CHAPITRE XVII.

Des Voûtes ellipsoïdes, des Voûtes paraboloïdes et autres, à surface de révolution, l'axe de rotation étant horizontal.

DES VOUTES ELLIPSOÏDES.

L'intrados des voûtes ellipsoïdes est une demi-surface de même nom (voyez la définition du n°. 223), concave en dessous. Ces sortes de voûtes s'exécutent dans les salles cylindriques elliptiques. Leur naissance est une ellipse située dans un plan horizontal, ce qui est une suite nécessaire de la définition du n°. 223. La meilleure manière de disposer les assises des voûtes ellipsoïdes, est de les comprendre entre des plans horizontaux. Nous avons dit que toute section faite dans une ellipse par un plan non perpendiculaire à l'axe de rotation était une ellipse; j'ajoute maintenant que toutes les sections faites par des plans parallèles sont des ellipses semblables; d'où il suit, et de ce que les assises des voûtes ellipsoïdes sont comprises entre des plans horizontaux, que les arrêtes des douëlles de ces sortes de voûtes sont des ellipses semblables, et en conséquence, les projections horizontales de ces mêmes arrêtes sont aussi des ellipses semblables, ayant toutes le même centre et les axes les uns sur les autres. On se rappelera d'ailleurs que toute section faite par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, de la surface d'intrados, est une circonférence de cercle. Cela posé, passons à un exemple de voûtes ellipsoïdes, et comme ces voûtes sont symétriques, ne donnons que le quart de l'épure.

388. Supposons que le quart d'ellipse AB (fig. 302) soit le quart de la projection horizontale de l'ellipse de naissance de l'intrados de la voûte ellipsoïde en question; que la droite ZB, qui est le demi-grand axe du quart d'ellipse AB (voyez les numéros 48 et 49), soit la projection horizontale du demi-axe de rotation de la surface d'intrados de la voûte; que les droites quelconques HP, KN, respectivement parallèles aux demi-axes AZ, BZ du quart d'ellipse AB, soient les lignes de terre de deux plans de projections verticales, et que ces lignes de terre soient les traces

verticales du plan horizontal qui passe par la naissance de la voûte. Cela posé, imaginons un plan vertical élevé sur le demi-petit axe AZ; ce plan rencontrera l'intrados de la voûte, de manière que l'intersection sera une demi-circonférence de cercle, dont le rayon sera égal au demi-petit axe AZ. Par la projection verticale P de l'axe de rotation, comme centre, et avec un rayon PF égal au demi-petit axe AZ, on décrira la projection verticale FG de la moitié de cette intersection. On imaginera, de plus, un plan vertical passant par l'axe de rotation BZ, qui rencontrera l'intrados de la voûte, de manière que l'intersection sera la demi-ellipse génératrice de cette surface (laquelle génératrice est égale à la moitié de l'ellipse de naissance) et on décrira la projection verticale LM de la moitié de cette intersection. Cela fait, on divisera le quart de cercle FG en autant de parties égales qu'on voudra avoir d'assises de voussoirs, en observant une demi-division TG au sommet G; par les points de division Q, R, S et T, on menera les droites QQ^2, RR^2, SS^2 et TT^2 parallèles à la ligne de terre HP, lesquelles seront les projections verticales des arrêtes des douelles de la voûte. Par les mêmes points de division Q, R, S, T, on abaissera les droites QQ^4, RR^4, SS^4, TT^4, à la ligne de terre HP, qui rencontreront le demi-petit axe AZ aux points Q^4, R^4, S^4, T^4, par lesquels, parallèlement à la droite AB, qui joint les extrémités des demi-axes AZ, BZ, on menera les droites Q^4U^4, R^4V^4, S^4X^4, T^4Y^4, qui rencontreront le demi-grand axe BZ aux points U^4, V^4, X^4, Y^4, par lesquels on élevera, à la ligne de terre KN, les perpendiculaires U^4U, V^4V, X^4X, Y^4Y, qui rencontreront le quart d'ellipse LM aux point U, V, X, Y, par lesquels on menera, parallèlement à la ligne de terre KN, les droites UU^2, VV^2, XX^2, YY^2, qui seront les secondes projections verticales des arrêtes des douelles de la voûte. On aurait pu avoir les mêmes projections verticales, en faisant les hauteurs KU^2, KV^2, KX^2, KY^2, respectivement égales aux hauteurs PQ^2, PR^2, PS^2, PT^2, et en menant, par les points U^2, V^2, X^2, Y^2, les droites U^2U, V^2V, X^2X, Y^2Y. On se servira de l'un de ces deux moyens pour servir de preuve à l'autre. Les distances ZQ^4, ZR^4, ZS^4, ZT^4, seront les demi-petits axes, et les distances ZU^4, ZV^4, ZX^4, ZY^4, les demi-grands axes successifs des quarts d'ellipses Q^4U^4, R^4V^4, S^4X^4, T^4Y^4, qui seront les projections horizontales des arrêtes des douelles, et que l'on décrira par la méthode des rayons vecteurs (n°. 49).

