Krótki rys teoryi funkcyj peryodycznych jednej zmiennej.

(Kurzer Abriss der Theorie der periodischen Functionen einer Variablen)

napisał

Dr. Placyd Dziwiński.

I.

Najdawniejsza metoda tworzenia i badania funkcyi, metoda Leibnitza[1]), polega na określeniu funkcyi przez dane wyrażenie algebraiczne. Postępując wedle tej metody, możemy, celem utworzenia pewnej funkcyi u zależnej od zmiennej zespolonej z, poddawać zmienną z tylko czterem działaniom arytmetycznym.

Najprostsza funkcya w ten sposób otrzymana w postaci:

$$u = \mathrm{f}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 +, \ldots a_n z^n$$

gdzie n przedstawia liczbę całkowitą, a_0, a_1, a_2, .. a_n zaś dowolne stałe zespolone, zowie się funkcyą całkowitą n^{go} stopnia. Własności zasadnicze funkcyi całkowitej są: 1) Funkcya całkowita jest funkcyą skończoną, jednowartościową i ciągłą dla wszelkiej skończonej wartości z, tylko dla $z = \infty$ nieskończenie wielką i to rzędu skończonego, a odwrotnie[2]), wszelka funkcya jednowartościowa, skończona dla całej płaszczyzny liczbowej, stająca się tylko dla nieskończenie wielkiej wartości zmiennej niezależnej nieskończenie wielką stopnia skończonego, musi być funkcyą całkowitą. 2) Wszelka funkcya całkowita n^{go} stopnia da się rozłożyć na n czynników stopnia pierwszego w postaci:

$$\mathrm{f}(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots . (z - \alpha_n)$$

staje się więc na płaszczyźnie liczbowej n razy zerem. Widoczna stąd,

---

[1]) *Leibnitz, G. G.,* Opera omnia, coll. et distr. Dutens. 6 vol. Genevae 1768. 4. c. effig. cart. — [2]) Porównaj: *Durège H.,* Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Leipzig 1864, str. 116. §. 31.

że funkcya całkowita wszelką wartość n razy przybiera; możemy więc powiedzieć, że ma n punktów zerowych w skończoności i n punktów nieskończonościowych w nieskończoności.

Drugi rodzaj funkcyj tą metodą otrzymywanych, stanowi iloraz dwóch funkcyj całkowitych w postaci:

$$u = f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n}$$

i tworzy tak zwaną funkcyą wymierną m^{go} albo n^{go} stopnia, zależnie od tego, czy m albo n jest liczbą większą. Wszelka funkcya wymierna r^{go} stopnia jest również w całej płaszczyźnie liczbowej funkcyą skończoną jednowartościową i ciągłą z wyjątkiem r miejsc, oznaczonych równaniem $f_2(z) = 0$, dla których staje się nieskończenie wielką pierwszego rzędu.

Ponieważ licznik i mianownik formy ułamkowej $f(z)$ możemy sprowadzić do stopnia jednakowego $m = n = r$, przeto widoczna także, że wszelka funkcya wymierna r^{go} stopnia każdą wartość n. p. c przyjmuje r razy, czyli staje się na płaszczyźnie liczbowej r razy zerem i r razy nieskończonością.

Funkcye całkowite i wymierne są tylko szczególnymi wypadkami funkcyj ogólniejszych, zwanych funkcyami algebraicznymi. Poddajmy mianowicie czterem działaniom arytmetycznym nietylko zmienną niezależną z ale także jej funkcyę u, to otrzymamy równanie:

$$f_n(z)\, u^n + f_{n-1}(z)\, u^{n-1} + \ldots . f_1(z)\, u + f_0(z) = 0$$

gdzie spółczynniki $f_0(z)$, $f_1(z)$ . . . . $f_n(z)$ będą funkcyami całkowitymi zmiennej niezależnej z. Funkcya $u = F(z)$, określona tem równaniem n^{go} stopnia, zowie się funkcyą algebraiczną n^{go} stopnia. Jest ona funkcyą n-wartościową zmiennej niezależnej z, czyli innymi słowy przybiera dla każdej wartości z w ogólności n różnych wartości, które tylko w pewnych miejscach w zupełności lub częściowo w siebie wpadają.

Koniecznym i wystarczającym warunkiem, aby dana funkcya $u = f(z)$ była algebraiczną, będzie tedy ten, żeby funkcya dla każdego z miała skończoną ilość różnych wartości i tylko w skończonej liczbie punktów stawała się nieskończenie wielką rzędu skończonego.

Funkcye algebraiczne tworzą grupę funkcyj w sobie zamkniętą, nie prowadzącą do dalszego rozszerzenia pola funkcyj.

II.

Zachodzi teraz pytanie, w jaki sposób możemy nowe rodzaje funkcyj w sposób naturalny potworzyć? W rzeczywistości używano od dawna dróg rożnych, aby dójść do nowych rodzajów funkcyj. Rozszerzywszy naprzód pojęcie potęgi, jako funkcyi wykładnika, dochodzi się do funkcyi wykładniczej $u = e^z$ a przez jej odwrócenie do funkcyi logarytmicznej $z = \log u$. Już Euler[1]), Lagrange[2]) i Lacroix[3]) stosowali trzy wyższe działania, jak potęgowanie, pierwiastkowanie i logarytmowanie, do zmiennej niezależnej z, przez co określali nowe funkcye $u = \mathrm{F}(z)$, które dla pewnej wartości z otrzymują pewne wartości u. Wartościom u odpowiadają naodwrót pewne wartości z, czyli z jest nową jakąś funkcyą zmiennej u: $z = \varphi(u) = [\mathrm{F}(u)]^{-1}$ *), chociaż nie znane są metody dojścia od pewnej wartości u do szukanych wartości z.

Określenie funkcyj, rozszerzone w tym duchu, polega na tem, że między dwiema zmiennymi istnieje równanie $\mathrm{F}(u, z) = 0$, w którem lewa strona złożona jest z siedmiu działań zmiennymi u i z i dowolnymi liczbami stałymi. Jedną zmienną u można tu uważać jako funkcyę drugiej z, określoną w formie zawiłej $\mathrm{F}(u, z) = 0$. Ta droga nie daje atoli zamkniętej grupy funkcyi, nie domaga zresztą z dwóch względów. Po pierwsze nie widać a priori, że, gdy z dane, u można oznaczyć, po drugie, gdyby nawet wynaleziono metodę oznaczenia w poszczególnych wypadkach wartości u, to nicby się nie zyskało, bo innej kombinacyi działań możnaby użyć do tworzenia nowych równań, przez któreby nowe funkcye były określone.

Powyższe określenie funkcyi zawarte jest w określeniu ogólniejszem, wprowadzonem przez Jana Bernouillego[4]), wedle którego jedną zmienną zowiemy funkcyą drugiej, skoro zależność jednej zmiennej od drugiej jest skonstatowaną, chociażby nawet nie znane było prawo tej zależności i analitycznie oznaczyć się nie dało. Na takiem nic nie dającem określeniu do żadnych wyników dojść nie można, chyba, że się przypisuje funkcyi, jak się długi czas działo, własności nie leżące w jej określeniu, jak ciągłość i różniczkowalność.

---

[1]) *Euler, L.,* Introductio in analysim infinitorum. 2 vol. Lausannae. 1748. 4. fig. — [2]) *Lagrange,* Leçons sur le calcul des fonctions. Nouv. édit. Paris 1806. jako też — Théorie de fonctions analytiques. 2 édit. Paris 1813. 4. — [3]) *Lacroix, S. F.* Traité du Calcul different. et du Calcul intégral. 2 édit. 3 vol. Paris 1810—19. 4. fig. — *) Znaczkowanie przyjęte przez matematyków angielskich dla funkcyj odwróconych. — [4]) *Bernouilli, Joh.,* Opera omnia. 2 vol. Genevae 1744. 4. fig.

III.

Drugą drogą, prowadzącą do rozszerzenia pola funkcyj, uprawianą chętnie od czasów Legendre'a[1]), Abla[2]) i Jacobi'ego[3]) jest badanie całek funkcyj algebraicznych, czyli poszukiwanie funkcyj, które danym równaniom różniczkowym algebraicznym zadość czynią. Tą metodą otrzymano w istocie pokaźne rezultaty. W całkach funkcyj algebraicznych wymiernych albo zawierających pierwiastek kwadratowy z wielomianu drugiego stopnia poznano funkcye skądinąd znane, jak algebraiczne, logarytmiczne, względnie cyklometryczne, natomiast doprowadziły poszukiwania nad całkami funkcyj, zawierających pierwiastek kwadratowy z wielomianu czwartego stopnia w postaci: $\int F(z, \sqrt{Z})\, dz$, gdzie $Z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4$, do odkrycia nowych nieznanych dotąd funkcyj, które Legendre sprowadził do trzech form typowych:

$$u = \int \frac{d\varphi}{\Delta} = F, \; v = \int \Delta\, d\varphi = E, \; w = \int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\, \Delta} = \Pi$$

gdzie $\Delta = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}$, stworzywszy tym sposobem podstawę teoryi t. z. całek elliptycznych, którą Jacobi ugruntował.

W dalszym ciągu uogólniono zagadnienie, badając całki w postaci $u = \int F(z, \sqrt{Z})\, dz$, w których F oznacza funkcyę wymierną z z i $\sqrt{Z}$, zaś Z funkcyę całkowitą zmiennej z. Wykazało się tu, że każda funkcya wymierna z z i $\sqrt{Z}$, gdzie Z jest wielomianem stopnia $(2p+1)$ go da się przekształcić na wymierną funkcyę z x i $\sqrt{X}$, jako też odwrotnie, gdzie X będzie całkowitym wielomianem $2p$ go stopnia. Nazwano też całki w postaci $\int F(x, \sqrt{X})\, dx$, gdzie X przedstawia wielomian $(2p+4)$ go stopnia, całkami hyperelliptycznymi p go stopnia $[p > o]$. Jeżeli w teoryi całek elliptycznych i hyperelliptycznych znaleźć się ma funkcyę czyniącą zadość równaniu różniczkowemu $\frac{du}{dx} = F(x, y)$, gdzie F przedstawia funkcyę wymierną z x i y, zaś $y^2 = f(x)$ t. j. całkowitej funkcyi zmiennej x, to problem rozszerzony w tym duchu prowadzi do poszukiwania całek $u = \int F(x, y)\, dx$, gdzie y czyni zadość równaniu algebraicznemu $f(x, y) = 0$.

Całki tego rodzaju nazywają się całkami Ablowymi. Poszukiwania Abla wykazały, że całki powyższe także sprowadzić się dają do trzech typów zasadniczych, przezwanych całkami pierwszego, drugiego

---

[1]) *Legendre, A. M.,* Traité des fonctions elliptiques. 3 vol. Paris 1825—28. — [2]) *Abel, N. H.,* Oeuvres complètes mathém. av. d. notes et développ. réd. p. Holmboe. 2 vols. Christiania 1839. 4. — [3]) *Jacobi, C. G. J.,* Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum Regiom. 1829. 4.

i trzeciego gatunku. Całka pierwszego gatunku nie staje się dla żadnej pary wartości x, y, nieskończenie wielką; całka drugiego gatunku staje się tylko w pewnych miejscach nieskończenie wielką, i to rzędu pierwszego; całka trzeciego gatunku staje się w pewnych miejscach logarytmicznie nieskończoną.

Głębsze studyum tych nowych funkcyj stanowi dziś jeden z najbardziej interesujących przedmiotów nowoczesnej analizy. Problemem odwrócenia otrzymanych funkcyj złączyli Jacobi i Abel nie oddzielnie swe imię z tą teoryą. O otrzymanych funkcyach odwróconych wspomniemy tylko w krótkości, że jak całce logarytmicznej:

$u = \int \frac{dz}{z} = \log z$ odpowiada funkcya odwrócona wykładnicza: $z = e^u$, całce cyklometrycznej: $u = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = arc \sin z$ funkcya goniometryczna: $z = \sin u$; tak odpowiadają całkom elliptycznym, hiperelliptycznym i Ablowym nowe funkcye odwrotne o ciekawych własnościach, nazwane funkcyami elliptycznymi, hyperelliptycznymi i Ablowymi.

Postępując metodą równań różniczkowych dochodzi się w istocie do bogatego źródła nieskończenie wielu nowych funkcyj, zasadniczo od siebie różnych; każda z nich ma pewne jej właściwe cechy, a oprócz tego mają one cechy wspólne dozwalające je podzielić na rozległe grupy. Przypatrzywszy się bliżej tej metodzie, nie trudno zauważać, że ona jest po części połączeniem metody Leibnitza z metodą Bernouillego. Z metodą Leibnitza ma ona to wspólnego, że za podstawę poszukiwania stawia pewne wyrażenie analityczne, z metodą Bernouillego zaś to, że nie określa funkcyi bezpośrednio w skończonej formie analitycznej, tylko wypowiada pewną własność funkcyi, łączącą ją z jej zmianami i podaje przez całkę, jako wyrażenie niewykonane, tylko co najwyżej do obliczenia przygotowane, pewien więcej lub mniej szczegółowy problem do rozwiązania. Ściślejsze studyum równań różniczkowych przekonuje, że zasadniczo różne funkcye mają wyrażenia różniczkowe bardzo do siebie podobne i że danym równaniom różniczkowym nie można zawsze przez funkcye ciągłe zadość uczynić, a częstokroć dochodzi się nawet po zawiłych rozważaniach równań różniczkowych, zawierających tylko jedną zmienną, do funkcyi więcej zmiennych.

IV.

Rzeczywisty postęp w teoryi funkcyi stanowi uwolnienie się przy badaniu funkcyj od dawnego ograniczenia pola zmienności zmiennej niezależnej do wartości rzeczywistych i wprowadzenie do poszukiwań wartości urojonych albo zespolonych przez Gaussa [1]) i Cauchy'ego [2]), przez co dopiero, jak to Abel i Jacobi przy badaniu funkcyj elliptycznych zauważali, należycie funkcyę co do jej natury i własności opanować można.

Jeżeli do geometrycznego przedstawienia liczb rzeczywistych wystarcza prosta nieograniczona, to przedstawienie liczb urojonych i zespolonych $z = x + yi$ wymaga nieograniczonej płaszczyzny. Wyobraźmy sobie pewną wartość zmiennej niezależnej $z = x + yi$ przedstawioną punktem na jednej płaszczyźnie, odpowiednią wartość pewną funkcyi $u = \mathfrak{f}(z) = X + Yi$ punktem na drugiej, tedy drogom opisanym przez punkt z na jednej płaszczyźnie odpowiadać będą, jeżeli $u = \mathfrak{f}(z)$ jest funkcyą ciągłą, pewne drogi przez punkt u opisane na drugiej płaszczyźnie.

Dla funkcyj jednowartościowych, jakiemi są n. p. funkcye wymierne, odpowiada wszelkiemu punktowi z jeden tylko punkt u, wszelkiej krzywej punktu z, jedna tylko odpowiedna krzywa punktu u. Inaczej ma się już rzecz z odwróceniem funkcyi wymiernej, jak w ogólności z dowolną funkcyą algebraiczną jako funkcyą n-wartościową. Każdemu punktowi na płaszczyźnie z odpowiada n punktów różnych na płaszczyznie u, które tylko dla szczególnych punktów z t. z. punktów krytycznych częściowo lub wszystkie się nakrywają.

Przyjmijmy teraz na z pewną wartość a i obierzmy dla u jednę z n różnych wartości funkcyi u n. p. u_1, niech tedy opisuje punkt z od punktu a począwszy pewną linię ciągłą, omijającą punkta krytyczne aż do punktu b, tedy opisze punkt u linię ciągłą począwszy od u_1 i dojdzie w końcu do punktu u'_1; linia ta będzie jednoznacznie określoną, gdyż u zmienia się wszędzie jednoznacznie prócz punktów krytycznych. Jeżeli punkt z opisuje pod tymi samymi warunkami inną linię ciągłą, nieskończenie zbliżoną do pierwszej, to punkt u opisze także nową linię ciągłą, z u_1 wychodzącą, do pierwotnej nieskończenie zbliżoną i wróci do punktu u'_1, skoro z dojdzie do b. Podobnie może punkt z opisywać wiele dróg innych z punktu a do b, a punkt u będzie się poruszał zawsze z u_1 do u'_1 — oczywiście pod założeniem, że drogi przez z opisane nie przechodzą i nie otaczają żadnego

---

[1]) *Gauss C. F.* Demonstratio theorematis omnem functionem algebraicam, rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. 3 pts. Göttingen. 1799 — [2]) *Cauchy A. L.* Cours d'analyse de l'École Polyt. Paris. 1821. 8. — Mémoire sur les intégrales définies prises entre les limites imaginaires. Paris. Debure. 1828.

punktu krytycznego, bo dla takiego ma u wspólne wartości, a przeto dalszy pochód zmiennej u w kilku kierunkach możliwy.

Widoczna stąd, że punkt u opisze krzywę zamkniętą, jeżeli punkt z opisze krzywę zamkniętą, nie przechodzącą przez punkta krytyczne i nie otaczającą takowych. Jeżeli droga zamknięta przez z opisana otacza punkt krytyczny, to u może dojść w końcu do punktu różnego od punktu wyjścia u_1, chociaż z wróci do a.

Pytanie, czy możliwą jest rzeczą wyznaczyć dla danej funkcyi n-wartościowej takie drogi okrążne dla punktu z z a wychodzącego, ażeby droga przez u opisana, a wychodząca z jednego punktu u_1, punktowi a odpowiadającego, przeszła przez wszystkie inne punkta odpowiednie u_2, u_3 .. u_n, i wróciła do punktu u_1. W odpowiedzi na to ważne pytanie przekonuje nietrudne rozumowanie, że, n. p. przy funkcyach algebraicznych prostych (irreductibilis), takie drogi okrężne dla z wynaleźć można.

Aby dać obraz jasny i przejrzysty o związku wartości w funkcyach wielowartościowych wprowadził Riemann[1]) środek uzmysławiający, nadzwyczaj ważny dla rozwoju teoryi funkcyj w ogólności.

Wyobraźmy sobie, w miejscu jednej płaszczyzny z, n płaszczyzn na sobie położonych, tedy w miejsce jednego punktu z będziemy mieli n punktów nad sobą leżących, przedstawiających tę samą liczbę zespoloną $z = x + yi = r\varphi$; niech odpowiada teraz punktowi $z_1 = a$ pierwszej płaszczyzny z góry jedna wartość u_1 funkcyi n-wartościowej $u = f(z)$, punktowi nad nim położonemu drugiej płaszczyzny z góry, wartość u_2, itd., ostatniej płaszczyzny, na dole położonej, wartość u_n, to funkcya n-wartościowa $u = f(z)$ przedstawi się wskutek tego, jako funkcya jednowartościowa punktów zmiennych z, rozmieszczonych na n płaszczyznach na sobie położonych. Poszczepiajmy teraz w myśli te płaszczyzny z na sobie ułożone odpowiednio do wspólnych wartości u pewnemu z przynależnych, w poszczególnych punktach krytycznych, a przeciąwszy dwie po sobie następujące płaszczyzny wzdłuż linij ciągłych łączących odpowiednie dwa punkta krytyczne, połączmy w myśli w tym przekroju prawy brzeg płaszczyzny dolnej z lewym brzegiem górnej w tym celu, aby stosownem ruchem punktu z, z jednej wartości zmiennej u można dojść do innych, otrzymamy t. z. powierzchnię Riemannowską, odpowiadającą danej funkcyi n-wartościowej. Zauważać tu wypada, że jest rzeczą zupełnie obojętną, jaki zbiór wartości u pierw-

---

[1]) *Riemann B.*, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Göttingen 1851.

szej płaszczyźnie górnej odpowiada, zależy to od wyboru linii przekroju łączącego punkta krytyczne, a ten jest zupełnie dowolny; linia przekroju przyjęta między punktami krytecznymi, nie odgrywa też zresztą żadnej osobliwszej roli na powierzchni Riemannowskiej, jak tylko łączenia ze sobą płaszczyzn na sobie położonych; każde przejście punktu z przez linię przekroju sprowadza go do następnej płaszczyzny dolnej, po n-krotnem przejściu linij przekroju wraca punkt z znowu do pierwotnej płaszczyzny; wartościom funkcyj w punktach z leżących na linii przekroju nie przypada zresztą żadna osobliwsza ważność.

V.

W nowszych czasach rozwinęła się pod wpływem Weierstrassa[1]), profesora uniwersytetu Berlińskiego, nowa metoda badania i tworzenia funkcyj jedno i wielowartościowych, wolna od geometrycznego uzmysłowienia za pomocą powierzchni Riemannowskich, a odznaczająca się zarówno prostotą jak naturalnością.

Jeżeli funkcye algebraiczne określają się za pomocą skończonej liczby czterych działań arytmetycznych, do zmiennej lub jej funkcyi stosowanych, nasuwa się samo przez się pytanie, czyby nie można uwolnić się od tego ograniczenia, poddając zmienną nieskończenie wielu działaniom tego rodzaju. Rozszerzając w ten sposób określenie funkcyj algebranicznych, otrzymuje się w miejscu funkcyi całkowitej szereg nieskończony, wedle potęg zmiennej z postępujący czyli t. z. szereg potęgowy w postaci:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \text{ in inf.} = \mathfrak{P}(z)$$

albo nieskończony iloczyn w postaci:

$$u = \prod_{n=1}^{\infty}(z - \alpha_n) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) \dots \text{ in inf.};$$

w miejscu funkcyi wymiernej ułamkowej iloraz dwóch szeregów potęgowych:

$$u = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots}{b_0 + b_1 z + b_1 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots}$$

albo iloraz dwóch iloczynów nieskończonych

$$u = \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2) \dots (z-\alpha_n) \dots}{(z-\beta_1)(z-\beta_2) \dots (z-\beta_n) \dots}$$

gdzie a_n, b_n, α_n, β_n i z mogą oczywiście przybierać także wartości zespolone.

[1]) Weierstrass C. Mathematische Abhandlungen aus den Monatsberichten der Berliner Akademie. Berlin 1856—76. 8.

Rozszerzona w tym duchu ogólna funkcya algebraiczna określi się równaniem F $(u, z) = 0$, gdzie F (u, z) wyobraża szereg potęgowy ze względu na z i u, równanie przedstawi się więc w postaci:

$$f_0(z) + f_1(z)u + f_2(z)u^2 + \dots + f_n(z)u^n + \dots \text{ in inf.} = 0$$

$$\text{albo } (u - Z_1)(u - Z_2) \dots (u - Z_n) \dots \text{ in inf} = 0$$

gdzie $f_n(z)$ i Z_n są funkcyami wymiernymi albo nawet szeregami potęgowymi zmiennej z. Tak określone nowe funkcye nie będą już algebraicznymi, i nazywają się w ogólności funkcyami przestępnymi.

Szeregi i iloczyny nieskończone mają dla poszukiwań widocznie tylko wtedy pewne znaczenie, gdy suma względnie iloczyn nieskończenie wielu członów, z których się one składają są skończone i określone. W tym wypadku nazywają się szeregi albo iloczyny zbieżnymi, w przeciwnym razie rozbieżnymi.

Zbieżność szeregów potęgowych zawisła w ogólności od wartości zmiennej. Zbiór tych wartości zmiennej z, dla których pewien szereg potęgowy $\mathfrak{P}(z)$ jest zbieżnym, nazywa się zakresem zbieżności szeregu. Jest on zbieżnym dla wszelkiej wartości z, tedy jest jego zakres zbieżności nieograniczonym; zawisła jego zbieżność nie tylko od wartości zmiennej z, ale także od porządku dodajników, tedy nazywa się szereg warunkowo zbieżnym.

Bezpośrednio z określenia zbieżności szeregów wypływa:

1) Wszelki szereg potęgowy jest zbieżny, gdy szereg bezwględnych wartości jego członów jest zbieżny, a to stanie się stosownie do kryteryum Cauchy'ego, jeżeli

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |z| < 1 \text{ czyli } |z| < \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad {}^{1)}$$

2) Wszelki szereg potęgowy, którego wyrazy, bezwzględnie biorąc, są po kolei mniejsze od odpowiednich wyrazów innego szeregu bezwarunkowo zbieżnego, jest również szeregiem zbieżnym.

Opierając się na tych zdaniach można z łatwością wykazać, że szereg potęgowy zbieżny dla $z_0 = a + bi = r_\varphi$ będzie także zbieżnym dla wszelkich wartości z, których wartość bezwzględna jest mniejszą od $|z_0| = \sqrt{a^2+b^2} = r$.

Jeżeli szereg potęgowy nie jest nieograniczenie zbieżnym, tedy można zawsze znaleźć taką wartość $|z_0| = r$, że szereg będzie zbieżnym tylko dla wartości z bezwzględnie mniejszych od r, zaś rozbieżnym dla wartości z bezwględnie biorąc większych od r, podczas gdy

---

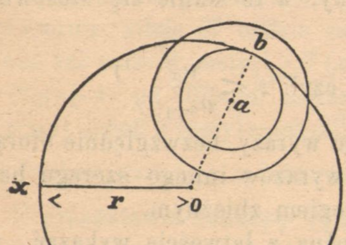
[1]) Znakiem $|a + bi|$ oznacza się wedle Weierstrassa bezwzględną wartość r liczby zespolonej $a + bi = r_\varphi$.

dla $|z| = r$ o zbieżności szeregu nie podobna w ogólności rozstrzygnąć. Wartość r jest tedy górną granicą bezwzględnych wartości, wszelkich wartości zmiennej z z zakresu zbieżności danego szeregu potęgowego.

