

O liczbach pitagorejskich w wykładzie szkolnym.

§ 1. Algebra elementarna w pierwszych latach nauczania zazwyczaj wydaje się uczniom nauką nawskroś formalną i mało użyteczną. Działania na wyrażeniach wymiernych sprowadzają się w umyśle zdolniejszych nawet uczniów do mechanicznego stosowania pewnej ilości wyuczonych reguł; uczniowie nie mają zwykle pojęcia, do czego to wszystko przydać się może. Większość wprowadzie wcale sobie tego pytania nie zadaje, bo przyzwyczajona w klasach niższych do uczenia się dla otrzymania dobrego stopnia, sądzi zapewne, że taki jest cel wszelkiego nauczania i uczy się nieźle, podczas gdy uczniowie zdolniejsi, o więcej twórczym usposobieniu umysłu uważają początki algebry za jedną z plag trapiących młodzież szkolną. Dopiero w ustawianiu równań, a zwłaszcza w dyskusji równań mogą się uwydatnić i rozwinąć wrodzone, a niewydobyte dotąd na jaw zdolności analityczne umysłów; niestety, słabe opanowanie praktyczne działań algebraicznych nieraz jest zbyt wielką przeszkodą w późniejszej pracy osobistej ucznia; rzadko który ma dość wytrwałości, aby powrócić do zniemawidzonych początków. Jakież jest sposób naprawienia tych tak nienormalnych, a bardzo niestety powszechnych objawów, w jaki sposób obudzić zainteresowanie uczniów nauką algebry od samych niemal jej początków?

Dwojaką na to pytanie otrzymujemy zwykle odpowiedź. Jedni zalecają wielką ścisłość w podawaniu dowodów i formułowaniu określeń, drudzy ułatwić i ożywić chcą naukę przez geometryczne analogje. Obydwa te środki należy jednak stosować z wielką ostrożnością. Ścisłość powinna wynikać z potrzeby, nigdy zaś nie powinna być kunsztem nieużytecznym; ścisłość jest potrzebna przedewszystkim tam, gdzie umysł nie ma jasnego przeświadczenia o prawdziwie i zapomocą logiki musi ją udowodnić, gdzie może być dyskusja, t. j. gdzie można od zdrowego rozsądku ucznia oczekiwać zaprzeczeń albo przynajmniej wątpliwości. W miarę postępów nauczania potrzeba ścisłości wzrastać powinna, bo umysł ucznia przejmować się będzie stopniowo duchem analizy. Ale tej potrzeby ścisłości nauczyciel w uczniu nie zastaje, — jego głównym zadaniem jest właśnie tę potrzebę rozbudzić. Jedyną drogą do tego celu jest nakłanianie ucznia do badania coraz to więcej oderwanych zagadnień matematycznych. Co do analogji geometrycznych, to myślę, że w początkach nauczania algebry niewielki mogą one dać pożytek, bo punktem wyjścia analizy musi być pojęcie liczby całkowitej, podczas gdy pojęcie

to obcym jest najzupełniej określeniu i naturze utworów geometrycznych, tak że dopiero przez wprowadzenie liczb niewymiernych może być stworzona doskonała odpowiedniość analizy i geometrii.

Dochodzę zatem do wniosku, że niezmiernie pożądanym jest wprowadzić do nauczania algebry osobiste poszukiwania matematyczne uczniów. Wydaje mi się, że najlepszym ożywieniem oschłych nieco początków algebry jest zastosowanie potężnych jej metod rachunku do zagadnień teorii liczb, której wogóle zbyt mało poświęca się miejsca w programach szkolnych. Uważam zresztą za rzecz użyteczną i naturalną, aby algebra z początku wydawała się uczniowi kontynuacją arytmetyki.

Na tak postawione żądanie możnaby usłyszeć zarzut, że nie jest rzeczą możliwą, albo przynajmniej łatwą, znaleźć taki temat, któryby, traktowany środkami elementarnymi, mógł doprowadzić ucznia do ciekawych wyników, nawet przy pomocy nauczyciela. Nie sądzę, aby tak było. Na dowód tego pragnę naszkicować monograficzne rozwinięcie jednego z takich tematów, mianowicie zagadnienia t. zw. *liczb pitagorejskich*. Chociaż punktem wyjścia jest postęp arytmetyczny (ciąg liczb nieparzystych), ale sądzę mimo to, że większość poniższych rozważań jest zupełnie dostępna dla początkujących, a nawet przekonany jestem, że przy umiejętnym kierownictwie nauczyciela, znaczna część wyników może być znaleziona własną pracą uczniów.