Pour avoir les projections horizontales et verticales des extrémités des coupes, il faut d'abord convenir de la forme d'extrados qu'on veut donner à la voûte (nous supposons ici que cet extrados est une demi-surface ellipsoïde semblable à l'intrados), et ensuite, le meilleur moyen consiste à mener des normales à chacune des courbes FG, LM, par les points Q, R, S, T et U, V, X, Y, où les projections verticales des arrêtes des douëlles rencontrent ces mêmes courbes FG, LM, et l'on prolongera ces normales jusqu'à leur rencontre en Q', R', S', T', et U', V', X', Y', avec les courbes d'extrados HI, NO. Puis, par les points Q', R', S', T', on menera, à la ligne de terre HP, les parallèles $Q'Q^3$, $R'R^3$, $S'S^3$, $T'T^3$, et on supposera des plans (qui seront inclinés) menés respectivement par les droites dont les projections verticales sont les droites $Q'Q^3$, $R'R^3$, $S'S^3$, $T'T^3$ et dont la projection horizontale commune est la droite DZ, et par les points successifs dont les projections verticales sont les points U', V', X', Y'. La surface d'extrados étant une ellipsoïde, les intersections de ces plans avec cet extrados seront des ellipses que nous prendrons pour être les arrêtes supérieures des coupes. Les surfaces des coupes seront ensuite engendrées par une ligne droite qui glissera à la fois sur les arrêtes des douëlles et sur celles des coupes, de manière que cette droite génératrice prolongée glissera autour d'une verticale élevée par le centre de la voûte. Maintenant rien n'est plus facile que d'avoir les projections des arrêtes supérieures de ces coupes; d'abord pour en avoir les projections horizontales (qui sont des ellipses non semblables à celles des arrêtes des douëlles), par les points Q', R', S', T', on abaissera, à la ligne de terre HP, les perpendiculaires $Q'Q^6$, $R'A$, $S'S^6$, $T'T^6$, qui rencontreront le demi-petit axe AZ aux points Q^6, A, S^6, T^6, et les distances de ces points au centre Z seront les demi-petits axes des ellipses qui sont les projections demandées. Par les points U', V', X', Y', on abaissera, à la ligne de terre KN, les perpendiculaires $U'U^6$, $V'U^4$, $X'i$, $Y'Y^6$, qui rencontreront le demi-grand axe BZ aux points U^6, U^4, i, Y^6, et les distances de ces points au centre Z seront les demi-grands axes des mêmes projections demandées Q^6U^6, AU^4, S^6i, T^6Y^3, que l'on décrira par la méthode des rayons vecteurs.