Jeżeli przedstawimy wszystkie wartości z w obrębie zbieżności danego szeregu potęgowego punktami na płaszczyznie, tedy przedstawi się zakres zbieżności szeregu geometrycznie powierzchnią koła, z punktu $z=0$ promieniem r zakreślonego, które nazywa się kołem zbieżności szeregu. Punkta wewnątrz koła odpowiadają tym wartościom z, dla których szereg jest zbieżnym, podczas gdy dla punktów zewnątrz koła leżących będzie szereg rozbieżnym, a dla punktów samej linii kołowej pozostanie kwestya zbieżności w ogólności nieoznaczoną.

Zakres zbieżności szeregu nieograniczenie zbieżnego przedstawi się geometrycznie całą płaszczyzną liczbową. Suma, różnica lub iloczyn szeregów potęgowych bezwarunkowo zbieżnych dają nowy szereg potęgowy bezwarunkowo zbieżny, którego zakresem zbieżności będzie wspólne pole zbieżności danych szeregów. Dwa szeregi zgadzające się dla wszystkich wartości w obrębie koła $|z| < r$ muszą mieć też współczynniki kolejno równe.

Fig. 1.



Niech będzie $\mathfrak{P}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ szeregiem potęgowym zbieżnym wewnątrz koła o promieniu r (Fig. 1.); przyjmijmy w obrębie tego koła pewien punkt a i podstawmy w szeregu $z = a + h$, gdzie $|a| + |h| < r$; uporządkowawszy teraz szereg wedle potęg h czyli z-a, otrzymamy z szeregu $\mathfrak{P}(z)$ nowy szereg potęgowy w postaci:

$$\mathfrak{P}(z-a) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \ldots$$

dla którego koło zbieżności będzie miało promień $\varrho = r - |a|$, przedstawi się przeto jako koło z punktu a, jako środka promieniem ϱ wykreślone, a więc styczne wewnątrz koła (r). W obrębie koła (ϱ) (Fig. 1.) przedstawi się wartość funkcyi dwoma szeregami potęgowymi, raz szeregiem $\mathfrak{P}(z)$ wedle potęg z postępującym, drugi raz szeregiem $\mathfrak{P}(z-a)$ wedle z-a. Oba szeregi muszą się zgadzać co do swych wartości dla wszystkich punktów wewnątrz koła (ϱ) położonych. Szereg potęgowy $\mathfrak{P}(z)$ nie ma wcale znaczenia zewnątrz koła (r) jako swego prawdziwego koła zbieżności, szereg potęgowy $\mathfrak{P}(z-a)$ musi mieć znaczenie w obrębie koła ($\varrho = r - |a|$); zdarzyć się może jednakże, że prawdziwe koło zbieżności szeregu $\mathfrak{P}(z-a)$ ma promień większy od ϱ n. p. $r_1 > r - |a|$, tedy zakres ważności szeregu $\mathfrak{P}(z-a)$ występuje poza koło (r), a funkcya określona szeregiem $\mathfrak{P}(z)$ otrzymuje w tym wypadku znaczenie także dla takich punktów po za kołem (r), dla których przedtem jej szereg potęgowy nie miał znaczenia.

Taki szereg $\mathfrak{P}(z-a)$, którego ważność rozciąga się po za koło (r) nazywamy dalszym ciągiem albo pochodem funkcyi szeregiem $\mathfrak{P}(z)$ określonej. Szczegółowe rozważanie wykazuje, że jest rzeczą zupełnie obojętną, jakim pochodem funkcyę $f(z)$ dla pewnego punktu z_1 nie leżącego wewnątrz koła (r) określimy, byle otrzymany nowy szereg był ważnym także dla tego punktu. Ważność funkcyi $f(z)$ da się w ten sposób dalej rozszerzyć.

Możliwą jest rzeczą, że przy każdym dalszym pochodzie, utworzonym z szeregu $\mathfrak{P}(z-a)$, odpowiednie prawdziwe koło zbieżności ma taką samą własność, co poprzednie. Otrzymane szeregi rozszerzają tedy ważność funkcyi jeszcze dalej. Jako punkta a, środki nowych kół zbieżności, możemy obrać punkta wewnątrz koła leżące w pobliżu obwodu albo nawet na samym obwodzie, skoro poprzedni szereg $\mathfrak{P}(z)$ jest dla takiego punktu zbieżnym. Jeżeli przy tem postępowaniu nie natrafimy na taki szereg $\mathfrak{P}(z-a)$, którego koło zbieżności byłoby nieskończenie małem, tedy ma funkcya wszędzie wartość skończoną jednowartościową; jeżeli zaś to założenie nie dotyczy wszystkich pochodów funkcyi, tedy natrafiamy na punkta osobliwe, dla których funkcya nie jest określoną. Nie trudno udowodnić, że na obwodzie prawdziwego koła zbieżności szeregu $\mathfrak{P}(z)$ istnieje przynajmniej jeden punkt taki ζ, w którego otoczeniu promień r_1 jest nieskończenie małym, dla którego więc funkcya nie może być określoną. Punkta takie zowiemy punktami krytycznymi albo miejscami granicznymi funkcyi $f(z)$.

W ogólności da się zawsze z danego szeregu potęgowego $\mathfrak{P}(z)$ zbieżnego w obrębie koła (r), wyprowadzić nieskończenie wiele innych szeregów zbieżnych, nazwanych dalszym ciągiem pierwotnego szeregu potęgowego. Zbiór wszystkich tych szeregów potęgowych wyprowadzonych z danego szeregu potęgowego tworzy t. z. utwór analityczny, a funkcya tym zbiorem przedstawiona nazywa się funkcyą analityczną; każdy poszczególny szereg potęgowy w jej skład wchodzący nazywa się elementem utworu analitycznego, pierwszym szeregiem określonego, albo elementem funkcyjnym. Szczególna wartość z' będzie tylko wtedy wartością, jaką przyjąć może zmienna niezależna z w funkcyi analitycznej, pewnym szeregiem potęgowym określonej, jeżeli da się wyprowadzić z danego szeregu potęgowego za pośrednictwem skończonej liczby szeregów pośrednich nowy szereg taki, żeby punkt z' leżał w obrębie zbieżności tego nowego szeregu. Wartość u', jaką ten nowy szereg dla $z\text{-}a = z'$ otrzymuje, nazywa się przynależną wartością funkcyi analitycznej. Wszystkie z danego szeregu potęgowego powstałe szeregi czyli elementa funkcyi tworzą jednolitą całość taką, że z któregokolwiek elementu wszystkie inne potworzyć się dadzą.

Powyższe określenie funkcyi analitycznej mieści się w określeniu ogólniejszem: Niech będzie

$$u = \mathfrak{P}(z\text{-}a) = b_0 + b_1(z\text{-}a) + b_2(z\text{-}a)^2 + \ldots$$

pewnym elementem funkcyi analitycznej;

położmy $z\text{-}a = c_1 t + c^2 t^2 + \ldots = \varphi(t) - a$, gdzie $\varphi(t)$ przedstawia szereg potęgowy zbieżny w pewnym zakresie, to otrzymamy z szeregu $\mathfrak{P}(z\text{-}a)$ nowy szereg

$$u = b_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \ldots = \psi(t)$$

który mieć będzie z szeregiem $\varphi(t)$ pewien wspólny zakres zbieżnosci. Obydwa równania $z = \varphi(t)$ i $u = \psi(t)$ przedstawiają tedy w pewnym zakresie te same pary wartości u, z, co szereg $u = \mathfrak{P}(z\text{-}a)$.

Wedle tego będzie e l e m e n t e m f u n k c y i a n a l i t y c z n e j z b i ó r w a r t o ś c i u, z, k t ó r e s i ę p r z e d s t a w i a j ą d w o m a s z e r e g a m i p o t ę g o w y m i $z = \varphi(t), u = \psi(t)$ o w s p ó l n y m z a k r e s i e z b i e ż n o ś c i. (Jak łatwo zauważać dojdziemy z tego określenia do poprzedniego, jeżeli położymy $\varphi(t) = a + t$ czyli $z\text{-}a = t$).

Chodzi teraz o to, aby z elementu tak określonego dojść do dalszego ciągu funkcyi.

Połóżmy w tym celu w miejscu zmiennej t szereg potęgowy $t = \alpha_1 v + \alpha_2 v^2 + \ldots$, który w pewnym zakresie dla każdego v jedno t wyznacza, tedy otrzymamy z danego elementu funkcyi nowy element $z = \varphi_1(v)$ i $u = \psi_1(v)$ który w pewnym obrębie spada z pierwszym elementem i dostarcza oraz wiele innych par z, u, które pierwszy element nie zawiera, przeto stanowi dalszy ciąg pierwszego elementu.

W podobny sposób możemy za v postawić nowy szereg potęgowy wedle x, aby dalszy przebieg funkcyi otrzymać i tak postępować tyle razy, ile się podoba; wszystkie tak otrzymane elementa tworzą z pierwszym elementem ciągłą całość i określają ogólną f u n k c y ę a n a l i t y c z n ą. Elementa nieskończenie dalekie t. j. takie, dla których wartości z i u razem lub pojedynczo stają się nieskończenie wielkimi, zaliczymy także do funkcyi analitycznej, jeżeli je jako dalszy ciąg pierwszego elementu funkcyjnego otrzymać zdołamy.

Powyższe określenie ogólne funkcyi analitycznej mieści w sobie także funkcye wielowartościowe.

Jeżeli określimy bowiem element funkcyi analitycznej przez szeregi potęgowe:

$$z\text{-}a = a_\lambda t^\lambda + a_{\lambda+1} t^{\lambda+1} + \ldots \text{ in inf.}$$
$$u\text{-}b = b_\mu t^\mu + b_{\mu+1} t^{\mu+1} + \ldots \text{ in inf.}$$

to dla $\lambda = 1$ będzie u w każdym razie jedowartościową funkcyą ilości z-a, przedstawiającą się w postaci:

$$u\text{-}b = \left(\frac{z\text{-}a}{a_\lambda}\right)^\mu \mathfrak{P}\left(\frac{z\text{-}a}{a_\lambda}\right)$$

podobnie będzie z tylko wtedy jednowartościową funkcyą zmiennej u-b, jeżeli także $\mu = 1$. Jeżeli zaś $\lambda > 1$, wtedy

$$u\text{-}b = C_1\left(\frac{z\text{-}a}{a_\lambda}\right)^{\frac{\mu}{\lambda}} + C_2\left(\frac{z\text{-}a}{a_\lambda}\right)^{\frac{\mu+1}{\lambda}} + \ldots = \left(\frac{z\text{-}a}{a_\lambda}\right)^{\frac{\mu}{\lambda}} \mathfrak{P}\left\{\left\{\frac{z\text{-}a}{a_\lambda}\right\}^{\frac{1}{\lambda}}\right\}$$

przeto u będzie funkcyą wielowartościową zmiennej z i to najwyżej λ — wartościową. W tym wypadku zdarzyć się musi, że przeprowadzając funkcyę z pewnego elementu, dla punktu a określonego, przez różne elementa pośrednie, napowrót do punktu wyjścia, nie otrzymamy w tym punkcie pierwotnego szeregu potęgowego dla u; dalsze elementa funkcyjne przykrywają w tym razie płaszczyznę liczbową lub jakąkolwiek jej część kilkakrotnie, tak, że funkcya analityczna, danym elementem określona, staje się tylko na powierzchni Riemannowskiej jednowartościową.

Jeżeli u jest jednowartościową funkcyą z, i odwrotnie z jednowartościową funkcyą u, tedy nazywamy takie funkcye jednolitymi; one mogą stać się także wielowartościowymi, jednakże tylko w szczególnych punktach osobliwych, dla których spółczynniki a_1, b_1 w szeregach:

$$z = a_0 + a_1(t\text{-}t_0) + a_2(t\text{-}t_0)^2 + \ldots$$
$$u = b_0 + b_1(t\text{-}t_0) + b_2(t\text{-}t_0)^2 + \ldots$$

stają się zerami i z tych miejsc mogą wówczas wychodzić rozmaite gałęzie funkcyi. Przejdźmy teraz niektóre rodzaje funkcyj przestępnych jednowartościowych.

VI.

Najprostszy rodzaj funkcyj przestępnych, nawiązujący się najnaturalniej do funkcyj wymiernych całkowitych, określają szeregi potęgowe **nieograniczenie zbieżne w postaci:**

$$u = G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \text{ gdzie } \lim_{n=\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0.$$

Funkcye niemi określone nazywają się też w przeciwstawieniu do funkcyi całkowitych wymiernych f u n k c y a m i c a ł k o w i t y m i p r z e s t ę p n y m i.

Dla wartości skończonych zmiennej niezależnej z nie masz właściwie żadnej istotnej różnicy między obydwoma rodzajami funkcyj. Bezpośrednio widoczna, że każdej skończonej wartości z odpowiada pewna skończona wartość funkcyi całkowitej przestępnej $u = f(z)$, że wartość u funkcyi zmienia się ciągle ze zmianą zmiennej niezależnej, że dla tej funkcyi istnieją funkcye pochodne wszelkich rzędów, które są także całkowitymi funkcyami przestępnymi.

Właściwa różnica między obydwoma rodzajami funkcyj może tylko zajść w tym wypadku, gdy zmienna niezależna z staje się n i e s k o ń c z e n i e w i e l k ą.

W istocie nietrudno wykazać że, podczas gdy funkcya całkowita wymierna dla nieskończenie wielkiego z staje się nieskończenie wielką rzędu skończonego, funkcya całkowita przestępna staje się w nieskończoności nieoznaczoną i nieokreśloną do tego stopnia, że dla $z = \infty$ wszelką wartość skończoną i nieskończoną przybierać może.

Takie punkta osobliwe a, dla których funkcya jednowartościowa przybierać może wszelką wartość dowolną, nazywają się krytycznymi punktami funkcyi, wedle Weierstrassa[1]) miejscami granicznymi.

Funkcye całkowite przestępne zmiennej z są wedle tego funkcyami jednowartościowymi o jednym miejscu granicznym w nieskończoności.

Wstawiwszy w szeregu nieograniczenie zbieżnym $u = \mathfrak{P}(z)$ $z = \frac{1}{x-a}$ otrzymamy przez szereg $u = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x-a}\right)$ określoną funkcyę przestępną o jednym miejscu granicznym w punkcie $x = a$.

Ogólny kształt jednowartościowej funkcyi o n punktach krytycznych $a_1, a_2 \ldots a_n$ przedstawi się wedle tego w najprostszy sposób sumą funkcyi jednowartościowych o jednym punkcie krytycznym a_λ czyli wzorem:

$$u = \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right) + \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right) + \ldots + \mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) = \sum_{\lambda=1}^{n} \mathfrak{P}_\lambda\left(\frac{1}{x-a_\lambda}\right)$$

[1]) **Weierstrass K. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. Aus den Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1877.**

Jeżeli funkcya jednowartościowa ma jeden punkt krytyczny w nieskończoności, a oprócz tego staje się zawsze skończoną, tedy przedstawia się, jak wiemy, w postaci szeregu nieograniczenie zbieżnego $u = \mathfrak{P}(z)$; staje się jednakże funkcya w pewnych miejscach c_λ nieskończenie wielką rzędu skończonego μ_λ, tedy jej postać będzie widocznie

$$u = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots}{(z-c_1)^{\mu_1} (z-c_2)^{\mu_2} \ldots (z-c_n)^{\mu_n}} = \frac{\mathfrak{P}(z)}{g(z)}$$

gdzie $g(z)$ jest funkcyą wymierną całkowitą.

Trudniejszą już będzie rzeczą utworzyć funkcyę jednowartościową, którąby miała jeden punkt krytyczny w nieskończoności, a oprócz tego stawała się w nieskończenie wielu miejscach c_λ nieskończenie wielką. Chodzi tu bowiem o utworzenie funkcyi jednowartościowej, któraby w tych miejscach stawała się zerem a oprócz tego nigdzie indziej.

Przedstawienie tej funkcyi nasuwające się z góry analogicznie do tworzenia funkcyj całkowitych byłoby może możliwe w postaci iloczynu o nieskończenie wielu czynnikach $\prod_{\lambda=1}^{\infty} (z-c_\lambda)$

Iloczyn ten nieskończony musimy jednakże zarzucić, gdyż jest na pewno rozbieżny. Formy iloczynu $\prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{c_\lambda}\right)$ już prędzej można by do przedstawienia szukanej funkcyi użyć, ale i ten iloczyn będzie rozbieżny, skoro wedle prawideł zbierności iloczynów szereg

$$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \ldots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{c_\lambda}$$

jest rozbieżny. Zachodzi teraz pytanie, czy nie da się zatrzymać forma iloczynu nieskończonego, jeżeli poszczególne czynniki przyjmą kształt $\left(1 - \frac{z}{c_\lambda}\right) E_\lambda(z)$, gdzie $E_\lambda(z)$ ma oznaczać jakąś funkcyę obraną tak, żeby iloczyn nieskończony $u = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{c_\lambda}\right) E_\lambda(z)\right]$ był zawsze zbieżny. Funkcya nowa $E_\lambda(z)$ musiałaby być widocznie jednowartościową, niestawać się nigdzie dla skończonych z nieskończenie wielką, a w końcu nie mogłaby także nigdzie stawać się zerem. Nie trudno wykazać, że szczególną taką funkcyą skończoną jednowartościową o jednym tylko punkcie krytycznym w nieskończoności, która by dla żadnego skończonego z nie stawała się ani 0 ani ∞, jest funkcya wykładnicza[1]) $E(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots = e^z$ skąd bezpośrednio wynika, że wszelka funkcya tego rodzaju musi się przedstawić w postaci $u = e^{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots} = e^{g(z)}$ gdzie $g(z)$ jest funkcyą całkowitą wymierną albo przestępną. W obec tego otrzymamy kształt funkcyi jednowartościowej przestępnej, która w nieskończenie wielu miejscach staje się zerem, w postaci iloczynu nieskończonego:

$$u = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1 - \frac{z}{c_n}\right)E_n(z)\right] = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1 - \frac{z}{c_n}\right)e^{g_n(z)}\right]$$

w którym funkcye całkowite $g_1(z)$, $g_2(z)$ . . . zawsze tak obrać można, aby iloczyn był nieograniczenie zbieżny.

Ogólny kształt funkcyi jednowartościowej przestępnej o jednym punkcie krytycznym (granicznym) w nieskończoności, która staje się prócz tego w nieskończenie wielu miejscach c_1, c_2, c_3, . . . nieskończenie wielką, będzie wedle tego

$$u = \frac{\mathfrak{P}(z)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1 - \frac{z}{c_n}\right)e^{g_n(z)}\right]} = \frac{\mathfrak{P}(z)}{\mathfrak{P}_1(z)}$$

gdzie $\mathfrak{P}(z)$ i $\mathfrak{P}_1(z)$ przedstawiają dwa różne szeregi nieograniczenie zbieżne. Wszystkie funkcye jednowartościowe z jednym punktem granicznym w nieskończoności możemy więc wogólności przedstawić w postaci ilorazu dwóch szeregów nieograniczenie zbieżnych, albo co na jedno wychodzi, w postaci ilorazu dwóch iloczynów nieskończonych, nieograniczenie zbieżnych.

Podstawiwszy w takiej funkcyi $\frac{1}{z-a}$ zamiast z otrzymamy funkcyę o jednym miejscu krytycznym $z = a$.

Wszelka funkcya jednawartościowa zmiennej z, która ma n miejsc krytycznych a_1, a_2 . . . a_n, a oprócz tego staje się w nieskończenie wielu miejscach nieskończenie wielką da się wyrazić w jednej z postaci

$$u = \frac{\sum_{\lambda=1}^{n} G_\lambda\left(\frac{1}{z-a_\lambda}\right)}{\sum_{\lambda=1}^{n} G \prod_{n+\lambda}\left(\frac{1}{z-a_\lambda}\right)} \quad \text{albo} \quad u = \frac{\prod_{\lambda=1}^{n} G_\lambda\left(\frac{1}{z-a_\lambda}\right)}{\prod_{\lambda=1}^{n} G_{n+\lambda}\left(\frac{1}{z-a_\lambda}\right)}$$

[1]) Patrz niżej str. 22 i następnie.

Odwrotnie przedstawiają oba wyrażenia funkcyę jednowartościową z, która ma zmiennej n miejsc krytycznych, podczas gdy liczba miejsc względnie krytycznych t. j. nieskończonościowych jest nieograniczoną; funkcye całkowite przestępne G_1, G_2 . . . mogą być dowolnie obrane.

Tem nie są jeszcze wyczerpane wszystkie funkcye jednowartościowe; owszem istnieją funkcye jednowartościowe, które mają nieskończenie wiele miejsc krytycznych tworzących albo całe linie albo powierzchnie na płaszczyznie liczbowej. Dodajmy do tego jeszcze niezliczoną ilość możliwych funkcyi wielowartościowych a poznamy, jak ogromną musi być rozmaitość funkcyi analitycznych; trudno nawet pomyśleć, ażeby te rozmaitości szczegółowemi poszukiwaniami mogły być kiedy wyczerpane.

W obec tego nasuwa się pytanie, jakie też funkcye przestępne mają własności tak wybitne, że ich ważność występuje na plan pierwszy. Rozwiązaniem tego pytania zajmiemy się w następujących ustępach.

VII.

Na pytanie dotyczące ważności funkcyj przestępnych, których nieprzejrzaną mnogość w poprzednim ustępie rozwinęliśmy, nie podobna z zupełną stanowczością odpowiedzieć, już choćby z tego względu, że pytanie samo nie jest bliżej określone. Rozmaite też musiały być nań odpowiedzi.

Skoro teorya t. z. całek elliptycznych doprowadziła do odkrycia nowych funkcyj, zwrócono się do badania takich funkcyj przestępnych, których pochodne są funkcyami algebraicznymi, wysuwając je na plan pierwszy. Poszukiwania w tym kierunku przedsięwzięte doprowadziły w dalszym ciągu do funkcyj hyperelliptycznych i Ablowych, a przeto zwróciły uwagę matematyków na takie funkcye przestępne, których p o c h o d n e dogadzają równaniom algebraicznym. Do niedawna też przyznawano tym funkcyom największą ważność i dawano pierwszeństwo przed innymi funkcyami.

Gdy jednakże Abel [1]) w swych poszukiwaniach algebraicznych wykazał, że równania stopnia wyższego nad czwarty nie dadzą się w ogolności za pomocą czterych działań i ilości pierwiastkowych rozwiązać, i równocześnie niemal wskazał tę szczególną klasę równań,

---

[1]) Abel N. H., Démonstration de l'impossibilité de la resolution algébrique des équations générales qui passent le quatriéme dégré.

których pierwiastki dadzą się za pomocą n-tych pierwiastków ze współczynników równania obliczyć [1]), poczęto się starać owe wyniki poszukiwań algebraicznych przenieść do teoryi funkcyi.

Skoro się bowiem okazało, że w wspomnianych równaniach szczególnych n^{go} stopnia, nazwanych następnie przez Kroneckera równaniami Ablowymi, pierwiastki przedstawiają się w postaci:

$$x_1, \vartheta_1(x_1), \vartheta_2(x_1) \ldots \vartheta_{n-1}(x_1)$$

(gdzie $\vartheta_1(x_1)$ oznacza dowolną funkcyę jednowartościową pierwiastka x_1, zaś $\vartheta_2(x_1) = \vartheta_1(\vartheta_1(x_1))$, $\vartheta_3(x_1) = \vartheta_1(\vartheta_1(\vartheta_1(x_1)))$ i t. d. wyobrażają pierwsze, drugie i nast. powtarzanie działania przez ϑ_1 określonego, przyczem $\vartheta_n(x_1) = x_1$, przekonano się niebawem, że dla funkcyj wymiernych n^{go} stopnia $y = \mathrm{f}(x)$, dogadzających warunkowi:

$$\mathrm{f}(\vartheta_1(x)) = \mathrm{f}(x)$$

zawsze jest możliwe odwrócenie algebraiczne, jeżeli $\vartheta_1(x)$ jest wraz z swą funkcyą odwróconą funkcyą jednowartościową o własności $\vartheta_n(x) = x$, i że owe odwrócenia funkcyi $y = \mathrm{f}(x)$ przedstawiają się tedy w postaciach:

$$x_1, \vartheta_1(x_1), \vartheta_2(x_1) \ldots \vartheta_{n-1}(x_1).$$

Okoliczność ta naprowadziła na myśl szukania analogicznych wyników w teoryi funkcyj przestępnych.

Odrzuciwszy warunek $\vartheta_n(x) = x$ i nie robiąc żadnych dalszych zastrzeżeń co do funkcyi $\vartheta_1(x)$, chodzi tutaj o poszukiwanie takich funkcyj przestępnych f, które mają zasadniczą własność, określoną równaniem:

$$f(\vartheta_1(x)) = f(x)$$

O funkcyach tego rodzaju powiada się, że przy pewnych jednowartościowych przekształceniach wracają do swych pierwotnych wartości; niektórzy nazywają takie funkcye także funkcyami peryodycznymi w obszerniejszem słowa znaczeniu, i nadają im pierwszorzędne miejsce między wszystkimi innymi funkcyami przestępnymi, co też szczegółowe poszukiwania w zupełności usprawiedliwiają.

W związku z powyższem nowem zapatrywaniem na szczególną ważność funkcyj pozostaje jeszcze jedno zasadnicze zapatrywanie, które

---

[1]) Abel N. H.. Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement.

ma w teoryi funkcyj wybitne znaczenie, chociaż ostatecznie do ostatniego zapatrywania sprowadzić się daje.