§ 2. *Liczba parzysta* nazywa się liczba podzielna przez 2, lub inaczej mówiąc, liczba, składająca się z dwóch równych liczb: $n+n=2n$. *Liczba nieparzysta* nazywa się każda inna liczba całkowita. Liczba nieparzysta nie dzieli się zatem przez 2, t. j. przy dzieleniu przez 2 daje resztę 1. Możemy więc powiedzieć, że liczba nieparzysta = parzystej + 1 = $2n+1=(n+1)+n$, albo słowami: liczba nieparzysta jest sumą dwóch liczb kolejnych.

Ponieważ liczba nie zmienia się, gdy ją pomnożyć przez 1, więc liczba nieparzysta, czyli suma dwóch liczb kolejnych nie zmieni się, gdy ją pomnożymy przez różnicę tych samych dwóch liczb kolejnych, równą jedności. Ale iloczyn sumy dwóch liczb przez różnicę tych samych liczb równa się różnicy ich kwadratów, mamy więc

Twierdzenie I. *Każda liczba nieparzysta jest różnicą kwadratów dwóch liczb kolejnych.*

Twierdzenie to sprawdza się zresztą za pomocą tożsamości:

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \quad \dots \quad (1)$$

Zastosujmy to twierdzenie do p pierwszych liczb nieparzystych, t. j. połączmy w równości (1) zamiast n kolejno liczby $0, 1, 2, \dots, p-1$.

$$1^2 - 0^2 = 1$$

$$2^2 - 1^2 = 3$$

$$3^2 - 2^2 = 5$$

.....

$$p^2 - (p-1)^2 = 2p-1$$

Łatwo spostrzec, że jeżeli dodamy wszystkie te równości, otrzymamy:

$$p^2 = 1+3+5+\dots+(2p-1) \quad \dots \quad (2)$$

Twierdzenie II. Kwadrat każdej liczby całkowitej p jest sumą p pierwszych liczb nieparzystych.

§ 3. Liczbami pitagorejskimi nazywają się układy 3 liczb całkowitych, których kwadraty mają tę własność, że suma dwóch mniejszych równa się trzeciemu największemu. Zagadnienie pitagorejskie polega na znalezieniu sposobu ogólnego dla tworzenia tych liczb. W języku geometrycznym zagadnienie pitagorejskie brzmi: Znaleźć 3 liczby całkowite, które mogłyby być miarami boków trójkąta prostokątnego. Z twierdzenia II wynika łatwy sposób rozwiązania zagadnienia pitagorejskiego.

W samej rzeczy, napiszmy ciąg liczb nieparzystych

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37.....(3)

Na mocy twierdzenia II suma ilukolwiek pierwszych kolejnych liczb tego ciągu jest kwadratem. Jeżeli więc między liczbami ciągu spostrzeżemy jaki kwadrat (a będą tam kwadraty wszystkich liczb nieparzystych) np. 9, to suma wszystkich liczb nieparzystych mniejszych od 9 jest kwadratem i suma tych liczb więcej 9 jest też kwadratem:

$$\boxed{1, 3, 5, 7, 9}$$

Mamy zatem tożsamość:

$$(1+3+5+7)+9=(1+3+5+7+9) \quad \text{czyli}$$

$$4^2 + 3^2 = 5^2$$

Drugi przykład:

$$(1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23)+25=$$

$$12^2 + 5^2 =$$

$$=(1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25)$$

$$=13^2$$

Tym sposobem znaleźliśmy wszystkie liczby pitagorejskie, z których dwie największe różnią się o jedność. Oto następujące układy tego typu (typ I):

