UN THÉORÈME SUR LES POLYNÔMES

Par STEFAN MAZURKIEWICZ, Warszawa

Je ne considére dans cette note que des ensembles plans, bornés. Ja vais désigner par $\delta(A)$, $\mu(A)$, $\tau(A)$ respectivement — le *diamètre*, la *mésure linéaire*[1]) et le *diamètre transfini* de l'ensemble A. Je me propose de démontrer le

Théorème I. *A tout $\varepsilon>0$ on peut faire correspondre un $\eta>0$ tel que pour tout continu C de diamètre 1, tout ensemble fermé $E\subset C$ satisfaisant à l'inégalité $\mu(C-E)<\eta$ et tout polynome $P(z)$, on a:*

$$\text{(1)}\qquad \operatorname*{Max}_{z\in C}|P(z)|<(1+\varepsilon)^n \operatorname*{Max}_{z\in E}|P(z)|,$$

n désignant le degré de $P(z)$.

Dans le cas où C est une circonférence ce théorème a été démontré par M. LEJA[2]).

Lemme 1. *C étant un continu, $E\subset C$ un ensemble fermé, on a:*

$$\text{(2)}\qquad \tau(E)\geqq\tfrac{1}{4}(\delta(C)-\mu(C-E)).$$

Considérons deux points de C, dont la distance est égale à $\delta(C)$ et soit D la droite passant par ces points; soient C_1,E_1,K_1 les projections orthogonales de $C,E,C-E$ sur D. On a: $\mu(K_1)\leqq\mu(C-E)$, $\mu(C_1)=\delta(C)$, donc

$$\mu(E_1)\geqq\mu(C_1)-\mu(K_1)\geqq\delta(C)-\mu(C-E).$$

E_1 étant un ensemble linéaire on a $\tau(E_1)\geqq\frac{1}{4}\mu(E_1)$[3]). Comme $\tau(E_1)\leqq\tau(E)$ il en résulte (2)

---

[1]) Pour la definition de la mésure linéaire d'un ensemble plan=length of a set, voir p. e. Saks: Theory of the integral (1937) p. 53—54.

[2]) Math. Ann. 107 p. 68—82, en part. p. 77 ss. L'expression à droite de (1) contient chez M. Leja encore le facteur $n+1$.

[3]) comp. Fekete: Math. Zeit. 32, p. 113.

http://rcin.org.pl

Lemme 2. Soit $A = A_1 + A_2, A_1, A_2$ désignant des ensembles fermés; $\delta(A)=1$, $\tau(A)>0$. *Alors*:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{Max}[\tau(A_1), \tau(A_2)] \geqq [\tau(A)]^2.$$

On ne peut pas avoir $\tau(A_1)=\tau(A_2)=0$, car on aurait [4]) $\tau(A)=0$. Donc on peut supposer toujours que $\tau(A_1)>0$. La condition $\delta(A)=1$ entraîne: $\tau(A)<1$ [5]), donc si $\tau(A_2)=0$ on a $\tau(A_1)=\tau(A)>[\tau(A)]^2$, donc (3). Si $\tau(A_2)>0$, désignons par $R_n^{(j)}(z)$ le n-éme polynome de FEKETE [6]) attaché à l'ensemble A_j et posons $\sigma_n^{(j)} = \sqrt[n]{\operatorname{Max}_{z \in A_j} |R_n^{(j)}(z)|}$ et: $Q_n(z) = R_n^{(1)}(z) R_n^{(2)}(z)$. D'après $\delta(A)=1$, on a: $|R_n^{(j)}(z)| \leqq 1$ pour $z \in A$. Donc:

$$\text{(4)} \qquad \sqrt[n]{\operatorname{Max}_{z \in A_j} |Q_n(z)|} \leqq \sigma_n^{(j)},$$

$$\text{(5)} \qquad \sqrt[n]{\operatorname{Max}_{z \in A} |Q_n(z)|} \leqq \operatorname{Max}(\sigma_n^{(1)}, \sigma_n^{(2)}).$$

D'après la relation [7]) $\lim_{n \to \infty} \sigma_n^{(j)} = \tau(A_j)$ il en résulte:

$$\text{(6)} \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\operatorname{Max}_{z \in A} |Q_n(z)|} \leqq \operatorname{Max}[\tau(A_1), \tau(A_2)].$$

Le coefficient de z^{2n} dans $Q_n(z)$ étant egal à 1, on a [8]):

$$\text{(7)} \qquad \sqrt[2n]{\operatorname{Max}_{z \in A} |Q_n(z)|} \geqq \tau(A), \qquad n=1,2,\ldots,$$

$$\text{(8)} \qquad \sqrt[n]{\operatorname{Max}_{z \in A} |Q_n(z)|} \geqq [\tau(A)]^2.$$

Les relations (6), (8) entraînent (3) c. q. f. d.