Chodzi tu mianowicie o wyszukiwanie takich funkcyj jednowartościowych zmiennej z, żeby szukana funkcya dowolnej funkcyi algebraicznej dwóch argumentów z_1 i z_2 dała się algebraicznie wyrazić przez te same funkcye poszczególnych argumentów.

Szczególnej ważności funkcyj tego rodzaju domyśleć się już można na podstawie osobliwych własności funkcyj goniometrycznych, znanych w niższej analizie pod nazwą prawideł dodawania i mnożenia funkcyj goniometrycznych.

Określone powyżej żądanie przedstawia się wzorem:

$$f[\varphi(z_1, z_2)] = \psi[f(z_1), f(z_2)]$$

gdzie φ i ψ są dowolne funkcye algebraiczne zmiennych z_1 i z_2 względnie ich funkcyj $f(z_1)$ i $f(z_2)$, zaś f wyobraża szukaną funkcyę jednowartościową.

O funkcyach dogadzających powyższemu równaniu, powiada się, że mają algebraiczne prawidło funkcyonalne.

Nie wchodząc w szczegółowy rozbiór rozmaitych poszukiwań odnośnych, pójdziemy w dalszym ciągu rozprawy drogą przez Weierstrassa [1]) w wykładach teoryi funkcyj wytkniętą, która będzie zarazem naturalnym ciągiem rozważań nad funkcyami analitycznymi, rozpoczętych w poprzedzających ustępach i złączy w jedną całość powyżej przytoczone zapatrywania na rodzaj i ważność funkcyj przestępnych.

VIII.

Jako najprostsze funkcye przestępne poznaliśmy w ustępie VI. t. z. całkowite funkcye przestępne t. j. funkcye, które się określają szeregiem potęgowym nieograniczenie zbieżnym.

Są to funkcye jednowartościowe, oznaczone i skończone dla wszelkich punktów płaszczyzny liczbowej, z wyjątkiem punktów w nieskończoności.

Z pomiędzy całkowitych funkcyj przestępnych nazywanych także przez Weierstrassa „funkcyami o jednem miejscu granicznem w nieskończoności“ występują na plan pierwszy funkcye całkowite, które dla

---

[1]) Weierstrass C. Mathematische Abhandlungen aus den Monatsberichten der Berliner Academie. Berlin 1856—1876. 8.

żadnej wartości zmiennej niezależnej z nie stają się ani zerem ani nieskończonością, przedstawiając się ogólnie w postaci·

$$u = e^{G(z)}$$

gdzie $G(z)$ może być dowolną całkowitą funkcyą wymierną albo przestępną.

Pierwsze miejsce między niemi zajmuje oczywiście funkcya przedstawiająca się w postaci:

$$u = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

znana pod nazwą funkcyi wykładniczej.

Jej własności osobliwe odznaczają się bezpośrednio tak wybitnie, że mogą służyć za punkt wyjścia w badaniu funkcyj jednowartościowych i wskazać drogę do odkrycia nowych prawd w teoryi funkcyj.

Charakterystyczna własność funkcyi wykładniczej $u = e^z$ jest następująca:

Niech będą z_1, z_2 i z_3 trzy wartości argumentu z, tworzące postęp arytmetyczny o stałej różnicy $z_3 - z_2 = z_2 - z_1 = d$ tak, że wyraz średni $z_2 = \frac{z_1 + z_3}{2}$. Oznaczmy przez u_1, u_2 i u_3 odpowiedne wartości funkcyi tj. $u_1 = e^{z_1}$, $u_2 = e^{z_2}$, $u_3 = e^{z_3}$, tedy zauważymy z łatwością związek:

$$u_1 u_3 = e^{z_1 + z_3} = e^{2z_2} = (e^{z_2})^2 = u_2^2 \quad \text{czyli}$$

$$u_1 u_3 - u_2^2 = 0, \quad \text{albo:} \ \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_2}{u_1}$$

Jeżeli więc argumenta funkcyi wykładniczej tworzą postęp arytmetyczny, tedy utworzą odpowiedne wartości funkcyi postęp geometryczny.

Podobną własność posiadają wszysktie funkcye utworzone wymiernie z funkcyi wykładniczej.

Jeżeli bowiem przez $R(u)$ oznaczymy funkcyę wymierną z $u = e^z$, i określimy nową funkcyę x równaniem: $x = R(u)$, tedy poznamy naprzód, że funkcya $R(u)$ uważana jako funkcya zmiennej niezależnej z mieć będzie w całej płaszczyźnie charakter funkcyi wymiernej, da się przeto przedstawić albo jako szereg potęgowy $\mathfrak{P}(z)$ nieograniczenie zbieżny, albo jako iloraz dwóch takich szeregów potęgowych.

Połóżmy dalej:

$$u_1 = e^{z_1}, \ u_2 = e^{z_2} = e^{\frac{z_1 + z_3}{2}}, \ u_3 = e^{z_3}$$

$$x_1 = R(u_1), \ x_2 = R(u_2), \ x_3 = R(u_3),$$

tedy otrzymamy także związek $u_1 u_3 = u_2^2$, za pomocą którego po wyrugowaniu wartości u_1, u_2 i u_3 z ostatnich trzech równań dostaniemy związek algebraiczny między wartościami x_1, x_2 i x_3 w postaci:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

Funkcye utworzone wymiernie z funkcyi wykładniczej mają więc własność, że między wartościami funkcyi zachodzi pewne równanie algebraiczne, jeżeli przyjęte trzy argumenta tworzą postęp arytmetyczny.

IX.

Równanie algebraiczne, zachodzące między wartościami funkcyi $\varphi(u)$ dla trzech argumentów: u, v i $\frac{u+v}{2}$ w postaci:

$$G\left[\varphi(u), \varphi(v), \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] = 0$$

nazywamy równaniem charakterystycznem funkcyi $\varphi(u)$; z niego bowiem dadzą się inne własności funkcyę $\varphi(u)$ cechujące wyprowadzić:

1) Przypuśćmy, że dla pewnej funkcyi przestępnej $\varphi(u)$ istnieje w istocie równanie charakterystyczne:

$$G\left[\varphi(u), \varphi(v), \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] = 0 \qquad a)$$

Przyjmijmy teraz dwie nowe ilości u_1 i v_1 tak, aby $u + v = u_1 + v_1$, to otrzymamy nowe równanie:

$$\overline{G}\left[\varphi(u_1), \varphi(v_1), \varphi\left(\frac{u_1+v_1}{2}\right)\right] = 0 \qquad b)$$

Ze względu, że $\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) = \varphi\left(\frac{u_1+v_1}{2}\right)$ możemy z obydwóch równań $a)$ i $b)$ wyrugować $\varphi\left(\frac{u_1+v_1}{2}\right)$ a otrzymamy równanie algebraiczne:

$$G_0\left[\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u_1), \varphi(v_1)\right] = 0 \qquad c)$$

ważne dla wszelkich wartości u, v, u_1, v_1, dogadzających warunkowi: $u + v = u_1 + v_1$.

Połóżmy w równaniu $c)$ $u_1 = 0$, tedy $\varphi(u_1)$ będzie ilością stałą, natomiast $v_1 = u + v$, przeto otrzymamy z $c)$:

$$G_1\left[\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)\right] = 0 \qquad d)$$

Równanie *d*) wypowiada t. z. prawidło dodawania funkcyi $\varphi(u)$, wedle którego funkcya sumy dwóch argumentów daje się wyrazić algebraicznie przez funkcye poszczególnych argumentów.

Jeżeli więc istnieje funkcya przestępna $\varphi(u)$, która ma równanie charakterystyczne $G\left[\varphi(u), \varphi(v), \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]=0$, to między jej wartościami $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ i $\varphi(u+v)$ zachodzi zawsze równanie algebraiczne, czyli innemi słowy, funkcya taka posiada prawidło dodawania.

2) Poszukajmy teraz na podstawie równania charakterystycznego funkcyi $\varphi(u)$ związku między tą funkcyą a jej pochodną.

Różniczkując równanie $G\left[\varphi(u), \varphi(v), \left(\frac{u+v}{2}\right)\right]=0$ częściowo wedle u i v, i kładąc $\frac{d\varphi(u)}{du}=\varphi'(u)$, $\frac{d\varphi(v)}{dv}=\varphi'(v)$ dostaniemy

$$\frac{dG}{d\varphi(u)}\varphi'(u)+\frac{dG}{d\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)}\frac{d\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)}{du}=0$$

$$\frac{dG}{d\varphi(v)}\varphi'(v)+\frac{dG}{d\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)}\frac{d\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)}{dv}=0$$

Zważywszy jednakże, że $\frac{d\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)}{du}=\frac{d\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)}{dv}$ otrzymamy przez odciąganie:

$$\frac{dG}{d\varphi(u)}\varphi'(u)-\frac{dG}{d\varphi(v)}\varphi'(v)=0$$

Równanie otrzymane jest ze względu na $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ i $\frac{\varphi(u+v)}{2}$ wymierne. Wyrugowawszy z tego i z charakterystycznego równania $\frac{\varphi(u+v)}{2}$ otrzymamy równanie wypadkowe:

$$G_1\left[(\varphi u), \varphi(v), \varphi'(u), \varphi'(v)\right]=0$$

z którego, wstawiwszy za v pewną szczególną wartość, otrzymamy równanie algebraiczne między $\varphi(u)$ i $\varphi'(u)$ w postaci:

$$G_2\left[(\varphi(u), \varphi'(u)\right]=0$$

Funkcye przestępne, które mają t. z. równanie charakterystyczne, mają także tę osobliwszą własność, że między funkcyą i jej pochodną zachodzi równanie algebraiczne.

3) Jeszcze jedna własność główna funkcyi $\varphi(u)$ wypada z jej równania charakterystycznego.

Niech będzie:

$$G\left[\varphi(u), \varphi(v), \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]=0$$

albo, co na jedno wychodzi:

$$G[\varphi(2u), \varphi(2v), \varphi(u+v)]=0$$

równaniem n^{go} stopnia ze względu na $\varphi(u+v)$. Skoro $\varphi(u)$ jest funkcyą przestępną, możemy zawsze obrać taką wartość skończoną b, żeby $\varphi(2v)=b$ sprawdzało się dla więcej jak n wartości argumentu v. Przyjmijmy, że $\varphi(2v)$ przyjmuje wartość b dla $n+1$ wartości argumentu v, tedy równanie $G[\varphi(2u), b, \varphi(u+v_\lambda)]=0$ sprawdza się dla $n+1$ wartości: $\varphi(u+v_1)$, $\varphi(u+v_2)$, ... $\varphi(u+v_{n+1})$. Jako równanie n^{go} stopnia ze względu na $\varphi(u+v)$ może ono jednakże dostarczać najwyżej n pierwiastków $\varphi(u+v_\lambda)$; z pomiędzy $(n+1)$ wartości $\varphi(u+v_\lambda)$ muszą więc przynajmniej dwie być równe. Przyjmijmy, że dla pewnej wartości u: $\varphi(u+v_\lambda)=\varphi(u+v_\mu)$, tedy, wstawiając w to równanie $u-v_\lambda$ zamiast u, otrzymamy:

$$\varphi(u)=\varphi(u+v_\mu-v_\lambda)$$

Funkcya $\varphi(u)$ ma więc własność, że nie zmienia swej wartości, gdy jej argument u o stałą $v_\mu - v_\lambda = P$ powiększymy. Mamy więc:

$$\varphi(u+P)=\varphi(u)$$

Funkcya, posiadająca własność, że pewna stała ilość P dodana do argumentu jej wartości nie zmienia, nazywa się *funkcyą peryodyczną*, a stała P *peryodem* funkcyi.

Z ostatniego równania otrzymamy:

$$\varphi(u+2P)=\varphi(u+P)=\varphi(u)$$

czyli w ogólności

$$\varphi(u+nP)=\varphi(u)$$

jakoteż

$$\varphi(u-nP)=\varphi(u)$$

Jeżeli więc P jest peryodem funkcyi, to jest nim także nP, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią albo ujemną. Nie trudno wykazać, że, jeżeliby funkcya miała n peryodów: $P, P_1, \ldots P_{(n+1)}$ to także $\nu P + \nu_1 P_1 + \ldots + \nu_{(n-1)} P_{(n-1)}$ byłoby jej peryodem, gdzie ν wyobraża dowolną liczbę całkowitą.

Możebną jest rzeczą, że wszystkie peryody z jednego wyprowadzić się dadzą, wtedy funkcye takie nazywamy jednoperyodycznymi.

Istnieją dwa takie peryody, P i P_1, z których wszystkie inne wedle wzoru $\nu P + \nu_1 P_1$ wyprowadzić można, tedy nazywamy funkcyę dwuperyodyczną. W tym wypadku ilości P i P_1, tworzące te peryody, nie mogą mieć stosunku rzeczywistego, tylko zespolony w postaci $a + bi$, gdzie b musi być koniecznie różnem od zera. Gdyby bowiem b było równe 0, tedy oba peryody dałyby się przedstawić przez inny peryod p, tak że $P = mp$, $P_1 = np$, gdzie m i n są liczby całkowite dodatnie albo ujemne, czyli ilość p byłaby właściwym peryodem.

Z charakterystycznego równania funkcyi $\varphi(u)$ wypadło więc prawidło dodawania, związek algebraiczny między funkcyą i jej pochodną, wreszcie peryodyczność funkcyi jako bezpośrednie następstwo.

Z tych trzech głównych własności funkcyi, pozostających ze sobą w ścisłym związku, najbardziej ciekawą i interesującą jest peryodyczność funkcyi, dla tego też ją obierzemy za podstawę dalszych poszukiwań, ograniczając się do funkcyj przestępnych jednowartościowych, które mają tylko jeden punkt krytyczny.

Zadanie, jakie sobie więc postawimy, będzie: wynaleźć wszystkie funkcye peryodyczne jednowartościowe z jednym, punktem krytycznym.

Że takie funkcye istnieją, mamy już dowód na samej wykładniczej $E(u)$ i ogólnie wszystkich funkcyach $\varphi(u)$ wymiernie utworzonych z funkcyi e^{au+b}, gdzie a i b są stałe dowolne. Funkcye te posiadają bowiem jak wiemy, równanie charakterystyczne, a przeto muszą być także funkcyami peryodycznymi.

X.

Zajmiemy się najpierw samą funkcyą wykładniczą $\varphi(u) = e^{au+b}$ wychodząc z równania dla niej charakterystycznego w postaci:

$$\varphi(u)\ \varphi(v) = \varphi^2\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

z którego kolejno inne jej własności i jej kształt wyprowadzimy.

Różniczkując najprzód powyższe równanie po kolei wedle u i v otrzymamy:

$$\begin{aligned} \varphi'(u)\,\varphi(v) &= \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)\varphi'\left(\frac{u+v}{2}\right) \\ \varphi(u)\,\varphi'(v) &= \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)\varphi'\left(\frac{u+v}{2}\right) \end{aligned} \quad \text{a ztąd} \quad \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}$$

Ponieważ atoli u i v są dwie zupełnie od siebie niezależne ilości, przeto mamy ogólnie:

$\dfrac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = C$ tj. dowolnej stałej ilości czyli $\varphi'(u) = C\,\varphi(u)$.

P o c h o d n a f u n k c y i w y k ł a d n i c z e j j e s t w i ę c d o f u n k c y i s a m e j p r o p o r c y o n a l n ą.

Oparci na tej własności możemy zbudować kształt funkcyi samej. Niech będzie bowiem:

$$\varphi(u) = \sum_{\lambda=n}^{\infty} a_\lambda (u-a)^\lambda, \text{ przeto } \varphi'(u) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda+1}(\lambda+1)\,(u-a)^\lambda$$

tedy otrzymamy z warunku $\varphi'(u) = c\,\varphi(u)$ na oznaczenie współczynników a_ν związek:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (u-a)^\nu = c \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+1}\,(\nu+1)\,(u-a)^\nu$$

z którego wypada:

$$a_\nu = c\,a_{\nu+1}\,(\nu+1) \quad \text{czyli} \quad a_{\nu+1} = \frac{c}{\nu+1}\,a_\nu.$$

Otrzymamy przeto:

$$a_1 = ca_0,\ a_2 = \frac{c^2}{2!}a_0,\ a_3 = \frac{c^3}{3!}a_0,\ \ldots,\ a_\nu = \frac{c^\nu}{\nu!}a_0,\ \ldots$$

a więc ostatecznie:

$$\varphi(u) = a_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c^\nu (u-a)^\nu}{\nu!} = a_0\left\{1 + \frac{c(u-a)}{1!} + \frac{c^2(u-a)^2}{2!} + \ldots\right\}.$$

Połóżmy $\quad E(u) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{u^\nu}{\nu!}$ tedy będzie

$$\varphi(u) = a_0\ E(c\,(u-a))$$

kształtem szukanej funkcyi.

Przyjąwszy $u' + v' = u + v$, otrzymamy dalej z równania charakterystycznego:

$$\varphi\,(u).\ \varphi(v) = \varphi^2\left(\frac{u'+v'}{2}\right) \qquad \text{jakoteż:}$$

$$\varphi(u').\ \varphi(v') = \varphi^2\left(\frac{u'+v'}{2}\right) \qquad \text{a przeto:}$$

$$\varphi(u).\ \varphi(v) = \varphi(u').\ \varphi(v')$$

Będzie przeto: $E(u).\ E(v) = E(u').\ E(v')$, skoro $u + v = u' + v'$; wstawiwszy w ten wzór $v' = 0$, natomiast $u' = u + v$ otrzymamy wreszcie:

$$E(u).\ E(v) = E(u+v)$$

czyli t. z. prawidło dodawania funkcyi $E(u)$, z którego wypływa: $\varphi(u) = a_0.\ E\ (c(u\text{-}a)) = a_0.E(cu).E(\text{-}ca)$ czyli po podstawieniu $a_0.\ E(\text{-}ca) = C$ ostatecznie:

$$\varphi(u) = C.\ E(cu) = C\left\{1 + \frac{cu}{1!} + \frac{c^2u^2}{2!} + \ldots\right\} = C\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(cu)^\nu}{\nu!}$$

Funkcyi $\varphi(u)$ odpowiada więc także t. z. prawidło dodawania, określone wzorem:

$$\varphi(u).\ \varphi(v) = \varphi(u+v).$$

Z prawidła dodawania funkcyi $E(u)$ otrzymamy dalej:

$$E(u_1).\ E(u_2)\ \ldots\ E(u_n) = E(u_1 + u_2 + \ldots u_n)$$

a ztąd $E^n(u) = E(n\,u)$, jakoteż $E^{\frac{1}{\nu}}(u) = \mathrm{E}\left(\frac{u}{\nu}\right)$.

Dla $u = 1$ mamy

$$E(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = e = 2{,}718281828\ ^{1)}\ldots$$

a więc $E(n) = E^n(1) = e^n$.

Szereg potęgowy $E(u) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{u^\nu}{\nu!}$ przedstawia więc w istocie funkcyę wykładniczą e^u, zaś $\varphi(u) = C.E(cu)$ funkcyę e^{au+b}

[1]) Liczba jest niewyı ·rną; Hermite udowodnił niedawno, że liczbę tę nie można otrzymać jako pierwiastek równania algebraicznego (skończonego stopnia) o współczynnikach całkowitych.

Funkcya $E(u) = e^u$ jest dla wszystkich wartości u rzeczywistych także rzeczywistą. Jeżeli u wzrasta od 0 do ∞, tedy funkcya $E(u)$ rośnie ciągle od 1 do ∞, przybierając w tej drodze każdą wartość tylko raz jeden; dla ujemnych u postępujących ciągle od 0 do $-\infty$, maleje funkcya $E(u)$ od 1 do 0, przyjmując wszelką z tych wartości również tylko raz jeden.

Niech będzie teraz argument u liczbą zespoloną $x + yi$, tedy będzie

$$e^u = e^{x+yi} = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{(x+yi)^\nu}{\nu!} = X + Yi$$

Celem oznaczenia wartości bezwzględnej funkcyi e^u mamy wedle prawidła dodawania:

$$e^u = e^{x+yi} = e^x . e^{yi} \text{ a ztąd}$$

$$|e^u| = e^x |e^{yi}|;$$

musimy przeto wpierw oznaczyć bezwzględną wartości funkcyi e^{yi}.

Funkcyę e^{yi} określa atoli szereg potęgowy

$$e^{yi} = 1 + \frac{yi}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3 i}{3!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots = \cos y + i \sin y$$

jeżeli dla skrócenia położymy

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots = \frac{1}{2} (e^{yi} + e^{-yi},$$

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots = \frac{1}{2i} (e^{yi} - e^{-yi})$$

Wartość bezwzględna funkcyi e^{yi} będzie więc

$$|e^{yi}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = \sqrt{\tfrac{1}{4} \{ (e^{yi} + e^{-yi})^2 - (e^{yi} - e^{-yi})^2 \}}$$

czyli $|e^{yi}| = {}^1/_2 \sqrt{(e^{2yi} + e^{-2yi} + 2) - (e^{2yi} + e^{-2yi} - 2)} = 1$

a wskutek tego wartość bezwzględna funkcyi $e^u = e^{x+yi}$ będzie

$$|e^u| = e^x \; |e^{yi}| = e^x$$

Bezwzględna wartość funkcyi e^u stosuje się więc do wartości rzeczywistej argumenta u, przyjmując w miarę zmiany tej wartości od $-\infty$ do $+\infty$, wszelkie wartości od 0 do ∞, niezawiśle od części urojonej yi.

Pozostaje nam jeszcze wykazać, że funkcya $E(u)$, a tem samem funkcya $\varphi(u)$, określona równaniem charakterystycznem:

Funkcya $E(u) = e^u$ jest dla wszystkich wartości u rzeczywistych także rzeczywistą. Jeżeli u wzrasta od 0 do ∞, tedy funkcya $E(u)$ rośnie ciągle od 1 do ∞, przybierając w tej drodze każdą wartość tylko raz jeden; dla ujemnych u postępujących ciągle od 0 do $-\infty$, maleje funkcya $E(u)$ od 1 do 0, przyjmując wszelką z tych wartości również tylko raz jeden.

Niech będzie teraz argument u liczbą zespoloną $x + yi$, tedy będzie

$$e^u = e^{x+yi} = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{(x+yi)^\nu}{\nu!} = X + Yi$$

Celem oznaczenia wartości bezwzględnej funkcyi e^u mamy wedle prawidła dodawania:

$$e^u = e^{x+yi} = e^x . e^{yi} \text{ a ztąd}$$

$$|e^u| = e^x |e^{yi}|;$$

musimy przeto wpierw oznaczyć bezwzględną wartości funkcyi e^{yi}.

Funkcyę e^{yi} określa atoli szereg potęgowy

$$e^{yi} = 1 + \frac{yi}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3 i}{3!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots = \cos y + i \sin y$$

jeżeli dla skrócenia położymy

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots = \frac{1}{2} (e^{yi} + e^{-yi},$$

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots = \frac{1}{2i} (e^{yi} - e^{-yi})$$

Wartość bezwzględna funkcyi e^{yi} będzie więc

$$|e^{yi}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = \sqrt{\tfrac{1}{4} \{(e^{yi} + e^{-yi})^2 - (e^{yi} - e^{-yi})^2\}}$$

czyli $|e^{yi}| = {}^1/_2 \sqrt{(e^{2yi} + e^{-2yi} + 2) - (e^{2yi} + e^{-2yi} - 2)} = 1$

a wskutek tego wartość bezwzględna funkcyi $e^u = e^{x+yi}$ będzie

$$|e^u| = e^x \; |e^{yi}| = e^x$$

Bezwzględna wartość funkcyi e^u stosuje się więc do wartości rzeczywistej argumenta u, przyjmując w miarę zmiany tej wartości od $-\infty$ do $+\infty$, wszelkie wartości od 0 do ∞, niezawiśle od części urojonej yi.

Pozostaje nam jeszcze wykazać, że funkcya $E(u)$, a tem samem funkcya $\varphi(u)$, określona równaniem charakterystycznem:

Funkcyami tego rodzaju są n. p. funkcye goniometryczne:

$$x = \cos u = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2\,z}$$

$$x = \sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2\,i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2-1}{2\,i\,z}$$

$$x = tg u = \frac{\sin u}{\cos u} = -\,i\,\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{e^{iu} + e^{-iu}} = -i.\ \frac{z^2-1}{z^2+1} \quad \text{i t. d.}$$

gdzie $z = e^{iu}$; peryodem tych funkcyi jest: $\omega = \frac{2\pi i}{i} = 2\pi$.

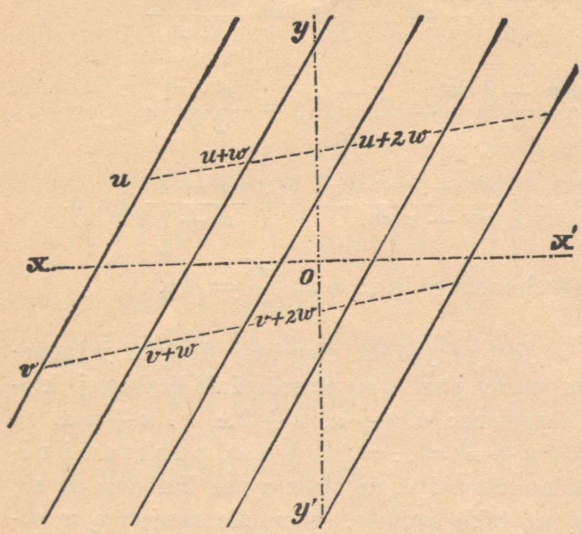
Jeżeli w ogólności ω jest peryodem dowolnej funkcyi jednoperyodycznej $f(u)$, tedy nazywamy punkta na płaszczyźnie liczbowej, którym odpowiadają liczby zespolone: $u, u + \omega, u + 2\omega, \ldots u + n\,\omega$, ze względu na to, że $f(u) = f(u + \omega) = \ldots = f(u + n\omega)$, p u n k t a m i r ó w n o w a ż n y m i. Nie trudno zauważyć, że płaszczyzna liczbowa da się w tym wypadku rozłożyć na takie parcele, które nie zawierają w sobie punktów równoważnych, natomiast mają własność, że każdemu punktowi jednej parceli odpowiada jeden punkt równoważny drugiej. Co do ograniczenia parcel zachodzić tu może widoczna wielka dowolność.