$$(1+3+\dots+47)+49=1+3+\dots+49; \quad 24^2+7^2=25^2$$

$$(1+3+\dots+79)+81=1+3+\dots+81; \quad 40^2+9^2=41^2$$

$$(1+3+\dots+119)+121=1+3+\dots+121; \quad 60^2+11^2=61^2$$

$$(1+3+\dots+167)+169=1+3+\dots+169; \quad 84^2+13^2=85^2 \text{ i t. d.}$$

§ 4. Drugi typ układów pitagorejskich otrzymamy, poszukując wszystkich kwadratów, które byłyby sumą dwóch liczb nieparzystych kolejnych. Ponieważ suma dwóch liczb nieparzystych jest parzystą, więc będą to oczywiście kwadraty liczb parzystych. Łatwo okazać, że wszystkie kwadraty liczb parzystych dadzą się przedstawić jako suma dwóch liczb nieparzystych kolejnych. W samej rzeczy, kwadrat liczby parzystej jest podzielny przez 4, można go zatem przedstawić jako sumę dwóch liczb parzystych równych. Odejmując od jednej jedność i dodając do drugiej jedność, otrzymamy dwie liczby nieparzyste sąsiednie. I tak

$$2^2 = 4 = 2 + 2 = 1 + 3$$

$$4^2 = 16 = 8 + 8 = 7 + 9$$

$$6^2 = 36 = 18 + 18 = 17 + 19$$

$$8^2 = 64 = 32 + 32 = 31 + 33 \text{ i t. d.}$$

Jeżeli teraz z pośród liczb ciągu (3) weźmiemy pod uwagę dwie liczby sąsiednie, których suma jest kwadratem, np. 7 i 9, to suma wszystkich liczb nieparzystych mniejszych od 7 jest kwadratem, i suma tych liczb zwiększona o 7+9 jest też kwadratem

$$\boxed{1, 3, 5, 7, 9}$$

Mamy zatem tożsamość:

$$(1+3+5)+(7+9)=1+3+5+7+9$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

W ten sposób znajdziemy wszystkie liczby pitagorejskie takie, że największa różni się od jednej z mniejszych o 2. Następne układy tego typu będą

$$(1+3+\dots+15)+(17+19)=1+3+\dots+19; \quad 8^2 + 6^2=10^2$$

$$(1+3+\dots+29)+(31+33)=1+3+\dots+33; \quad 15^2 + 8^2=17^2$$

$$(1+3+\dots+47)+(49+51)=1+3+\dots+51; \quad 24^2 + 10^2=26^2$$

$$(1+3+\dots+69)+(71+73)=1+3+\dots+73; \quad 35^2 + 12^2=37^2$$

Łatwo zauważyć, że niektóre układy tego typu pochodzą od podwojenia liczb układu pierwszego typu. I tak (8, 6, 10) pochodzi od (4, 3, 5), liczby (24, 10, 26) pochodzą od liczb (12, 5, 13) i t. d. Tych układów pochodnych można nie uważać za nowe rozwiązania, gdyż jeżeli liczby a , b i c sprawdzają równość $a^2+b^2=c^2$, to oczywiście ma , mb , i mc sprawdzają będą równość $(ma)^2+(mb)^2=(mc)^2$.

Już z tego, co wyżej powiedziano wynika: 1) układów pitagorejskich jest nieskończenie wiele i 2) każda liczba całkowita może być przyprostokątną trójkąta pitagorejskiego.

§ 5. Do trzeciego typu układów pitagorejskich zaliczamy te układy, w których różnica największej liczby i jednej z mniejszych równa się 3. Wszystkie układy tego typu znajdziemy, poszukując wszystkich kwadratów, które dałyby się przedstawić jako suma trzech liczb nieparzystych. Będą to oczywiście kwadraty liczb nieparzystych, bo suma trzech liczb nieparzystych jest zawsze nieparzystą. Powtórę, będą to kwadraty liczb podzielnych przez 3, bo suma trzech liczb nieparzystych sąsiednich daje się przedstawić w postaci sumy trzech liczb równych przez odjęcie 2 od największej i dodanie 2 do najmniejszej. I nawzajem, kwadrat każdej liczby nieparzystej, podzielnej przez 3, jest sumą trzech liczb nieparzystych sąsiednich. I tak

$$3^2 = 9 = 3. \quad 3 = 3 + 3 + 3 = 1 + 3 + 5$$

$$9^2 = 81 = 3. \quad 27 = 27 + 27 + 27 = 25 + 27 + 29$$

$$15^2 = 225 = 3. \quad 75 = 75 + 75 + 75 = 73 + 75 + 77$$

$$21^2 = 441 = 3. \quad 147 = 147 + 147 + 147 = 145 + 147 + 149 \text{ i t. d.}$$

