c i odkształcenie sprężyste ε_e (są to odkształcenia sprężysto-plastyczne Greena, które wykazują addytywność)



Rys. 4.24. Zależność między odkształceniami ϵ_i^G , ϵ_i^C , ϵ_i^H , ϵ_i^A a współczynnikiem odkształcenia λ_i

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l_1}{l_0} \right)^2 - 1 \right], \\ \epsilon_c &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l_1}{l_0} \right)^2 - 1 \right], \\ \epsilon_e &= \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2}, \end{aligned} \quad (4.121)$$

z których obliczone prędkości odkształceń (różniczkowane względem czasu)

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{l_1 \dot{l}_1}{l_0^2}, \quad \dot{\epsilon}_c = \frac{l \dot{l}}{l_0^2}, \quad \dot{\epsilon}_e = \frac{l \dot{l} - l_1 \dot{l}_1}{l_0^2} \quad (4.122)$$

wykazują addytywność

$$\dot{\epsilon}_c = \dot{\epsilon}_p + \dot{\epsilon}_e = \frac{l_1 \dot{l}_1}{l_0^2} + \frac{l \dot{l} - l_1 \dot{l}_1}{l_0^2} = \frac{l \dot{l}}{l_0^2}$$

Literatura do rozdziału IV

1. Poradnik inżyniera mechanika, T. 3, 1970.
2. W. Nowacki. Mechanika budowli, T. III, PWN, Warszawa, 1966.
3. M. Morawiecki, L. Sadok, E. Wosiek. Teoretyczne podstawy technologicznych procesów przeróbki plastycznej. Wyd. "Śląsk", Katowice, 1977.
4. Praca zbiorowa pod red. W. Ojszaka, P. Perzyny i A. Sawczuka. Teoria plastyczności. PWN, Warszawa, 1965.
5. W. Szczepiński. Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej. PWN, Warszawa, 1967.
6. M. T. Huber. Teoria sprężystości. Część I. PWN, Warszawa, 1954.
7. O. Hoffman, G. Sachs. Wprowadzenie do teorii plastyczności. PWT, Warszawa, 1959.
8. A. Ciastoń, Z. Gabryszewski. Teoria plastyczności. Skrypt Politechniki Wrocławskiej. Wrocław, 1971.
9. St. Stanisławski. Podstawy teorii plastyczności. Skrypt Politechniki Poznańskiej, Poznań, 1977.
10. F. Knap. Podstawy teoretyczne obróbki plastycznej metali. Skrypt Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa, 1975.
11. T. W. Pełczyński, T. A. Pełczyński. Teoria procesów obróbki plastycznej. Część I. Skrypt Politechniki Warszawskiej. Warszawa, 1978.
12. J. Walczak. Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności. Tom II. PWN, Warszawa-Kraków, 1977.
13. Z. Mariniak. Odkształcenia graniczne przy tłoczeniu blach. WNT, Warszawa, 1971.
14. Л. М. Казанов. Основы теории пластичности. Изд. „Наука”, Москва, 1969.
15. В. С. Смирнов. Теория обработки металлов давлением. „Металлургия”, Москва, 1973.
16. М. В. Сторожев, Е. А. Попов. Теория обработки металлов давлением. „Машиностроение”, Москва, 1977.

17. Н.Н. Малинин. Прикладная теория пластичности и ползучести. „Машиностроение“, Москва, 1975.
18. В. Бэкофен. Процессы деформации. „Металлургия“, Москва, 1977.
19. E.G. Thomsen, Ch. T. Yang. Sh. Kobayashi. Plastic deformation in metal processing. The Macmillan Company, New York, 1965.