Niech będą bowiem u i v dwa dowolne punkta (nierównoważne) na płaszczyźnie liczbowej, którym odpowiadają najbliższe punkta równoważne, $u + \omega$ i $v + \omega$; połączywszy punkta u i v, jakoteż im równoważne $u + \omega$ i $v + \omega$, liniami prostymi otrzymamy dwie proste równoległe, odgraniczające pole parceli, na której nie masz dwóch punktów równoważnych; na tem polu przyjmuje funkcya jednoperyodyczna $f(u)$ wszelkie wartości, jakie w ogóle mieć może.

Poprowadziwszy w ten sposób przez odpowiednie nowe punkta równoważne $u + n\omega$ i $v + n\omega$ linie proste, otrzymamy układ nieskończenie wielu prostych równoległych, który podzieli płaszczyznę liczbową na pasma (Fig. 2.), nie zawierające wcale punktów równoważnych; odległość dwóch po sobie następujących prostych, mierzona w kierunku liczby zespolonej $\omega = p + qi$, stanowiącej peryod funkcyi, równa się bezwzględnej wartości tej liczby t. j. $|\omega| = \sqrt{p^2 + q^2}$.

W miejscu przyjętego układu prostych można obrać układ dowolnie inny, byle utrzymała się własność układu, że odległość dwóch po sobie następujących prostych, mierzona w kierunku przez peryod wskazanym równała się b e z w z g l ę d n e j w a r t o ś c i peryodu.

Fig. 2.



Funkcyi wykładniczej e^u odpowiadają wedle tego pasma, których szerokość w kierunku osi drugorzędnej YY', funkcyom goniometrycznym sin$x$ cos$x$ itd. zaś pasma, których szerokość w kierunku osi pierwszorzędnej XX' podaje liczba 2π.

W obrębie pasma przyjmuje funkcya jednoperyodyczna wszelkie wartości, jakie w ogóle przyjąć może. Dość więc zbadać zachowanie się funkcyi w obrębie jednego pasma, aby mieć wyobrażenie o jej przebiegu na całej płaszczyźnie liczbowej.

Podczas gdy funkcya wykładnicza e^u w obrębie każdego pasma wszelką wartość skończoną, od zera różną, tylko raz jeden przyjmuje, nie stając się nigdzie ani zerem ani nieskończonością, mają funkcye goniometryczne: $\sin u$. $\cos u$ itd. jako wymierne funkcye funkcyi e^{ix} charakter o tyle zawilszy, że nie tylko dla tych wartości, które się o $\frac{2k\pi i}{i} = 2k\pi$ różnią, jednakowe wartości przybierają, ale już w obrębie samego pasma, im właściwego, jednakowe wartości przyjmują, i to każdą, nie wyjąwszy zera, dwa razy. Z wzorów

$$\sin u = \frac{e^{2iu}-1}{2ie^{iu}}, \quad \cos u = \frac{e^{2iu}+1}{2e^{iu}}$$

widoczna bowiem, że do każdego $\sin u$, $\cos u$ należą dwie wartości ilości e^{iu}, a gdy funkcya e^{iu} w obrębie swego pasma wszelką wartość tylko raz przyjmuje, przybierają funkcye $\sin u$ i $\cos u$ w tym pasmie każdą wartość dwa i to tylko dwa razy.

Punktami zerowymi funkcyj $\sin u$ i $\cos u$ są widocznie:

$$u = k\pi \text{ i } u = \left(k + \tfrac{1}{2}\right)\pi.$$

Pierwsze są zarazem punktami zerowymi, drugie tylko punktami nieskończonościowymi funkcyi $x = -i \frac{e^{2iu}-1}{e^{2iu}+1} = \operatorname{tang} u$.

Funkcye $\sin u$ i $\cos u$ dadzą się jako funkcye jednowartościowe o jednym punkcie krytycznym w nieskończoności, stające się zarazem w nieskończenie wielu miejscach zerami, w myśl zasad poprzednio wyłożonych przedstawić w postaci iloczynów nieskończonych wszędzie zbieżnych.

Otrzymamy wedle tego:

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$\cos x = x\left(1 - \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2\pi^2}\right)\ldots = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right);$$

funkcya $\operatorname{tang} x$ będzie natomiast ilorazem tych iloczynów.

Badanie funkcyj wyższych stopni, utworzonych wymiernie z funkcyi wykładniczej e^{au} nie podlega na podstawie poprzednich wyjaśnień żadnym dalszym trudnościom, skoro jest udowodnionem, że one są również jednoperyodycznymi. Nie trudno też wykazać, że gatunek funkcyj jednoperyodycznych jednowartościowych jest funkcyami wymiernymi funkcyi e^{au} zupełnie wyczerpany.

XI.

Pozostaje nam jeszcze zająć się w krótkości odwróceniami funkcyj jednoperyodycznych i jednowartościowych.

Odwrócenie funkcyi wykładniczej $x = e^u$ nazywamy funkcyą logarytmiczną pisząc $u = \log x$.

Funkcya tak określona jest widocznie funkcyą wieloznaczną, gdyż, skoro równanie $e^u = x_1$ sprawdza się dla $u = u_1$, to musi się także sprawdzić dla $u = u_1 + 2n\pi i$. Funkcya $\log x$ przybiera więc dla każdego argumentu x nieskończenie wiele wartości różniących się między sobą o $2n\pi i$, gdzie n jest liczbą całkowitą.

W szczególności otrzymamy:

$$\log x = \log(r\varphi) = \log[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] =$$

$$= \log r + \log(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \log r + \log e^{i\varphi} = \log r + i\varphi$$

czyli

$$\log x = \log|x| + i\varphi + 2n\pi i.$$

Krytycznymi punktami funkcyi $\log x$ są punkta $x=0$ i $x=\infty$. Powierzchnia Riemannowska tej funkcyi składać się będzie z nieskończenie wielu płaszczyzn, przeciętych linią ciągłą wychodzącą z punktu 0 w nieskończoność, a połączonych z sobą tak, że prawy brzeg przekroju jednej płaszczyzny złączony z lewym następnej.

Nie trudno też rozwinąć funkcyę $\log x$ w szereg potęgowy w otoczeniu każdego punktu a z wyjątkiem punktów $x=0$ i $x=\infty$.

Otrzymamy mianowicie:

$$\log x = \log a + \frac{1}{a}(x\text{-}a) + \frac{1}{2a^2}(x\text{-}a)^2 + \frac{1}{3a^3}(x\text{-}a)^3 + \dots$$

szereg potęgowy $\mathfrak{P}(x\text{-}a)$ ważny dla $|x\text{-}a| < |a|$.

Koło zbieżności szeregu o środku a sięga więc do punktu 0, a funkcya ma prócz punktów 0 i ∞ wszędzie charakter funkcyi całkowitej.

Za pomocą funkcyi logarytmicznej nietrudno przedstawić funkcye cyklometryczne, jako odwrócenia funkcyj goniometrycznych.

Otrzymamy mianowicie z wzoru:

$$x = \sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}$$

wartość e^{iu} w postaci:

$$^{iu} = \sqrt{1-x^2} + ix \quad \text{przeto:}$$

$$u = -i \log\left[\sqrt{1-x^2} + ix\right] = \text{arc} \sin x$$

zkąd wypada szereg potęgowy:

$$u = \text{arc} \sin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.\ 3.}{2.\ 4.}\,\frac{x^5}{5} + \dots$$

ważny dla $|x| < 1$.

Funkcya wielowartościowa $\text{arc} \sin x$ ma oprócz punktu $x=\infty$ dwa punkta krytyczne $x=+1$ i $x=-1$. Powierzchnia Riemannowska składa się z nieskończenie wielu płaszczyzn sklejonych z sobą kolejno wzdłuż przekrojów, wychodzących z punktów $x=1$ i $x=-1$ po obu stronach przeciwnych w nieskończoność.

Podobnie otrzymamy z wzoru:

$$x = \text{tang} u = -i\,\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{e^{iu} + e^{-iu}}$$

funkcyę odwróconą $u = \text{arctg}\, x$ w postaci:

$$u = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ix}{1-ix} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

Koło zbieżności szeregu potęgowego, funkcyę arctg$x$ określającego, sięga do $|x| = 1$ mając w punktach $x = +i$ i $x = -i$ dwa punkta krytyczne.

XII.

Funkcye wymierne funkcyi e^{au} wyczerpują wszystkie funkcye przestępne jednowartościowe z jednym punktem krytycznym, które są zarazem jednoperyodyczne. Nietrudno dowieść, że funkcye jednowartościowe jeden albo najwyżej dwa peryody mieć mogą. Zajmijmy się więc poszukiwaniem funkcyj jednowartościowych, przestępnych, posiadających dwa peryody.

Że istnieją takie funkcye dwuperyodyczne dowodzi n. p. funkcya:

$$\varphi(u) = \sum_{m,m' = -\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{u - 2m\omega - 2m'\omega'} \right)^3,$$

która ma dwa peryody 2ω i $2\omega'$; położywszy bowiem $u + 2\omega$ zamiast u otrzymamy:

$$\varphi(u + 2\omega) = \sum_{m,\, m'} \left(\frac{1}{u - 2(m-1)\omega - 2m'\omega'} \right)^3$$

czyli uwzględniwszy, że $(m-1)$ wraz z m przebiega wszystkie wartości całkowite od $-\infty$ do $+\infty$, widocznie:

$$\varphi(u + 2\omega) = \varphi(u).$$

Tak samo można dowieść, że $\varphi(u + 2\omega') = \varphi(u)$, ogólnie, że:

$$\varphi(u + 2\mu\omega + 2\mu\omega') = \varphi(u).$$

Funkcya powyższa $\varphi(u)$ jest więc rzeczywiście funkcyą dwuperyodyczną. Funkcye dwuperyodyczne, jednowartościowe z jednym punktem granicznym, nazywają się wedle Weierstrassa funkcyami elliptycznymi.

Niech będzie $\Phi(u)$ jakąkolwiek funkcyę elliptyczną, jej peryody niech będa 2ω i $2\omega'$.

Przedstawmy sobie na płaszczyźnie liczbowej wszystkie punkta wyobrażające ilości liczbowe $2m\omega + 2m'\omega$, gdzie m i m' są liczby całkowite, tedy otrzymamy na niej układ punktów, tworzących równoległoboki przystające, które równoległobokami peryodów nazywamy.

Jeżeli u jest jakimkolwiek punktem płaszczyzny, to można zawsze, oznaczyć dwie liczby całkowite m i m' tak że: $u = u_0 + 2m\omega + 2m'\omega$

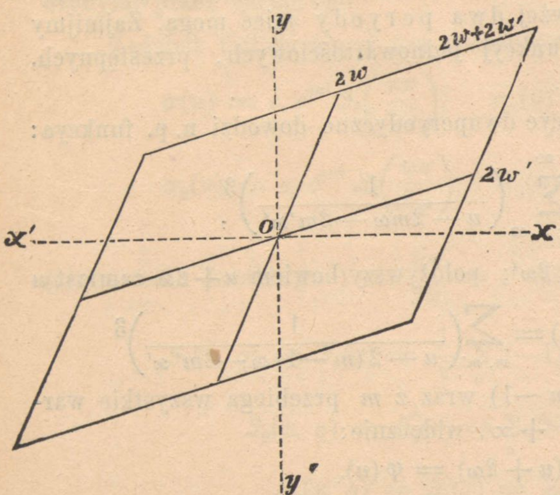
gdzie u_0 wyobraża pewien punkt jakiegokolwiek danego równoległoboku. Będziemy więc mieli

$$\Phi(u) = \Phi(u_0 + 2m\omega + 2m'\omega') = \Phi(u_0)$$

czyli: F u n k c y a e l l i p t y c z n a p r z y j m u j e w s z e l k ą w a r t o ś ć, jaką tylko mieć może, j u ż w o b r ę b i e j e d n e g o r ó w n o l e g ł o b o k u.

Jako funkcya przestępna, musi funkcya elliptyczna, dla jakiegoś punktu płaszczyzny stać się nieskończenie wielką, i to już w obrębie jednego równoległoboku, z czego wynika dalej, że w obrębie swego równoległoboku peryodów musi przyjąć jakąkolwiek wartość a czyli: W s z e l k a f u n k c y a e l l i p t y c z n a m u s i w o b r ę b i e r ó w n o l e g ł o b o k u p e r y o d ó w p r z y b i e r a ć w s z y s t k i e w a r t o ś c i r z e c z y w i s t e, u r o j o n e i z e s p o l o n e, s k o ń c z o n e i n i e s k o ń c z o n e.

Fig. 3.



Widocznie nie da się funkcya tego rodzaju przedstawić w postaci szeregu nieograniczenie zbieżnego, skoro już dla skończonych wartości argumentu staje się nieskończoną. Funkcya dwuperyodyczna traci więc charakter funkcyi całkowitej czyli nie da się dla wszystkich punktów u_1 przedstawić w postaci szeregu zbieżnego $\mathfrak{P}(u-u_1)$, tylko musi w swem rozwinięciu na szereg potęgowy wedle potęg $(u-u_1)$ postępujący, zawierać także ujemne potęgi argumentu $(u-u_1)$. Ujemne potęgi mogłyby zachodzić w skończonej albo nieskończonej liczbie, w ostatnim wypadku posiadałaby funkcya elliptyczna dwa punkta krytyczne.

Zważywszy jednakże, że wszelka funkcya przestępna o więcej punktach krytycznych daje się przedstawić jako funkcya wymierna z funkcyj przestępnych, posiadających tylko jeden punkt krytyczny, możemy i tu nasze poszukiwania ograniczyć do funkcyj dwuperyodycznych o jednym punkcie krytycznym. W obec tego ograniczenia musimy przyjąć, że nasza funkcya w otoczeniu swych punktów nieskończonościowych da się przedstawić w formie szeregu, wedle całkowitych potęg ilości $(u-u_1)$ postępującego, w którym liczba ujemnych potęg argumentu $(u-u_1)$ jest skończoną, czyli że:

$$\Phi(u) = c_{-\nu}(u-u_1)^{-\nu} + \ldots + c_0 + c_1(u-u_1) + c_2(u-u_1)^2 + \ldots$$

gdzie ν jest liczbą skończoną, cechującą rząd nieskończoności funkcyi $\Phi(u)$, która wedle tego posiada wszędzie charakter funkcyi wymiernej ułamkowej.

Nazwijmy przez $u_1\ u_2, \ldots u_r$ punkta w obrębie równoległoboku, w których funkcya $\Phi(u)$ staje się zerem przez $v_1, v_2, \ldots v_s$ punkta w obrębie równoległoboku, w których funkcya $\Phi(u)$ staje się nieskończenie wielką, tedy punktami zerowymi, względnie nieskończonościowymi, funkcyi $\Phi(u)$ będą na płaszczyźnie liczbowej punkta:

$$\begin{array}{lcl} u_1 + 2m_1\omega + 2m_1'\omega' & & v_1 + 2n_1\omega + 2n_1'\omega' \\ u_2 + 2m_2\omega + 2m_2'\omega' & & v_2 + 2n_2\omega + 2n_2'\omega' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{względnie} & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_r + 2m_r\omega + 2m_r'\omega' & & v_s + 2n_s\omega + 2n_s'\omega' \end{array}$$

Przypuśćmy, że istnieje funkcya $\chi(u)$, która dla wszelkich wartości $u + 2m\omega + 2m'\omega'$ staje się zerem, podobnie inna funkcya $\psi(u)$, które dla wartości $v + 2m\omega + 2m'\omega'$ staje się zerem, tedy będzie funkcya:

$\dfrac{\chi_1(u)\,\chi_2(u)\ldots\chi_r(u)}{\psi_1(u)\,\psi_2(u)\ldots\psi_s(u)}$ funkcyą, która staje się w tych samych punktach zerem, i nieskończenie wielką, co funkcyą $\Phi(u)$.

Iloraz $\dfrac{\Phi(u)}{\dfrac{\chi_1(u)\,\chi_2(u)\ldots\chi_r(u)}{\psi_1(u)\,\psi_2(u)\ldots\psi_s(u)}}$ będzie więc dla wszystkich punktów płaszczyzny liczbowej skończonym i od zera różnym, przedstawia więc funkcyę, która w żadnym punkcie płaszczyzny nie staje się ani zerem ani nieskończenie wielką. Funkcya taka da się, jak wiemy, przedstawić w formie $e^{g(u)}$, gdzie $g(u)$ oznacza jakikolwiek szereg potęgowy nieograniczenie zbieżny.

Wszelka funkcya elliptyczna $\Phi(u)$ da się więc przedstawić w formie:

$$\Phi(u) = \frac{\chi_1(u)\,\chi_2(u)\ldots\chi_r(u)}{\psi_1(u)\,\psi_2(u)\ldots\psi_s(u)}\, e^{g(u)}$$

skoro potworzymy tylko funkcye χ i ψ t. j. funkcye przestępne jednowartościowe, które zachowują w całej płaszczyźnie charakter funkcyj całkowitych a tylko w miejscach $u+2m\omega+2m'\omega'$ względnie $v+2n\omega+2n'\omega'$ stają się 0 pierwszego rzędu.

Nazwijmy przez $\sigma(u)$ funkcyę jednowartościową, której punkta zerowe przedstawiają się w formie $2m\omega+2m'\omega'$, a więc przez $\sigma(u-u_1)$ funkcyę, której punktami zerowymi są punkta z punktem u_1 rownoważne w formie: $u_1+2m\omega+2m'\omega'$, tedy przedstawi się wszelka funkcya elliptyczna w postaci:

$$\Phi(u)=\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\ldots\sigma(u-u_r)}{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\ldots\sigma(u-v_s)}\,e^{g(u)}$$

gdzie $u_1, u_2, \ldots u_r$ są punktami zerowymi, a $v_1, v_2, \ldots v_s$ punktami nieskończonościowymi funkcyi $\Phi(u)$.

Zadaniem naszem będzie teraz utworzyć funkcyę $\sigma(u)$.

Oznaczymy przez $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ punkta, dla których pewna funkcya jednowartościowa $f(u)$ ma się stać zerem, tedy jej kształt przedstawi się, jak wiemy, w formie:

$$f(u)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u}{a_n}\right)e^{g_n(u)}$$

gdzie $g_1(u)$, $g_2(u)$, $\ldots$ $g_n(u)$ są funkcye całkowite, wymierne lub przestępne tak dobrane, żeby wskazany iloczyn nieskończenie wielu wyrazów był nieograniczenie zbieżnym.

Warunki zbieżności iloczynów wskazują, że powyższy iloczyn będzie nieograniczenie zbieżnym, skoro:

$$g_n(u)=\frac{u}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{a_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{\lambda-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)^{\lambda-1}$$

przyczem musi być λ tak dobrane, żeby $\sum\limits_{n}\left(\frac{1}{|a_n|}\right)^{\lambda}$ była liczbą skończoną.

Gdybyśmy n. p. chcieli utworzyć funkcyę, która staje się zerem w miejscach 1, 2, 3 ... ∞, tedy na oznaczenie λ mielibyśmy warunek, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\lambda}$ ma dać liczbę skończoną, co się na pewno stanie już dla $\lambda=2$. W tym wypadku mielibyśmy $g_n(u)=\frac{u}{n}$ a szukana funkcya przedstawiła by się w postaci:

$$f(u)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u}{n}\right)e^{\frac{u}{n}}$$

Funkcya nasza $\sigma(u)$ ma się stać zerem dla $u = o$, jakoteż dla punktów równoważnych $2m\omega + 2m'\omega'$, gdzie liczby m i m' przybierają wszystkie wartości całkowite od $-\infty$ do ∞, z wyjątkiem $m = m' = o$. W tym wypadku wykazuje nietrudne rozumowanie, że $\lambda = 2$ przyjąć potrzeba, czyli że funkcya, która dla punktów $u = 2m\omega + 2m'\omega'$ wyjąwszy punktu $u = o$, staje się zerem, da się przedstawić w postaci:

$$f(u) = \prod_{m,\,m'}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{u}{2m\omega + 2m'\omega'}\right) e^{\frac{u}{2m\omega + 2m'\omega'} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2m\omega + 2m'\omega'}\right)^2}$$

gdzie kreska obok **Π** umieszczona oznacza, że w iloczynie $m = m' = o$ opuścić należy.

Oznaczywszy dla skrócenia $2m\omega + 2m'\omega'$ przez $\tilde{\omega}$, gdzie $\tilde{\omega}$ przedstawiać będzie wszystkie punkta płaszczyzny liczbowej, dla których funkcya $f(u)$ staje się zerem (geometrycznie: wszystkie wierzchołki równoległoboków peryodycznych, na które płaszczyznę liczbową podzielić możemy), otrzymamy:

$$f(u) = \prod_{\tilde{\omega}}{}' \left(1 - \frac{u}{\tilde{\omega}}\right) e^{\frac{u}{\tilde{\omega}} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\tilde{\omega}}\right)^2}$$

Funkcya szukana $\sigma(u)$ ma się stać oprócz punktów $\tilde{\omega}$ także w punkcie $u = 0$ zerem pierwszego rzędu, musi więc mieć krztałt następujący:

$$\sigma(u) = u.f(u) = u \prod_{\tilde{\omega}}{}' \left(1 - \frac{u}{\tilde{\omega}}\right) e^{\frac{u}{\tilde{\omega}} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\tilde{\omega}}\right)^2}$$

Otrzymana funkcya $\sigma(u)$, której istnienie samem utworzeniem jej wzoru analitycznego dowiedliśmy, jest funkcyą jednowartościową, dla wszystkich punktów płaszczyzny liczbowej skończoną, która daje się więc przedstawić w formie szeregu potęgowego nieograniczenie zbieżnego i staje się w punkcie $u = 0$ i punktach równoważnych $2m\omega + 2m'\omega'$ zerem pierwszego rzędu.

Najogólniejsza funkcya tego rodzaju, $F(u)$ t. j. funkcya jednowartościowa z charakterem funkcyi całkowitej, która tylko w punkcie 0 i w punktach równoważuych $2m\omega + 2m'\omega'$ staje się zerem pierwszego rzędu przedstawia się w formie:

$$F(u) = e^{g(u)}\,\sigma(u)$$

gdzie $g(u)$ wyobraża szereg potęgowy nieograniczenie zbieżny.

Skoro bowiem $F(u)$ w tych samych punktach staje się zerem i to tego samego rzędu, co $\sigma(u)$ będzie widocznie iloraz $\frac{F(u)}{\sigma(u)}$ funkcyą, która nigdzie w skończoności nie staje się zerem ani nieskończenie wielką, a więc otrzyma kształt:

$$\frac{F(u)}{\sigma(u)} = e^{g(u)} \quad \text{czyli } F(u) = e^{g(u)}\,\sigma(u)$$

Wypada nam tu zwrócić uwagę na analogię zachodzącą między s t a ł ą C w teoryi funkcyj całkowitych a funkcyą $e^{g(u)}$ w teoryi funkcyi przestępnych.

Podobnie jak dwie funkcye całkowite, które w tych samych punktach stają się zerem tego samego rzędu, różnić się mogą tylko czynnikiem stałym C, tak samo dwie funkcye przestępne, które posiadają ten sam charakter różnić się mogą tylko czynnikiem $e^{g(u)}$, który nigdzie w skończoności nie staje się zerem ani nieskończenie wielkim.

XIII.

Utworzenie funkcyi $\sigma(u)$ jest punktem zasadniczym w teoryi funkcyi elliptycznych, traktowanej w duchu Weierstrassa[1]); droga dalszych poszukiwań jest na podstawie poprzednich wyjaśnień nader wyraźnie określoną.

Zanim weźmiemy pod rozwagę otrzymany powyżej wzór:

$$\Phi(u) = \frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\,.\,.\,.\,\sigma(u-u_r)}{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\,.\,.\,.\,\sigma(u-v_s)}\,e^{g(u)},$$

w którym wszelka funkcya elliptyczna przedstawić się daje, przytoczymy ze względu na doniosłość funkcyi $\sigma(u)$, za pomocą której jesteśmy w stanie wszelkie funkcye elliptyczne przedstawić we wzorach analitycznych, niektóre zasadnicze własności tej funkcyi:

Z wzoru: $$\sigma(u) = u\prod_{\tilde{\omega}}{}'\left(1-\frac{u}{\tilde{\omega}}\right)e^{\frac{u}{\tilde{\omega}}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\tilde{\omega}}\right)^2}$$

można naprzód z łatwością wykazać, że funkcya $\sigma(u)$ jest f u n k c y ą n i e p a r z y s t ą, t. j. że $\sigma(-u) = -\sigma(u)$, z czego znowu wynika, że jej pochodna $\sigma'(u) = \frac{d\,\sigma(u)}{du}$ jest f u n k c y ą p a r z y s t ą, t. j. że $\sigma'(-u) = \sigma'(u)$.