Każdemu kwadratowi tego typu (oprócz 3^2) odpowiada układ pitagorejski. Tak np. z tożsamości

$$(1 + 3 + \dots + 23) + (25 + 27 + 29) = 1 + 3 + \dots + 29$$

wynika układ: $12^2 + 9^2 = 15^2$. Następne układy typu III będą

$$\begin{aligned} (1 + 3 + \dots + 71) + (73 + 75 + 77) &= 1 + 3 + \dots + 77; & 36^2 + 15^2 &= 39^2, \\ (1 + 3 + \dots + 143) + (145 + 147 + 149) &= 1 + 3 + \dots + 149; & 72^2 + 21^2 &= 75^2, \\ (1 + 3 + \dots + 239) + (241 + 243 + 245) &= 1 + 3 + \dots + 245; & 120^2 + 27^2 &= 123^2 \text{ i t. d.} \end{aligned}$$

Widzimy że układy te pochodzą od układów typu I, przez pomnożenie ich przez 3. Można łatwo okazać, że *wszystkie* układy typu III pochodzą od układów typu I i należałoby uczniów do podania dowodu zachęcić.

§ 6. W podobny sposób można iść dalej, t. j. szukać kwadratów, które są sumą czterech parzystych składników, pięciu nieparzystych, sześciu parzystych i t. d. To nas prowadzi do następującego zagadnienia:

Ilu sposobami dana liczba może być przyprostokątną trójkąta pitagorejskiego?

Na to odpowiedź będzie bardzo prosta. Dana liczba może być miarą przyprostokątnej w tylu trójkątach pitagorejskich, ilu sposobami może jej kwadrat być sumą parzystej liczby parzystych, lub nieparzystej liczby nieparzystych równych składników, nie licząc sumy n składników, z których każdy $= n$. Innymi słowy: w tylu trójkątach, ilu sposobami kwadrat liczby może być iloczynem dwóch nierównych parzystych lub dwóch nierównych nieparzystych czynników. Stąd wynika zaraz wniosek:

Liczba pierwsza może być miarą przyprostokątnej tylko w jednym trójkącie pitagorejskim.

Co do innych liczb, to znajdziemy np., w ilu trójkątach pitagorejskich wchodzi liczba 12.

$$12^2 = 72 \cdot 2 = 36 \cdot 4 = 24 \cdot 6 = 18 \cdot 8$$

Zatym w 4 trójkątach. Znajdujemy je w sposób następujący:

$$\begin{aligned} 12^2 &= 72 + 72 = 71 + 73 \\ &= 36 + 36 + 36 + 36 = 33 + 35 + 37 + 39 \\ &= 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 = 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 \\ &= 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + 18 = 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 \\ &\quad (1 + \dots + 69) + (71 + 73) = 1 + \dots + 73; \quad 35^2 + 12^2 = 37^2 \\ &\quad (1 + \dots + 31) + (33 + \dots + 39) = 1 + \dots + 39; \quad 16^2 + 12^2 = 20^2 \\ &\quad (1 + \dots + 17) + (19 + \dots + 29) = 1 + \dots + 19; \quad 9^2 + 12^2 = 15^2 \\ &\quad (1 + \dots + 9) + (11 + \dots + 25) = 1 + \dots + 25; \quad 5^2 + 12^2 = 13^2 \end{aligned}$$

Podobnie znajdziemy, że liczba 15 może być przyprostokątną w 4 trójkątach na zasadzie rozkładu:

$$15^2 = 225 \cdot 1 = 75 \cdot 3 = 45 \cdot 5 = 25 \cdot 9$$

Oto one: $112^2 + 15^2 = 113^2$; $36^2 + 15^2 = 39$; $20^2 + 15^2 = 25^2$; $8^2 + 15^2 = 17^2$.

Aby podać wzór na ilość odnośnych trójkątów pitagorejskich, przypuścimy, że dana liczba n ma m czynników pierwszych: a_1, a_2, \dots, a_m , z których pierwszy powtarza

się α_1 razy, drugi α_2 razy, ... m -ty α_m razy i przypuśćmy najpierw, że n jest nieparzystą liczbą. Niech zatem

$$n^2 = a_1^{2\alpha_1} \cdot a_2^{2\alpha_2} \dots a_m^{2\alpha_m}.$$

Łatwo spostrzec, że ilość sposobów rozłożenia liczby n^2 na dwa czynniki (włączając rozkład $1 \cdot n^2$) będzie połową ilości wyrazów rozwinięcia iloczynu