Pour avoir les projections verticales des mêmes extrémités de coupes, dans le plan de projection, dont la ligne de terre est la droite KN, il suffira de faire les hauteurs KU^3, KV^3, KX^3, KY^3, respectivement égales aux hauteurs PQ^3, PR^3, PS^3, PT^3, et de mener, par les points U' et U^3, V' et V^3, X' et X^3, Y' et Y^3 les droites $U'U^3$, $V'V^3$, $X'X^3$, $Y'Y^3$, qui seront les projections demandées. On pourrait demander aussi les projections verticales des mêmes extrémités de coupes sur le plan de projection dont la ligne de terre est la droite HP, mais ces projections sont inutiles.

Ayant obtenu les projections horizontales et verticales des arrêtes des douëlles et des extrémités des coupes, on disposera convenablement les projections horizontales des joints par tête des voussoirs de chaque assise, soit en les dirigeant au centre Z, comme la droite vZ, soit en les dirigeant de manière qu'elles soient normales à la projection horizontale de l'intersection d'un plan horizontal mené au milieu de chaque assise, ainsi que les droites m^4m^5, $m^{10}m^3$, et l'ellipse m^6m^8 l'indiquent dans l'épure, à laquelle ellipse la droite v^2c est normale. D'ailleurs, on observera que les voussoirs des assises successives soient en liaison les uns sur les autres.

Comme la surface d'intrados des voûtes ellipsoïdes change de courbure d'un point à l'autre, il faut un panneau de tête pour chaque tête de chaque voussoir, et de plus, plusieurs cerces intermédiaires pour être appliquées dans la douëlle, à des distances déterminées, entre les joints par tête. Ainsi, il faut que nous donnions le moyen d'avoir ces panneaux de tête et ces cerces, ce qui revient à donner le moyen d'avoir la section faite dans la voûte, par un plan vertical dirigé comme on voudra.

389. Supposons d'abord, que le plan vertical, en question, soit élevé sur une droite quelconque vZ, tendante au centre Z. Pour avoir la section faite par ce plan dans la voûte, on opérera de la manière suivante :

Premier moyen. Par les points r,s,t,u,Z, où la droite vZ rencontre les projections horizontales des arrêtes des douëlles, on élevera, à cette droite vZ, les perpendiculaires rr^2, ss^2, tt^2, uu^2, et ZZ', que l'on fera respectivement égales aux ordonnées Q^5Q, R^5R, S^5S, T^5T, PG, et par les points q,r^2,s^2,t^2,u^2,Z', on fera passer la courbe $qr^2s^2t^2u^2Z^2$, qui sera l'intersection du plan vertical en question avec l'intrados de la voûte. Pour avoir l'intersection du même plan avec l'extrados, par les points x,y,z,w, où la droite vZ rencontre les projections horizontales des arrêtes supérieures des coupes, on élevera, à la ligne de terre KN, les perpendiculaires xx', yy', zz', ww', qui rencontreront les projections verticales $U'U^3$, $V'V^3$, $X'X^3$, $Y'Y^3$, aux points x', y', z', w'; par les mêmes points x, y, z, w, on élevera les perpendiculaires xx^2, yy^2, zz^2, ww^2, que l'on fera respectivement égales aux hauteurs x^6x', y^6y', z^6z', w^6w', et par les points v,x^2,y^2,z^2,w^2,Z^2, on fera passer la courbe vy^2Z^2, qui sera l'intersection demandée. Pour avoir les intersections du plan vertical élevé sur la même droite vZ, avec les surfaces des coupes, il suffira de joindre les points r^2 et x^2, s^2 et y^2, t^2 et z^2, u^2 et w^2, par les droites r^2x^2, s^2y^2, t^2z^2, u^2w^2, qui seront les intersections demandées.

Second moyen. Comme les courbes qs^2Z', vy^2Z^2 sont des quarts d'ellipses, on pourra les décrire par la méthode des rayons vecteurs, en prenant pour demi-axes, les droites Zq, Zv, et les droites ZZ', ZZ^2, qui sont respectivement égales à PG, PI; ensuite, on élevera des perpendiculaires, à la droite vZ, par les points où cette droite vZ rencontre les projections horizontales des arrêtes des douëlles et des extrémités des coupes, comme par l'autre moyen, lesquelles rencontreront les courbes qs^2Z', vy^2Z^2, en des points respectifs qu'on joindra par des droites qui seront les intersections du plan vertical en question, avec les surfaces des coupes.