Ze względu dalej, że:

$$\log\sigma(u) = \log u + \sum_{\tilde{\omega}}{}'\left[\log\left(1-\frac{u}{\tilde{\omega}}\right)+\frac{u}{\tilde{\omega}}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\tilde{\omega}}\right)^2\right],$$

gdzie kreska obok Σ umieszczona zapowiada, żę w sumie wypadek $\tilde{\omega}=0$ opuścić należy, otrzymamy jako pochodną tego wyrażenia funkcyę:

---

[1]) Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstrass bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz. Göttingen. Dieterichsche Universitäts-Buchdrucherei 1883.

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=\frac{1}{u}+\sum_{\tilde{\omega}}{}' \left[\frac{1}{u-\tilde{\omega}}+\frac{1}{\tilde{\omega}}+\frac{u}{\tilde{\omega}^2}\right]=\frac{1}{u}+\sum_{\tilde{\omega}}{}' \frac{u^2}{\tilde{\omega}^2(u-\tilde{\omega})},$$

która będzie widocznie funkcyą nieparzystą, natomiast jej pochodna wydaje funkcyę parzystą. Pochodna ta, wzięta ze znakiem ujemnym:

$$-\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2}=-\frac{d}{du}\left(\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\right)=\frac{1}{u^2}+\sum{}' \left[\frac{1}{(u-\tilde{\omega})^2}-\frac{1}{\tilde{\omega}^2}\right]$$

jest szczególną funkcyą dwuperyodyczną $p(u)$, która ma, jak łatwo wykazać peryody 2ω i $2\omega'$, t. j. własność, że $p(u+2\omega)=p(u)$ jako też $p(u+2\omega')=p(u)$.

Za pomocą tej własności funkcyi $p(u)$ możemy z łatwością zbadać zachowanie się funkcyi $\sigma(u)$ przy zmianie argumentu u o 2ω lub $2\omega'$, otrzymamy bowiem z równania:

$$p(u+2\omega)=p(u) \text{ czyli: } \frac{d}{du}\frac{\sigma'(u+2\omega)}{\sigma(u+2\omega)}=\frac{d}{du}\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} \quad \text{następujące:}$$

$$\frac{\sigma'(u+2\omega)}{\sigma(u+2\omega)}-\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=C \text{ (ilości stałej), a ztąd dla } u=-\omega:$$

$$\frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}-\frac{\sigma'(-\omega)}{\sigma(-\omega)}=2\frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}=C=2\eta \qquad \text{przeto}$$

$$\frac{\sigma'(u+2\omega)}{\sigma(u+2\omega)}=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}+2\eta \text{ jakoteż } \frac{\sigma'(u+2\omega')}{\sigma(u+2\omega')}=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}+2\eta',$$

gdzie $\eta=\frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}$, $\eta'=\frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}$. Zcałkowawszy powyższe dwa równania i oznaczywszy stałe całkowania otrzymamy:

$$\sigma(u+2\omega)=-\sigma(u)\, e^{2\eta(u+\omega)};\ \sigma(u+2\omega')=-\sigma(u)\, e^{2\eta'(u+\omega')}$$

a ztąd uwagi godny związek między η i η' w postaci:

$\eta\omega'-\eta'\omega=m\frac{\pi i}{2}$, gdzie m jest liczbą całkowitą równą $+1$ albo -1.

X.

W poprzedzających rozdziałach otrzymaliśmy ogólny kształt funkcyi elliptycznej w postaci:

$$\Phi(u)=\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\ldots\sigma(u-u_r)}{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\ldots\sigma(u-v_s)}\, e^{g(u)}$$

gdzie $g(u)$ przedstawia pewien szereg potęgowy, $u_1, u_2, \ldots u_r$ punkta zerowe, $v_1, v_2, \ldots v_s$ punkta nieskończonościowe funkcyi $\Phi(u)$ w obrębie równoległoboku peryodycznego z punktu $u = 0$ wykreślonego.

Należałoby teraz zbadać, czy też wzór powyższy przedstawia zawsze funkcyę dwuperyodyczną.

Szczegółowe poszukiwania, oparte na własnościach funkcyi $\sigma(u)$, w poprzednim ustępie przytoczonych, wykazują, że, aby było: $\Phi(u + 2\omega) = \Phi(u)$ jakoteż: $\Phi(u + 2\omega') = \Phi(u)$, musi być liczba punktów zerowych u_r równa liczbie punktów nieskończonościowych v_s, przyczem zachodzić musi warunek $\sum_{n=1}^{r} u_n = \sum_{n=1}^{r} v_n$, a wskutek tego $g(u) = c$.

Ogólny kształt funkcyi dwuperyodycznej będzie wedle tego:

$$\Phi(u) = C \frac{\sigma(u-u_1)\ \sigma(u-u_3) \ldots \sigma(u-u_r)}{\sigma(u-v_1)\ \sigma(u-u_2) \ldots \sigma(u-v_r)}$$

gdzie $\sum_{n=1}^{r} u_n = \sum_{n=1}^{r} v_n$, i odwrotnie wzór tego rodzaju przedstawia zawsze funkcyę dwuperyodyczną, skoro punkta zerowe i nieskończonościowe dogadzają powyższemu warunkowi.

Funkcyę $\Phi(u)$ nazywamy f u n k c y ą d w u p e r y o d y c z n ą r t e g o stopnia, skoro ma w swym równoległoboku peryodów r punktów zerowych i tyleż nieskończonościowych.

Uwzględniając warunek $\sum_{n=1}^{n=r} u_n = \sum_{n=1}^{n=r} v_n$ poznamy z łatwością, że funkcye dwuperyodyczne p i e r w s z e g o stopnia wcale nie i s t n i e j ą.

Ogólny kształt funkcyi dwuperyodycznych będzie zaś

$$\varphi(u) = C \frac{\sigma(u-u_1)\ \sigma(u-u_2)}{\sigma(u-v_1)\ \sigma(u-v_2)}, \text{ gdzie } u_1 + u_2 = v_1 + v_2$$

Przypuśćmy teraz, że dwa punkta nieskończonościowe b w równoległoboku peryodycznym na siebie wpadają, to otrzymamy ogólny kształt takiej funkcyi dwuperyodycznej drugiego stopnia w postaci:

$$\varphi(u) = C \frac{\sigma(u-a)\ \sigma(u-2b+a)}{\sigma^2(u-b)}$$

Szczególną funkcyą tego rodzaju jest funkcya $p(u)$, określona w poprzedzającym ustępie wzorem:

$$p(u) = -\frac{d^2 \log \sigma(u)}{d u^2} = \frac{1}{u^2} + \sum_{\tilde{\omega}}{}' \left[\frac{1}{(u-\tilde{\omega})^2} - \frac{1}{\tilde{\omega}^2} \right],$$

gdzie $\tilde{\omega} = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ (wyjąwszy $\mu = \mu' = 0$).

Funkcya $p(u)$ staje się w obrębie swego równoległoboku peryodycznego $(2\omega, 2\omega')$ dwa razy nieskończenie wielką i to oba razy w punkcie $u=0$ i da się przedstawić w kształcie;

$$p(u) = C\,\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u+u_1)}{\sigma^2(u)}$$

Jest ona najprostszą ze wszystkich funkyi dwuperyodycznych.

Z wzoru: $\sigma(u) = u\prod_{\tilde\omega}{}'\left(1-\frac{u}{\tilde\omega}\right)e^{\frac{u}{\tilde\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\tilde\omega}\right)^2}$ otrzymamy:

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{1}{u} - \sum_{\tilde\omega}{}'\left[\frac{u^2}{\tilde\omega} - \frac{u^3}{\tilde\omega^4} + \frac{u^4}{\tilde\omega^5} + \ldots\right]$$

szereg ważny dla $|u| < \tilde\omega$, czyli zbieżny w obrębie koła zakreślonego około punktu $u=0$, a przechodzącego przez najbliższy punkt peryodu.

Powyższe wyrażenie sprowadza się ze względu, że do każdego $\tilde\omega$ należy także jedno $(-\tilde\omega)$, do następującego:

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{1}{u} - \sum_{\tilde\omega}{}'\left(\frac{u^3}{\tilde\omega^4} + \frac{u^5}{\tilde\omega^5} + \frac{u^7}{\tilde\omega^8} + \ldots\right),$$

przeto będzie $p(u) = -\frac{d^2 \log\sigma(u)}{d u^2} = \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \ldots$

czyli $p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda u^{2\lambda}$, gdzie $c_\lambda = (2\lambda - 1)\sum_{\tilde\omega}\tilde\omega^{-2\lambda}$.

Pochodna funkcyi $p(u)$ przedstawi się wskutek tego w postaci

$$p'(u) = -\frac{2}{u^3} + 2c_1 u + 4c_2 u^3 + 6c_3 u^5 + \ldots$$

przedstawiając funkcyę, która w punkcie $u=0$ staje się nieskończenie wielką trzeciego rzędu.

Funkcya $p'(u)$ jest funkcyą d w u p e r y o d y c z n ą t r z e c i e g o s t o p n i a.

Nietrudno otrzymać jej punkta zerowe, ze względu bowiem, że

$p(u+\tilde\omega) = p(u)$ jakoteż $p(u+{}^1/_2\tilde\omega) = p\,u - ({}^1/_2\tilde\omega)$

będzie: $p'(u+{}^1/_2\tilde\omega) = p'(u-{}^1/_2\tilde\omega) = -p'({}^1/_2\tilde\omega - u)$, przeto

$p'({}^1/_2\tilde\omega) = -p'({}^1/_2\tilde\omega)$, a ztąd $p'({}^1/_2\tilde\omega) = 0$ czyli pojedynczo:

$$p'(\omega) = 0,\ p'(\omega+\omega') = 0\ p'(\omega') = 0$$

Wskutek tego przedstawić się musi funkcye $p'(u)$ w postaci:

$$p'(u) = C\,\frac{\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')\,\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma^3(u)}$$

Ponieważ atoli z porównania współczynników przy u^{-3} wypada

$$C = -\frac{2}{\sigma(\omega)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega+\omega')}, \quad \text{przeto będzie}$$

$$p'(u) = -\frac{2\,\sigma(\omega-u)\,\sigma(\omega'-u)\,\sigma(\omega+\omega'+u)}{\sigma(\omega)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega+\omega')\,\sigma^3(u)}, \quad \text{jakoteż,}$$

ze względu że $p'(u)$ jest funkcyą nieparzystą:

$$p'(u) = -\frac{2\,\sigma(\omega+u)\,\sigma(\omega'+u)\,\sigma(\omega+\omega'-u)}{\sigma(\omega)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega+\omega')\,\sigma^3(u)}$$

zkąd otrzymamy ze względu że:

$$p(u) - p(\omega) = \frac{\sigma(\omega-u)\,\sigma(\omega+u)}{\sigma^2(\omega)\,\sigma^2(u)} \quad \text{po wykonaniu działań:}$$

$$[p'(u)]^2 = 4\,p^3(u) - g_2\,p(u) - g_3,$$

gdzie g_2 i g_3 są ilościami stałymi, złożonymi przestępnie z peryodów 2ω i $2\omega'$.

Między funkcyą $p(u)$ i jej pochodną $p'(u)$ zachodzi więc równanie algebraiczne trzeciego stopnia.

Dalszy rachunek[1]) wykazuje, że funkcya $p(u)$ ma prawidło dodawania w postaci:

$$p(u+v) = \frac{1}{4}\left[\frac{p'(u) \mp p'(v)}{p(u) - p(v)}\right]^2 - p(u) - p(v).$$

wedle którego da się $p(u+v)$ wyrazić wymiernie przez $p(u), p(v), p'(u), p'(v)$. Ponieważ atoli między $p(u)$ i $p'(u)$ jakoteż między $p(v)$ i $p'(v)$ zachodzą powyższe związki algebraiczne przeto da się $p(u+v)$ wyrazić algebraicznie przez $p(u)$ i $p(v)$.

Z powyższych własności wypływa wreszcie, że funkcya $p(u)$ ma także równanie charakterystyczne w postaci:

$$G\left[p(u), p v), p\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] = 0$$

Funkcya $p(u)$ jest więc funkcyą jednowartościową z charakterem funkcyi wymiernej, przytem szczególną funkcyą dwuperyodyczną stopnia drugiego, ma ze swą pochodną związek algebraiczny, posiada wreszcie prawidło dodawania i równanie charakterystyczne.

Niech będzie teraz $\varphi(u)$ dowolną funkcyą dwuperyodyczną drugiego stopnia w postaci:

---

[1]) Patrz: Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Weierstrass-Schwarz. str. 13.

$$\Phi(u) = C\,\frac{\sigma(u\text{-}u_1)\ \sigma(u\text{-}u_2)}{\sigma(u\text{-}v_1)\ \sigma(u\text{-}v_2)},\ \text{gdzie}\ u_1 + u_2 = v_1 + v_2,$$

tedy otrzymamy ze względu że : $p(u) - p(v) = \dfrac{\sigma(v\text{-}u)\ \sigma(v+u)}{\sigma^2(u)\ \sigma^2(v)}$ następujące równania:

$$\sigma(u\text{-}u_1)\ \sigma(u\text{-}u_2) = \sigma^2\left(u - \frac{u_1+u_2}{2}\right)\left\{A + Bp\left(u - \frac{u_1+u_2}{2}\right)\right\}$$

$$\sigma(u\text{-}v_1)\ \sigma(u\text{-}v_2) = \sigma_2\left(n - \frac{v_1+v_2}{2}\right)\left\{A' + B'p\left(n - \frac{v_1+v_2}{2}\right)\right\}$$

z których z powodu $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$ wynika:

$$\frac{\sigma(u\text{-}u_1)\ \sigma(u\text{-}u_2)}{\sigma(u\text{-}v_1)\ \sigma(u\text{-}v_2)} = \frac{A + Bp\left(u - \frac{u_1+u_2}{2}\right)}{A' + B'p\left(u - \frac{u_1+u_2}{2}\right)}.$$

Ponieważ atoli wedle prawidła dodawania funkcyi $p(u)$ mamy:

$$p\left(u - \frac{u_1+u_2}{2}\right) = R\left[p(u), p'(u), p\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right), p'\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\right]$$

przeto będzie $\Phi(u) = R\,[p(u), p'(u)]$, gdzie R określa pewną funkcyą wymierną.

Wszelka funkcya dwuperyodyczna drugiego stopnia da się więc wymiernie przedstawić przez funkcyę $p(u)$ i jej pochodną $p'(u)$.

Zdanie powyższe daje się rozszerzyć do funkcyi elliptycznych dowolnego stopnia. Okazują się przytem następujące prawidła [1]):

1) Wszelka funkcya jednowartościowa elliptyczna $\Phi(u)$ o peryodach 2ω, $2\omega'$ da się wyrazić wymiernie przez funkcyę $p(u)$ należącą do tej pary peryodów i jej pochodną $p'(u)$.

2) Jeżeli funkcya $\Phi(u)$ jest funkcyą parzystą argumentu u, tedy da się przedstawić jako funkcya wymierna funkcyi $p(u)$; jeżeli zaś $\Phi(u)$ jest funkcyą nieparzystą, tedy będzie iloraz $\dfrac{\Phi(u)}{p'(u)}$ wymierną funkcyą funkcyi $p(u)$.

3) Jeżeli funkcya $\Phi(u)$ staje się tylko dla $u=0$ i miejsc równoważnych $u + 2m\omega + 2m\omega'$ nieskończenie wielką, tedy będzie ona funkcyą całkowitą funkcyi $p(u)$ i $p'(u)$.

---

[1]) Patrz: Weierstrass-Schwarz. Tafeln u. Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen str. 17.

XII.

Z funkcyi $\sigma(u)$, którą poznaliśmy jako element zasadniczy funkcyj elliptycznych, wyprowadza Weierstrass trzy inne funcye jednowartościowe z charakterem funkcyj całkowitych określone równaniami:

$$\sigma_1(u) = \frac{\sigma(u+\omega)}{\sigma(\omega)} e^{-\eta u} \qquad \sigma_3(u) = \frac{\sigma(u+\omega')}{\sigma(\omega')} e^{-\eta' u}$$

$$\sigma_2(u) = \frac{\sigma(u-\omega+\omega')}{\sigma(\omega+\omega')} e^{-(\eta+\eta')u}$$

które pozostają w bardzo prostym związku z funkcyami ϑ, wprowadzonymi przez Jacobi'ego.

Związek ten da się w ten sposób przedstawić:

$$\sigma(u) = c.\, e^{au^2} \vartheta_1\left(\frac{u\pi}{2\tilde{\omega}}\right), \qquad \sigma_1(u) = c_1\, e^{au^2} \vartheta_2\left(\frac{u\pi}{2\tilde{\omega}}\right)$$

$$\sigma_2(u) = c_3\, e^{au^2} \vartheta_3\left(\frac{u\pi}{2\tilde{\omega}}\right), \qquad \sigma_3(u) = c_3\, e^{au^2} \vartheta\left(\frac{u\pi}{2\tilde{\omega}}\right)$$

gdzie wedle Jacobie'go [1]) dla $\frac{u\pi}{2\tilde{\omega}} = x$ zaś $q = e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}$ jest:

$$\vartheta_1(x,\, q) = \vartheta_1(x) = \frac{1}{i} \sum_n (-1)^n q^{1/4(2u+1)^2} e^{(2n+1)ix}$$

$$\vartheta_2(x,\, q) = \vartheta_2(x) = \sum_n q^{1/4(2n+1)^2} e^{2n+1)ix}$$

$$\vartheta_3(x,\, q) = \vartheta_3(x) = \sum_n q^{n^2} e^{2nix}$$

$$\vartheta(x,\, q) = \vartheta(x) = \sum_n (-1)^n q^{n^2} e^{2nix}$$

Powyższe cztery ϑ — funkcye wynikają zresztą z t. z. ogólnej

Θ-funkcyi: $$\Theta_{\mu\nu}(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^{\mu\nu} e^{i\pi[(2m+\mu)x + 1/4\lambda(2m+\mu)^2]}$$

jeżeli ilościom μ, ν czyli t. zw. charkterystykom Θ-funkcyi nadamy szczególne wartości $\mu = 0,\ 1$, $\nu = 0,\ 1$ Mianowicie będzie $\Theta_{00}(x) = \vartheta_3(x)$, $\Theta_{0,1}(x) = \vartheta(x)$, $\Theta_{1,0}(x) = \vartheta_2(x)$, $\Theta_{1,1}(x) = i\vartheta_1(x)$.

Ilorazy czterech σ-funkcyi Weierstrassa są funkcyami elliptycznymi drugiego rzędu. Oznaczywszy przez x funkcyę elliptyczną, pewnym ilorazem dwóch σ-funkcyj określoną, otrzymamy równanie róż-

---

[1]) Jacobi gesammelte Werke. Tom I. str. 501.

niczkowe w postaci: $\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = (a + bx^2)(c + dx^2)$, z którego wypływa

$$du = \frac{dx}{\sqrt{(a + bx^2)(c + dx^2)}} \text{ czyli } u = \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2)(c + dx)^2}}.$$

Odwrócenie funkcyj elliptycznych drugiego stopnia prowadzi więc do t. z. całek elliptycznych.

Do funkcyi u określonej powyższą albo raczej całką $u = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ doszli analitycy, zajmujący się całkowaniem funkcyj algebraicznych, następującą drogą: Przekonawszy się, że wszystkie funkcye wymierne są całkowalne, starano się funkcye niewymierne stosownymi podstawieniami sprowadzić do wymierności. Niebawem przekonano się jednakże, że to postępowanie daje się zawsze zastosować do funkcyj wymiernych z x i $\sqrt{\mathrm{R}(x)}$ utworzonych, jeżeli $\mathrm{R}(x)$ jest wymierną funkcyą pierwszego albo drugiego stopnia, natomiast rzadko tylko, gdy $\mathrm{R}(x)$ jest stopnia wyższego. Zauważano jednakże, że gdy $\mathrm{R}(x)$ jest stopnia trzeciego albo czwartego wielka ilość całek przez łuki ellipsy wyrazić się daje.

Z równania ellipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ wynika bowiem bezpośrednio

$$\frac{y}{b^2}dy + \frac{x}{a^2}dx = o, \; (ds)^2 = dx^2\left(1 + \frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2}\right) \text{ przeto}$$

$$dx = a\sqrt{\frac{1 - \frac{(a^2-b^2)x^2}{a^4}}{1 - \frac{x^2}{a^2}}}\, dx \text{ czyli } ds = \frac{(1-k^2x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

jeżeli podstawimy $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, zaś $a = 1$.

Długość łuku ellipsy przedstawia się przeto pod postacią całki:

$$s = \int_o^x \frac{(1-k^2x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Okoliczność ta była powodem, że wszystkie całki tego rodzaju nazwano całkami elliptycznymi wychodząc z nieuzasadnionego przypuszczenia, że łuk ellipsy odgrywa w nich podobną rolę jak łuk kołowy w funkcyach goniometrycznych. Euler zauważał, że ogólna całka

$$\int \frac{dx}{a + bx^2 + cx^2 + dx^3 + ex^4}$$

posiada w prawidle dodawania własności analogiczne do funkcyj cyklometrycznych. Legendre sprowadził ją do znanych trzech form typowych, zwanych całkami elliptycznymi 1., 2. i 3. rodzaju, jednakże żaden z nich nie wpadł na myśl w odwróceniach ich szukać funkcyj przestępnych analogicznych do funkcyj goniometrycznych, co dopiero w końcu drugiego dziesiątka tego wieku Jacobi i Abel uskutecznili.

Wychodząc z równania Legendra:

$$u = \int_o^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \mathrm{F}(\varphi, k) = \mathrm{F}(\varphi)$$

gdzie φ rzeczywiste i >0, k rzeczywiste i <1 można zauważyć, że funkcya $F(\varphi, k)$ rośnie w granicach $-\infty$ do $+\infty$, gdy φ przyjmuje wartości od $-\infty$ do $+\infty$ i wszelką wartość rzeczywistą tylko raz przyjmuje.

Jacobi oznaczył φ przez $am(u)$ (amplitudo) i nazwał $\sin\varphi = \sin am\, u$, $\Delta\varphi = \Delta\ am\, u$, z czego wypadają odnośnie do całki:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

trzy główne funkcye zwane: Sinus, cosinus i funkcya Δ amplitudy zmiennej u, t.j.

$$x = \sin am\, u, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos am\, u, \quad \sqrt{1-k^2x^2} = \Delta\ am\, u.$$

Tem określone zostały funkcye elliptyczne dla wszelkich wartości rzeczywistych argumentu, a rozszerzenie określenia tych funkcyj dla argumentów zespolonych nastąpiło z prawidła dodawania [1]).

Funkcye elliptyczne Jacobiego zawarte są w ilorazach σ funkcyj Weierstrassa, gdy się nada ilościom stałym pewne przepisane znaczenie.

Kładąc $k = \sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}$, gdzie e_1, e_2, e_3 są pierwiastkami równania $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ otrzymamy mianowicie:

$$\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \sin am\ (u\sqrt{e_1-e_3}), \qquad \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} = \cos am\ (u\sqrt{e_1-e_3})$$

$$\frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} = \Delta\ am\ (u\sqrt{e_1-e_3}), \qquad \frac{\sigma(u)}{\sigma_1(u)} = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \operatorname{tang} am\ (u\sqrt{e_1-e_3})$$

Całka, do której odwrócenie funkcyi $p(u) = s$ prowadzi, ma kształt: $u = \int \frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2 s - g_3}}$; odwrócenie funkcyi elliptycznej $\varphi(u)$ jakiegokolwiek rzędu prowadzi zaś do całki w kształcie $\int R(xy)\,dx$, gdzie R oznacza szczególną funkcyę wymierną ilości x i y, a między x i y zachodzi równanie algebraiczne, które się otrzymuje wyznaczywszy związek między funkcyą $\varphi(u)$ i jej pochodną $\varphi'(u)$. W żadnym jednak wypadku nie dojdziemy przez odwrócenie funkcyj elliptycznych do całek elliptycznych drugiego albo trzeciego rodzaju, zkąd odwrotny wniosek wypada, że odwrócenia całek elliptycznych drugiego albo trzeciego rodzaju nigdy do funkcyj elliptycznych nie doprowadzają.

Przy badaniu całek $\int R(xy)\,dx$ gdzie

$$y = \sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}$$

---

[1]) Porównaj: 1) Enneper, Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte Halle a/ S. 1876. 2) Arthur Cayley, An elementary treatise on elliptic functions. Cambrigde 1876.

dochodzi się do wyniku, że wszelka całka tego rodzaju da się przedstawić przez sumę szczególnych całek, które się dzielą na trzy rodzaje: „całki pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju“. Możnaby więc analogicznie do funkcyj elliptycznych postawić zadanie odwrócenia wszystkich całek pierwszego rodzaju. Odwrócenie to nie doprowaflza jednakowoż do funkcyj peryodycznzch jednowartościowych jednej zmiennej tylko do funkcyj peryodycznych wielu zmiennych.