$$P = (1+a_1)^{2\alpha_1} \cdot (1+a_2)^{2\alpha_2} \dots (1+a_m)^{2\alpha_m}$$

Ponieważ odrzucamy rozkład na czynniki równe, więc szukana ilość sposobów będzie połową o jedność zmniejszonej ilości wyrazów rozwinięcia iloczynu P , czyli

$$2N = (1+2\alpha_1)(1+2\alpha_2) \dots (1+2\alpha_m) - 1$$

$$= 2\sum_i \alpha_i + 4 \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j + 8 \sum_{i,j,k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k + \dots + 2^m \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m, \quad \text{skąd}$$

$$N = \sum \alpha_i + 2\sum \alpha_i \alpha_j + 4\sum \alpha_i \alpha_j \alpha_k + \dots + 2^{m-1} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Tak np. znajdziemy, w ilu trójkątach liczba 4725 jest przyprostokątną

$$4725 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \quad \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 1.$$

$$N = (3+2+1) + 2(2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2) + 4(3 \cdot 2 \cdot 1) = 52$$

Jeżeli teraz liczba n jest parzysta, to n^2 można przedstawić w formie

$$n^2 = 2^{2\beta} \cdot a_1^{2\alpha_1} \cdot a_2^{2\alpha_2} \dots a_m^{2\alpha_m} = 2^{2\beta} \cdot n_1^2,$$

gdzie n_1^2 jest kwadratem liczby nieparzystej.

Ilość sposobów, którymi można rozłożyć liczbę nieparzystą n_1^2 na 2 nierówne czynniki jest

$$N_1 = \sum \alpha_i + 2\sum \alpha_i \alpha_j + \dots + 2^{m-1} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$$

Z każdego rozkładu liczby n_1^2 otrzymamy $2\beta - 1$ rozkładów liczby n^2 na 2 czynniki parzyste, mnożąc pierwszy z dwóch nierównych nieparzystych czynników przez $2, 2^2, \dots, 2^{2\beta-1}$, a drugi odpowiednio przez $2^{2\beta-1}, 2^{2\beta-2}, \dots, 2^2, 2$. Oprócz tego z 2 czynników nieparzystych równych powstanie $\beta - 1$ rozkładów na dwa czynniki parzyste nierówne, tak że ostatecznie

$$N = (2\beta - 1)(\sum \alpha_i + 2\sum \alpha_i \alpha_j + \dots + 2^{m-1} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m) + \beta - 1 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Tak np. liczba $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $\beta = 3, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$.

$$N = (2 \cdot 3 - 1)[(2+1) + 2(2 \cdot 1)] + (3 - 1) = 37.$$

Zatem liczba 360 jest przyprostokątną w 37 trójkątach pitagorejskich.

§ 7. Zanim zwrócimy się do zagadnienia, jaka liczba może być miarą przeciwprostokątnej i ilu może się to stać sposobami, trzeba niektórym wynikom naszym nadać formę ściślejszą.

Każdy kwadrat, jak to wdziliśmy na licznych przykładach, można przedstawić, jako sumę liczb nieparzystych kolejnych. W samej rzeczy niech $n^2 = ab$, gdzie $a > b$; wtedy, jeżeli n jest liczbą nieparzystą, mamy

$$n^2 = ab = (a-b+1) + (a-b+3) + \dots + (a-2) + a + (a+2) + \dots + (a+b-3) + (a+b-1)$$

Jeżeli zaś n jest liczbą parzystą

$$n^2 = ab = (a-b+1) + (a-b+3) + \dots + (a-1) + (a+1) + \dots + (a+b-3) + (a+b-1)$$

Aby utworzyć odpowiedni trójkąt pitagorejski, piszemy sumę ciągu liczb nieparzystych aż do liczby $a+b-1$ włącznie i dzielimy tę sumę na dwie sumy cząstkowe, z których jedna obejmuje wszystkie liczby nieparzyste mniejsze od $a-b+1$, druga zaś liczby ciągu począwszy od $a-b+1$.