---

[4]) comp. H. Szmuszkowiczówna: C. R. Société Sc. Varsovie 1931, p. 1—7.

[5]) On a même $\tau(A) < \frac{1}{\sqrt{3}}$, A pouvant être enfermé dans un cercle de rayon $\frac{1}{\sqrt{3}}$ comp. Straszewicz: Beiträge zur Theorie der konvexen Punktmengen. Zurich 1914, p. 55.

[6]) c.-à-d. un polynome possedant les propriétés suivantes: 1) il est de degré n et le coefficient de z^n est 1, 2) ses zéros sont situés sur A_j, 3) de tous les polynomes jouissant de propriété 1, 2) il posséde le plus petit maximum en valeur absolue sur A_j.

[7]) Fekete: Math. Zeit. 17, p. 235, 236.

[8]) l. c. p. 234 ss.

http://rcin.org.pl

Lemme 3. *A étant un ensemble fermé tel que $\delta(A)=1$, $\tau(A)>0$, $P(z)$ un polynome de dégré n, $z_0 \epsilon A$ un point où $|P(z)|$ atteint son maximum sur A, λ un nombre tel que $0<\lambda<\frac{[\tau(A)]^4}{4}$, k le nombre de zéros de $P(z)$ situé dans le cercle $|z-z_0|\leqq\lambda$, on a:*

$$k<\frac{2n\cdot\log\frac{2}{[\tau(A)]^2}}{\log\frac{1}{\lambda}}. \tag{9}$$

On peut supposer que le coefficient de z^n dans $P(z)$ est 1. Désignons respectivement par $\alpha_1\ldots\alpha_k, \beta_1\ldots\beta_l, \gamma_1\ldots\gamma_m$ les zéros de $P(z)$ situés dans les trois régions: $|z-z_0|\leqq\lambda$; $\lambda<|z-z_0|\leqq 2$; $|z-z_0|>2$. Posons:

$$P_1(z)=(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_k), \tag{10}$$

$$P_2(z)=(z-\beta_1)\ldots(z-\beta_l), \tag{11}$$

$$P_3(z)=(z-\gamma_1)\ldots(z-\gamma_m). \tag{12}$$

On a: $n=k+l+m$ et $P(z)=P_1(z)P_2(z)P_3(z)$. Soit A_1 l'ensemble de points $z\epsilon A$ tels que $|z-z_0|\geqq 2\sqrt{\lambda}$. Posons $A_2=\overline{A-A_1}$. On a: $\tau(A_2)\leqq 2\sqrt{\lambda}<[\tau(A)]^2$, donc d'après le lemme 2: $\tau(A_1)\geqq[\tau(A)]^2$. Soit z_1 le point où $P_2(z)$ atteint son maximum sur A_1. On aura:

$$|P_2(z_1)|\geqq[\tau(A)]^{2l}\geqq[\tau(A)]^{2n}. \tag{13}$$

On a: $|z_1-\alpha_j|\geqq 2\sqrt{\lambda}-\lambda>\sqrt{\lambda}$, $j=1,2,\ldots,k$. Donc:

$$|P_1(z_1)|>\lambda^{\frac{k}{2}}. \tag{14}$$

Enfin $|z_1-\gamma_j|\geqq|z_0-\gamma_j|\left(1-\left|\frac{z_1-z_0}{z_0-\gamma_j}\right|\right)>\frac{1}{2}|z_0-\gamma_j|$ donc:

$$|P(z_1)|>[\tau(A)]^{2n}\lambda^{\frac{k}{2}}(\tfrac{1}{2})^m|P_3(z_0)|, \tag{15}$$

$$|P(z_0)|\leqq\lambda^k 2^l|P_3(z_0)|. \tag{16}$$

D'après la signification de z_0: $|P(z_0)|\geqq|P(z_1)|$, donc:

$$[\tau(A)]^{2n}\lambda^{\frac{k}{2}}(\tfrac{1}{2})^m<2^l\lambda^k, \tag{17}$$

http://rcin.org.pl

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{k}{2}} < \left(\frac{2}{[\tau(A)]^2}\right)^n, \tag{18}$$

$$k < \frac{2n\log\left(\frac{2}{[\tau(A)]^2}\right)}{\log\frac{1}{\lambda}}. \tag{19}$$ c. q. f. d.