Jeżeli przyjmiemy mianowicie y równe pierwiastkowi kwadratowemu $(2\rho+2)^{go}$ albo $(2\rho+1)^{go}$ stopnia otrzymamy ρ całek pierwszego rodzaju:

$$I_1(x)=\int\frac{dx}{y};\ I_2(x)=\int\frac{c_1+x}{y}dy,\ldots$$

$$I_\rho(x)=\int\frac{c_{\rho-1}+c_{\rho-2}x+..+x^{\rho-1}}{dx}dx;$$

kładąc dalej:

$$u_1=\sum_{\nu=1}^{\nu=\rho}I_1(x_\nu),\quad u_2=\sum_{\nu=1}^{\nu=\rho}I_2(x_\nu),\ldots u_\rho=\sum_{\nu=1}^{\nu=\varsigma}I_\rho(x_\nu)$$

otrzymamy przez odwrócenie: x_ν jako funkcyę zmiennych $u_1, u_2, .. u_\rho$

czyli $$x_\nu=\varphi_\nu(u_1.\ u_2,\ldots u_\rho)\qquad \nu=1,2,3..\rho$$

Każda symetryczna wymierna funkcya ilości x_ν będzie funkcyą jednowartościową zmiennych $u_1, u_2 \ldots u_\rho$, posiadającą ze względu na każdą zmiennę dwa peryody, a więc w ogóle 2ρ peyodów. Funkcye tego rodzaju nazwano funkcyami hyperelliptycznymi, tak samo jak całki, które do nich prowadzą całkami hyperelliptycznymi [1]). Dla $\rho=1$ przechodzą one w funkcye elliptyczne.

Najogólniejsze zadanie na tem polu jest następujące:

Mając daną jakąkolwiek funkcyę wymierną $R(x,y)$, gdzie pomiędzy x i y zachodzi jakiekolwiek równanie algebraiczne wyszukać całki i odwrócenia tychże.

Zagadnienie, którem się od czasów Abla najznakomitsi matematycy zajmowali, zostało ogólnie przez Weierstrassa w wykładach: „Ueber Abel'sche Functionen“ [2]) rozwiązane.

---

[1]) Dr. Leo Königsberger: „Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale.“ Leipzig 1878. — [2]) Weierstrass: Theorie der Abel'schen Functionen. Crelle'sches Journal 1856.

Rezultat poszukiwania jest zupełnie analogiczny jak przy funkcyach hyperelliptycznych, t. j. że dla każdego równania między x i y istnieją pewne całki podstawowe, na które się wszystkie całki tego rodzaju sprowadzić dadzą. Odwrócenie całek pierwszego rodzaju wprowadza na funkcye o więcej zmiennych niezależnych, których symetryczne funkcye są funkcyami jednowartościowymi 2ρ—peryodycznymi, skoro ρ wyobraża ilość zmiennych niezależnych.

Z powodu skomplikowanych związków, zachodzących między funkcyami Ablowymi a ich funkcyami pochodnymi nie udało się dotąd utworzyć teoryę funkcyj Ablowych analogiczną do Weierstrassowskiej teoryi funkcyj elliptycznych, w skutek czego sam Weierstrass wyprowadza dotąd teoryę funkcyj Ablowych z całek, a więc odwrotnie jak w funkcyach elliptycznych.

Statystyka Zakładu.

I.

Skład grona nauczycielskiego

w ciągu roku szkolnego 1884/5.

A. Nauczyciele przedmiotów obowiązkowych:

1. **Rodecki** Czesław, Dr. filozofii, dyrektor c. k. wyższej szkoły realnej, zastępca przewodniczącego Rady szkolnej okręgowej, uczył fizyki w klasie III godzin 3.
2. **Zawadil** Wacław, profesor VIII rangi, zawiadowca gabinetu historyi naturalnej, uczył historyi naturalnej w klasach: II, V, VI, VII i języka niemieckiego w klasie IV — razem godzin 16.
3. **Rosenbusch** Ferdynand, profesor, od 15 września z. r. za urlopem z powodu słabości.
4. **Benoni** Karol, Dr. filozofii, profesor, uczył geografii w klasach: V, VI, VII i historyi powszechnej w klasach: II, III, IV, V, VI i VII — razem godzin 17.
5. **Pohorecki** Franciszek, profesor, uczył języka polskiego w klasie VI i języka niemieckiego w klasach: V, VI i VII — razem godzin 16.
6. **Soleski** Józef, profesor, od 26 maja b. r. uczył matematyki w klasach II i V — razem godzin 8.
7. **Gramski** Marceli, profesor, zawiadowca gabinetu chemicznego, chemik sądowy i korespondent c. k. Towarzystwa geologicznego w Wiedniu, uczył chemii w klasach: IV, V, VI, VII i historyi naturalnej w klasach Ia i Ib — razem godzin 17.
8. **Daszyński** Władysław, profesor, zawiadowca gabinetu geometrycznego, uczył geometryi i rysunków geometrycznych w klasach: II, IV, VI i matematyki w klasach Ib i IV — razem godzin 17.

9. **Starkel** Romuald, profesor, zawiadowca biblioteki szkolnej, uczył języka polskiego w klasach: Ib, IV, V, VII i geografii w klasie III — razem godzin 15.
10. **Waligórski** Franciszek, profesor, uczył języka niemieckiego w klasach: Ia, II i III — razem godzin 17.
11. **Fedorowicz** Teofil, profesor, zawiadowca biblioteki uczniów, uczył geometryi i rysunków geometrycznych w klasach: III, V, VII, języka niemieckiego w klasie Ib i kaligrafii w klasie Ia — razem godzin 17.
12. **Hoszowski** Celestyn, profesor, zawiadowca gabinetu rysunkowego, uczył rysunków odręcznych w klasach: V, VI, VII, geometryi i rysunków geometrycznych w klasach Ia i Ib — razem godzin 20.
13. **Dziwiński** Placyd, Dr. filozofii, profesor, zast. profesora matematyki w c. k. szkole Politechnicznej, uczył do 26 maja matematyki w klasach: II, V, VI i VII — razem godzin 18; od 26 maja w klasach VI i VII — razem godzin 10.
14. **Zbierzchowski** Władysław, profesor, zawiadowca gabinetu fizykalnego, uczył fizyki w klasach: IV, VI, VII i geografii w klasach: Ib i IV — razem godzin 16.
15. Ks. **Laskowski** Józef, Dr. teologii, profesor, uczył religii obrz. łac. we wszystkich klasach — razem godzin 16.
16. **Giedroyć** Antoni, egzaminowany zastępca nauczyciela, uczył języka polskiego w klasach: Ia, II, III i geografii w klasie I — razem godzin 13.
17. **Janelli** Franciszek, egzaminowany zastępca nauczyciela, uczył matematyki w klasach Ia, III i geografii w klasie II — razem godzin 10. Nadto w zastępstwie chorego prof. Rosenbuscha od 15 września 1884 uczył rysunków odręcznych w klasach: II, III, IV i kaligrafii w klasach: Ib, II i III — razem godzin 18.
18. Ks. **Bobrowicz** Łucyan, zastępca katechety gr. kat., uczył religii obrz. gr. kat.
19. **Wolf** Michał, uczył religii mojżeszowej we wszystkich klasach — razem godzin 6.

B. Asystenci:

1. **Daniłowicz** Seweryn, do rysunków geometrycznych.
2. **Skawiński** Leon, do rysunków odręcznych.

C. Aplikanci:

1. **Mandel** Salomon, egz. z M. F.
2. **Bruchnalski** Kazimierz, egz. z M. F.
3. **Lachner** Fryderyk, egz. z Ry. gm.

D. Nauczyciele przedmiotów nadobowiązkowych:

Dr. **Benoni** Karol, uczył historyi kraju rodzinnego — razem godzin 4.
Ks. **Bobrowicz** Łucyan, uczył języka ruskiego — razem godzin 4.
Giedroyć Antoni, uczył języka francuskiego — razem godzin 6.
Gramski Marceli, uczył chemii analitycznej — razem godzin 3.
Hoszowski Celestyn, uczył modelowania — razem godzin 4.
Janelli Franciszek, uczył gimnastyki — razem godzin 6.
Poliński Józef, uczył stenografii — razem godzin 4.
Szatkowski Paweł, uczył spiewu — razem godzin 4.

II.

Rozkład nauk.

A) Przedmioty obowiązkowe.

I. Klasa.

Gospodarz w klasie Ia: **Daszyński Władysław.**
„ „ Ib: **Giedroyć Antoni.**

Religia. 2 godziny tygodniowo. Zasady katolickiej wiary i obyczajów.

Język polski. 4 godziny tygodniowo. Nauka o częściach mowy w ogóle. Odmiana imion i czasowników. Nauka o zdaniu gołem i rozwiniętem; z głosowni najniezbędniejsze zasady przy sposobności nauki o deklinacyi i konjugacyi. Płynne czytanie ustępów z Wypisów polskich tom I., z objaśnieniem gramatycznem i rzeczowem, poprawne opowiadanie, a wreszcie wygłaszanie z pamięci ustępów prozaicznych i poetycznych. Co tydzień jedno zadanie.

Język niemiecki. 6 godzin tygodniowo. Słaba i mocna odmiana rzeczowników, jakoteż odmiana przymiotników, zaimków i liczebników. Odmiana czasowników słabych, tudzież ważniejszych czasowników mocnych, praktycznie przy tłómaczeniu przykładów z języka niemieckiego na polski i odwrotnie z Wypisów Rebena. Rząd przyimków przy nadarzonej sposobności. Reprodukcya w języku niemieckim łatwiejszych zdań z Wypisów stosownie zmienianych. Co tydzień zadanie szkolne.

Geografia. 3 godziny tygodniowo. Pojęcia wstępne z geografii fizycznej i matematycznej, oro- i hydrografia wszystkich części świata, oraz krótki przegląd polityczny, według książki Tatomira i Benoniego.

Arytmetyka. 4 godziny tygodniowo. Układ metryczny. Cztery działania liczbami całkowitymi i dziesiętnymi, mianowanymi i niemianowanymi; podzielność liczb, najmniejsza wspólna wielokrotność i największa wspólna miara; ułamki zwyczajne. Liczby wielogatunkowe.

Historya naturalna. 3 godziny tygodniowo. Zoologia podług książki prof. Nowickiego, wydanie ilustrowane. A mianowicie w pierwszym kursie ze zwierząt kręgowych: ssaki i ptaki, w drugim kursie zwierzęta kręgowe, oraz dział zwierząt bezkręgowych.

Geometrya i rysunki geom. 4 godziny tygodniowo. Nauka o punktach, liniach, kątach, trójkątach, czworobokach i wielokątach. Rysowanie ilości przestrzennych z uwzględnieniem ich wielkości i położenia, z wolnej ręki; następnie rysowanie z modelów drutowych i gipsowych na podstawie głównych zasad perspektywy. Rysunek ornamentów, które na podstawie konstrukcyjnej łatwo wykonać się dają.

Kaligrafia. 2 godziny tygodniowo. Pismo według wzorów Greinera, po polsku i po niemiecku.

II. Klasa.

Gospodarz: **Waligórski Franciszek.**

Religia. 2 godziny tygodniowo. Historya starego testamentu z uwzględnieniem chronologii i geografii biblijnej.

Język polski. 3 godziny tygodniowo. Powtórzenie i uzupełnienie nauki o formach i o zdaniu rozwiniętem, szczegółowo nauka o składni zgody i składni rządu, na podstawie gramatyki Dra Małeckiego. Czytanie, opowiadanie, analiza gramatyczna, deklamacya Wypisów tom II. Trzy wypracowania piśmienne na miesiąc.

Język niemiecki. 6 godzin tygodniowo. Powtórzenie i uzupełnienie nauki o formach; czasy złożone w formie czynnej i biernej — używanie przyimka „*zu*“ przy wyrazie bezokolicznym i przedpierwotnika „*ge*“ w imiesłowie. Odmiana zaimka i liczebnika, o przyimkach i spójnikach w ogólności. Czytanie, tłómaczenie i analiza podług Wypisów Rebena. Co tygodnia ćwiczenie domowe i półgodzinne szkolne.

Geografia. 2 godziny tygodniowo. Szczegółowa geografia Azyi, Afryki i krajów Europy południowej według książki Baranowskiego i Dziedzickiego.

Historya. 1 godzina tygodniowo. Dzieje starożytne podług Weltera w tłumaczeniu polskiem Zygm. Sawczyńskiego, tom I.

Matematyka. 3 godziny tygodniowo. Działania skrócone; stosunki i proporcye; pojedyncza i złożona reguła trzech; praktyka włoska; rachunek procentu prostego; rachunek terminu; reguła spółki, łańcuchowa, przeciętna i męszaniny.

Historya naturalna. 3 godziny tygodniowo. W I. półroczu mineralogia według książki Łomnickiego. W II. półr. botanika według książki Hückla.

Geometrya i rysunki geom. 4 godziny tygodniowo. Przedmiot z pierwszej klasy w krótkości powtórzony. Przystawanie i podobieństwo trójkątów z uwidocznieniem, polegającem na konstrukcyi takowych. Konstrukcya czworoboków. Nauka o kole.

Rysunek przy pomocy przyrządów geometrycznych obejmuje konstrukcye powyżej wymienionych przedmiotów i ornamentów geometrycznych.

Rysunki odręczne. 4 godziny tygodniowo. Ćwiczenia w rysowaniu ornamentów płaskich podług szkoły elementarnej E. Herdlego, oraz nauka perspektywy podług szkoły J. Grandauera z użyciem odpowiednich przyrządów i zastósowanie figur geometrycznych z odlewów gipsowych.

Kaligrafia. 2 godziny tygodniowo. Pismo według wzorów Greinera, po polsku i po niemiecku.

III. Klasa.

Gospodarz: Dr. **Benoni Karol.**

Religia. 2 godziny tygodniowo. Historya życia Chrystusa i historya apostolska z uwzględnieniem biblijnej geografii i chronologii.

Język polski. 3 godziny tygodniowo. Z gramatyki: ortografia, interpunkcya, części mowy nieodmienne; z etymologii rzeczy najważniejsze. Składnia zgody, nauka o zdaniu złożoném — podług gramatyki Antoniego Małeckiego. Czytanie, opowiadanie, rozbiór gramatyczny i deklamacya ustępów wierszem i prozą z III. tomu Wypisów polskich dla niższych klas gimnazyalnych. Co 10 dni zadanie domowe, co 14 szkolne.

Język niemiecki. 5 godzin tygodniowo. Z gramatyki: składnia zgody i część składni rządu; powtórzenie nauki o formach. Lektura połączona z analizą na podstawie wypisów Hamerskiego dla III. kl.; przerobionych ustępów niemieckich tak prozaicznych jako też poetycznych uczono się na pamięć. Ćwiczeń pisemnych było co miesiąc pięć, trzy domowe, dwa szkolne.

Geografia. 2 godziny tygodniowo. Szczegółowa geografia krajów Europy środkowej i północnej, oraz Ameryki i Polinezyi.

Historya. 2 godziny tygodniowo. Dzieje wieków średnich z szczególnem uwzględnieniem historyi austryackiej i kraju rodzinnego, podług Weltera w tłumaczeniu Sawczyńskiego, tom II.

Arytmetyka. 4 godziny tygodniowo. Powtórzono przedmiot z klas poprzedzających; miary, wagi i monety zagraniczne, nauka o papierach publicznych; w drugiem półroczu: cztery działania liczbami algebraicznymi; podnoszenie liczb szczególnych do drugiej i trzeciej potęgi, tudzież wyciąganie drugiego i trzeciego pierwiastka.

Fizyka. 3 godziny tygodniowo. Ogólne i szczególne własności ciał; o cieple, magnetyzmie i elektryczności podług książki Dr. Cz. Rodeckiego.

Geometrya i rysunki geom. *3 godziny tygodniowo. Konstrukcye opierające* się na przystawaniu i podobieństwie figur. Stereometrya. Rysowano prócz powyższych konstrukcyj ornament geometryczny i nakładano farbami.

Rysunki odręczne. 4 godziny tygodniowo. Ornamenta i kontury głów ludzkich, zwierząt i części roślin.

Kaligrafia. 2 godziny tygodniowo. Pismo ozdobne.

IV. Klasa.

Gospodarz: **Zbierzchowski Władysław.**

Religia. 2 godziny tygodniowo. Objaśnienie ważniejszych obrzędów kościoła Chrystusowego z uwzględnieniem ich powodów i czasu zaprowadzenia.

Język polski. 3 godziny tygodniowo. Składnia zgody, składnia rządu; nauka o zdaniu złożonem, o okresach i szyku wyrazów, nauka o słoworodzie, podług gramatyki Dra Antoniego Małeckiego. Czytanie, opowiadanie, rozbiór gramatyczny i deklamacya ustępów wierszem i prozą z IV. tomu Wypisów. Co miesiąc dwa zadania domowe, jedno szkolne.

Język niemiecki. 5 godzin tygodniowo. Składnia zgody, składnia rządu; nauka o czasach, trybach i sposobach, mowa zależna, przyimki rządzące przypadkami, przemiana zdań. Czytanie, tłumaczenie opowiadanie, uczenie się na pamięć, rozbiór z Wypisów Ed. Hamerskiego, tom. II. Co 10 dni zadanie szkolne, co 14 domowe.

Geografia i statystyka. 2 godzin tygodniowo. Dokładna geografia monarchii austro-węgierskiej, z wyszczególnieniem kraju rodzinnego według podręcznika dr. J. Szaraniewicza.

Historya powszechna. 2 godziny tygodniowo. Historya nowożytna z szczególnem uwzględnieniem przeważnie historyi austryackiej podług Weltera w tłumaczeniu polskiem Sawczyńskiego, tom III.

Arytmetyka. 3 godziny tygodniowo. Powtórzono przedmiot z klas poprzedzających; cztery działania liczbami algebraicznymi, największa wspólna miara i najmniejsza wspólna wielokrotność; ułamki zwyczajne; zrównania pierwszego stopnia z jedną i dwiema niewiadomymi.

Fizyka. 3 godziny tygodniowo. Powtórzono statystykę, wzięto dynamikę ciał stałych, płynnych i lotnych, naukę o magnetyzmie, elektryczności i galwanizmie, akustykę i optykę. Podług książki Dr. Czesława Rodeckiego.

Chemia. 4 godziny tygodniowo. Pierwsze półrocze: Opis ważniejszych pierwiastków i tych połączeń, które są ważnymi szczególnie ze względu na praktyczne ich znaczenie. Drugie półrocze: O ważniejszych związkach organicznych, jakoto o węglowodorach, alkoholach, kwasach, eterach, węglowodanach, glukozydach, ciałach białkowatych i o ciałach aromatycznych.

Geometrya i rysunki geom. 3 godziny tygodniowo. Obliczenie powierzchni figur płaskich, powierzchni i objętości brył, rozwiązanie praktycznych zagadnień. Zmiana figur i konstrukcya linij krzywych. Zastosowanie twierdzeń geometrycznych do miernictwa. Rzuty prostopadłe punktu, prostej i figur płaskich.

Rysunki odręczne. 4 godziny tygodniowo. Ornamenta konturowe w półtonie cieniowane ołówkiem, kredą lub kolorowane w danych stosunkach, zmniejszone lub zwiększone, podług wzorów E. Jakobsthala, nauka cieniowania podług J. Grandauera.

V. Klasa.

Gospodarz: do 26 maja: Dr. **Placyd Dziwiński.**
„ od 26 maja: **Józef Soleski.**

Religia. 3 godziny tygodniowo. I. półrocze: Główne źródła katolickiej nauki, wiary i obyczajów w historycznem przedstawieniu. II. półrocze: katolicka nauka wiary.

Język polski. 3 godziny tygodniowo. W I. półroczu: nauka o prozie z etestycznem objaśnieniem wszystkich jej kształtów. W II. półroczu: nauka o wierszowaniu podług gramatyki A Małeckiego, i nauka o poezyi z estetycznem objaśnieniem wszystkich jej kształtów. W obudwu półroczach odpowiednia lektura na podstawie Wypisów polskich tom IV. Ćwiczenia stylistyczne dwa w miesiącu.

Język niemiecki. 5 godzin tygodniowo. Podstawą nauki były Wypisy niemieckie Jandaurka-Hamerskiego dla kl. V. Lektura połączona z rozbiorem gramatycznym i logicznym, opowiadanie z zastósowaniem synonimiki i uwzględnieniem konstrukcyjnych odrębności języka niemieckiego z polskim; nieustanne powtarzanie główniejszych prawideł gramatycznych. Ustępy poetyczne objaśniano także we względzie estetycznym i uczono się na pamięć. Tłumaczenie z języka polskiego na niemiecki. Ćwiczenia pisemne dwa co miesiąca, jedno domowe — jedno szkolne.

Geografia. 1 godzina tygodniowo. Powtórzenie i dopełnienie geografii Azyi, Afryki i państw południowej Europy, z uwzględnieniem stosunków handlowych i przemysłowych, według podręcznika Baranowskiego i Dziedzickiego.

Historya. 3 godziny tygodniowo. Historya starożytna podług Gindelego tom I. w tłumaczeniu Markiewicza.

Matematyka. 5 godzin tygodniowo. Z algebry: cztery działania, podzielność liczb, ułamki, stosunki i proporcye, potęgi i pierwiastki. Równania stopnia pierwszego. Z geometryi: Planimetrya. Co miesiąc zadanie szkolne.

Historya naturalna. 3 godziny tygodniowo. Wykład systematyczny zoologii na zasadach anatomicznych i fizyologicznych. Zarys anatomii i fizyologii człowieka.

Chemia. 3 godziny tygodniowo. W pierwszem półroczu: Wiadomości wstępne mianowicie: definicya atomu, drobiny, połączeń chemicznych, podział pierwiastków na metaloidy i metale. Szczegółowy opis metaloidów jednosilnych, dwusilnych i ich połączenia; z metaloidów trójsilnych: o fosforze. W drugiem półroczu: dalszy ciąg opisu metaloidów trójsilnych i metaloidy czworosilne, o własnościach fizycznych i chemicznych metali, metale, gromady potasowców i wapniowców. Podług książki wydanej przez A. Nawratila i A. Sokołowskiego.

Geometrya wykreślna. 3 godziny tygodniowo. O rzutach i względnościach punktu, linii prostej i płaszczyzny. Rozwiązanie zagadnień tyczących się punktu, prostej i płaszczyzny. O rzutach brył graniastych i okrągłych, przekroje brył płaszczyznami, oznaczenie przekrojów w siatkach. O liniach krzywych: elipsie, hyperboli, paroboli i cykloidzie.

Rysunki odręczne. 2 godziny tygodniowo. Ornamenta kolorowane podług szkoły A. Andela i J. Strocka: rysowanie i cieniowanie ornamentów z modeli gipsowych, nauka głowy ludzkiej podług szkoły J. Grandauera, oraz rysowanie medalionów z odlewów gipsowych.

VI. Klasa.

Gospodarz: **Franciszek Pohorecki.**

Religia. 2 godziny tygodniowo. Katolicka nauka obyczajów.

Język polski. 3 godziny tygodniowo. Historya literatury polskiej w ogólnym zarysie aż do Kołłątaja, przyczem czytano ustępy z najważniejszych pisarzy Zygmuntowskich, również okresu makaronicznego i pseudo-klasycznego. Ćwiczenia dwa w miesiącu.

Język niemiecki. 4 godziny tygodniowo. Czytanie i objaśnianie pod względem gramatycznym, rzeczowym i estetycznym ustępów prozaicznych i poetycznych z Wypisów Jandaurka na klasę VI. Krótkie biografie i poglądy na działalność literacką tych autorów, których utwory w szkole czytano. Opowiadanie, deklamacya. Powtórzenie najważniejszego materyału gramatycznego. Co dwa tygodnie zadanie domowe, lub szkolne.

Geografia. 1 godzina tygodniowo. Dalszy ciąg geografii Europy, z wyjątkiem monarchii austro-węgierskiej, według podręcznika Baranieckiego i Dziedzickiego.

Historya. 3 godziny tygodniowo. Historya wieków średnich, z szczególnem uwzględnieniem historyi austryackiej i kraju rodzinnego, podług Gindelego tom II. w tłumaczeniu Markiewicza.

Matematyka. 5 godzin tygodniowo. Z algebry: logarytmy. równania drugiego stopnia i niektóre wyższych stopni, równania wykładnicze i goniometryczne, równania nieznaczone. Arytmetyczne i geometryczne postępy, z zastosowaniem do procentu składanego i obliczenia renty. Z geometryi: Trygonometrya i stereometrya. Co miesiąc zadanie szkolne.

Fizyka. 4 godziny tygodniowo. Mechanika ogólna i mechanika sił międzycząstkowych — według podręcznika J. Soleskiego.

Historya naturalna. 2 godziny tygodniowo. Botanika. W pierwszem półroczu: anatomia, fizyologia i morfologia roślin; w drugiem półroczu: systematyka. Z systemów naturalnych ważniejsze i system Lineusza w porównaniu z naturalnymi.

Chemia. 2 godziny tygodniowo. Opis metali ciężkich i ich połączeń, mianowicie gromada żelazowców, cynkowców, ołowiowców, metale szlachetne. Z chemii organicznej: wiadomości wstępne i alkohole rodników jednosilnych, tudzież należące tu aldehydy, kwasy, etery. (Podług książki wydanej przez A. Nawratila i A. Sokołowskiego.)

Geometrya wykreślna. 3 godziny tygodniowo. Rozwiązanie naroża trójściennego. O powierzchniach rozwijalnych i płaszczyznach stycznych do tych powierzchni. Przecięcia powierzchni rozwijalnych między sobą, jakoteż ich przekroje płaszczyznami; konstrukcya siatek. O powierzchniach obrotowych i wichrowatych; początki rzutów środkowych.

Rysunki odręczne. 4 godziny tygodniowo. Dalszy ciąg rysunków ornamentalnych podług odlewów gipsowych, rysowanie medalionów i głów ludzkich podług modeli, tudzież kopiowanie podług wzorów Bargue'a i Géroma.

VII. Klasa.

Gospodarz: **Starkel Romuald.**

Religia. 2 godziny tygodniowo. Przegląd historyi kościelnej.