Supposons maintenant que la trace horizontale v^2c, du plan vertical qui coupe la voûte, au lieu de passer par le centre Z, soit dirigée d'une manière quelconque.

On pourra exactement suivre le premier moyen que nous avons donné pour le cas où le plan en question passait par le centre, avec cette différence, que l'*ordonnée*, dont le pied c est sur l'axe de rotation, ne sera plus égale au demi-petit axe de l'ellipse génératrice, tant pour l'intrados, que pour l'extrados. Pour avoir cette ordonnée, par le point c on menera une perpendiculaire cc^2 à l'axe BZ, et les distances ca, cc^2 seront les ordonnées qui répondent au point c : l'une sera pour l'intrados et l'autre pour l'extrados.

Pour ne pas embrouiller l'épure, on déterminera à part la section faite dans la voûte par le plan vertical, en transportant les abscisses cu^3, ct^3, cs^3, cr^3, cq^3, relatives à l'intrados, sur la droite v^2c (fig. 303) de c en u^3, de c en t^3, de c en s^3, et de c en q^3; en faisant les ordonnées cc', u^3u^4, t^3t^4, s^3s^4, r^3r^4 (fig. 303), respectivement égales aux ordonnées ca, T^5T, S^5S, R^5R, Q^5Q (fig. 302); en faisant les abscisses cw^3, cz^3, cy^3, cx^3 et cv^2 (fig. 303), relatives à l'extrados, respectivement égales aux distances cw^3, cz^3, cy^3, cx^3, et cv^2 (fig. 302), et en faisant les ordonnées cc^2, w^3w^4, z^3z^4, y^3y^4, x^3x^4 (fig. 303), respectivement égales aux hauteurs cc^2, w^5w^4, z^5z^4, y^5y^4, x^5x^4 (fig 302).

Dans ce cas les coupes r^4x^4, s^4y^4, t^4z^4, u^4w^4 (fig. 303), ne sont pas des lignes droites, mais des lignes courbes si peu différentes de la ligne droite, qu'il est inutile d'avoir égard à cette différence. Si on voulait y avoir égard, il faudrait prendre des points intermédiaires dans les coupes QQ', RR', etc. et UU', VV', etc. (fig. 302), de sorte que les coupes correspondantes se trouvassent divisées de la même manière par ces points intermédiaires, et ensuite opérer sur ces points, comme nous l'avons fait sur les extrémités des coupes Q' et U', R' et V', etc.

On pourrait encore avoir la section faite dans la voûte par le plan vertical élevé sur la droite v^2c, en employant la méthode des rayons vecteurs, mais le premier moyen est préférable.