Mamy wtedy tożsamość

$$[1+3+\dots+(a-b-1)] + [(a-b+1)+\dots+(a+b-1)] = [1+3+\dots+(a+b-1)]$$

Wszystkie trzy sumy są kwadratami. Sumując je według twierdzenia II, mamy

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (6)$$

Z tego wzoru wyprowadzamy od razu znany nam wniosek, że dana liczba może być tylu sposobami przyprostokątną, ilu sposobami można jej kwadrat n^2 przedstawić, jako iloczyn dwóch czynników ab obu nieparzystych lub obu parzystych i przytym sobie nierównych. Lecz dyskusja wzoru (6) daje nam jeszcze inne wnioski.

Jeżeli a i b mają (oprócz liczby 2) wspólny dzielnik, to odpowiedni trójkąt pitagorejski będzie pochodnym, bo $a-b$ oraz $a+b$ będą miały ten sam dzielnik. Jeżeli pochodnych trójkątów nie uważamy za odrębne rozwiązania zagadnienia pitagorejskiego, to trzeba zażądać, aby we wzorze (6) a i b albo były pierwsze ze sobą, albo miały jedyny wspólny dzielnik 2. Ale jeżeli a i b są pierwsze ze sobą, to muszą być kwadratami, bo ich iloczyn jest kwadratem, — jeżeli zaś mają jedyny wspólny dzielnik 2, to muszą być podwojonymi kwadratami. Możemy więc położyć

$$a = m^2, \quad b = n^2 \quad \text{albo} \quad a = 2m^2, \quad b = 2n^2.$$

Wtedy wzór (6) bierze postać

$$\left(\frac{m^2-n^2}{2}\right)^2 + m^2 n^2 = \left(\frac{m^2+n^2}{2}\right)^2 \quad (6a)$$

albo
$$(m^2-n^2)^2 + 4m^2 n^2 = (m^2+n^2)^2, \quad (6b)$$

gdzie m i n są to liczby nieparzyste.

Łatwo się przekonać, że wzór (6a) sprowadza się do wzoru (6b). Wystarczy w tym celu parzystą liczbę $m+n$ oznaczyć przez $2p$ i parzystą liczbę $m-n$ przez $2q$, t. j. położyć we wzorze (6a)

$$m = p+q, \quad n = p-q.$$

Otrzymamy wtedy po dokonaniu uproszczeń:

$$(p^2-q^2)^2 + 4p^2 q^2 = (p^2+q^2)^2, \quad (7)$$

wzór, który nie różni się od wzoru (6b). Możemy teraz ściśle sformułować rozwiązanie zagadnienia pitagorejskiego:

Aby trzy liczby a , b i c czyniły zadość równaniu

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

potrzeba i wystarcza, aby liczby te miały kształt

$$a = m(p^2 - q^2), \quad b = 2mpq, \quad c = m(p^2 + q^2). \quad (8)$$

§ 8. Jeżeli trójkątów pochodnych nie uważać za odrębne rozwiązania zagadnienia pitagorejskiego, to z trzeciego ze wzorów (8) wynika, że aby liczba dana mogła być przeciwprostokątną w trójkącie pitagorejskim, musi ona być sumą dwóch pierwszych ze sobą kwadratów, z których jeden jest liczbą parzystą. Nasuwa się pytanie, czy istnieją liczby, które są przeciwprostokątnymi w kilku trójkątach, t. j. czy są kwadraty, które kilku sposobami mogą być sumą dwóch kwadratów? Na to pytanie odpowiemy twierdząco. W samej rzeczy, aby to było możliwe, potrzeba i wystarcza, aby istniała taka liczba c , która byłaby kilku sposobami sumą dwóch kwadratów, t. j. aby była możliwą równość

$$p^2 + q^2 = p_1^2 + q_1^2 \text{ lub, co to samo}$$

$$p^2 - q_1^2 = p_1^2 - q^2 = d.$$

Otóż ta ostatnia równość jest możliwa. Jeżeli bowiem za d obierzemy iloczyn kilku czynników pierwszych, między którymi albo niema dwójki, albo wchodzi ona kilkakrotnie, to, jak widzieliśmy, można liczbę d przedstawić kilku sposobami jako sumę liczb nieparzystych sąsiednich; tyłuż sposobami d będzie różnicą dwóch kwadratów. Weźmy np. $d = 3 \cdot 5$. Liczba ta może dwoma sposobami być różnicą dwóch kwadratów