Język polski. 3 godziny tygodniowo. Literatura XIX. wieku z uwzględniemniem najznakomitszych pisarzy i poetów na podstawie wypisów Mecherzyńskiego, tom II.

Język niemiecki. 4 godziny tygodniowo. Czytano i objaśniano utwory najcelniejszych poetów klasycznych XIII. wieku z poglądem na historyą literatury tego wieku. W każdem półroczu po 5 zadań domowych i 4 szkolne.

Geografia. 1 godzina tygodniowo. Powtórzenie i uzupełnienie geografii Ameryki i Australii, szczegółowa geografia monarchii austryacko-węgierskiej, z uwzględnieniem dat statystycznych, stosunków handlowych i przemysłowych, środków komunikacyjnych, zakładów naukowych i formy rządu,

Historya. 3 godziny tygodniowo. Historya nowsza od odkrycia Ameryki, z uwzględnieniem dziejów monarchii austryackiej i historyi kraju rodzinnego, podług Gindelego tom III. w tłumaczeniu Markiewicza.

Matematyka. 5 godzin tygodniowo. Z algebry: Kombinacye i rachunek prawdobieństwa. Dwumian Newtona, zbieżność i rozbieżność szeregów. Szeregi arytmetyczne wyższych rzędów. Ogólne własności równań

Rozwiązanie równań trzeciego stopnia. Z geometryi: Trygonometrya sferyczna z zastosowaniem do geografii, astronomii i stereometryi. Geometrya analityczna na płaszczyźnie: punkt prosta, koło i krzywe stożkowe. Co miesiąc zadanie szkolne.

Fizyka. 4 godziny tygodniowo. W pierwszem półroczu: Nauka o ruchu falowym, nauka o głosie, elektryczność statyczna; w drugiem półroczu: Galwanizm, magnetyzm, optyka, nauka o cieple i zasady meteorologii.

Historya naturalna. 3 godziny tygodniowo. W pierwszem półroczu: mineralogia; w drugiem: geognozya i geologia. Ważniejsze momenty z geografii roślin i zwierząt.

Chemia, 2 godziny tygodniowo. Dalszy ciąg chemii organicznej, mianowicie: alkohole i kwasy rodników dwu- i trójsilnych, węglowodany (cukry), barwniki, alkaloidy organiczne. Krótki rys chemii rozbiorowej; w drugiem półroczu powtarzano ważniejsze działy tak chemii nieorganicznej jakoteż ozganicznej.

Geometrya wykreślna. 3 godziny tygodniowo. Konstrukcya cieniów własnych i rzuconych. Ćwiczenia w rysowaniu przedmiotów technicznych i nakładaniu farbami. Nauka rzutów środkowych czyli wolnej perspektywy, z zastosowaniem do perspektywy malarskiej i do konstrukcyi cieniów perspektywnicznych.

Rysunki odręczne. 4 godziny tygodniowo. Rysowano popiersia, także całe postacie, tudzież ornamenta podług odlewów gipsowych i kopie podług wzorów Bargue'a i Géroma.

B) Przedmioty nadobowiązkowe.

Historya kraju rodzinnego. W klasach VI i VII po jednej godzinie tygodniowo. W nauce tej brało udział 73 uczniów.

Język ruski. W dwóch oddziałach po 2 godziny tygodniowo. W I. oddziele: Wprawa w czytaniu, tłumaczeniu z polskiego i rozbiór gramatyczny, pisanie za dyktatem. Uczęszczało uczniów 8. W II. oddziele: Literatura ruska, pisarze nowszego okresu, wypracowanie na zadane temata. Uczęszczało uczniów 11.

Język francuski. W I. oddziele: czasowniki avoir i être, o rodzajniku, odmiana rzeczowników, główne zasady formowania liczby mnogiej rzeczowników, przymiotników i formowania przymiotników żeńskiego rodzaju. W II. oddziele: czasowniki regularne, zogólnienie prawideł poprzedzających, zaimki, liczebniki. W III. oddziele: czasowniki nieregularne, imiesłowy, składnia zgody i rządu, czytano ustępy znakomitszych autorów oraz podano ich biografie. Zapisało się na I — 41, na II — 13, na III — 5 uczniów.

Ćwiczenia w chemii. 3 godziny tygodniowo. Chemia rozbiorowa ciał nieorganicznych. Uczęszczało 7 uczniów.

Modelowanie. 4 godziny tygodniowo. Modelowano arabeski, medaliony i popiersia podług odlewów gipsowych lub podług natury. Uczęszczało uczniów 24.

Gimnastyka. W 6 oddziałach po 1 godzinie tygodniowo. W każdym oddziele przez pierwszą $^1/_2$ godzinę ćwiczono naprzemian pochody, ćwiczenia rzędowe i wolne bez przyborów i z przyborami; drugą $^1/_2$ godzinę ćwiczenia na przyrządach jak: drabinach, żerdziach i linie, maszcie poziomym i pionowym, odskoczni, kółkach, drążku poziomym, poręczkach, kożle i koniu. Uczęszczało uczniów 168.

Stenografia. W dwóch oddziałach po 2 godziny tygodniowo. Nauka stenografii polskiej zastosowana do użytku szkolnego włącznie z nauką o stałych skróceniach. Uczęszczało uczniów 36.

Śpiew. W dwóch oddziałach po 2 godzin tygodniowo. Uczęszczało uczniów 68.

III.

Temata do wypracowań piśmiennych.

A) w języku polskim:

Klasa V.

1. Wysoki Zamek (opis.)
2. Objaśnić bliskoznaczne wyrazy: zarozumiałość, próżność, pycha, duma.
3. Las w szacie jesiennej.
4. List do przyjaciela, zawierający opis krajobrazu.
5. Temistokles pod Salaminą.
6. Rozwój i znaczenie kolonizacyi Fenicyan.
7. Wyprawa Daryusza przeciwko Scytom.
8. Znaczenie igrzysk narodowych u starożytnych Greków.
9. Młodzieńcze lata Aleksandra Wielkiego.
10. O pożytku ptaków.
11. Znaczenie oka i ucha dla umysłowego rozwoju człowieka.
12. Wykazać różnicę między poezyą epicką a liryczną.
13. O ile wpłynęła nietykalność trybunów ludu na rozwój ich władzy.
14. Ostatnie chwile Hannibala.
15. O początkach sztuki dramatycznej u starożytnych Greków i Rzymian.
16. Wpływ rolnictwa na kulturę.

Klasa VI.

1. Zalety wieku młodocianego.
2. Jan Długosz (zasługi i znaczenie).
3. Założenie akademii krakowskiej i wpływ tejże na podniesienie oświaty w Polsce.
4. Wpływ reformacyi religijnej na szybki rozwój literatury polskiej w XVI wieku.
5. O ustaleniu pisowni polskiej.
6. Najazd Hunów na Europę i jego skutki po roku 378.
7. Wpływ straży pretoryalnej na losy państwa rzymskiego.
8. Zasługi i stanowisko Mikołaja Reja z Nagłowic w literaturze polskiej.
9. Jak powstały narody romańskie?
10. Rozwinąć powody wypraw krzyżowych i wskazać, jaki współudział miał w nich papież Urban II.
11. Pochwała życia wiejskiego. Podług lektury.
12. O poezyi dramatycznej polskiej w XVI wieku.
13. Odrodzenie się nauk klasycznych i wpływ tychże na rozwój języka i literatury polskiej w XVI wieku.
14. Skutki układu Werduńskiego.
15. Zastosowanie wahadła w nauce i praktyce.
16. O trzech jednościach w sztuce dramatycznej u starożytnych a u nas.
17. Przyczyny upadku literatury polskiej w okresie panegiryczno-makaronicznym.
18. Przemowa Hannibala do wojska przed przejściem przez Alpy.
19. Jakie okoliczności wpłynęły szczególnie na rozwój handlu angielskiego?
20. Wykazać, o ile dążenie Hohenstaufów do opanowania Włoch przyczyniło się do ich upadku.

Klasa VII.

1. Zalety i korzyści strefy umiarkowanej.
2. Rozbiór elegii Karpińskiego: „Powrót z Warszawy na wieś".
3. O ile osnowa i rysunek charakterów w poemacie K. Brodzińskiego „Wiesław" odpowiadają istocie sielanki.
4. Scharakteryzować rządy Henryka Walezyusza w Polsce i Francyi.
5. Rozbiór „Ody do młodości".
6. Co spowodowało sukcesyjną wojnę hiszpańską?
7. Na tle jakich wypadków osnuł Mickiewicz swój poemat „Pan Tadeusz" i jakie w nim przedstawił warstwy społeczeństwa?
8. Działanie wody na powierzchnię ziemi.
9. Jakie znamiona charakteryzują trzech wybitnych przedstawicieli szkoły ukraińskiej w literaturze polskiéj?
10. Wpływ rządów Fryderyka W. na rozwój potęgi Prus.

B) w języku niemieckim:

Klasa V.

1. Die Pyramiden in Aegypten.
2. Die Ermunterung im Frühlinge v. Salis. Nacherzählung.
3. Der Argonautenzug.
4. Das hölzerne Ross vor Ilion. Eine Schilderung.
5. Hektor's Tod. Eine Schilderung.
6. Miltiades und Histiaios an der Donaubrücke.
7. „Des Lebens ungemischte Freude ward keinem Irdischen zu Theil". Schiller.
8. Inwieferne haben die Griechen den Verfall ihrer Unabhängigkeit verschuldet.
9. Das Messen der geraden Abschnitte und dessen Resultate.
10. Die Heldenthat des Horatius Cocles. Eine historische Schilderung.
11. Der Nutzen und Schaden der Insecten.
12. Alexander des Grossen Heereszug nach Indien.
13. Die Ursachen der ersten Auswanderung der Plebs auf den Mons sacer.

8 Extemporaliów.

Klasa VI.

1. Leonidas, der Held von Thermopylä.
2. Die Verschwörung Catilina's.
3. Die Kreuzschau von Chamisso. Ideengang.
4. Die Erfindung der Buchdruckerkunst.
5. Die Urheimat der Germanen. Ein geografisches Bild.
6. Sejan's Fall.
7. Der Handschuh von Schiller. Ideengang.
8. Entstehung und Entwickelung des Lehenswesens.
9. Bedeutung der Kaiserkrönung Carl des Grossen,
10. Welche Bedeutung hatte die Regierung Heinrich I für Deutschland.
11. Krimhild's Rache. (Schularbeit.)
12. Die einfachsten Elemente des Raumes und ihre gegenseitige Beziehungen.
13. Über die drei Aggregationszustände der Körper. (Schularbeit.)
14. Der Nutzen der gymnastischen Übungen.
15. Die Rückkehr und Gefangennahme des Richard Löwenherz. (Schularbeit.)
16. Kurze Charakteristik der bedeutendsten Industrie- und Handelsstädte in England.

4 Extemporalia.

Klasa VII.

1. „Mit des Geschickes Mächten ist kein ewiger Bund zu flechten". Schiller.
2. Schilderung einer Feuersbrunst.

3. Welche Bedeutung hatte für Deutschland die Einführung der allgemeinen Schriftsprache und wem hatte Deutschland diese Wohltaht zu verdanken?
4. Die Minne- und Meistersänger im Mittelalter.
5. Der Streit der Leipziger und der Schweizer.
6. Ursachen des Ausschwunges und Verfalls der portugalischen Kolonien.
7. Lessing's Knaben- und Jünglingsalter.
8. „Wo rohe Kräfte sinnlos walten, da kann sich kein Gebild gestalten". Schiller.
9. Die Characteristik des jungen Tempelherrn im Lessing'schen Drama „Nathan der Weise".
10. Es soll die Eintheilung der österreichisch-ungarischen Monarchie in klimatische Gürtel dargestellt und begründet werden.
11. J. G. Herder's Bildungsgeschichte.
12. Hermann und Dorothea v. Göthe. Ideengang des I Gesanges.
13. Methoden der Bestimmung von Punkten an der Himmelskugel.
14. Einfluss der Lage der österreichisch-ungarischen Monarchie auf die Entwickelung des Handels.
15. Ideengang der Elegie „Der Spaziergang" von Schiller.

IV.

Środki naukowe.

A. Biblioteka.

1. Biblioteka dla nauczycieli.

Biblioteka liczy obecnie 1507 dzieł.

Z czasopism otrzymywano z urzędu:

1. Dziennik ustaw i rozporządzeń krajowych.

Prenumerowano:

2. Verordnungsblatt für den Dienstbereich des Ministeriums für Cultus und Unterricht. 3. Bibliotekę Warszawską. 4. Przewodnik gimnastyczny. 5. Aus allen Welttheilen. 6. Petermann's Mittheilungen. 7. Chemische Zeitung. 8. Zeitschrift für das Realschulwesen. 9. Repertorium für die Experimental-Physik. 10. Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 11. Neueste Erfindungen u. Erfahrungen.

W drodze kupna lub z daru przybyły do biblioteki następujące dzieła:

Nr. 1426. Cienciała A. Podręcznik prawniczy. 1427. Odyniec A. O. Wspomnienia z przeszłości. 1428. Lukas G. Der Turnunterricht an den Realschulen Österreichs. 1429. Nehring Wł. Studya literackie. 1430. Marenzeller E. Dr. Normalien für die Gymnasien und Realschulen in Österreich. 1431. Normann. Perlen der Weltliteratur. 1432. Crookes-Gretschel. Strahlende Materie. 1433. Lerzel W. Gramatyka języka polskiego. 1434. Lewicki A. Dr. Zarys historyi Polski. 1435. Rehmann. Echa z południowej Afryki. 1436. Thompson. Elektryczność i magnetyzm. 1437. Kraus Dr. Chemiker Zeitung. 1438. Zubrzycki Jan. Sztuka średniowieczna. 1439. Süss B. Dr. Unsere Bäume und Sträuche. 1440. Thumen F. Die Bacterien. 1441. Biegeleisen H. Dr. Pan Tadeusz A. Mickiewicza. 1442. Otto Jr. Wunderglaube und Wirklichkeit. 1443. Zopf W. Dr. Die Spaltpilze. 1444—1452. Deutsche Classiker für den Schulgebrauch. 1453. Aer. Opowiadania i studya. 1454. Instructionen für die Unterricht an Realschulen.

Z daru śp. Kazimierza Twardowskiego:

Nr. 1455. Brehms. Thierleben, 10 tomów. 1456. Hoffmann. Pflanzenreich. 1457. Alth. Mineralogia. 1458. Bersch. Mineralfarben. 1459. Bersch. Erdfarben. 1460. Dr. Ciszewski. Chemia. 1461. Eder. Fotografische Camera. 1462. Eder. Photografische Theorie und Praxis. 1463. Geroling. Gewerbechemie, 3 tomy. 1464. Grusshoff. Retouche der Photografie. 1465. Hasigk. Repetitorium für Photografie. 1466. Hosnik. Heliografie. 1467. Krüger. Die Photografie. 1468. Krüger. Handbuch der Photografie. 1469. Krüger. Repetitorium für Photografie. 1470. Martin. Emailphotografie. 1471. Remelé. Landschaftsphotografie. 1472. Schnauss. Photografischer Almanach. 1473. Schnauss. Photografischer Lexikon. 1474. Sokołowski. Chemia. 1475. Bahr. Nebelbilderapparat. 1476. Behrens. Hilfsbuch zum Mikroskop. 1477. Biscan. Handwörterbuch der Electricität. 1478. Boullarde. La lumiére Electrique. 1479. Electrotechnische Bibliothek, 26 tomów. 1480. Emsmann. Experimentirbuch. 1481. Etienne de Fedore. Das Glühlicht. 1482. Girard. Rośliny pod mikroskopem. 1483. Gladstone. Secundäre Bakterien. 1484. Gretschel. Das Telephon. 1485. Hanck. Die galvanische Elemente. 1486. Japing. Electricität. 1487. Krämer. Repetitorium der Mathematik und Elektricität. 1488. Masins. Die gesammten Naturwissenschaften, 3 tomy. 1489. Müller. Physik u. Meteorologie, 5 tomów. 1490. Müller. Atlas zur kosmischen Physik. 1491. Müller. Tablice do fizyki ze streszczonym tekstem w przekładzie polskim. 1492. Popper. Elektrische Kraftübertragung. 1493. Prasch. Telegrafendienst. 1494. Palmieri. Atmosphärische Elektricität. 1495. Rohrbeck. Vademecum für Electrotechniker. 1496. Schöfler. Elektricität. 1497. Schwartze. Die Elektrotechnik. 1498. Sigmund. Durch die Sternenwelt. 1499. Sigmund. Wunder der Physik und Chemie. 1500. Stöhrer. Projection der Experimente. 1501. Thompson-Pagoski. Elektryczność i Magnetyzm, 2 tomy. 1502. Tyndall. Elektricität, 2 tomy. 1503. Uhland. Das elektrische Licht. 1504. Urbanitzky. Die Electricität. 1505. Wilkomm. Wunder des Mikroskops. 1506. Zeitschrift für Elektrotechnik, r. 1884. 1507. Zeitschrift für Elektrotechnik, r. 1885.

2. Biblioteka uczniów.

Biblioteka liczy z końcem roku szkolnego 1885 — 720 dzieł — w 1080 tomach.

W ubiegłym roku pomnożyła się biblioteka o następujące dzieła:

Nr. 704. Zaleska. Przygody myśliwskie w południowej Afryce. Warszawa 1884. Gebethner. 705. Wyprawa Stanleya do środkowej Afryki. Kraków. Himmelblau. 706. Dr. Antoni J. Opowiadania historyczne. Lwów 1885. Gubrynowicz. 707. Dr. Antoni J. Opowiadania historyczne. Serya trzecia, 2 tomy. Warszawa 1882. Gebethner. 708. Dr. Antoni J. Nowe opowiadania historyczne. Lwów 1883. Gubrynowicz. 709. Dr. Antoni J. Opowiadania. Serya czwarta, 2 tomy. Warszawa 1884. Gebethner. 710. Pisma Henryka Sienkiewicza. 5 tomów. Warszawa. Gebether. 711. J. Bronikowski. Jan trzeci i dwór jego. 2 tomy. Lwów 1883. Gubrynowicz. 712. Henryk Rzewuski. Rycerz Lizdejko. Warszawa 1879. Lewental. 703. Henryk Rzewuski. Adam Śmigielski. Warszawa 1882. Lewental. 704. Verne. Juliusz. Dom parowy. 2 tomy. Lwów 1882. Łukaszewicz. 705. Antoni Rehmann. Echa z południowej Afryki. Lwów 1884. Gubrynowicz. 706. Baranowski Bolesław. Kraszewski Józef Ignacy, jego życie i zasługi. Lwów 1879. Tow. pedag. 707. Sawczyński Zygmunt. Wasyngton Benjamin. Lwów 1876. Tow. pedag. 708. Starkel Juliusz. Zacni ludzie, ich pożycie, rozmowy, listy i nauki. Lwów 1874. Wildt. 709. Verne Juliusz. Dzieci kapitana Grandta. 3 tomy. Warszawa 1877. Sikorski. 720. Łoziński Władysław. Skarb Watażki. Warszawa 1875. Gebethner.

Biblioteka książek szkolnych do użytku uczącej się ubogiej młodzieży liczy 670 tomów rozmaitych podręczników i szkolnych dzieł pomocniczych.

B. Inne środki naukowe.

1. Dla geografii i historyi:

a) globów 3, *b)* atlasów geograficznych 2, historyczny 1, w dwóch egzemplarzach, *c)* map ściennych i geograficznych 75, w 98 egzemplarzach.

W roku 1884 zakupiono: Nr. 74. Letoschek Tableau. 75. Chavanne Afrika. 76. Handtke. Östliche Halbkugel. 77. Westliche Halbkugel. 78. Arendt. Europäisches Russland.

2. Gabinet dla geometryi wykreślnej:

Gabinet posiada do nauki geometryi wykreślnej i rysunku geometrycznego 269 wzorów i modelów.

3. Gabinet dla rysunków odręcznych:

Modeli 225, wzorów 3075. W ubiegłym roku zakupiono 42 modeli.

4. *Gabinet przyrodniczy posiada:*

a) do zoologii: α) okazów 677, β) szkieletów 62, γ) pudełek z owadami 9, δ) obrazów 89.

b) do botaniki: α) zielnik składający się z 61 fascykułów roślin zasuszonych, β) owoców 13, γ) przekrojów drzew 58, δ) modeli kwiatów 13, ε) obrazów 74.

c) do mineralogii i geologii: α) okazów 2382, β) modeli krystalograficznych 193, γ) obrazów geologicznych 10.

5. *Gabinet fizykalny:*

Z końcem roku szkolnego 1884 posiadał gabinet 389 przyrządów i kilkanaście tablic ściennych. W roku 1885 przybyło:

Z daru ś. p. Kazimierza Twardowskiego:

1. Aparat fotograficzny Nr. 506 z dwoma objektywami. 2. Aparat fotograficzny podróżny. Nr. 1479 z objektywem z fabryki Hermagis i z objektywem Voigtländera. 3. Wszelkie przybory do fotografii. 4. Baterye Calana, Buf-Bunsena, Greneta i Leclaunch'a. 5. Machina elektryczna Holtza. 6. 3 przyrządy indukcyjne. 7. Model machiny dynamoelektrycznej Edisona. 8. 2 regulatory ręczne do lamp elektrycznych łukowych. 9. Lampa elektryczna Dubosqua. 10. Lampa elektryczna Twardowskiego z pracowni Hauckego. 11. 3 lampki elektryczne żarowe. 12. Rurki geislerowskie. 13. Model machiny parowej. 14. Maszynka centryfugalna. 15. Termometer, psychrometer, areometry, libella. 16. 2 busole. 17. 3 magnesy. 18. Model oka ludzkiego. 19. Mikroskop z preparatami. 20. Przyrząd projekcyjny z mikroskopem oświecony światłem Drumonda ze wszelkimi przyboram.i

6. *Gabinet chemiczny:*

Z końcem roku szkolnego 1884 posiadał gabinet 178 przyrządów i kilkadziesiąt tablic ściennych. W r. 1885 zakupiono kilka drobniejszych przyborów szklannych lub porcelanowych i otrzymano:

Z daru ś. p. Kazimierza Twardowskiego:

55 chemikaljów. 55 sztuk drobniejszych przyborów szklannych lub porcelanowych. Lampa gazolinowa. Lampa do światła magneziowego. 2 lampy spirytusowe.

Przyrządy do wytwarzania światła Drumonda: *a)* Retorty do wytwarzania tlenu, *b)* Worek kauczukowy do zbierania tlenu wraz z ciężarami, *c)* Balon szklanny do wytwarzania wodoru z cynku, *d)* 2 balony blaszane do zbierania wodoru, *e)* Kruczek Daniela, *f)* Zegarowy przyrząd do regulowania walców kredowych. 3 wagi z ciężarkami.

V.

Ważniejsze rozporządzenia władz szkolnych

w ciągu roku szkolnego 1884/5.

Okólnik c. k. R. sz. k. z dnia 18 sierpnia 1884 L. 7536 względem zmian w egzaminach wstępnych uczniów I klasy szkół średnich.

Okólnik c. k. R. sz. k. z dnia 20 sierpnia 1884 L. 10811 zalicza książkę: „Fizyka dla niższych szkół gimnazyalnych i realnych, napisał Dr. Czesław Rodecki. Wydanie trzecie. Lwów. Nakładem księgarni Gubrynowicza i Schmidta 1883“ — w poczet książek dozwolonych do użytku szkolnego.

Okólnik c. k. R. sz. k. z dnia 20 sierpnia 1884 zalicza książki: „Nauka fizyki. Podręcznik dls niższych klas gimnazyów i szkół realnych, ułożył J. Soleski. 1884 dla klas niższych szkół średnich“ i „Zarys chemii dla użytku szkół gimnazyalnych, ułożył Dr. A Freund. 1883“ — w poczet książek dozwolonych do użytku szkolnego.

Rozporządzenie Prezydyum c. k. Rady sz. k. z dnia 29 sierpnia 1884 L. 245 przydziela profesora szkoły realnej Jarosławskiej Dr. Placyda Dziwińskiego do tutejszego zakładu, a profesora Józefa Soleskiego do gimnazyum II we Lwowie.

Okólnik c. k. R. sz. k. z dnia 24 września 1884 L. 12482 zalicza książkę: „Istorya chrystyańsko-katołyckoi cerkwy dla gimnazyj i szkół realnych. Z uczebnyka Dr. Wapplera perewiw A Stefanowycz. Lwów 1884“ w poczet książek szkolnych.

Rozporządzenie c. k. R. sz. k. z dnia 30 grudnia 1884 L. 17454 mianuje Fryderyka Lachnera, egzaminowanego kandydata stanu nauczycielskiego, bezpłatnym aplikantem w tutejszym zakładzie.

Okólnik c. k. R. sz. k. z dnia 18 kwietnia 1885, zaleca atlas geograficzny „Tramplers. Mittelschulatlas“. Grosse Ausgabe in 51 Karten. Wien 1883, do bibliotek szkół średnich.

Rozporządzenie c. k. Ministerstwa Oświaty z dnia 28 kwietnia 1885 L. 4699 przenosi prof Ferdynanda Resenbuscha na własną prośbę w stały stan spoczynku z końcem kwietnia 1885, z uznaniem wiernego spełnienia obowiązków w czasie służby.

Okólnik c. k. R. sz. k. z dnia 2 maja 1885 L. 15734 zalicza książkę prof. Dr. A. Lewickiego: „Zarys historyi Polski i krajów ruskich z nią połączonych. W Krakowie. Nakładem autora 1884“ w poczet książek dozwolonych do użytku szkolnego w klasach wyższych szkół średnich.