Pour tracer les vousssoirs des voûtes ellipsoïdes, on levera, pour chacun d'eux, un panneau de projection horizontale; on équarrira une pierre au moyen de ce panneau, comme à l'ordinaire, on levera, ensuite, un panneau de tête pour chaque tête du voussoir, dans la section faite dans la voûte par le plan vertical qui passera par chaque tête du voussoir, et on appliquera convenablement ces panneaux sur la pierre; puis, on taillera les coupes et on creusera la douëlle, au moyen de plusieurs cerces intermédiaires, que l'on appliquera de manière qu'elles touchent les arrêtes de la douëlle par des points convenablement déterminés sur ces mêmes arrêtes. Ainsi, par exemple, s'il s'agissait du voussoir dont la projection horizontale est X^4tyU^4, après avoir équarri une pierre $X^4tyU^4UX^2t'y'$ (fig. 304) au panneau de projection horizontale X^4tyU^4 (fig. 302), on levera les panneaux de tête $VXX'V'$, $s^2t^2z^2y^2$, qui répondent aux joints par tête de ce voussoir, que l'on appliquera, le premier sur la tête $U^4X^4X^2U$ (fig. 304), et le second sur la tête $tyy't'$, et on tracera, sur ces têtes, les figures $V^4XX'V'$, $st^2z^2y^2$. Pour bien appliquer ces panneaux de tête, on fera les distances X^4V^4, ts (fig. 304), respectivement égales à X^4V^4, ts (fig. 302), et les hauteurs X^4X, tt^2 (fig. 304), chacune égale à V^2X^2 (fig. 302), et en appliquant le panneau de tête $U^4XX'V'$ (fig. 304), on fera coïncider les sommets de ce panneau qui répondent aux arrêtes de la douëlle, avec les points V^4, X; on aura la même attention en appliquant le panneau de l'autre tête du voussoir. Après avoir tracé les têtes de la pierre avec précision, avec une règle bien flexible, on tracera l'arrête supérieure Xt^2, de la douëlle, et l'arrête $V'y^2$ de la coupe inférieure. Pour tracer l'arrête inférieure V^4s de la douëlle, on se servira de la cerce V^4s (fig. 302); et pour tracer l'arrête $X'z^2$ (fig. 304) de la coupe supérieure, on fera d'abord une partie du plan qui passe par les droites UX^2, y^3t^3, et on se servira ensuite de la cerce iz (fig. 302). A la rigueur, au lieu de la cerce iz, il faudrait la cerce correspondante prise dans l'ellipse même qui est située dans le plan incliné qui passe par la droite $X'X^3$; mais l'inclinaison de ce plan n'est pas assez considérable pour que la cerce diffère, de la véritable, d'une manière sensible. Au reste, si l'on voulait l'ellipse qui donne la véritable cerce, on la décrirait, à part, sur des axes dont les moitiés seraient égales aux distances ZS^6, $X'X^3$. Je ne crois pas avoir besoin d'expliquer comment on doit appliquer sur la pierre, et où il faut prendre les cerces intermédiaires qui doivent servir à creuser avec précision la douëlle du voussoir en question.

DES VOUTES PARABOLOÏDES.

390. Les voûtes paraboloïdes sont celles dont l'intrados est une demi-surface, de même nom, concave en dessous. La manière de tracer les épures de

ces sortes de voûtes est tout-à-fait semblable à celle que nous venons d'expliquer pour les voûtes ellipsoïdes. Toute la différence qu'il y a, c'est que les projections horizontales des arrêtes des douëlles, au lieu d'être des ellipses, sont des paraboles, dont on aura les sommets et les amplitudes comme on a eu les demi-axes des ellipses dans le cas précédent. Ensuite, on décrira toutes ces paraboles par le moyen du n°. 71. Quant aux projections horizontales des extrémités des coupes, elles sont des portions d'ellipses qu'on décrira de la manière qu'il sera dit ci-après.

On obtiendra les sections faites par des plans verticaux dans la voûte paraboloïde, parfaitement de la même manière que nous avons obtenu les mêmes choses dans les voûtes ellipsoïdes. La manière de tracer les voussoirs reste encore la même.

DES VOUTES QUELCONQUES, DONT L'INTRADOS EST UNE DEMI-SURFACE DE RÉVOLUTION, L'AXE DE ROTATION ÉTANT HORIZONTAL.