$$15 = 8^2 - 7^2 \text{ i } 15 = 4^2 - 1^2, \text{ skąd}$$

$$8^2 - 7^2 = 4^2 - 1^2$$

$$8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2 = 65.$$

Zatym liczba 65 może być przeciwprostokątną w dwóch trójkątach pitagorejskich

$$65^2 = 63^2 + 16^2 = 33^2 + 56^2.$$

§ 9. Skoro już wiemy, że istnieją liczby, które mogą być w dwóch trójkątach przeciwprostokątnymi, to wypada zbadać z kolei, jakie to są liczby. Powiadam, że są to liczby, których czynniki pierwsze są sumami nierównych kwadratów. Tak np. liczba 65 dlatego jest w dwóch trójkątach przeciwprostokątną, że jest iloczynem 5 przez 13, a obie te liczby są sumami dwóch kwadratów. Dowodem tego są następujące równości, znane powszechnie pod nazwą tożsamości Lagrange'a

$$(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) = (aa_1 + bb_1)^2 + (ab_1 - a_1b)^2 \quad (9)$$

$$(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) = (aa_1 - bb_1)^2 + (ab_1 + a_1b)^2 \quad (10)$$

Kładąc np. w tych równościach $a = 2$, $b = 1$, $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, otrzymamy: $65 = 8^2 + 1^2$ i $65 = 4^2 + 7^2$.

Wszakże, jeżeli $a = a_1$ i $b = b_1$, t. j. jeżeli dana liczba jest kwadratem sumy dwóch kwadratów, to tylko druga tożsamość daje rozkład na sumę

dwóch kwadratów, co już zresztą wiemy z tożsamości (7). Nie stoi na przeszkodzie, aby $a=b$ lub też $a_1=b_1$ (byleby nie jednocześnie), wtedy jednak z obu tożsamości otrzymujemy ten sam rozkład. W szczególności, jeżeli $a=b=1$, mamy wniosek:

Podwojona suma dwóch pierwszych ze sobą kwadratów, z których jeden jest liczbą parzystą, jest też sumą dwóch pierwszych ze sobą kwadratów.

Jeżeli dana liczba jest iloczynem trzech nierównych pierwszych liczb $c=\alpha\beta\gamma$, z których każda jest sumą dwóch kwadratów, to można ją czterema sposobami przedstawić jako sumę dwóch pierwszych ze sobą kwadratów. W samej rzeczy liczba $c'=\alpha\beta$ może być dwoma sposobami sumą dwóch kwadratów, a każda z tych sum pomnożona przez γ daje dwa rozkłady liczby c . Np.

$$1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17 = 33^2 + 4^2 = 31^2 + 12^2 = 32^2 + 9^2 = 24^2 + 23^2.$$

Zatym liczba 1105 może być miarą przeciwprostokątnej w czterech trójkątach pitagorejskich, nie licząc pochodnych.

Wogóle jeżeli liczba jest iloczynem m nierównych pierwszych liczb, z których każda jest sumą dwóch kwadratów, to może ona być miarą przeciwprostokątnej w 2^{m-1} trójkątach pitagorejskich, nie licząc pochodnych.

Ponieważ kwadrat i wogóle wszelka potęga sumy dwóch nierównych kwadratów tylko na jeden sposób (jak się o tem przekonać łatwo) może być sumą dwóch pierwszych ze sobą kwadratów, więc ilość trójkątów pitagorejskich (nie pochodnych) w których dana liczba jest przeciwprostokątną, jest niezależna od wysokości potęg jej czynników pierwszych. Mamy więc następującą zasadę. Jeżeli dana liczba ma m odrębnych czynników pierwszych w jakichkolwiek zresztą potęgach, a każdy z tych czynników jest sumą dwóch kwadratów, to ilość trójkątów pitagorejskich, w których jest ona przeciwprostokątną, jest 2^{m-1} .

Ilość trójkątów pochodnych daje się z łatwością obliczyć, podobnie jak w § 5; jest ona równa ilości iloczynów, które można utworzyć z α_1 czynników równych a_1 , α_2 czynników równych a_2 ... α_m czynników równych a_m po 1, 2, ... $\dots p-1$, jeżeli $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = p$. Wyprowadzenie odpowiedniego wzoru nie sprawia żadnych trudności.

Jeżeli niektóre czynniki pierwsze danej liczby nie są sumami dwóch kwadratów, lub jeżeli liczba zawiera jako czynnik liczbę 2, to dana liczba może być przeciwprostokątną tylko w trójkątach pochodnych.