Rozporządzenie c. k. R. sz. k. z dnia 16 maja 1885 L. 5090, zezwala na zniżenie lekcyj szkolnych dla prof. Dr. Placyda Dziwińskiego do 10-ciu tygodniowo i poleca, aby resztę lekcyj po prof. Dziwińskim objął prof. Józef Soleski do końca b. r. sz.

Okólnik c. k. R. sz. k. z dnia 19 maja 1885 L. 16403, zalicza książkę: „Geometrya poglądowa dla użytku w klasach niższych szkół gimnazyalnych i realnych, napisał M. Jamrógiewicz. We Lwowie. Nakładem Tow. Pedag. 1884“ w poczet książek dozwolonych do użytku szkolnego w klasach niższych szkół średnich.

Okólnik c. k. R. sz. k. z dnia 19 maja 1885 L. 4130, zaleca książki wyszłe z wydawnictwa „Arcydzieła poetów polskich z objaśnieniami“ w r. 1884. I) Antoniego Malczewskiego „Marya“, wstępem, żywotem poety i objaśnieniami opatrzył Piotr Parylak. II) Juliusza Słowackiego „Ojciec zadżumionych“. Wstępem i objaśnieniami opatrzył Piotr Parylak. III. Jana Kochanowskiego „Treny“. Wstępem i objaśnieniami opatrzył Piotr Parylak. do biblioteki szkół średnich.

Okólnik c. k. R. sz. k. z dnia 13 czerwca 1885 L. 7689, zarządza obchodzenie dnia 3 maja (wigilia dnia śmierci Najjaśniejszej Cesarzowej Maryi Anny) jako dnia dworskiego t. zw. „Hof-Normatag“ i znosi dnie dworskie 1 marca i 8 lutego.

Rozporządzenie c. k. R. sz. k. z dnia 4 lipca 1885 L. 7293 poleca, aby ze względu na niezwykły a coraz bardziej wzmagający się upał, zamknięto bieżący rok szkolny z dniem 10 lipca b. r.

VI.

Statystyka uczniów.

A) Klasyfikacya uczniów.

Klasa	Ilość uczniów					Wynik klasyfikacyi w II. półroczu				
	zapisanych	którzy wystąpili wciągu r. sz.	publicznych	prywatnych	Razem	stopień I. z odszczególnieniem	stopień I.	stopień II.	stopień III.	przeznaczeni do egzaminu poprawczego
Ia	33	12	21	—	21	1	15	1	2	2
Ib	32	7	25	—	25	—	17	—	4	4
II	48	10	36	2	38	—	25	1	2	8
III	32	2	28	2	30	1	17	4	4	2
IV	30	2	27	1	28	—	16	2	2	7
V	29	5	24	—	24	1	16	3	1	3
VI	20	4	16	—	16	1	11	2	1	1
VII	14	1	13	—	13	—	8	2	—	3
Razem	238	43	190	5	195	4	125	15	16	30

B) Narodowość i wyznanie uczniów.

Klasa	Narodowość			Religia				Razem
	polska	ruska	niemiecka	rz. kat.	gr. kat.	protestancka	żydowska	
Ia	20	—	1	18	—	—	3	21
Ib	22	2	1	21	2	—	2	25
II	35	2	1	29	2	3	4	38
III	28	—	2	27	1	2	—	30
IV	25	2	1	24	2	1	1	28
V	23	—	1	19	—	2	3	24
VI	13	1	2	13	1	1	1	16
VII	13	—	—	11	—	—	2	13
Razem	179	7	9	162	8	9	16	195

C) Wiek uczniów.

Urodzeni w roku	Ilość	Urodzeni w roku	Ilość	Urodzeni w roku	Ilość
1874	7	1869	22	1864	3
1873	19	1868	25	1863	1
1872	25	1867	18	1860	2
1871	32	1866	13	Razem	195
1870	23	1865	5		

Czesne i stypendya.

Opłatę szkolną w I. półroczu uiściło uczniów 156
Uwolnionych od opłaty szkolnej w I. półroczu było uczniów . . 66
Opłatę szkolną w II. półroczu uiściło uczniów 113
Uwolnionych od opłaty szkolnej w II. półroczu było uczniów . 106

Czesne wynosiło w I. półroczu . . . . . . 1536 złr.
„ „ II. „ . . . . . . 1130 „
Taksy wstępne . . . . 168 „
Datki na środki naukowe . . . . 236 „
Z płaconego czesnego przypada dla gminy miasta Lwowa . 1333 „
Stypendja pobierało uczniów 7
Suma, którą uczniowie jako stypendja otrzymaii . . . 1092 złr.

VII.

Wykaz imienny uczniów podług lokacyi.

(Drukiem rozstrzelonym oznaczeni uczniowie otrzymali stopień pierwszy z wyszczeg.)

Klasa Ia.

1. Janicki Stanisław.
2. Daszyński Stanisław.
3. Hnatajko Edward.
4. Głodziński Gustaw.
5. Klaften Zygmunt.
6. Dudek Adolf.
7. Gryglewski Bogusław.
8. Boznański Władysław.
9. Czyżyk Stanisław.
10. Andraszek Karol.
11. Jestadt Franciszek.
12. Gawałkiewicz Ludwik.
13. Biloński Juliusz.
14. Czyżyk Bohdan.
15. Czerwiński Stanisław.
16. Kormann Jakób.

2 uczniom pozwolono składać egzamin poprawczy z jednego przedmiotu po wakacyach. Stopień drugi otrzymał 1 uczeń a stopień trzeci 2 uczniów.

Klasa Ib.

1. Kuźmiński Leon.
2. Wojtanowicz Stanisław.
3. Monita Józef.
4. Rondewal Roman.
5. Mondschein Wilhelm.
6. Ślezanowski Stanisław.
7. Południewski Franciszek.
8. Markowski Zygmunt.
9. Sidorowicz Kazimierz.
10. Łabowski Jan.
11. Röhring Adam.
12. Lignar Karol.
13. Neudeck Adolf.
14. Małuszyński Jan.
15. Śląski Ignacy.
16. Pannenka Kazimierz.
17. Towarnicki Stanisław.

Stopień trzeci otrzymało uczniów 4. Pozwolono składać egzamin poprawczy z jednego przedmiotu po wakacyach 4 uczniom.

Klasa II.

1. Gierynowicz Andrzej.
2. Makan Edward.
3. Kiselka Karol.
4. Bobrich Alfred.
5. Schamschula Aleksander.
6. Chudecki Kazimierz.
7. Waydowski Michał.
8. Nemetz Jan.
9. Mondschein Adolf.
10. Jurystowski Józef.
11. Lang Tadeusz.
12. Schor Max.
13. Giedroyć Tadeusz.
14. Rädler Otto.
15. Warchałowski Mieczysław.
16. Neusser Gustaw.
17. Czerwiński Józef.
18. Lickendorf Mścisław.
19. Langier Antoni.
20. Reh Hermann.
21. Zakrzewski Wincenty.
22. Adamski Zygmunt.
23. Kleczewski Jan.
24. Witkowski Tadeusz.
25. Hebenstreit Adam.

1 uczeń otrzymał stopień drugi, 2 stopień trzeci, 8 uczniów otrzymało pozwolenie poprawić egzamin z jednego przedmiotu po feryach.

Klasa III.

1. Pannenka Ludwik.
2. Adler Emil.
3. Zörner Józef.
4. Swierczyński Kazimierz.

5. Broeder Felix.
6. Link Karol.
7. Przystajko Józef.
8. Zawirski Jan.
9. Theimer Henryk.
10. Popowicz Józef.
11. Florkiewicz Maryan.
12. Miączyński Kazimierz.
13. Grzeżułka Kazimierz.
14. Potocki Mieczysław.
15. Dubik Stanisław.
16. Birkenmayer Ludwik.
17. Zagórski Mieczysław.
18. Orliński Michał.

2 uczniowie otrzymali pozwolenie poprawiania po feryach niedostateczną notę z jednego przedmiotu, 4 uczniowie otrzymali stopień drugi, 4. stopień trzeci.

Klasa IV.

1. Petzold Ludwik.
2. Kuschée Tadeusz.
3. Kossowski Tadeusz.
4. Grochowalski Kazimierz.
5. Waligórski Adam.
6. Pawłowski Dominik.
7. Mątkowski Karol.
8. Żytny Bronisław.
9. Majewski Benedykt.
10. Aleksandrowicz Stanisław.
11. Zinkiewicz Karol.
12. Ruebenbauer Karol.
13. Bujno Leonard.
14. Fedorowicz Eugeniusz.
15. Broniewski Alfred.
16. Zawadzki Zygmunt.

2 uczniów otrzymało stopień drugi, 2 stopień trzeci, 7 otrzymało pozwolenie poprawienia po feryach niedostatecznej noty z jednego przedmiotu.

Klasa V.

1. Bogucki Jan.
2. Uleniecki Stanisław.
3. Grotkowski Adam.
4. Bröder Edmund.
5. Salter Jakób.
6. Dyrdoń Józef.
7. Stebelski Faustyn.
8. Opolski Władysław.
9. Rauch Edward.
10. Kesselring Leopold.
11. Mondschein Max.
12. Żebrowski Tadeusz.
13. Bejnarowicz Stanisław.
14. Zakaszewski Witold.
15. Zaklika Stanisław.
16. Wątorski Stanisław.
17. Przygodzki Piotr.

2 uczniom pozwolono poprawić po feryach cenzurę niedostateczną w jednym przedmiocie. Drugi stopień otrzymało 3 uczniów, 1 uczeń otrzymał stopień trzeci.

Klasa VI.

1. Horwath Dyonizy.
2. Lang Stanisław.
3. Kleiner Izaak.
4. Pajgert Kornel.
5. Broniewski Mieczysław.
6. Bedronek Tadeusz.
7. Brzezicki Eustachy.
8. Müller Arnold.
9. Keller Ludwik.
10. Sokołowski Stanisław.
11. Schrimpf Eugeniusz.
12. Michel Alfred

Dwaj uczniowie otrzymali stopień drugi, 1 stopień trzeci. Jednemu uczniowi pozwolono poprawić niedostateczną cenzurę z jednego przedmiotu po wakacyach.

Klasa VII.

1. Biernacki Konstanty.
2. Misiakiewicz Julian.
3. Dębicki Ludwik.
4. Strohner Karol.

5. Rudnicki Ignacy.
6. Bejnarowicz Stanisław.
7. Ortner Kara.
8. Dubsky Józef.

3 uczniom pozwolono po wakacyach poprawiać złą notę z jednego przedmiotu, 2 otrzymało stopień drugi.

Wynik egzaminów dojrzałości
w roku szkolnym 1884/5.

Do poprawczych egzaminów dojrzałości we wrześniu 1884 zgłosiło się 5 abituryentów.

Świadectwo dojrzałości otrzymali:

1. Cypryan Emil.
2. Gończarczyk Antoni.
3. Mamczyński Adam.
4. Treter Stefan.

Jednego abituryenta reprobowano na pół roku.

Do egzaminów dojrzałości w marcu 1885 zgłosiło się 5 abituryentów.

Świadectwo dojrzałości otrzymali:

1. Bieńkowski Kazimierz.
2. Haczewski Kazimierz.
3. Körber Stanisław.
4. Krauss Florenty.

Jednego abituryenta cofnięto na pół roku.

Z końcem roku szkolnego 1884/5 przystąpiło do egzaminów dojrzałości 20 abituryentów, między tymi 7 externistów.

Uznano za dojrzałego z wyszczególnieniem abituryenta	1
Za dojrzałych uznano	11
Na 6 tygodni relegowano z jednego przedmiotu	6
Reprobowano na pół roku	1
„ „ rok	1

Świadectwo dojrzałości otrzymali:

1. **Biernacki Konstanty** z wyszczególnieniem.
2. Bejnarowicz Stanisław.
3. Dębicki Ludwik.
4. Dubsky Józef.
5. Misiakiewicz Julian.
6. Orthner Karol.
7. Rudnicki Ignacy.
8. Raszka Karol (extern.)
9. Strohner Karol.
10. Thumen Felix (extern.).
11. Żakiej Alexander.
12. Gębarzewski Dominik (extern.).

Temata przy piśmiennym egzaminie dojrzałości

z końcem roku szkolnego.

Zadanie polskie:

1. Jakie przewroty w przemyśle i handlu wywołało zastósowanie pary i elektryczności?

Zadanie niemieckie:

1. Tłumaczenie z języka polskiego na niemiecki ustępu: „Nowoczesne Termopile“.
2. Tłumaczenie z języka niemieckiego na polski ustępu: „Johann Gutenberg“.

Zadanie matematyczne:

1. Jakie wartości czynią zadość równaniu:

$$x^3 = 6 - 13\sqrt{-1}$$

2. Znaleść odległość sferyczną dwóch punktów na kuli ziemskiej, z których jeden *A* ma szerokość północną $43^0 28'$ a długość zachodnią $47^0 48'$; drugi *B* ma szerokość północną $59^0 37'$ a długość wschodnią $35^0 52'$.
3. Kapitał 100,000 złr. został wypożyczony na 4%. Dłużnik nie płacąc procentu przez 10 lat pragnie swój dług w następnych 20 latach równymi ratami umorzyć, jak wielkie będą raty płatne przy końcu każdego roku.
4. $3 \sin^2 x - 4 \cos^2 x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

Zadanie z geometryi wykreślnej:

1. Znaleść najkrótszą odległość dwóch wichrowatych prostych.
2. Wyszukać cień punktu na powierzchnię stożka przy danym kierunku światła.
3. Narysować w perspektywie czworościan o danej krawędzi.

Temata przy piśmiennym egzaminie dojrzałości
z końcem roku szkolnego.

Zadanie polskie:

1. Jakie przewroty w przemyśle i handlu wywołało zastósowanie pary i elektryczności?

Zadanie niemieckie:

1. Tłumaczenie z języka polskiego na niemiecki ustępu: „Nowoczesne Termopile".
2. Tłumaczenie z języka niemieckiego na polski ustępu: „Johann Gutenberg".

Zadanie matematyczne:

1. Jakie wartości czynią zadość równaniu:

$$x^3 = 6 - 13\sqrt{-1}$$

2. Znaleść odległość sferyczną dwóch punktów na kuli ziemskiej, z których jeden *A* ma szerokość północną $43^0 28'$ a długość zachodnią $47^0 48'$; drugi *B* ma szerokość północną $59^0 37'$ a długość wschodnią $35^0 52'$.
3. Kapitał 100,000 złr. został wypożyczony na $4^0/_0$. Dłużnik nie płacąc procentu przez 10 lat pragnie swój dług w następnych 20 latach równymi ratami umorzyć, jak wielkie będą raty płatne przy końcu każdego roku.
4. $3 \sin^2 x - 4 \cos^2 x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

Zadanie z geometryi wykreślnej:

1. Znaleść najkrótszą odległość dwóch wichrowatych prostych.
2. Wyszukać cień punktu na powierzchnię stożka przy danym kierunku światła.
3. Narysować w perspektywie czworościan o danej krawędzi.

W lipcu odbyły się egzamina dojrzałości abituryentów zakładu, a mianowicie od 1—5 pisemne, a od 9—11 ustne. Liczbę abituryentów i wynik egzaminów dojrzałości wykazuje poprzedni rozdział.

Do Sakramentu Pokuty przystępowała młodzież szkolna, jak co roku, trzy razy: na początku roku szkolnego, w ciągu wielkiego postu i przed wakacyami, w wielkim zaś tygodniu odbywały się przepisane rozporządzeniem wys. Ministerstwa rekolekcyjne nauki wielkanocne przez pierwsze trzy dni wielkiego tygodnia.

Zakończenie roku szkolnego i rozdanie świadectw z drugiego półrocza nastąpiło po uroczystem nabożeństwie z odśpiewaniem „Hymnu ludu" w tym roku wyjątkowo już dnia 10. lipca.

Stan zdrowia w zakładzie był w tym roku szkolnym, pomimo chorób epidemicznych we Lwowie panujących, dosyć pomyślny. Śmierć wydarła zakładowi dwóch uczniów pilnych: Żywczaka Władysława z klasy IV. i Rzehaka Bronisława z I. klasy; których młodzież szkolna z nauczycielami odprowadziła na miejsce wiecznego spoczynku.

IX.

Warunki przyjęcia ucznia do zakładu na przyszły rok szkolny 1885/6.

Zapisy uczniów do zakładu odbędą się w dniach 30. i 31. sierpnia 1885 roku od godziny 8. — 12. przed południem w kancelaryi dyrekcyi.

Każdy nowo wstępujący do zakładu uczeń powinien zgłosić się w oznaczonym czasie w towarzystwie ojca, matki lub ich upoważnionego zastępcy, wykazać metryką chrztu lub urodzenia, że ukończył przynajmniej 10. rok wieku, a jeśli uczęszczał przedtem do szkół publicznych, przedłożyć także świadectwo szkolne z ostatniego półrocza. Zarazem obowiązany jest uczeń złożyć przy zapisie 2 złr. 10 ct. jako taksę wstępną, i przynajmniej 1 złr. w. a. na środki naukowe, które to pieniądze, w razie niezłożenia egzaminu wstępnego, będą zwrócone.

Uczniowie, wstępujący do I. klasy, muszą dnia 1 września 1885, poddać się pisemnemu, a w następnych dniach ustnemu egzaminowi wstępnemu, przyczem wymagana będzie od nich prócz religii, znajomość elementarna języka polskiego i niemieckiego, tudzież należyta biegłość w czterech działaniach arytmetycznych.

Uczniowie, wstępujący do klas wyższych, muszą również, jeżeli nie przychodzą z istniejących c. k. wyższych szkół realnych, zdawać egzamin wstępny za złożeniem taksy egzaminacyjnej w kwocie 12 zł., a dopiero od wyniku tego egzaminu zależeć będzie, do której klasy zakładu tutejszego mogą być przyjęci. Prócz tego musi każdy nowo wstępujący uczeń, jeżeli przychodzi do tego zakładu z gimnazyum lub innej c. k. wyższej szkoły realnej, wykazać się nie tylko świadectwem szkolnem z ostatniego półrocza, ale także potwierdzeniem Dyrekcyi dotyczącego zakładu naukowego, że przyjęciu jego do innego zakładu naukowego nic nie stoi na przeszkodzie. Egzamina wstępne tych uczniów odbywać się będą w pierwszych dniach września.

Zgłaszający się do zapisu kandydaci, którzy przedtem do żadnej szkoły publicznej nie uczęszczali, lub od dłuższego czasu uczęszczać przestali, muszą wykazać dokumentem legalnym, gdzie i czem zajmowali się dotychczas, i że co do ich moralności nie zachodzi żadna wątpliwość.

Nakoniec uczniowie tutejszego zakładu, którzy chcą przejść do klasy wyższej, muszą również z rodzicami, opiekunem lub ich zastępcą zgłosić się do zapisu w oznaczonym czasie. Ci uczniowie nie płacą już taksy wstępnej, ale obowiązani są złożyć przy zapisie przynajmniej 1 złr. na środki naukowe.

X.

Najgłówniejsze przepisy szkolne.

1. Każdy uczeń tego zakładu jest obowiązany, wszelkie rozporządzenia, wychodzące z dyrekcyi zakładu, jak najściślej wypełniać i każdemu członkowi grona nauczycielskiego zawsze i wszędzie należytą cześć okazać.

2. Salę naukową otwiera się na 10 minut przed rozpoczęciem nauki. Przez ten czas powinni wszyscy uczniowie z należytą przyzwoitością w swojej klasie gromadzić się, zająć niezwłocznie przeznaczone dla siebie miejsca i spokojnie oczekiwać rozpoczęcia wykładu. Włóczenie się po kurytarzach, hałasowanie w klasie, jakoteż spóźnianie się na godziny wykładowe podlega karze.

3. Na godziny wykładowe powinien uczeń przynosić wszelkie przepisane książki, zeszyty i inne przedmioty naukowe, ale nadto nic więcej; przynoszenie przedmiotów, nie mających żadnego związku z nauką szkolną, jest zabronione.

4. Podczas wykładu może być uczeń wywołany z klasy tylko w naglących wypadkach, i to za pozwoleniem dyrekcyi. Uczniowie, wypukujący kolegów z klasy, będą karani.

5. Wychodzenie ze szkoły w ciągu nauki może być dozwolone tylko w naglących wypadkach.

6. Skupianie się i wałęsanie po kurytarzach podczas zmiany godzin jest surowo zakazane.

7. Wszelkie naruszanie, psucie lub zanieczyszczanie lokalów i sprzętów szkolnych, jako też środków naukowych, jest jak najsurowiej zabronione; wykraczający nie tylko obowiązany jest wynagrodzić szkodę, ale nadto podpada karze w miarę swego przewinienia. Jeżeli sprawcy szkody wykryć nie można, natenczas muszą wszyscy uczniowie tej klasy, w której szkoda wyrządzona została, ponieść koszta naprawy uszkodzonego przedmiotu, albo też sprawienia nowego.

8. Po skończonej nauce w szkole mają uczniowie spokojnie i przyzwoicie udawać się do domu.

9. Także i po za obrębem szkoły powinno zachowanie się uczniów odpowiadać wymaganiom moralności i przyzwoitości.

10. W obcowaniu ze sobą powinni uczniowie postępować uprzejmie i grzecznie, mimowolne urazy wzajemnie sobie przebaczać, rozmyślnych nie odpłacać zemstą, złe po bratersku odradzać, do dobrego radą i przykładem się zachęcać.

11. Wszelkiego rodzaju darowizny, sprzedaże lub frymarki pieniężne, jakoteż urządzanie loteryi w szkole, są zakazane.

12. Urządzanie składek pieniężnych pomiędzy uczniami na jakie bądź cele prywatne, na upominki dla członków grona nauczycielskiego i t. p., nie są dozwolone; składki na cele publiczne mogą być urządzane tylko za wyraźnem pozwoleniem Wys. Rady szkolnej.

13. Żaden uczeń nie może ani jako członek, ani jako słuchacz brać udziału w jakichkolwiek stowarzyszeniach, nie wolno też uczniom zawiązywać żadnych stowarzyszeń między sobą.

14. Schadzki i zgromadzenia uczniów w znaczniejszej liczbie na ćwiczenia naukowe lub zabawy, mogą się odbywać tylko za pozwoleniem i pod dozorem grona nauczycielskiego.

15. Nie wolno uczniom bez szczególnego pozwolenia swoich nauczycieli występować publicznie z pracami literackimi, także nie mogą oni brać udziału w przedstawieniach publicznych.

16. Odwiedzanie miejsc publicznych, jako to: restauracyj, cukierni, kawiarni i t. p., tudzież uczęszczanie do teatru i na inne przedstawienia

publiczne, dozwolone jest tylko w towarzystwie rodziców lub ich zastępców; także palenie tytoniu, jako nieodpowiedne ani wiekowi, ani stosunkom, ani też celom naukowym uczniów, jest stanowczo zabronione, i wszelkie wykroczenia w tym względzie będą surowo karane.

17. Uczeń obowiązany jest uczęszczać bez przerwy do szkoły. W razie ważnej przeszkody powinien za przedłożeniem pisemnej prośby ze strony ojca lub jego zastępcy wyjednać sobie na krótki czas uwolnienie od gospodarza klasy, na kilkudniowy zaś przeciąg czasu od dyrektora.

18. Wypadki słabości lub inne nieprzewidziane przeszkody mają być w przeciągu 24 godzin ustnie lub pisemnie oznajmione gospodarzowi klasy; za przybyciem zaś nanowo do szkoły powinien uczeń w każdym razie wykazać wiarygodnem pisemnem świadectwem powód i czas swojej nieobecności. Ośmiodniowa, żadnem poprzedzającem zawiadomieniem nieusprawiedliwiona nieobecność w szkole, będzie uważana za dobrowolne wystąpienie z zakładu, i nastąpi wymazanie ucznia z katalogu. O wystąpieniu z zakładu ma każdy uczeń zawiadomić dyrekcyę i gospodarza klasy.

19. Rodzice lub opiekunowie uczniów z prowincyi powinnie ustnie lub pisemnie zawiadomić dyrekcyę, gdzie ucznia umieścili i na kogo zdali obowiązki i prawa domowego nadzoru z taką odpowiedzialnością wobec zakładu, jaka ciąży na nich samych. Również musi być oznajmiona Dyrektorowi lub gospodarzowi klasy każda zmiana tego nadzoru; gronu zaś nauczycielskiemu przysłuża prawo w takim razie, jeżeli nadzór domowy z słusznych powodów uważa za nieodpowiedni lub szkodliwy dla ucznia, żądać wyboru innego nadzorcy, a w razie oporu ze strony rodziców lub opiekunów, przedłożyć krajowej władzy szkolnej wniosek o wykluczenie dotyczącego ucznia z zakładu.

20. Tylko rodzice, opiekunowie lub odpowiedni ich zastępcy mogą w ciągu roku szkolnego zasięgać u nauczycieli wiadomości o postępie i zachowaniu się uczniów. Tak zwani instruktorowie prywatni muszą mieć do tego wyraźne pisemne upoważnienie ze strony rodziców lub opiekunów.

21. Wszelkie przekroczenie tych przepisów szkolnych pociąga za sobą karę, która od prostego skarcenia stopniowana być może aż do wykluczenia ucznia ze wszystkich publicznych zakładów naukowych państwa Uczniowi, który uchyla się od poniesienia zasądzonej kary wystąpieniem z zakładu, nie będzie wydane świadectwo odejścia.