Corollaire 1. *Si A est en outre un continu on peut remplacer* (9) *par*:

$$k < \frac{8n}{\log\frac{1}{\lambda}}, \qquad 0<\lambda \leqq \frac{1}{1024}. \tag{20}$$

En effet dans ce cas $\tau(A) \geqq \frac{1}{4}$, donc $\log\frac{2}{[\tau(A)]^2} \leqq \log 32 < 4$ [9]).

Démonstration du théorème I. Nous pouvons supposer que le coefficient de z^n dans $P(z)$ est 1. Pour $\varepsilon>0$ posons:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{1+\varepsilon}-1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \tag{21}$$

$$\lambda = \text{minimum}\left(\frac{1}{1024}, e^{-\frac{16\log\frac{4}{\sigma}}{\log(1+\varepsilon)}}\right), \tag{22}$$

$$\eta = \sigma\lambda. \tag{23}$$

Soit $z'\epsilon C$ un point où $P(z)$ atteint son maximum sur C. Soient: $\alpha_1 \dots \alpha_k, \beta_1 \dots \beta_{n-k}$ les zéros de $P(z)$ situés respectivement dans les régions: $|z-z'| \leqq \lambda$, et $|z-z'|>\lambda$. Posons:

$$P_1(z) = (z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_k) \quad \text{et} \quad P_2(z) = (z-\beta_1)\dots(z-\beta_{n-k}).$$

Comme $\eta < \lambda \leqq \frac{1}{1024}$, C contient de points z tels que $|z-z'| \geqq 2\eta$, donc un continu C_1 contenu dans le cercle $|z-z'| \leqq 2\eta$, réunissant z' à la circonférence de ce cercle. Evidement $\delta(C_1) \geqq 2\eta$. Soit $E_1 = C_1 E$. On a $C_1 - E_1 \subset C - E$, donc: $\mu(C_1 - E_1) \leqq \mu(C-E) < \eta$, donc d'après le lemme 1:

$$\tau(E_1) \geqq \tfrac{1}{4}[\delta(C_1) - \mu(C_1 - E_1)] > \tfrac{1}{4}\eta. \tag{24}$$

[9]) une étude directe de ce cas permet d'obtenir $k < \frac{6n}{\log\frac{1}{\lambda}}$.

http://rcin.org.pl

Donc il existe un $z'' \epsilon E_1 \subset E$ tel que:

(25) $$|P_1(z'')| > (\tfrac{1}{4}\eta)^k.$$

D'autre part:

(26) $$|P_1(z')| \leqq \lambda^k,$$

(27) $$\left|\frac{z'-\beta_j}{z''-\beta_j}\right| \leqq \frac{|z'-\beta_j|}{|z'-\beta_j|-|z'-z''|} < \frac{\lambda}{\lambda-2\eta} = \frac{1}{1-2\sigma} < \sqrt{1+\varepsilon}$$

D'après le corollaire 1: $k < \dfrac{8n}{\log\frac{1}{\lambda}}$, donc:

(28) $$\frac{\underset{z \epsilon C}{\operatorname{Max}}|P(z)|}{\underset{z \epsilon E}{\operatorname{Max}}|P(z)|} \leqq \frac{|P(z')|}{|P(z'')|} < \left(\frac{4\lambda}{\eta}\right)^k (1+\varepsilon)^{\frac{n-k}{2}} < \left\{\left(\frac{4}{\sigma}\right)^{\frac{8}{\log\frac{1}{\lambda}}} \sqrt{1+\varepsilon}\right\}^n \leqq$$
$$\leqq (1+\varepsilon)^n \quad \text{c. q. f. d.}$$

Corollaire 2. *Les conditions du théorème I entraînent:*

(29) $$\tau(E) \geqq \frac{\tau(C)}{1+\varepsilon} > \tau(C) - \varepsilon.$$

Corollaire 3 [10]). *Si la suite* $\{P_n(z)\}$, *où* $P_n(z)$ *est un polynome de degré* n, *est bornée sur le continu* C *à l'exception d'un ensemble de mésure linéaire* 0, *alors on a pour tout* $z \epsilon C$:

(30) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|P_n(z)|} \leqq 1.$$

Si C est en outre une ligne simple fermée, alors $\sum_{n=1}^{\infty} y^n P_n(z)$ converge pour $|y| < 1$ et tout z situé à l'interieur de C ou sur C.

---

[10]) Ce résultat a été démontré par M. Leja (l. c. [2])) pour le cas d'une circonférence.

Remarque de la Rédaction: Voir aussi F. Leja: Math. Ann. 108 (1933), p. 517—524.

http://rcin.org.pl