§ 10. Z tożsamości Lagrange'a (której zresztą szczególnym przypadkiem jest wzór (7)) wynika, jak widzieliśmy, pewien charakter zachowawczy liczb, które są sumą dwóch pierwszych ze sobą kwadratów. Widzieliśmy, że przy mnożeniu tych liczb przez siebie, przy ich potęgowaniu, mnożeniu przez 2, oraz, naturalnie, przy działaniach odwrotnych do powyższych, gdy są one możliwe, otrzymujemy ciągle liczby tej samej natury. Ta bezwładność formy owych liczb powinna w wysokim stopniu zainteresować zdolniejszych uczniów.

Na zakończenie chcę zastosować wzory (7) do nieco trudniejszego zadania. Dowiodę mianowicie, że suma dwóch czwartych potęg nie może być czwartą potęgą t. j., że liczby pitagorejskie nie mogą być wszystkie jednocześnie kwadratami. Przypuśćmy zatem, że możliwym jest taki trójkąt pitagorejski (P, Q, R), w którym wszystkie trzy boki są kwadratami $P=p^2, Q=q^2, R=r^2$. Nie zmniejszając ogólności dowodu, możemy założyć, że każde dwie

z trzech liczb p^2, q^2, r^2 są pierwsze ze sobą. Wtedy jedna z przyprostokątnych np. q^2 musi być liczbą parzystą, dwa inne boki p^2 i r^2 są liczbami nieparzystymi i mają kształt

$$r^2 = m^2 + n^2 \dots \dots \dots (11)$$

$$p^2 = m^2 - n^2 \dots \dots \dots (12)$$

Powiadam, że m i n są też pierwsze ze sobą, bo gdyby miały spólny dzielnik α , to p i r miałyby też ten dzielnik, a więc nie byłyby pierwsze ze sobą wbrew założeniu. W trójkącie (11) albo m albo n musi być liczbą parzystą, ale m nie może być liczbą parzystą, bo jest przeciwprostokątną w trójkącie (12), więc z pośród czterech liczb r, p, m i n tylko n jest parzystą.

Z trójkątów (11) i (12) wynika zatem, że m i n muszą mieć kształt

$$m = a^2 + b^2 \dots \dots \dots (13)$$

$$n = 2ab \dots \dots \dots (14)$$

$$m = c^2 - d^2 \dots \dots \dots (15)$$

$$n = 2cd \dots \dots \dots (15)$$

przytym znowu liczby a i b (wzgl. c i d) muszą być pierwsze ze sobą i nie mogą być obie nieparzyste. Inaczej bowiem, gdyby np. a i b miały spólny dzielnik β , to m i n miałyby go także, nie byłyby więc pierwsze ze sobą. Podobnie gdyby a i b obie były nieparzyste, to liczby m i n byłyby obie parzyste, nie byłyby więc pierwsze ze sobą. Nie zmniejszę ogólności dowodu, jeżeli założę, że jedna z dwóch liczb a i c jest parzystą, a druga nieparzystą, bo jakkolwiek jest liczba c , mogę tę z dwóch liczb a i b oznaczyć przez a , która nie jest jednocześnie z c parzystą lub nieparzystą.

Rugując m i n z równań (13), (14), (15) i (16) otrzymamy:

$$a^2 + b^2 = c^2 - d^2 \dots \dots \dots (17)$$

$$ab = cd \dots \dots \dots (18)$$

Z tych dwóch równań rugując d , otrzymamy równanie

$$\frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} = \frac{c^2}{b^2} \dots \dots \dots (19)$$

Jeden z tych dwóch ułamków albo oba można skrócić, zależnie od tego, czy c ma spólny dzielnik z a lub z b , czy też jeden dzielnik wspólny z a , a drugi z b . Gdyby c było pierwsze z a , to, na zasadzie (18), b musiałoby być podzielne przez c i równość (19) byłaby niemożliwa, gdyż lewa jej strona > 1 , a prawa < 1 .

Gdyby c było pierwsze z b , to na zasadzie (18) a byłoby podzielne przez c , a wiec $a > c$, lewa strona równania (19) byłaby ujemna, a prawa dodatnia.

Gdyby wreszcie c miało z a spólny dzielnik k , z b zaś spólny dzielnik l , t. j. gdyby

$$c = kc_1, \quad a = ka_1$$

$$c = lc_2, \quad b = lb_1,$$