391. Quelle que soit la courbe génératrice, on opérera de la manière suivante :

Supposons que la droite BZ (fig. 302) soit la projection horizontale de l'axe de rotation, et que la courbe AB soit celle d'une portion de la courbe de naissance, qui est nécessairement égale à la courbe génératrice. Cela posé, on prendra deux lignes de terre, l'une HP, perpendiculaire, et l'autre KN parallèle à l'axe de rotation; puis, avec un rayon PF égal à ZA (la droite ZA étant perpendiculaire à ZB) et par la projection verticale P de l'axe de rotation, comme centre, on décrira le quart de cercle FG, qui sera la projection verticale de la moitié de la section faite dans la voûte, par un plan vertical élevé sur la droite AZ. On déterminera de même la projection verticale LM de la section faite par un plan vertical mené par l'axe de rotation, laquelle section LM ne sera autre chose que la courbe génératrice de la surface d'intrados. Cela fait, on divisera la courbe FG en autant de parties égales qu'on voudra avoir d'assises dans la voûte, comme à l'ordinaire; par les points de division Q, R, S, T, on menera, à la ligne de terre HP, les parallèles QQ^2, RR^2, SS^2, TT^2, qui seront les projections verticales des arrêtes des douëlles; on fera les hauteurs KU^2, KV^2, KX^2, KY^2, respectivement égales aux hauteurs PQ^2, PR^2, PS^2, PT^2, et par les points U^2, V^2, X^2, Y^2, on menera, à la ligne de terre KN, les parallèles U^2U, V^2V, X^2X, Y^2Y, qui seront les secondes projections verticales des arrêtes des douëlles. Par les points U, V, X, Y, où ces dernières droites rencontrent la courbe LM, on abaissera, à la ligne de terre KN, les perpendiculaires

UU^4, VV^4, XX^4, YY^4, qui rencontreront la droite BZ aux points U^4, V^4, X^4, Y^4, qui appartiendront aux projections horizontales des arrêtes des douëlles. Pour achever d'avoir ces dernières projections, on menera autant de droites ac, de, fg, hi, kl, mn, op, qu'on voudra, toutes perpendiculaires à la projection horizontale BZ de l'axe de rotation; par les points a, d, f, h, k, m, o, où ces droites rencontrent la courbe AB, on élevera, à la ligne de terre HP, les perpendiculaires aa', dd', ff', hh', kk', mm', oo'; par le point P, comme centre, et avec les rayons Pa', Pd', Pf', Ph', Pk', Pm', Po', on décrira des arcs de cercle, qui couperont les projections verticales QQ^2, RR^2, etc., en des points a^2, d^2, f^2, h^2, k^2, m^2, o^2, et ainsi des autres, par lesquels on abaissera, à la ligne de terre HP, les perpendiculaires QQ^4, a^2a^3, d^2d^3, f^2f^3, h^2h^3, k^2k^3, m^2m^3, o^2o^3, qui rencontreront les droites correspondantes AZ, ac, de, fg, hi, kl, mn, op, respectivement aux points Q^4, a^3, d^3, f^3, h^3, k^3, m^3, o^3, par lesquels et le point U^4, on fera passer la courbe $Q^4a^3d^3f^3h^3k^3m^3o^3U^4$ qui sera la projection horizontale de l'arrête supérieure de la première douëlle. On trouverait celles des autres arrêtes de douëlle de la même manière.

Quant à la manière de trouver les projections horizontales des arrêtes supérieures des coupes, il faudra mener des droites parallèles à la ligne de terre HP, et à des hauteurs égales à celles des points où les droites ac, de, fg, etc., prolongées, rencontreraient les droites $U'U^3$, $V'V^3$, $X'X^3$, $Y'Y^3$, déterminées, comme nous l'avons dit, pour une voûte ellipsoïde, lesquelles parallèles à la ligne de terre HP, rencontreraient les arcs de cercle décrits du point P, comme centre, et avec des rayons respectivement égaux aux distances par rapport à l'axe de rotation BZ, des points où les droites ca, ed, gf, etc. prolongées, rencontreraient la courbe DC. Il n'est pas besoin de prévenir que nous supposons ici que les arrêtes supérieures des coupes sont déterminées comme nous l'avons proposé pour les voûtes ellipsoïdes. Le lecteur fera bien de s'exercer sur quelques exemples, en s'aidant de l'explication générale que nous venons de donner de l'espèce entière de ces voûtes. La partie, de cette explication, qui est relative aux projections horizontales des extrémités des coupes, aurait eu besoin, sans doute, d'un plus grand développement, mais je crois utile d'exciter le lecteur, de temps en temps, à vaincre lui-même quelques difficultés, après l'avoir mis sur la voie.